DETERMINANTS

Ce chapitre est la version MPSI. Voir DETPCSI.PDF pour les PCSI

PLAN

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Préliminaire historique

A la fin du XVIIème, puis au XVIIIème siècle, le développement du calcul algébrique permet d'envisager la résolution des systèmes linéaires dépendant de paramètres, avec autant d'inconnues que d'équations. MacLaurin, en 1748, résout les systèmes de 2 (respectivement 3) équations à 2 (respectivement 3) inconnues, à coefficients quelconques. En 1750, Cramer donne les solutions générales pour les systèmes de n équations à n inconnues, comme quotients de deux polynômes de n variables. Cramer utilise une notation indicielle, (l'indice étant situé en exposant), mais n'a pas de double indice. Il note simplement les inconnues par des lettres différentes, z, y, x, v... Soit le système suivant :

$$\begin{cases} A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \text{etc.} \\ A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \text{etc.} \\ A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \text{etc.} \\ A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \text{etc.} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Cramer donne la forme des solutions suivant le nombre d'équations et d'inconnues. Pour une équation et inconnue z, on a $z = \frac{A^1}{Z^1}$. Pour deux équations et deux inconnues z et y, on a $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$ et $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. Pour trois équations et trois inconnues z, y et x, on a :

$$\begin{cases} z = \dfrac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1} \\ y = \dfrac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1} \\ x = \dfrac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1} \end{cases}$$

> *L'examen de ces formules fournit cette règle générale. Le nombre des équations et des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choses différentes. Chaque terme est composé des lettres ZYXV etc. toujours écrites dans le même ordre, mais auquel on distribue, comme exposants, les n premiers chiffres rangés en toutes les manières possibles.*
> (Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève 1750, reproduit dans Histoire d'algorithmes, Belin, 1994)

Cramer forme donc le dénominateur de ses fractions en gardant les coefficients dans le même ordre mais en permutant les indices. Reste à attribuer le signe + ou – devant chaque terme.

> *On donne à ces termes les signes + ou –, selon la règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'appellerai cela un* dérangement. *Qu'on compte pour chaque terme le nombre des dérangements : s'il est pair ou nul, le terme aura le signe + ; s'il est impair, le terme aura le signe –.*

Ce que Cramer appelle dérangement est appelé aujourd'hui inversion. Cramer détermine la parité du nombre d'inversions pour attribuer le signe de chaque terme. Le calcul du numérateur est analogue par simple substitution :

> *Le dénominateur étant ainsi formé, on aura la valeur de z en donnant à ce dénominateur le numérateur qui se forme en changeant, dans tous les termes, Z en A. Et la valeur de y est la fraction qui a le même dénominateur et pour numérateur la quantité qui résulte quand on change Y en A, dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d'une manière semblable la valeur des autres inconnues.*

Les déterminants, ainsi nommés ultérieurement par Cauchy ou Gauss en 1801, sont nés. On remarquera que ce qu'on n'appelle pas encore déterminant est apparu un siècle avant que le terme de matrice ne soit introduit par Sylvester en 1850. La notation moderne est, quant à elle, introduite en 1841 par Cayley. L'ordre chronologique est donc exactement l'inverse de l'ordre pédagogique suivi par tous les cours modernes d'algèbre.

Vandermonde et Laplace, vers 1770, donnent les propriétés usuelles des déterminants : définition par récurrence (correspondant aux développements par rapport à une ligne ou une colonne), propriété d'être une fonction multilinéaire alternée des lignes et des colonnes, égalité du déterminant et de son transposé. Ces propriétés ne sont pas démontrées de façon rigoureuse avant Cauchy, qui obtient également le fait que le produit de déterminants est lui-même un déterminant. Au cours du XIXème, le calcul des déterminants se développe, sous des formes de plus en plus formelles, avec de moins en moins de rapport avec les problèmes initiaux dont ils sont issus. Il faut attendre 1870 pour que la résolution des équations linéaires soit close. Notons que l'appellation du déterminant de Vandermonde ne doit rien à ce mathématicien. C'est Cauchy qui l'a ainsi nommé. Citons également Lebesgue en 1937 :

> *La grande notoriété n'est assurée en Mathématiques qu'aux noms associés à une méthode, à un théorème, à une notation. Peu importe d'ailleurs que l'attribution soit fondée ou non, et le nom de Vandermonde serait ignoré de l'immense majorité des mathématiciens si on ne lui avait attribué ce déterminant que vous connaissez bien, et qui n'est pas de lui !*

I : Définition

1–Déterminant 2 × 2

On cherche à quelle condition deux vecteurs de $\mathbb{K}^2$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants.

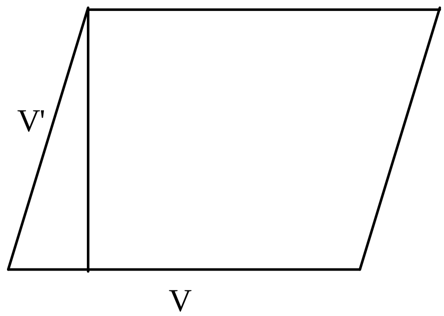
Si, par exemple $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ est non nul, il existe λ tel que :

$$a = \lambda a'$$
$$b = \lambda b'$$

D'où, en éliminant λ, $ab' - ba' = 0$. Inversement, si cette condition est réalisée, avec par exemple a non nul, on obtient :

$$a' = a \times a'/a$$
$$b' = b \times a'/a$$

La quantité $ab' - ba'$ notée $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ a une interprétation géométrique. Sa valeur absolue est l'aire du parallélogramme dans le plan $\mathbb{R}^2$ construit selon $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$. En effet, si V sert de base du dit parallélogramme, alors $\| V' \| \, |\sin(V, V')|$ est la longueur de sa hauteur. Donc l'aire du paralléllogramme est $\| V \| \, \| V' \| \, |\sin(V, V')|$:



Or l'angle θ entre V et V' est tel que $\cos(\theta) = \dfrac{<V, V'>}{\| V \| \| V' \|}$ donc $\left|\sin(V, V')\right| = \sqrt{1 - \dfrac{<V, V'>^2}{\| V \|^2 \| V' \|^2}}$
donc l'aire du parallélogramme est :

$$\sqrt{\| V \|^2 \| V' \|^2 - <V, V'>^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) - (aa' + bb')^2}$$
$$= \sqrt{a^2b'^2 + b^2a'^2 - 2aa'bb'} = \left|ab' - ba'\right|$$

Dans le cas où les deux vecteurs sont colinéaires, le parallélogramme est aplati.

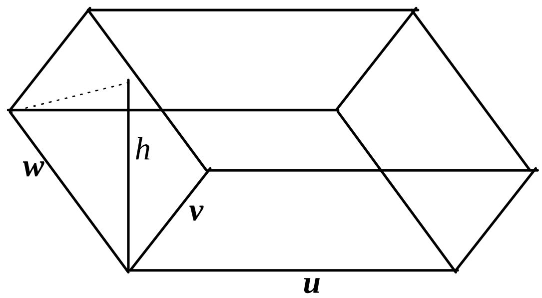
Les propriétés de l'application déterminant définie par (V, V') $\rightarrow$ det(V,V') sont les suivantes :

i) Cette application est linéaire en V (V' fixé) et en V' (V fixé). Elle est dite bilinéaire.

ii) det(V,V') = – det(V',V). Elle est dite alternée ou antisymétrique.

2– Déterminant 3 $\times$ 3

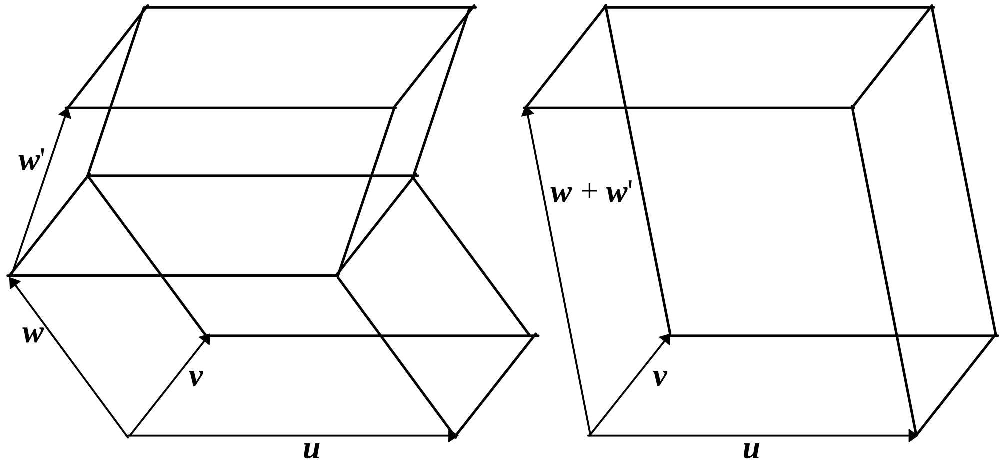
On se propose de déterminer une formule donnant dans $\mathbb{R}^3$ le volume d'un parallélépipède défini par les trois vecteurs $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$.



Ce volume est égale à l'aire du parallélogramme (***u***, ***v***) qui sert de base par la hauteur *h* du parallélépipède. Tout parallélépipède de même hauteur a le même volume. Si on multiplie ***w*** par une quantité λ, le volume est multiplié par λ. On acceptera de prendre γ négatif en autorisant le volume a prendre des valeurs négatives, dépendant de la direction vers laquelle pointe le vecteur ***w*** relativement au plan (***u***, ***v***). Cette convention est liée à celle d'orientation d'une base étudiée plus loin.

$$\text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{w}) = \lambda\text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

Si on empile deux parallélépipèdes de même base (***u***, ***v***) mais dont le troisième côté est respectivement ***w*** et ***w***', le volume de la somme est égal à l'aire de la base multipliée par la somme des deux hauteurs. Mais cette somme est aussi la hauteur d'un parallélépipède de base (***u***, ***v***) et dont le troisième côté est ***w*** + ***w***'.



On aura donc :

$$\text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}') = \text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}')$$

Cette formule est également valide si $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w}'$ ne sont pas orientés dans le même sens vis-à-vis du plan $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ car, dans ce cas, les volumes sont de signes opposés, ce qui correspond bien au fait qu'en valeur absolue, il faudra retrancher l'un des volumes à l'autre.

Les deux relations :

$$\text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{w}) = \lambda\text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

$$\text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}') = \text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}')$$

expriment le fait que l'application $\boldsymbol{w} \to \text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est linéaire. Les rôles des trois vecteurs étant symétriques, l'application volume est linéaire en chacun des vecteurs. On dit qu'elle est trilinéaire.

Enfin, si la hauteur est nulle (donc si $\boldsymbol{w}$ est combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$) , le volume est nul, donc en particulier :

$$\text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$$

On a également $\text{vol}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = 0$ car le parallélépipède est ici contenu dans le plan $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$, donc, en développant au moyen de la multilinéarité :

$$\begin{aligned} 0 = \text{vol}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) &= \text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) + \text{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) \\ &= \text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) + \text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \text{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) + \text{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ &= \text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \text{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

car $\text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \text{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$. Donc :

$$\text{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -\text{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

Permuter deux vecteurs change le signe du volume. On dit que l'application est alternée. Une démonstration analogue s'applique quelle que soit la position des deux vecteurs permutés.

Considérons alors une base (e_1, e_2, e_3) qui servira d'unité de volume et utilisons le caractère trilinéaire alterné pour développer une expression du volume. Pour adopter des notations plus fonctionnelles, notons $\Phi(\ )$ à la place de vol( ). La trilinéarité permet de développer l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &\Phi(ae_1 + be_2 + ce_3, a'e_1 + b'e_2 + c'e_3, a''e_1 + b''e_2 + c''e_3) = \\ &\qquad ab'c''\ \Phi(e_1,e_2,e_3) + ab''c'\ \Phi(e_1,e_3,e_2) + a'bc''\ \Phi(e_2,e_1,e_3) + \\ &\qquad a'b''c\ \Phi(e_2,e_3,e_1) + a''bc'\ \Phi(e_3,e_1,e_2) + a''b'c\ \Phi(e_3,e_2,e_1) \end{aligned}$$

On a supprimé les volumes nuls, obtenus lorsqu'un même vecteur apparaît au moins deux fois. Utilisons alors le caractère alterné de Φ. On obtient :

$$\begin{aligned} &\Phi(ae_1 + be_2 + ce_3, a'e_1 + b'e_2 + c'e_3, a''e_1 + b''e_2 + c''e_3) = \\ &\qquad (ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c)\ \Phi(e_1, e_2, e_3) \end{aligned}$$

La quantité $ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$ est le volume cherché. Il s'agit du déterminant 3×3. On le note $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$. On peut également remarquer qu'il est égal à :

$$a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - a'b)$$

On peut l'interpréter comme le produit scalaire du vecteur $\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ par le vecteur $\begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$. Ce dernier s'appelle produit vectoriel de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, noté $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. Il est constitué de déterminants 2×2 extraits des deux colonnes. On donne en annexe quelques propriétés de ce produit.

3– Forme multilinéaire alternée

On généralise les considérations précédentes à une dimension quelconque.

a) Considérons un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et une application Φ de E^n dans $\mathbb{K}$. Cette application est dite multilinéaire si, pour tout $V_1, V_2, ..., V_{i-1}, V_{i+1}, ... V_n$, l'application portant sur la $i^{\text{éme}}$ composante V_i est linéaire ;

$$\Phi(V_1,..., \lambda V_i,...,V_n) = \lambda\Phi(V_1,...,V_i,...,V_n)$$
$$\Phi(V_1,...,V_i + V_i',...,V_n) = \Phi(V_1,...,V_i,...,V_n) + \Phi(V_1,...,V_i',...,V_n)$$

Ainsi le produit scalaire est bilinéaire. Le produit de n réels est multilinéaire. Plus généralement, le produit de n formes linéaires sur un espace vectoriel est une forme n-linéaire. En fait, la multilinéarité permet de développer une expression comme un produit.

On fera bien la différence entre application linéaire et multilinéaire. Dans le cas de la linéarité :

$$\Phi(\lambda V_1, \lambda V_2, ..., \lambda V_n) = \lambda\Phi(V_1, V_2, ..., V_n)$$
$$\Phi(V_1 + V_1', ..., V_i + V_i', ..., V_n + V_n') = \Phi(V_1, ..., V_i, ..., V_n) + \Phi(V_1', ..., V_i', ..., V_n')$$

alors que dans le cas de la multilinéarité :

$$\Phi(\lambda V_1, \lambda V_2, ..., \lambda V_n) = \lambda^n\, \Phi(V_1, V_2, ..., V_n)$$
$$\Phi(V_1 + V_1', ..., V_i + V_i', ..., V_n + V_n') = \sum \Phi(W_1, ..., W_i, ..., W_n)$$

la somme étant prise sur tout les W, W_i décrivant le couple (V_i, V_i'). Il y a 2^n termes dans la somme.

b) Cette même application Φ est dite alternée ou antisymétrique si :

$$\forall\ i \neq j,\ \Phi(...,V_i,...,V_j,...) = -\Phi(...,V_j,...,V_i,...)$$

les autres variables restant égales.

PROPOSITION

Soit Φ une forme multilinéaire. Φ est alternée si et seulement si :

$$\Phi(...,V_{i-1},V,V_{i+1},...,V_{j-1},V,V_{j+1},...) = 0$$

pour toute valeur des vecteurs et des indices i et j.

Démonstration :

Si Φ est alternée, en prenant $V_i = V_j = V$ dans la définition, on obtient le résultat demandé.
Inversement : Prenons $V = V_i + V_j$. En utilisant la multilinéarité, on obtient :

$\Phi(\ldots,V_i,\ldots,V_i,\ldots) + \Phi(\ldots,V_i,\ldots,V_j,\ldots) + \Phi(\ldots,V_j,\ldots,V_i,\ldots) + \Phi(\ldots,V_j,\ldots,V_j,\ldots) = 0$

qui se réduit à : $\Phi(\ldots,V_i,\ldots,V_j,\ldots) + \Phi(\ldots,V_j,\ldots,V_i,\ldots) = 0$. Ce qui prouve que Φ est alternée.

EXEMPLE :
Cherchons les formes bilinéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension 2, de base (e_1, e_2).
Posons $C = \Phi(e_1, e_2)$.
On a alors :

$$\Phi(ae_1 + be_2, a'e_1 + b'e_2) = aa'\Phi(e_1, e_1) + ab'\Phi(e_1, e_2) + ba'\Phi(e_2, e_1) + bb'\Phi(e_2, e_2)$$

en utilisant la multilinéarité

$\Rightarrow \quad \Phi(ae_1 + be_2, a'e_1 + b'e_2) = C(ab' - ba')$

en utilisant l'alternance.

Ainsi toutes les formes bilinéaires alternées en dimension 2 sont proportionnelles au déterminant.

PROPOSITION :
Soit σ *une permutation de n éléments. Alors :*

$\Phi(V_{\sigma(1)}, V_{\sigma(2)}, \ldots, V_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, \Phi(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ *où* $\varepsilon(\sigma)$ *désigne la signature de* σ.

Démonstration :
Elle se fait immédiatement par récurrence sur le nombre de transpositions qui composent σ.

4– Déterminant $n \times n$

Cherchons les formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$.

On considère n vecteurs $V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$. On a :

$$\Phi(V_1, \ldots, V_n) = \Phi\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}\, e_i\Big)$$

$$= \sum_{\sigma} a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}\, \Phi(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

On ne garde dans la somme de droite que les termes pour lesquels $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ prennent des valeurs distinctes, les autres valeurs de Φ étant nulles. σ est donc une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Les termes restant peuvent s'exprimer en fonction de $\Phi(e_1, \ldots, e_n)$. On arrive à :

$$\Phi(V_1, \ldots, V_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}\, \Phi(e_1, \ldots, e_n) \text{ où } \sigma \text{ décrit } \mathrm{S}_n.$$

Toute forme n-linéaire alternée est donc proportionnelle à la forme fondamentale : $\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}$

Cette expression s'appelle déterminant des vecteurs $(V_1, \ldots, V_n)$ ou déterminant de la matrice (a_{ij}). On peut également parler de déterminant d'un endomorphisme, celui–ci étant égal au déterminant d'une matrice associée dans une base donnée. Le problème se pose de savoir si ce déterminant dépend de la base choisie, et sera examiné dans la partie III.

On peut vérifier que cette expression est effectivement n-linéaire alternée. Voici comment on peut montrer qu'elle est alternée :

$$\det(V_1, ..., V_n) = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}...a_{\sigma(n)n}$$

$\det(V_1, ...\ V_{i-1}\ , V_j, V_{i+1}, ..., V_{j-1}, V_i, V_{j+1}, ..., V_n)$ se calcule en intervertissant les vecteurs V_i et V_j. On calcule la somme de termes de la forme $\varepsilon(\sigma)...\ a_{\sigma(i)j}\ ...\ a_{\sigma(j)i}\ ...$ (Les numéros de ligne sont les mêmes, mais on a permuté les numéros de colonnes). Posons τ la transposition échangeant i et j. Le terme en question s'écrit, en commutant les deux termes $a_{\sigma(i)j}$ et $a_{\sigma(j)i}$ dans le produit :

$$\varepsilon(\sigma)a_{\sigma\tau(1)1}...a_{\sigma\tau(i)i}...a_{\sigma\tau(j)j}...a_{\sigma\tau(n)n}$$

ou encore à $-\ \varepsilon(\sigma\tau)a_{\sigma\tau(1)1}...a_{\sigma\tau(i)i}...a_{\sigma\tau(j)j}...a_{\sigma\tau(n)n}$
car $\varepsilon(\tau) = -1$. La somme est prise pour toute les valeurs de l'indice σ parcourant le groupe symétrique. Mais si effectue un changement d'indice en prenant cette fois $\sigma\tau$, $\sigma\tau$ décrit également le groupe symétrique, et l'on reconnaît alors le déterminant initial, précédé du signe –. Le déterminant est bien alterné.

La formule proposée n'est guère pratique. Elle possède $n!$ termes ce qui la rend pratiquement inutilisable pour un calcul effectif. Nous verrons ci-après des moyens rapides de calculer cette expression.

Le déterminant se note $\begin{vmatrix} a11 & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$

Nous retiendrons que :
PROPOSITION :
Toute forme n-linéaire Φ alternée dans un espace de dimension n muni d'une base donnée $(e_1, ..., e_n)$ est proportionnelle au déterminant des coefficients des vecteurs dans cette base. Le coefficient de proportionnalité est $\Phi(e_1, ..., e_n)$.

II : Calcul des déterminants

1– Déterminant d'une matrice diagonale

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1$$

En effet, le seul terme non nul dans la définition du déterminant est obtenu pour $\sigma = \text{Id}$.
En utilisant la multilinéarité, on en déduit que :

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\ ...a_n$$

2– Déterminant d'une matrice triangulaire

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

En effet, en utilisant la définition du déterminant, le seul terme de la somme $\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}...a_{\sigma(n)n}$ pouvant être non nul est celui pour lequel $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$, ..., $\sigma(n) = n$. $\sigma = \text{Id}$ et $\varepsilon(\sigma) = 1$. Le résultat est identique si la matrice est triangulaire inférieure.

On se ramène à une matrice triangulaire en utilisant le caractère multilinéaire alterné du déterminant au moyen des techniques suivantes :

i) Multiplier une colonne (ou une ligne) par λ multiplie le déterminant par λ

ii) Remplacer la colonne V_j par $V_j + \lambda V_k$ ne change pas la valeur du déterminant.

$$\text{car } \det(..., V_j + \lambda V_k, ..., V_k, ...) = \det(..., V_j, ..., V_k, ...) + \lambda\det(..., V_k, ..., V_k, ...)$$
$$= \det(..., V_j, ..., V_k, ...)$$

iii) Plus généralement, ajouter d'autres colonnes à une colonne donnée ne change pas la valeur du déterminant.

iv) Si l'une des colonnes ou l'une des lignes est nulle, le déterminant est nul.

v) Si deux colonnes ou deux lignes sont proportionnelles, le déterminant est nul.

vi) Si l'on permute deux colonnes ou deux lignes, le déterminant change de signe.

EXEMPLE :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -2 & -8 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } \begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \end{cases}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -8 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } C_2 \leftrightarrow C_3 \text{ et en mettant 2 en facteur}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } \begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 + 5C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 8C_2 \end{cases}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } C_4 \leftarrow C_4 - \frac{4}{3}C_3$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times 3 \times \frac{2}{3} = 4$$

3– Déterminant de la transposée d'une matrice

PROPOSITION

$det({}^t\text{A}) = det(\text{A})$

<u>Démonstration</u> :

Nous utiliserons la définition du déterminant :

$$\det({}^t\text{A}) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}...a_{n\sigma(n)}$$

Le terme général du produit $a_{1\sigma(1)}...a_{n\sigma(n)}$ est $a_{i\sigma(i)}$. Posons $\theta = \sigma^{-1}$. On a $a_{i\sigma(i)} = a_{\theta(j)j}$ en posant $\sigma(i) = j$. Quand i varie de 1 à n, il en est de même de j. La somme précédente est donc égale à :

$$\det({}^t\text{A}) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{\theta(1)1}...a_{\theta(n)n}$$

Comme $\varepsilon(\theta) = \varepsilon(\sigma)$ et qu'à chaque σ correspond un et seul θ, on peut écrire :

$$\det({}^t\mathrm{A}) = \sum_{\theta} \varepsilon(\theta)\, a_{\theta(1)1}\ldots a_{\theta(n)n}$$

qui n'est que l'expression du déterminant de A. Ainsi : $\det({}^t\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A})$. Cette propriété est importante car elle signifie que tout ce que nous disons ou dirons sur les colonnes d'un déterminant est également vrai pour les lignes. Par exemple, le déterminant est une forme multilinéaire alternée des lignes qui le composent.

4– Déterminant par blocs diagonaux

Il s'agit de calculer un déterminant de la forme $\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{vmatrix}$

où A est une matrice carrée $p \times p$, B une matrice carrée $(n-p) \times (n-p)$, C une matrice $p \times (n-p)$ et O la matrice $(n-p) \times p$ nulle.

Notons $\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_p$ les colonnes de A, constituées de p composantes, et considérons D comme une fonction $f(\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_p)$. Il n'est pas difficile de montrer que f est une forme p-multilinéaire alternée de $(\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_p)$. Par exemple, multiplier V_i par un scalaire λ revient dans D à multiplier par λ la colonne entière i (i.e. la colonne V_i de A et les zéros situés en dessous). En utilisant la linéarité de D par rapport à cette colonne, on peut mettre λ en facteur.
On utilise alors la propriété caractéristique des formes multilinéaires alternées :

$$f(\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_p) = \det(\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_p)\, f(e_1, ..., e_p)$$

où $e_1, ..., e_p$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$ pour conclure que :

$$\mathrm{D} = \det(\mathrm{A}) \begin{vmatrix} \mathrm{I}_p & \mathrm{C} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{vmatrix}$$

avec I_p matrice identité.

On raisonne de même sur B, mais en considérant cette fois $\begin{vmatrix} \mathrm{I}_p & \mathrm{C} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{vmatrix}$ comme forme $(n-p)$-linéaire des lignes de B, de sorte que l'on obtient :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{I}_p & \mathrm{C} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{vmatrix} = \det(\mathrm{B}) \begin{vmatrix} \mathrm{I}_p & \mathrm{C} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I}_{n-p} \end{vmatrix}$$

(On utilise les lignes de B et non les colonnes car on a besoin que les $n - p$ vecteurs utilisés dans B soient complétés par des 0 pour montrer le caractère multilinéaire alterné de la fonction de B, comme on l'a fait pour A avec les colonnes).

Enfin $\begin{vmatrix} \mathrm{I}_p & \mathrm{C} \\ \mathrm{O} & \mathrm{I}_{n-p} \end{vmatrix} = 1$ puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire à termes diagonaux égaux à 1.

On a donc bien $\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \mathrm{O} & \mathrm{B} \end{vmatrix} = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{B})$

5– Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Considérons $\det(\mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_j, ..., \mathrm{V}_n)$ où $\mathrm{V}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$. On a, en utilisant la multilinéarité et le caractère alterné du déterminant :

$$\det(V_1, ..., V_j, ..., V_n) = \det(V_1, ..., \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i, ..., V_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(V_1, ..., V_{j-1}, e_i, V_{j+1}, ..., V_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots & \\ a_{i-11} \ldots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \ldots \\ a_{i1} \ldots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \ldots \\ a_{i+11} \ldots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots & \\ a_{n1} \ldots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots & \\ 0 & a_{i-11} \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots \\ 1 & a_{i1} \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \ldots \\ 0 & a_{i+11} \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots & \\ 0 & a_{n1} \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots \end{vmatrix}$$

en permutant la colonne j avec toutes celles qui précèdent

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \ldots \\ 0 & a_{11} \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots & \\ 0 & a_{i-11} \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots \\ 0 & a_{i+11} \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots & \\ 0 & a_{n1} \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots \end{vmatrix}$$

en permutant la ligne i avec toutes celles qui précèdent

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots \\ a_{i-11} \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots \\ a_{i+11} \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots \end{vmatrix}$$

en remarquant qu'on avait un déterminant par blocs 1×1 et $(n-1) \times (n-1)$

Notons M_{ij} le déterminant $(n-1) \times (n-1)$ $\begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots \\ a_{i-11} \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots \\ a_{i+11} \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots \\ & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots \end{vmatrix}$. On remarque qu'il est constitué des lignes 1, 2, ..., $i-1$, $i+1$, ... n de la matrice initiale. Autrement dit, M est obtenu à partir du déterminant initial en supprimant la colonne j et la ligne i. Ce déterminant s'appelle mineur du terme (i,j). On a alors :

$$\det(V_1, ..., V_j, ..., V_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

La quantité $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ s'appelle cofacteur du terme (i,j), de sorte qu'on écrit également :

$$\det(V_1, ..., V_j, ..., V_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

EXEMPLE :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à la troisième colonne}$$

$$= (4 + 2 - 2 - 2) - (-2 + 6 - 8 + 2) =$$
$$= 2 + 2 = 4$$

On choisit évidemment de préférence des colonnes possédant un grand nombre de 0.

Comme $\det(A) = \det({}^tA)$, le calcul peut se faire également en considérant les lignes. On développe suivant une ligne d'une manière analogue à une colonne.

Le développement par rapport à une colonne ou une ligne n'est intéressant que s'il y a plusieurs 0 dans la colonne. On remarque par ailleurs que, si on développe complètement tous les mineurs, on se retrouve à la fin avec un nombre de termes égal à $n!$. La croissance rapide de ce nombre de termes interdit d'utiliser cette propriété des déterminants pour les calculer, au même titre que la définition initiale. Voici par exemple en Scilab une procédure calculant récursivement le déterminant selon la formule de récurrence.

```
function d = mauvaisdet(A)
s=size(A)              // size donne le couple (nbLignes, nbColonnes) de A
n=s(1)                 // On prend le nombre de lignes. On supposera la matrice carrée
if n==1 then d=A(1,1)
else
        d=0
        for i=1:n
                Mineur=[A(1:i-1,2:n);A(i+1:n,2:n)] // extrait le mineur de A
                d=d+(-1)**(i-1)*A(i,1)*mauvaisdet(Mineur)
        end
end
endfunction
```

Si on compare le temps de calcul de cette procédure avec la fonction **det** prédéfinie dans Scilab, on voit très nettement la différence lorsque n atteint 6, 7 ou 8. On peut aussi programmer sa propre fonction déterminant en se basant sur les principes du II-2) :

```
function d=mon_det(A)
  s=size(A)                // donne la taille de la matrice sou forme d'un couple s
  n=s(1)                   // dont le premier élément est le nombre de lignes de A
  B=zeros(n,n)             // B est une matrice auxiliaire qui servira de mineur
  if n==1 then
    d=A(1,1)               // on a ici une matrice 1x1
  else
```

```
      m=abs(A(1,1))            // on calcule le maximum m des coefficients de la
      jm=1                     // première ligne de A, en valeur absolue
      for j=2:n
        if abs(A(1,j))>m then
          jm=j                 // jm est l'indice de ce maximum
          m=A(1,j)
        end
      end
      if m==0 then             // si m est nul, la première ligne est nulle
        d=0                    // et le déterminant est nul
      else                     // sinon, on annule la première ligne par combinaison linéaire
        for j=[1:jm-1 jm+1:n]  // des colonnes, (sauf la colonne d'indice jm)
          for i=2:n
            B(i,j)=A(i,j)-A(i,jm)*A(1,j)/A(1,jm)
          end
        end
        sousMatrice=B(2:n,[1:jm-1 jm+1:n])
        d=(-1)**(jm-1)*A(1,jm)*mon_det(sousMatrice)
      end
    end
  endfunction
```

6– Exemples de calculs

EXEMPLE 1 : Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{vmatrix} = \mathrm{D}$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\mathrm{D} = x\begin{vmatrix} x & -t & z \\ t & x & -y \\ -z & y & x \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} y & z & t \\ t & x & -y \\ -z & y & x \end{vmatrix} - z\begin{vmatrix} y & z & t \\ x & -t & z \\ -z & y & x \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} y & z & t \\ x & -t & z \\ t & x & -y \end{vmatrix}$$

$$= x\,[x^3 + x(t^2 + y^2 + z^2)] + y\,[y(x^2 + t^2 + z^2) + y^3] + z\,[z^3 + (t^2 + y^2 + x^2)z] + t[t(y^2 + x^2 + z^2) + t^3]$$

$$= x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2t^2 + y^2z^2 + z^2t^2)$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$$

EXEMPLE 2 : Calculer le déterminant

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On remarque que la colonne C_j s'obtient à partir de la colonne C_{j-1} de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} j-1 \\ j-2 \\ \dots \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n-j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j-2 \\ j-3 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ n-j+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix}$$

$D = \det(C_1,...,C_n) = \det(C_1 - C_2, C_2 - C_3, ..., C_{n-1} - C_n, C_n)$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & n-2 \\ & \dots & & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \det(C_1', ...,C_n')$$

$= \det(C_1'-C_2', ..., C_{n-2}'-C_{n-1}',C_{n-1}',C_n')$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & n-1 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & -1 & n-2 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & -1 & n-3 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \times 2^{n-2} \times (n-1)$$

EXEMPLE 3 : Calculer $D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

On ajoute les deux dernières lignes à la première :

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

On retranche la première colonne aux autres :

$$D = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

EXEMPLE 4 : Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne. On obtient :

$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ suite récurrente linéaire

En utilisant $D_1 = a + b$, $D_2 = a^2 + ab + b^2$ et donc $D_0 = 1$, on obtient :

si $a = b$: $D_n = (n+1)a^n$

si $a \neq b$: $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$

7– Déterminant d'un produit de matrices

PROPOSITION

Soient A *et* B *deux matrices carrées. Alors* $det(\mathrm{AB}) = det(\mathrm{A}) \times det(\mathrm{B})$

Démonstration :

Considérons A et B deux matrices $n \times n$. On peut les considérer comme les matrices de deux endomorphismes de $\mathbb{K}^n$, f et g. On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de A est égale à $f(e_j)$; celle de B est égale à $g(e_j)$; celle de AB est égale à $f \circ g(e_j)$. La fonction définie par :

$$\Phi(V_1, ..., V_n) = \det(f(V_1), ..., f(V_n))$$

est une forme n–linéaire alternée. Elle est donc proportionnelle à $\det(V_1, ..., V_n)$, le coefficient de proportionnalité étant $\Phi(e_1, ..., e_n)$. On a donc :

$$\Phi(V_1, ..., V_n) = \Phi(e_1, ..., e_n) \det(V_1, ..., V_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \det(f(V_1), ..., f(V_n)) = \det(f(e_1), ..., f(e_n)) \det(V_1, ..., V_n)$$

Or $\det(f(e_1), ..., f(e_n))$ n'est autre que det(A). Ainsi :

$$\det(f(V_1), ..., f(V_n)) = \det(A) \det(V_1, ..., V_n)$$

Prenons maintenant $V_i = g(e_i)$. On obtient :

$$\det(f(g(e_1)), ..., f(g(e_n))) = \det(A) \det(g(e_1), ..., g(e_n))$$

Or $\det(f(g(e_1)), ..., f(g(e_n))) = \det(AB)$

et $\det(g(e_1), ..., g(e_n)) = \det(B)$

Ainsi $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

8– Déterminant de l'inverse d'une matrice

PROPOSITION

Soit A *une matrice carrée inversible. Alors* $det(\mathrm{A}^{-1}) = \dfrac{1}{det(\mathrm{A})}$

Soit A une matrice inversible. Si l'on applique en particulier ce qui a été prouvé précédemment à A et A^{-1}, on obtient : $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$. Or $AA^{-1} = I$ et $\det(I) = 1$.

Ainsi $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Nous montrerons plus loin qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Un sens de l'implication vient donc d'être montré.

9– Influence d'un changement de base

Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base initiale $(e_1, ..., e_n)$. Notons $\det_e$ le déterminant relatif à cette base. Soit une nouvelle base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. Notons $\det_\varepsilon$ le déterminant relatif à cette nouvelle base. Soit P la matrice de passage de la base e à la base ε. Quel rapport y a–t–il entre $\det_e$ et $\det_\varepsilon$ et P ?

❑ En ce qui concerne les vecteurs $(V_1, ..., V_n)$. Notons (V_e) la matrice des composantes des V_i dans la base e et (V_ε) la matrice des composantes des V_i dans la base ε. On a : $(V_e) = P(V_\varepsilon)$. Donc :

$$\det_e(V) = \det(V_e) = \det(PV_\varepsilon) = \det(P)\det(V_\varepsilon) = \det(P)\det_\varepsilon(V)$$

Ainsi le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base choisie. Parler de déterminant d'un système de vecteurs sans parler de base de référence est un non–sens. Dans $\mathbb{K}^n$, la base de référence est par défaut la base canonique.

Le déterminant reste inchangé si P est telle que det(P) = 1. C'est le cas en particulier des matrices des isométries directes. Il en résulte que, si on se donne une orientation de l'espace euclidien, le déterminant ne dépend pas de la base orthonormée choisie. On le nomme alors parfois produit mixte.

❑ En ce qui concerne les endomorphismes, soit M la matrice associée à f dans la base e, et N la matrice associée à f dans la base ε. On a :

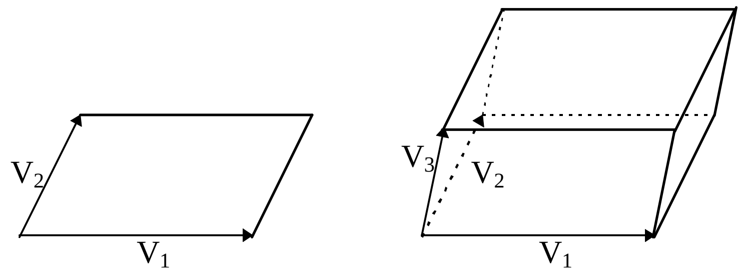
$$M = PNP^{-1} \text{ donc } \det(M) = \det(P)\det(N)\det(P^{-1}) = \det(N)$$

Ainsi, le déterminant d'une matrice associée à f ne dépend pas de la base choisie. On peut donc parler du déterminant de f, sans préciser la base. Les règles vues au 7) et 8) s'énoncent ici :

$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$$

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)} \text{ pour } f \text{ inversible.}$$

❑ Interprétation géométrique :
Soit donné une base $(e_1, ..., e_n)$. Alors le déterminant d'un système de vecteurs $(V_1, ..., V_n)$ dans cette base s'interprète comme le volume algébrique du parallélépipède d'arêtes $(V_1, ..., V_n)$, le volume unité étant défini comme celui du parallélépipède construit selon $(e_1, ..., e_n)$. Le déterminant sera positif lorsque la base $(V_1, ..., V_n)$ aura même orientation (voir plus bas) que la base $(e_1, ..., e_n)$.



L'application $(V_1, ..., V_n) \to \text{volume}(V_1, ..., V_n)$ est en effet multilinéaire et alternée, en dimension n de la même façon qu'on l'a montré en dimension 3. Ainsi, volume$(V_1, ..., V_n)$ est proportionnel à $\det(V_1, ..., V_n)$. Le coefficient de proportionnalité est volume$(e_1, ..., e_n)$. Le volume dépend évidemment de l'unité choisie pour le mesurer. De même, le déterminant d'un système de vecteurs dépend de la base dans lequel on le calcule.

Soit maintenant un endomorphisme f. Celui-ci transforme un système de vecteurs $(V_1, ..., V_n)$ de volume det(V) (où V est la matrice des composantes des $(V_1, ..., V_n)$ dans une base $(e_1, ..., e_n)$) en un système de vecteurs $(f(V_1), ..., f(V_n))$, de volume det(MV) (où M est la matrice de f dans la base $(e_1, ..., e_n)$). On voit que $\det(f) = \det(M)$ est le rapport des deux volumes $\dfrac{\text{volume}(f(V_1), ..., f(V_n))}{\text{volume}(V_1, ..., V_n)}$.
Autrement dit, det(M) est le facteur par lequel est multiplié le premier volume pour obtenir le second volume dans la transformation f. Si les volumes dépendent de l'unité choisie, il n'en est pas de même

de leur rapport, l'unité de mesure disparaissant dans le quotient. C'est pourquoi le déterminant de f, rapport de deux volumes, ne dépend pas de la base choisie.

III : Applications des déterminants

1– Critère d'indépendance

PROPOSITION :

i) *Soit* E *un espace vectoriel de dimension n muni d'une base* $(e_1, e_2, ..., e_n)$, *et soit* $(V_1, V_2, ..., V_n)$ *une famille de n vecteurs. Ces vecteurs forment un système libre si et seulement si* $det(V_1, ..., V_n)$ *est non nul.*

ii) *Soit* A *une matrice* $n \times n$. *Alors* A *est inversible si et seulement si det(A) est non nul.*

iii) *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel* E, *muni d'une base* $(e_1, e_2, ..., e_n)$. *Alors f est inversible si et seulement si* $det(f)$ *est non nul.*

Ces trois propriétés sont en fait trois versions du même théorème. Prouvons le i).

Démonstration :

Si le système est libre, alors la matrice formée des coefficients est une matrice de rang n, donc inversible, et le déterminant d'une matrice inversible est non nul. Réciproquement, si le système est lié, alors l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres ; par exemple, $V_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i V_i$. Alors :

$$\det(V_1, ..., V_n) = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \det(V_i, V_2, ..., V_n)$$

et chaque déterminant de la somme de droite est nul, puisque V_i apparaît deux fois.

EXEMPLE : Condition d'indépendance des vecteurs $V_0, ..., V_{n-1}$ suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ ... \\ a_n^2 \end{pmatrix}...\begin{pmatrix} a_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} \\ ... \\ a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Considérons une relation de liaison :

$$\lambda_0 V_0 + ... + \lambda_{n-1} V_{n-1} = 0$$

Elle s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_{n-1} a_1^{n-1} = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 a_2 + ... + \lambda_{n-1} a_2^{n-1} = 0 \\ ... \\ \lambda_0 + \lambda_1 a_n + ... + \lambda_{n-1} a_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

Il s'agit donc de déterminer les polynômes $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + ... + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ s'annulant en $a_1, ..., a_n$. Si les a_i sont distincts, alors P admet n racines. Etant de degré au plus $n - 1$, il est nul et tous ses coefficients sont nuls. Les vecteurs colonnes sont linéairement indépendants.

Si deux a_i sont égaux, P s'annule en au plus $n - 1$ racines et il est possible de trouver un tel polynôme non nul, par exemple $\prod (X - a_i)$, le produit étant pris sur les racines distinctes. Il existe donc une relation de liaison. Ainsi $(V_0, ..., V_{n-1})$ est libre si et seulement si les a_i sont distincts.

Cette propriété peut-être retrouvée en calculant le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ & \dots & & \dots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant s'appelle déterminant de Vandermonde (1735-1796). Il s'agit d'un polynôme des n variables a_1, a_2, ..., a_n, dont tous les monômes sont de degré global $\frac{(n-1)n}{2}$. On remarque qu'il se factorise par $(a_j - a_i)$ puisque, si $a_j = a_i$, il possède deux lignes identiques. Or le produit des $(a_j - a_i)$, $i < j$, est lui–même un polynôme de degré $\frac{(n-1)n}{2.}$. Il est donc égal au déterminant de Vandermonde, à une constante près. Or les deux expressions possédant le terme $a_2a_3^2...a_n^{n-1}$, la constante est égale à 1. Ainsi, le déterminant est égal à $\prod_{i<j} (a_j - a_i)$. Il est donc nul si et seulement si il existe i et j distincts tels que $a_i = a_j$, autrement dit, s'il existe deux lignes identiques. Cela donne aussi la condition de liaison des vecteurs.

On peut également procéder par récurrence sur n en considérant que le déterminant est un polynôme en a_n de degré $n - 1$. Si les a_i sont distincts, ce polynôme s'annule en n–1 racines distinctes $a_n = a_1$, ..., $a_n = a_{n-1}$ et se factorise donc par $(a_n - a_1)...(a_n - a_{n-1})$, le coefficient dominant étant un Vandermonde de rang $n - 1$.

2– Formules de Cramer

Ce paragraphe se borne à justifier les formules découvertes par Cramer en 1750. Considérons un système de n équations à n inconnues $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $1 \le i \le n$. Soit A la matrice des coefficients (a_{ij}), X le vecteur de composantes (x_i) et B le vecteur de composantes (b_i). Le système est équivalent à AX = B. Il admet une solution unique si et seulement si A est inversible, c'est–à–dire, si det(A) est non nul. On dit alors que le système est de Cramer. Notons $(V_1, V_2, ..., V_n)$ les colonnes de la matrice A. Que vaut $\det(V_1, ...,V_{i-1}, B, V_{i+1}, ..., V_n)$? Remplaçons B par $\sum_{j=1}^{n} x_jV_j$ et utilisons le fait que le déterminant est multilinéaire alterné. On trouve après simplification $x_i \det(A)$. On obtient ainsi les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(V_1, ...,V_{i-1}, B, V_{i+1}, ..., V_n)}{\det(A)}$$

EXEMPLE : En dimension 2, on a :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Les solutions sont :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Mais en pratique, la méthode de Gauss est plus efficace pour résoudre un système.

3– Inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée inversible. On se propose de déterminer explicitement le terme général de A^{-1}.

Méthode 1 :

Pour cela, considérons X et Y éléments de $\mathbb{K}^n$ tels que AX = Y. Si on considère X comme inconnue et Y comme paramètre, la résolution de ce système conduit à $X = A^{-1}Y$. Or, nous pouvons utiliser les formules de Cramer pour cette résolution. Notons $V_1, V_2, ..., V_n$ les colonnes de A. D'après le paragraphe précédent, on a :

$$x_i = \frac{\det(V_1, ..., V_{i-1}, Y, V_{i+1}, ..., V_n)}{\det(A)}$$

Développons le numérateur de cette expression par rapport à la colonne i :

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} y_k \, (-1)^{i+k} \, M_{ki}$$

où M_{ki} est le mineur du terme (k,i), obtenu en supprimant de $\det(V_1, ..., V_{i-1}, Y, V_{i+1}, ..., V_n)$ la colonne i (donc le Y) et la ligne k. Puisqu'on supprime la $i^{\text{ème}}$ colonne Y, la valeur explicite de cette colonne n'intervient pas et on peut tout autant considérer que ce mineur provient de $\det(V_1, ..., V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, ..., V_n)$. Ainsi, M_{ki} n'est autre que le mineur de terme (k,i) de la matrice A initiale. Posons $C_{ki} = (-1)^{k+i} M_{ki}$ le cofacteur correspondant. On a donc :

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} C_{ki} \, y_k$$

Si on compare cette expression avec $X = A^{-1}Y$ qui conduit à :

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} (A^{-1})_{ik} \, y_k$$

on obtient :

$$(A^{-1})_{ik} = \frac{C_{ki}}{\det(A)}$$

On notera l'intervertion des indices k et i dans la formule précédente. Appelons Com(A) la matrice dont le terme général (i,k) est le cofacteur C_{ik}. Cette matrice s'appelle comatrice de A. On obtient donc A^{-1} est divisant la transposée de Com(A) par det(A).

$$A = \frac{1}{\det(A)} \, {}^t\mathrm{Com}(A)$$

Méthode 2 :

Notons C_{ij} le cofacteur du terme a_{ij}. La matrice de terme général (C_{ij}) s'appelle comatrice de A. La méthode de développement de la colonne j permet d'écrire :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, C_{ij}$$

On se pose la question suivante : pour $k \neq j$, que vaut $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{C}_{ij}$?

Cette somme est identique à la précédente, une fois que l'on a remplacé les termes a_{ij} par les termes a_{ik}. Il est donc égal au déterminant d'une matrice obtenue à partir de la matrice A en remplaçant la colonne j par la colonne k (cela ne modifie pas les cofacteurs C_{ij}, qui ne dépendent pas de a_{ij}). Mais alors, la nouvelle matrice obtenue possède deux colonnes identiques, la j et la k. Son déterminant est donc nul.

Ainsi : $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{C}_{ij} = \delta_{kj}\det(\mathrm{A})$ où $\delta_{kj} = 1$ si $k = j$

$= 0$ si $k \neq j$

Les considérations précédentes permettent d'exprimer l'inverse d'une matrice à l'aide des cofacteurs.

En effet, posons $b_{ij} = \mathrm{C}_{ji}$. La matrice B est la transposée de la comatrice et $\sum_{i=1}^{n} b_{ji}\,a_{ik} = \delta_{kj}\det(\mathrm{A})$.

Cette égalité exprime le fait que BA = det(A) I.
Si det(A) est non nul, A est inversible et son inverse est égale à la transposée de la comatrice, divisée par le déterminant de A. Cette méthode n'est cependant pas la plus rapide pour calculer l'inverse d'une matrice.

EXEMPLE : pour une matrice 2×2, l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est égale à $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

4– Base directe et indirecte

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On pourra réfléchir aux questions suivantes :

- Quelle différence entre une droite et un axe ?
- Dans le plan, comment est défini le sens trigonométrique ?
- Quels sont les repères usuels utilisés pour les écrans d'ordinateurs (n° de lignes et de colonnes) ?
- Dans l'espace de dimension 3, comment est défini géométriquement le produit vectoriel ?
- Comment est fait un tire–bouchon ?
- Quel sens possède cette phrase (lue dans la revue *Pour La Science*) ? "La plupart des comètes se déplacent dans le sens trigonométrique par rapport au soleil."
- Comment distingue–t–on la gauche de la droite ?

Dans ce dernier cas, il est intéressant de consulter plusieurs dictionnaires. Le Larousse en deux volumes (1991) définit le côté droit comme étant "*du côté opposé au cœur*", et le côté gauche, "*en parlant de l'homme et des animaux, qui est situé du côté où se font sentir les battements du cœur*". On peut se poser la question de savoir si tous les animaux ont le cœur du même côté. Aussi le Grand Larousse Universel en 15 volumes (1994) ne fait-il allusion qu'à l'être humain. La partie gauche du corps "*se dit de toute partie du corps qui, au regard de chaque individu, est située du côté de son cœur*". Cependant, une référence anatomique est étrangère à une définition mathématique. Cherchons s'il existe une définition ne faisant pas allusion au corps humain. L'*Oxford advanced learner's dictionary of current english* (1974) définit *the left side* comme étant "*the side of a person's body which is towards the west when he faces north*" et "*opposite of right*". De son côté, *the right side* est "*the side of the body which is toward the east when a person faces north*" et "*contrasted with left*". Ainsi, *left* et *right* sont définis à partir des points cardinaux. Mais comment ces derniers sont-ils définis ? *West* est le "*point of the horizon where the sun sets*". *East* est le "*point of horizon where the sun rises*". Mais la définition de *north* qu'il nous faut encore découvrir pour savoir ce que désigne *left* et *right*, apporte le coup fatal : "*one of the four cardinal points of the compass, lying to the* ***left*** *of a person facing the sunrise*". Ainsi, *left* est défini à partir de *north*, mais *north* est défini à partir de *left*. Il est clair alors qu'une inversion des mots *right* et *left* garde toute sa cohérence à ce dictionnaire, même si le *north* se trouverait alors dans une direction opposée à la direction usuelle. Un autre dictionnaire, le *Penguin all english dictionary* (Bordas 1970), définit *left* comme étant du côté du cœur, mais *north* comme "*the compass direction opposite to the midday sun*". Cette dernière définition a l'intérêt de ne pas lier la définition de *north* à celle de *left*, mais elle est totalement déconseillée aux petits Australiens, sous peine de placer l'Antarctique au Nord.

Il faut se rendre à l'évidence : pour l'ensemble des questions précédentes, une convention *arbitraire* a été choisie, et une autre convention, *et une seule autre*, aurait pu être préférée. On dira qu'il y a deux façons différentes d'orienter le plan ou l'espace. Cette situation est générale à toute dimension.

Considérons un espace vectoriel de dimension n. Nous dirons qu'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ a même orientation qu'une autre base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ si la matrice de passage P de e à ε a un déterminant positif. Ceci définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des bases. En effet :

❑ $(e_1, \ldots, e_n)$ a même orientation qu'elle-même puisque la matrice de passage est ici l'identité de déterminant 1.

❑ Si $(e_1, \ldots, e_n)$ a même orientation que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, alors $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ a même orientation que $(e_1, \ldots, e_n)$. En effet, si P est la matrice de passage de la base e à la base ε, alors la matrice de passage de la matrice ε à la base e est P^{-1}, et det(P) a même signe que $\det(P^{-1})$.

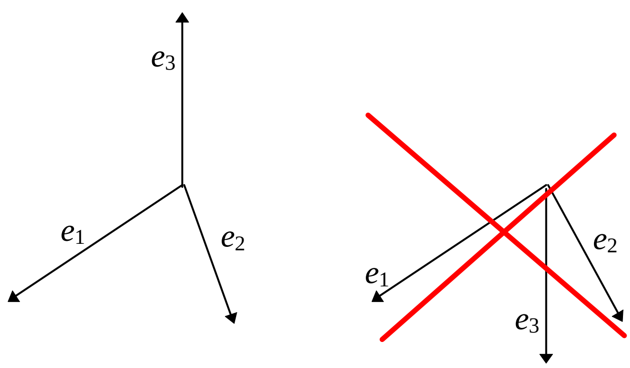
❑ Si $(e_1, \ldots, e_n)$ a même orientation que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, et si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ a même orientation que $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, alors $(e_1, \ldots, e_n)$ a même orientation que $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. En effet, si P est la matrice de passage de la base e à la base ε et Q la matrice de passage de la base ε à la base η, alors la matrice de passage de la base e à la base η est PQ. Et si det(P) > 0 et det(Q) > 0, alors det(PQ) = det(P)det(Q) > 0.

Il n'existe que deux orientations possibles correspondant chacune à une classe d'équivalence pour la relation précédente. En effet, soit (e) une base, (e') et (e'') deux autres bases n'ayant pas même orientation que (e). Montrons que (e') a même orientation que (e''). On a en effet :

$$\begin{cases} \det(P_{ee'}) < 0 \\ \det(P_{e''e}) < 0 \end{cases} \Rightarrow \det(P_{e''e'}) = \det(P_{e''e}P_{ee'}) > 0$$

Le choix (arbitraire) d'une de ces deux orientations définit une orientation de l'espace de dimension n. Les bases de cette classe sont dites directes, les bases de l'autre classe sont dites indirectes. Il n'existe aucun moyen de privilégier une orientation par rapport à l'autre.

Usuellement, en dimension 3, on qualifie de directe la base de gauche, d'indirecte celle de droite :



Voici quelques notions mathématiques ou physiques dépendant de l'orientation de l'espace de dimension 2 ou 3 :

- La définition du sens trigonométrique
- Le produit vectoriel (voir annexe)
- Le champ magnétique ***B*** (le vecteur ***B***, dépendant de l'orientation, est dit axial)
- Le moment cinétique $m\mathbf{OM} \wedge \mathbf{V}$ et le moment dynamique $m\mathbf{OM} \wedge \mathbf{a}$
- Le moment d'un dipôle magnétique (petite boucle de circuit de surface S parcourue par un courant I. $\mu = \mathrm{I}\mathbf{S}$ où ***S*** est orienté orthogonalement à la boucle en fonction du sens du circuit.
- Les couples
- Les vecteurs de rotation
- Le rotationnel

Voici quelques notions n'en dépendant pas :

- L'orthogonalité
- Le gradient, la divergence
- Le champ électrique ***E*** (Le vecteur ***E***, ne dépendant pas de l'orientation, est dit polaire)
- Les forces, vitesses et accélérations

EXEMPLE D'APPLICATIONS

De même qu'il existe en physique la notion d'homogénéité des unités, permettant de tester rapidement la validité d'une formule, il existe également la notion d'homogénéité du caractère axial ou polaire des vecteurs. Ci-dessous, les vecteurs axiaux sont en rouge, les vecteurs polaires en bleus. Nous notons également en rouge les produits vectoriels. On a alors :

Vecteur axial = Vecteur polaire ∧ Vecteur polaire
Vecteur polaire = Vecteur polaire ∧ Vecteur axial
Vecteur axial = Vecteur axial ∧ Vecteur axial

On a également, concernant le rotationnel :

Rot Vecteur polaire = Vecteur axial
Rot Vecteur axial= Vecteur polaire

❑ Force électrostatique $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$: égalité de deux vecteurs polaires

❑ $\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\mathrm{V}$: égalité de deux vecteurs polaires

❑ $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ (force de Lorentz) ou $\mathrm{d}\mathbf{F} = i\mathrm{d}\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$ (force de Laplace) : égalité de deux vecteurs polaires. $q\mathbf{v}$ ou $i\mathrm{d}\mathbf{l}$ sont polaires, ***B*** est axial, mais le produit vectoriel des deux est polaire. Ainsi, si un des membres est un vecteur polaire et si l'autre membre contient un vecteur axial et si le résultat est polaire, il faudra nécessairement qu'intervienne un produit vectoriel.

❑ $\mathrm{d}\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\,\dfrac{i\mathrm{d}\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}}{r^2}$ (loi de Biot et Savart) : égalité de deux vecteurs axiaux.

❑ $\mathbf{C} = \mu \wedge \mathbf{B}$ (couple s'appliquant sur un dipôle magnétique plongé dans un champ magnétique) : égalité de deux vecteurs axiaux.

❑ L'orientation peut également s'appliquer à des quantités scalaires. On parle alors de pseudo-scalaires dont le signe dépend du choix arbitraire de l'orientation :

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{B}.\boldsymbol{dl} = \mu_0 \iint_{D} \boldsymbol{J}.\boldsymbol{dS} \text{ (Théorème d'Ampère)}$$

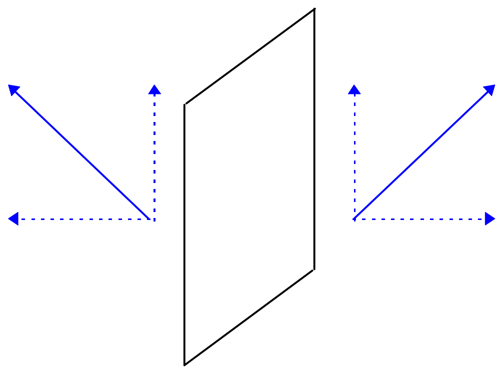
❑ $\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{E}) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ (une des équations de Maxwell) : égalité entre deux vecteurs axiaux

❑ $\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ (une autre équation de Maxwell) : égalité entre deux vecteurs polaires

❑ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{F}$ (couple créé en M par une force $\boldsymbol{F}$ par rapport à O) : égalité de deux vecteurs axiaux

❑ $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM}$ (vitesse d'un point M tournant par rapport à O à la vitesse angulaire Ω) égalité de deux vecteurs polaires.

Le fait qu'une réflexion S (symétrie par rapport à un plan en dimension 3, ou plus généralement par rapport à un hyperplan en dimension quelconque) transforme une base directe en base indirecte et intervertit donc l'orientation de l'espace a des conséquences importantes sur les vecteurs polaires et les vecteurs axiaux. Un vecteur polaire est un "vrai" vecteur ; il sera donc symétrisé comme on s'y attend : sa composante parallèle au plan de symétrie sera invariante, sa composante orthogonale à ce plan sera changée de signe.



Mais un vecteur axial n'est pas un "vrai" vecteur. Il est défini par exemple comme produit vectoriel de deux vecteurs polaires $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. Or, si l'on décompose chacun de ces vecteurs en une composante parallèle au plan et une composante orthogonale, on a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{//} + \boldsymbol{u}_{\perp} \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{//} + \boldsymbol{v}_{\perp} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}_{//} + \boldsymbol{u}_{\perp}) \wedge (\boldsymbol{v}_{//} + \boldsymbol{v}_{\perp})$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{u}_{//} \wedge \boldsymbol{v}_{//}}_{\text{ortho-gonal au plan}} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{\perp} \wedge \boldsymbol{v}_{//} + \boldsymbol{u}_{//} \wedge \boldsymbol{v}_{\perp}}_{\text{paralallèle au plan}} \text{ (en tenant compte du fait que } \boldsymbol{u}_{\perp} \wedge \boldsymbol{v}_{\perp} = 0)$$

On vérifiera alors que $S(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$ est différent de $S(\boldsymbol{u}) \wedge S(\boldsymbol{v})$. En effet :

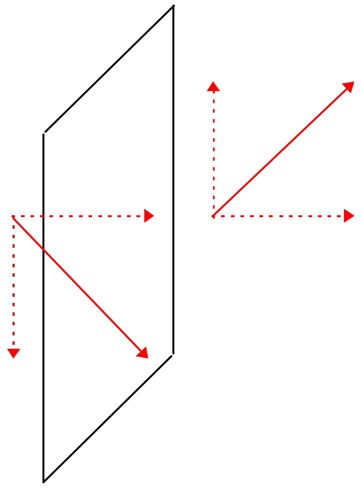
$$S(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u}_{//} \wedge \boldsymbol{v}_{//} + \boldsymbol{u}_{\perp} \wedge \boldsymbol{v}_{//} + \boldsymbol{u}_{//} \wedge \boldsymbol{v}_{\perp}$$

alors que

$$S(\boldsymbol{u}) \wedge S(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}_{//} - \boldsymbol{u}_{\perp}) \wedge (\boldsymbol{v}_{//} - \boldsymbol{v}_{\perp})$$

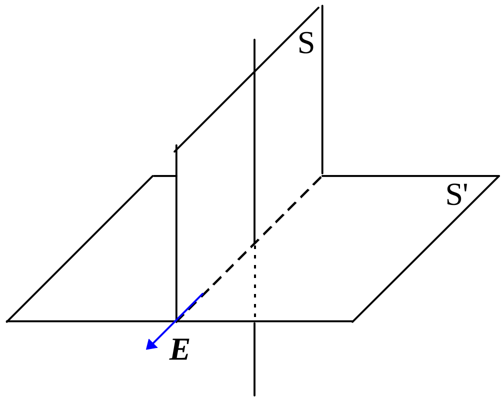
$$= \boldsymbol{u}_{//} \wedge \boldsymbol{v}_{//} - \boldsymbol{u}_{\perp} \wedge \boldsymbol{v}_{//} - \boldsymbol{u}_{//} \wedge \boldsymbol{v}_{\perp} = -S(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$$

En physique, si l'on souhaite utiliser les symétries d'un système tout en gardant la même orientation de l'espace, on est amené à considérer que $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est transformé en $S(\boldsymbol{u}) \wedge S(\boldsymbol{v})$ et on est conduit à la règle suivante : *La composante du vecteur axial orthogonale au plan est invariante, la composante parallèle est changée en son opposée*. Ce sera le cas du vecteur champ magnétique ***B*** par exemple.

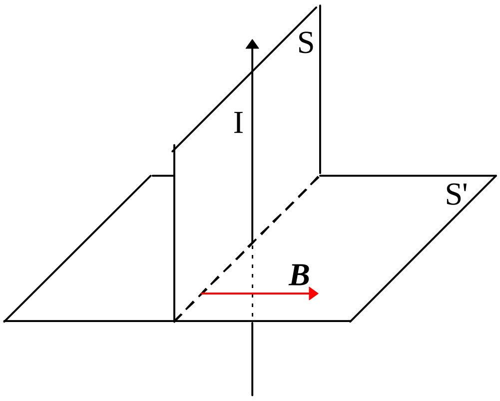


EXEMPLES :

❑ Considérons un fil rectiligne uniformément chargé. Soit S une symétrie par rapport à un plan contenant le fil. Le système reste invariant par S. Il en est donc de même du champ électrique (polaire) ***E*** créé par le fil. ***E*** est contenu dans le même plan que le fil. Soit S' une symétrie par rapport à un plan orthogonal au fil. Le système reste également invariant par S'. Il en est donc de même de ***E***. ***E*** est donc également contenu dans ce plan. La seule possibilité est que ***E*** soit radial.



❑ Considérons un fil rectiligne parcouru par un courant I. Soit S une symétrie par rapport à un plan contenant le fil. Le système reste invariant par S. Il en est donc de même du champ magnétique (axial) ***B*** créé par le fil. Mais pour un vecteur axial, cela signifie que ***B*** est orthogonal à ce plan. On peut retrouver ce résultat par l'autre symétrie S' par rapport à un plan orthogonal au fil. Dans cette symétrie, le sens du courant est inversé. Il en est de même de ***B***. Mais pour un vecteur axial, cela signifie qu'il est parallèle au plan considéré.



Annexe : produit vectoriel

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ le vecteur noté $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et égal à $\begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - a'b \end{pmatrix}$. Il est tel que, pour tout vecteur $\boldsymbol{w}$, $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$. On appelle parfois cette expression produit mixte de $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Il en résulte que :

❑ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *est lié si et seulement si* $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = 0$.
En effet, si $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est lié, alors pour tout $\boldsymbol{w}$, on a $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ donc $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est orthogonal à tout $\boldsymbol{w}$ donc est nul. Réciproquement, si le produit vectoriel est nul, alors pour tout $\boldsymbol{w}$, $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ donc $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est lié. Or si $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ était libre, ils engendreraient un plan et, en prenant pour $\boldsymbol{w}$ un vecteur non nul orthogonal au plan, on aurait $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ libre. On a donc une contradiction et par conséquent $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est lié.

❑ $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ *est orthogonal à* $\boldsymbol{u}$ *et à* $\boldsymbol{v}$.
Cela résulte du fait que $\langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0$ et de même pour $\boldsymbol{v}$.

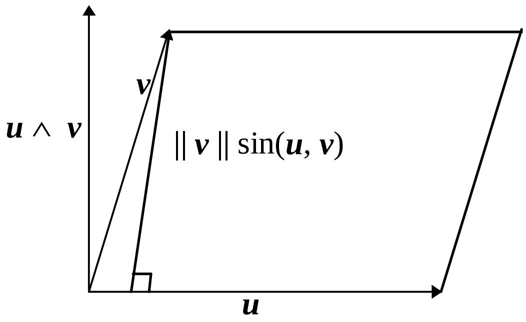
❑ *Si* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *est libre*, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$ *forme une base directe*.
En effet, $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \rangle = \| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|^2 > 0$

❑ $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|^2 + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 = \| \boldsymbol{u} \|^2 \| \boldsymbol{v} \|^2$
Vérification un peu fastidieuse mais sans difficulté que :

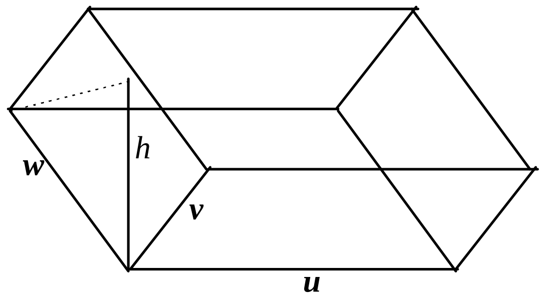
$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - a'b)^2 + (aa' + bb' + cc')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)$$

❑ $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \| = \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
En effet $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ et on remplace dans la relation précédente. En particulier, si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont orthogonaux, $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \| = \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \|$.

On en déduit que $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|$ s'interprète comme l'aire dans l'espace du parallélogramme de côté $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.



La valeur absolue du produit mixte s'interprète comme le volume du parallélépipède construit sur $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$. En effet, la norme de $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est l'aire du parallélogramme servant de base, et le produit scalaire de ce vecteur par $\boldsymbol{w}$ permet de projeter $\boldsymbol{w}$ sur $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ et d'obtenir la hauteur h du parallélépipède.



❑ $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = -\,\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}$
Vérification sur les composantes ou bien en utilisant le caractère alterné du déterminant.

❑ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *est bilinéaire*
(c'est-à-dire linéaire par rapport à chacun des vecteurs). Cela se voit aussi soit sur les composantes, soit en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chacun de ses vecteurs.

❑ $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = -<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>\, \boldsymbol{u} + <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}>\, \boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}>\, \boldsymbol{v} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>\, \boldsymbol{w}$
(*double produit vectoriel*)
Il suffit de choisir une base orthonormée directe, adaptée au problème. On choisit $\boldsymbol{I}$ unitaire tel que :

$$\boldsymbol{u} = \| \boldsymbol{u} \| \boldsymbol{I}$$

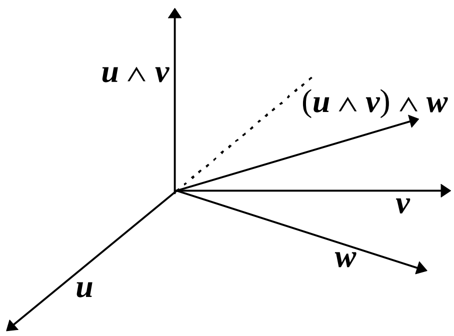
On choisit $\boldsymbol{J}$ tel que :

$$\boldsymbol{v} = \| \boldsymbol{v} \| (\cos\theta\, \boldsymbol{I} + \sin\theta\, \boldsymbol{J})$$

On pose alors $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{J}$. On a alors :

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \| \boldsymbol{u} \|\, \| \boldsymbol{v} \| \sin\theta\, \boldsymbol{K}$$

Pour $\boldsymbol{w}$ quelconque, il suffit alors de faire le calcul en utilisant l'expression des composantes du produit vectoriel. Un dessin, dans le cas particulier où les trois vecteurs sont coplanaires, permet de retrouver rapidement la formule :



Dans la figure précédente, $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w}$ appartient au plan $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, a une composante négative selon $\boldsymbol{u}$ et positive selon $\boldsymbol{v}$. Donc :

$$(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = -\ ??\ \boldsymbol{u} + ???\ \boldsymbol{v}$$

?? et ??? ne sont autres que les produits scalaires des autres vecteurs, à savoir ?? = $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>$ et ??? = $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}>$.

❑ *Résolution de l'équation $a \wedge x = b$ (division vectorielle)*

L'inconnue est x, a et b sont donnés

Si $a = 0$

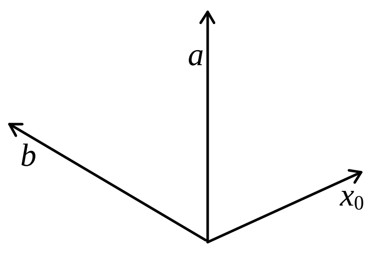
si $b = 0$, alors $S = \mathbb{R}^3$

si $b \neq 0$, alors $S = \varnothing$.

Si $a \neq 0$

si $<a, b> \neq 0$ alors $S = \varnothing$.

si $<a, b> = 0$, alors x est la somme d'une solution particulière x_0 et (par différence entre x et x_0) de la solution générale de l'équation homogène $a \wedge (x - x_0) = 0$. L'équation homogène admet pour solution $x - x_0 = \lambda a$. Quant à la solution particulière x_0, on peut prendre le vecteur $\dfrac{1}{\| a \|^2}\, b \wedge a$. En effet, le vecteur $b \wedge a$ est un bon candidat pour pointer dans une direction, qui, multipliée vectoriellement par a, redonne b. Il suffit juste d'ajuster convenablement sa norme de façon que $\| x_0 \|\ \| a \| = \| b \|$ et donc de s'arranger pour que $\| x_0 \| = \dfrac{\| b \|}{\| a \|}$

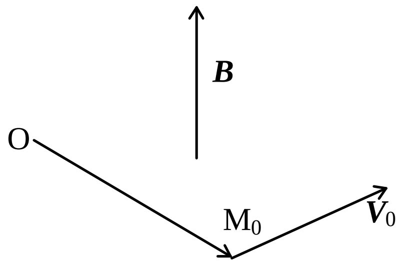


Ainsi :

$$x = \frac{1}{\| a \|^2}\, b \wedge a + \lambda a$$

EXEMPLE : Considérons une particule M de masse m, possédant une charge électrique q, pénétrant dans un champ magnétique constant et uniforme $\boldsymbol{B}$ avec une vitesse $\boldsymbol{V}_0$ orthogonale à $\boldsymbol{B}$. La particule est repérée par le vecteur $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{r}$. O sera choisi sur un axe perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$ et à $\boldsymbol{V}_0$ et passant par

M à l'instant initial. Un choix plus précis sera fait plus bas. Pour le moment, O est un point choisi arbitrairement de cet axe.



Il est remarquable que tout autre choix d'une base est parfaitement inutile, la résolution pouvant être menée vectoriellement jusqu'au bout.

La particule est soumise à la force de Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B} = m\,\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}$.

i) Cette force est donc orthogonale à $\boldsymbol{B}$ de sorte que $\langle\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{B}\rangle = 0$ et donc que $\langle\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}\rangle$ est constant. Etant nul à l'instant initial, le produit scalaire est identiquement nul. Or $\langle\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}\rangle = 0 = \langle\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{B}\rangle$. Donc $\langle\boldsymbol{r}, \boldsymbol{B}\rangle$ est constant, et étant nul à l'instant initial par choix de O, il est identiquement nul. Cela signifie que M reste dans le plan passant par O est orthogonal à $\boldsymbol{B}$. La trajectoire est plane.

ii) La force $\boldsymbol{F}$ est également orthogonale à $\boldsymbol{V}$, de sorte que $\langle\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{V}\rangle = 0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{V}^2$, donc la vitesse scalaire V est constante, égale à V_0.

iii) On peut également écrire que :

$$m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - q\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} = m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - q\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{V} - q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B})$$

$\Rightarrow$ $m\boldsymbol{V} - q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}$ est un vecteur constant au cours du temps $= m\boldsymbol{V}_0 - q\boldsymbol{r}_0 \wedge \boldsymbol{B}$

C'est là que nous affinons notre choix de O, et que nous définissons en particulier la distance r_0 à laquelle il se situe de M_0. En effet, en changeant le choix de O le long de l'axe, on change la valeur de r_0 et donc le vecteur $\boldsymbol{L}$. Nous choisissons O de façon que $\boldsymbol{L}$ soit nul. Il suffit pour cela que :

$$q\boldsymbol{r}_0 \wedge \boldsymbol{B} = m\boldsymbol{V}_0$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{\boldsymbol{B} \wedge m\boldsymbol{V}_0}{q\mathrm{B}^2}$ obtenu par division vectorielle ; $\boldsymbol{r}_0$ est de module $\dfrac{m\mathrm{V}_0}{q\mathrm{B}} = r_0$

iv) Une fois ce choix fait, l'équation trouvée en iii) devient :

$$m\boldsymbol{V} - q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

$\Rightarrow$ $q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B} = m\boldsymbol{V}$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{r} = \dfrac{\boldsymbol{B} \wedge m\boldsymbol{V}}{q\mathrm{B}^2}$ obtenu par la même division vectorielle que précédemment.

$\boldsymbol{r}$ est orthogonale à $\boldsymbol{V}$ de sorte que $\langle\boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}\rangle = 0 = \langle\boldsymbol{r}, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2$. Donc r est constant, égal à $r_0 = \dfrac{m\mathrm{V}_0}{q\mathrm{B}}$, ce qui signifie que la trajectoire est circulaire, de rayon $\dfrac{m\mathrm{V}_0}{q\mathrm{B}}$, de centre O.

◆