DETERMINANTS

Ce chapitre est la version PCSI. Voir DETMPSI.PDF pour les MPSI

PLAN

Préliminaire historique

A la fin du XVIIème, puis au XVIIIème siècle, le développement du calcul algébrique permet d'envisager la résolution des systèmes linéaires dépendant de paramètres, avec autant d'inconnues que d'équations. MacLaurin, en 1748, résout les systèmes de 2 (respectivement 3) équations à 2 (respectivement 3) inconnues, à coefficients quelconques. En 1750, Cramer donne les solutions générales pour les systèmes de n équations à n inconnues, comme quotients de deux polynômes de n variables. Cramer utilise une notation indicielle, (l'indice étant situé en exposant), mais n'a pas de double indice. Il note simplement les inconnues par des lettres différentes, z, y, x, v... Soit le système suivant :

$$\begin{aligned}
A^1 &= Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \text{etc.};\\
A^2 &= Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \text{etc.}\\
A^3 &= Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \text{etc.}\\
A^4 &= Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \text{etc.}\\
&\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Cramer donne la forme des solutions suivant le nombre d'inconnues. Pour une inconnue z, on a $z = \frac{A^1}{Z^1}$. Pour deux équations et deux inconnues z et y, on a $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$ et $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. Pour trois équations et trois inconnues z, y et x, on a :

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

> *L'examen de ces formules fournit cette règle générale. Le nombre des équations et des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choses différentes. Chaque terme est composé des lettres ZYXV etc. toujours écrites dans le même ordre, mais auquel on distribue, comme exposants, les n premiers chiffres rangés en toutes les manières possibles.*
> (Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève 1750, reproduit dans Histoire d'algorithmes, Belin, 1994)

Cramer garde donc les coefficients dans le même ordre mais permute les indices. Reste à attribuer le signe + ou – devant chaque terme.

> *On donne à ces termes les signes + ou –, selon la règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'appellerai cela un* dérangement. *Qu'on compte pour chaque terme le nombre des dérangements : s'il est pair ou nul, le terme aura le signe + ; s'il est impair, le terme aura le signe –.*

Ce que Cramer appelle dérangement est ce que nous appelons inversion. Cramer détermine la parité du nombre d'inversions pour attribuer le signe de chaque terme. Le calcul du numérateur est analogue par simple substitution :

> *Le dénominateur étant ainsi formé, on aura la valeur de z en donnant à ce dénominateur le numérateur qui se forme en changeant, dans tous les termes, Z en A. Et la valeur de y est la fraction qui a le même dénominateur et pour numérateur la quantité qui résulte quand on change Y en A, dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d'une manière semblable la valeur des autres inconnues.*

Les déterminants, ainsi nommés ultérieurement par Cauchy, sont nés. On remarquera que ce qu'on n'appelle pas encore déterminant est apparu un siècle avant que le terme de matrice ne soit introduit par Sylvester en 1850. La notation moderne est, quant à elle, introduite en 1841 par Cayley. L'ordre chronologique est donc exactement l'inverse de l'ordre pédagogique suivi par tous les cours modernes d'algèbre.

Vandermonde et Laplace, vers 1770, donnent les propriétés usuelles des déterminants : définition par récurrence (correspondant aux développements par rapport à une ligne ou une colonne), propriété d'être une fonction multilinéaire alternée des lignes et des colonnes, égalité du déterminant et de son transposé. Ces propriétés ne sont pas démontrées de façon rigoureuse avant Cauchy, qui obtient également le fait que le produit de déterminants est lui-même un déterminant. Au cours du XIXème, le calcul des déterminants se développe, sous des formes de plus en plus formelles, avec de moins en moins de rapport avec les problèmes initiaux dont ils sont issus. Il faut attendre 1870 pour que la résolution des équations linéaires soit close. Notons que l'appellation du déterminant de Vandermonde ne doit rien à ce mathématicien. C'est Cauchy qui l'a ainsi nommé. Citons également Lebesgue en 1937 :

> *La grande notoriété n'est assurée en Mathématiques qu'aux noms associés à une méthode, à un théorème, à une notation. Peu importe d'ailleurs que l'attribution soit fondée ou non, et le nom de Vandermonde serait ignoré de l'immense majorité des mathématiciens si on ne lui avait attribué ce déterminant que vous connaissez bien, et qui n'est pas de lui !*

Dans ce chapitre, nous définissons les déterminants par récurrence. Une autre présentation, basée sur le caractère multilinéaire et alterné des déterminants se trouve dans le fichier DETERMN.PDF du cours de première année.

I : Définition

Le corps $\mathbb{K}$ de référence considéré est un sous–corps de $\mathbb{C}$. Il s'agit le plus souvent de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ eux–mêmes.

1– Déterminant 2×2

On cherche à quelle condition deux vecteurs de $\mathbb{K}^2$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants.

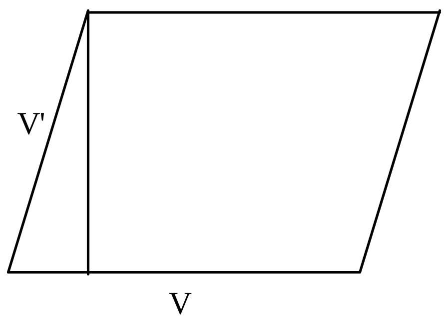
Si, par exemple $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ est non nul, il existe λ tel que :

$$a = \lambda a'$$
$$b = \lambda b'$$

D'où, en éliminant λ, $ab' - ba' = 0$. Inversement, si cette condition est réalisée, avec par exemple a non nul, on obtient :

$$a' = a \times a'/a$$
$$b' = b \times a'/a$$

La quantité $ab' - ba'$ notée $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ a une interprétation géométrique. Sa valeur absolue est l'aire du parallélogramme dans le plan $\mathbb{R}^2$ construit selon V = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et V' = $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$. En effet, si V sert de base du dit parallélogramme, alors $\| V' \| \, |\sin(V, V')|$ est la longueur de sa hauteur. Donc l'aire du paralléllogramme est $\| V \| \, \| V' \| \, |\sin(V, V')|$:



Or l'angle θ entre V et V' est tel que $\cos(\theta) = \dfrac{<V, V'>}{\| V \| \| V' \|}$ donc $|\sin(V, V')| = \sqrt{1 - \dfrac{<V, V'>^2}{\| V \|^2 \| V' \|^2}}$
donc l'aire du parallélogramme est :

$$\sqrt{\| V \|^2 \| V' \|^2 - <V, V'>^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) - (aa' + bb')^2}$$
$$= \sqrt{a^2b'^2 + b^2a'^2 - 2aa'bb'} = |ab' - ba'|$$

Dans le cas où les deux vecteurs sont colinéaires, le parallélogramme est aplati.

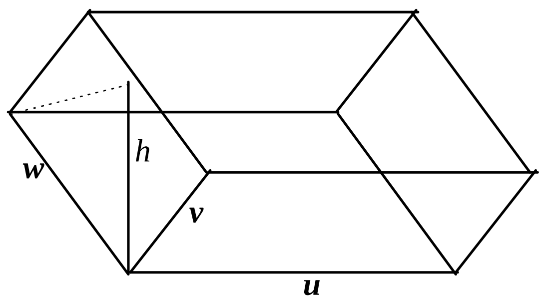
Les propriétés de l'application déterminant définie par (V, V') → det(V,V') sont les suivantes :

i) Cette application est linéaire en V (V' fixé) et en V' (V fixé). Elle est dite bilinéaire.

ii) det(V,V') = – det(V',V). Elle est dite alternée ou antisymétrique.

2– Déterminant 3 × 3

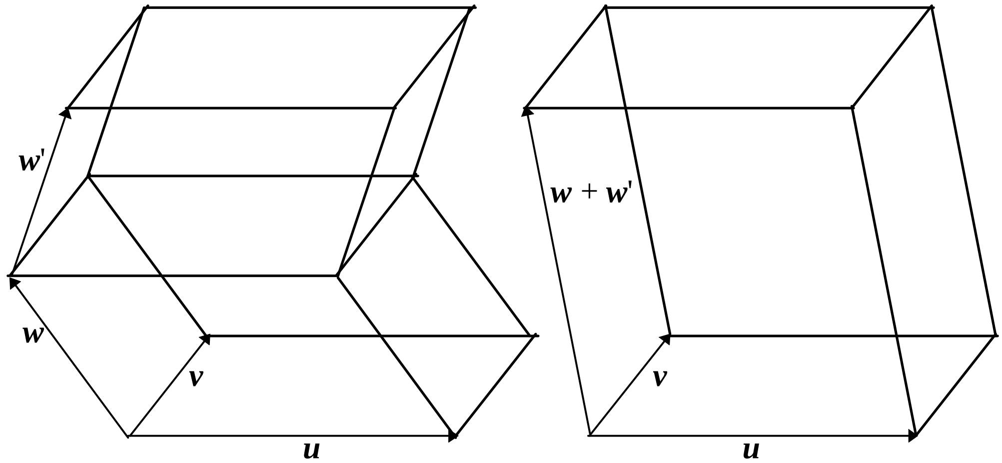
On se propose de déterminer une formule donnant dans $\mathbb{R}^3$ le volume d'un parallélépipède défini par les trois vecteurs $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$.



Ce volume est égale à l'aire du parallélogramme (***u***, ***v***) qui sert de base par la hauteur *h* du parallélépipède. Tout parallélépipède de même hauteur a le même volume. Si on multiplie ***w*** par une quantité λ, le volume est multiplié par λ. On acceptera de prendre γ négatif en autorisant le volume a prendre des valeurs négatives, dépendant de la direction vers laquelle pointe le vecteur ***w*** relativement au plan (***u***, ***v***). Cette convention est liée à celle d'orientation d'une base étudiée plus loin.

$$\mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{w}) = \lambda\mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

Si on empile deux parallélépipèdes de même base (***u***, ***v***) mais dont le troisième côté est respectivement ***w*** et ***w***', le volume de la somme est égal à l'aire de la base multipliée par la somme des deux hauteurs. Mais cette somme est aussi la hauteur d'un parallélépipède de base (***u***, ***v***) et dont le troisième côté est ***w*** + ***w***'.



On aura donc :

$$\mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}') = \mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}')$$

Cette formule est également valide si $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w}'$ ne sont pas orientés dans le même sens vis-à-vis du plan $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ car, dans ce cas, les volumes sont de signes opposés, ce qui correspond bien au fait qu'en valeur absolue, il faudra retrancher l'un des volumes à l'autre.

Les deux relations :

$$\mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{w}) = \lambda\mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

$$\mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}') = \mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}')$$

expriment le fait que l'application $\boldsymbol{w} \to \mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est linéaire. Les rôles des trois vecteurs étant symétriques, l'application volume est linéaire en chacun des vecteurs. On dit qu'elle est trilinéaire.

Enfin, si la hauteur est nulle (donc si $\boldsymbol{w}$ est combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$) , le volume est nul, donc en particulier :

$$\mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$$

On a également $\mathrm{vol}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = 0$ car le parallélépipède est ici contenu dans le plan $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$, donc, en développant au moyen de la multilinéarité :

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{vol}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) &= \mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) + \mathrm{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) \\ &= \mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) + \mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \mathrm{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) + \mathrm{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ &= \mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \mathrm{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

car $\mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \mathrm{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$. Donc :

$$\mathrm{vol}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -\,\mathrm{vol}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

Permuter deux vecteurs change le signe du volume. On dit que l'application est alternée. Une démonstration analogue s'applique quelle que soit la position des deux vecteurs permutés.

Considérons alors une base (e_1, e_2, e_3) qui servira d'unité de volume et utilisons le caractère trilinéaire alterné pour développer une expression du volume. Pour adopter des notations plus fonctionnelles, notons $\Phi(\ )$ à la place de vol( ). La trilinéarité permet de développer l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &\Phi(ae_1 + be_2 + ce_3, a'e_1 + b'e_2 + c'e_3, a''e_1 + b''e_2 + c''e_3) = \\ &\qquad ab'c''\ \Phi(e_1,e_2,e_3) + ab''c'\ \Phi(e_1,e_3,e_2) + a'bc''\ \Phi(e_2,e_1,e_3) + \\ &\qquad a'b''c\ \Phi(e_2,e_3,e_1) + a''bc'\ \Phi(e_3,e_1,e_2) + a''b'c\ \Phi(e_3,e_2,e_1) \end{aligned}$$

On a supprimé les volumes nuls, obtenus lorsqu'un même vecteur apparaît au moins deux fois. Utilisons alors le caractère alterné de Φ. On obtient :

$$\begin{aligned} &\Phi(ae_1 + be_2 + ce_3, a'e_1 + b'e_2 + c'e_3, a''e_1 + b''e_2 + c''e_3) = \\ &\qquad (ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c)\ \Phi(e_1, e_2, e_3) \end{aligned}$$

La quantité $ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$ est le volume cherché. Il s'agit du déterminant 3×3. On le note $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$. On peut également remarquer qu'il est égal à :

$$a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - a'b)$$

On peut l'interpréter comme le produit scalaire du vecteur $\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ par le vecteur $\begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$. Ce dernier s'appelle produit vectoriel de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, noté $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. Il est constitué de déterminants 2×2 extraits des deux colonnes. On donne en annexe quelques propriétés de ce produit.

3– Déterminant $n \times n$

On a donc :

En dimension 2 : $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$

En dimension 3 : $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$

$$= a(b'c'' - b''c') - b(a'c'' - a''c') + c(a'b'' - a''b')$$

On remarque que le déterminant 3×3 est le produit des éléments de la première colonne, multiplié pour chacun par le déterminant 2×2 obtenu en supprimant cette première colonne et la ligne contenant l'élément considéré :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

En outre, le produit obtenu est précédé d'un signe qui alterne entre + et –.

On définit alors le déterminant $n \times n$ par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\mathrm{M}_{11} - a_{21}\mathrm{M}_{21} + \dots + (-1)^{n-1}a_{n1}\mathrm{M}_{n1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, a_{i1}\, \mathrm{M}_{i1}$$

où M_{i1} est égal au déterminant $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne 1, et appelé mineur du coefficient $(i,1)$. Le terme $(-1)^{i-1}\mathrm{M}_{i1} = \mathrm{C}_{i1}$ s'appelle cofacteur du terme $(i,1)$. On dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la première colonne.

Cette expression s'appelle déterminant de la matrice (a_{ij}) ou déterminant des vecteurs $(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n)$, V_j désignant la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice. Dans un espace de dimension n muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$, on définit le déterminant de n vecteurs $(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n)$ relativement à cette base en prenant évidemment le déterminant des composantes de $(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n)$ dans la base considérée. Ce déterminant dépend de la base choisie. On peut également parler de déterminant d'un endomorphisme, celui–ci étant égal au déterminant d'une matrice associée dans une base donnée. Le problème se pose de savoir si ce déterminant dépend de la base choisie, et sera examiné dans la partie III.

On remarque par ailleurs que, si on développe complètement tous les mineurs, on se retrouve à la fin avec un nombre de termes égal à $n!$. La croissance rapide de ce nombre de termes interdit d'utiliser cette définition des déterminants pour les calculer, à moins que de nombreux termes soient nuls. Par exemple, si tous les a_{i1} sont nuls sauf 1, la formule est très intéressante !

Voici par exemple en Scilab une procédure calculant récursivement le déterminant selon la formule de récurrence.

```
function d = mauvaisdet(A)
s=size(A)              // size donne le couple (nbLignes, nbColonnes) de A
n=s(1)                 // On prend le nombre de lignes. On supposera la matrice carrée
if n==1 then d=A(1,1)
else
        d=0
        for i=1:n
                Mineur=[A(1:i-1,2:n);A(i+1:n,2:n)] // extrait le mineur de A
                d=d+(-1)**(i-1)*A(i,1)*mauvaisdet(Mineur)
        end
end
endfunction
```

Si on compare le temps de calcul de cette procédure avec la fonction **det** prédéfinie dans Scilab, on voit très nettement la différence lorsque n atteint 6, 7 ou 8. Nous devons donc élaborer d'autres méthodes de calcul des déterminants. Le cas des matrices diagonales ou triangulaires est le plus facile.

4– Déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire

Par récurrence :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2 \dots a_n$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Montrons la troisième relation, d'où se déduisent les deux premières. Cette relation est vérifiée pour un déterminant 1×1 ou 2×2. Supposons qu'elle soit vraie pour un déterminant $(n–1) \times (n–1)$. On a alors, pour un déterminant $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à la première colonne}$$

$$= a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence.}$$

Le calcul du déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est donc immédiat.

II : Propriétés

1- Formes alternées

Le déterminant est une forme alternée, dans le sens où, si l'on permute deux vecteurs colonnes, le déterminant change de signe. Cela est aisé à vérifier pour $n = 2$ ou 3 et cela se montre par récurrence sur n. Supposons la propriété vraie au rang $n–1$. Montrons la au rang n.

❑ Si les deux vecteurs qu'on permute ont des indices strictement supérieurs à 1, on applique l'hypothèse de récurrence sur les mineurs M_{i1} qui voient permuter deux de leurs colonnes et changent donc de signe. Le déterminant total change donc lui aussi de signe.

❑ Si les deux vecteurs qu'on permute ont pour indice 1 et 2, on a :

$$\det(V_1, V_2, ... V_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1} M_{i1}$$

où M_{i1} est le mineur du terme $(1, i)$, déterminant de $V_2, ..., V_n$ auquel on a enlevé la ligne i. Développons M_{i1} par rapport à sa première colonne. Notons, pour $i \neq j$, $M_{ij|12}$ le déterminant $(n-2) \times (n-2)$ obtenu à partir du déterminant initial en supprimant les lignes i et j et les colonnes 1 et 2. Lorsque j varie, les $M_{ij|12}$ sont les mineurs de M_{i1}. Il en résulte que, en développant M_{i1} par rapport à sa première colonne, les termes sur cette colonne étant $(a_{12}, ..., a_{i-1,2}, a_{i+1,2}, ..., a_{n2})$, on obtient :

$$M_{i1} = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j-1} a_{j2} M_{ij|12} + \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{j-2} a_{j2} M_{ij|12}$$

Donc :

$$\det(V_1, V_2, ... V_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j} a_{i1} a_{j2} M_{ij|12} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{i+j-1} a_{i1} a_{j2} M_{ij|12}$$

$$= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} a_{i1} a_{j2} M_{ij|12} + \sum_{j>i} (-1)^{i+j-1} a_{i1} a_{j2} M_{ij|12}$$

Dans la première somme, rebaptisons i en j et j en i, et remarquons que ce renommage est sans effet sur les mineurs puisque $M_{ij|12} = M_{ji|12}$:

$$\det(V_1, V_2, ... V_n) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} a_{j1} a_{i2} M_{ij|12} + \sum_{j>i} (-1)^{i+j-1} a_{i1} a_{j2} M_{ij|12}$$

$$= \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} (a_{i1}a_{j2} - a_{j1}a_{i2}) M_{ij|12}$$

$$= \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{vmatrix} M_{ij|12}$$

Si on permute les deux colonnes V_1 et V_2, chaque déterminant $\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{vmatrix}$ change de signe, mais pas les mineurs qui ne font intervenir ni V_1 ni V_2. Donc le déterminant total change de signe.

❑ Si les deux vecteurs qu'on permute ont pour indice 1 et j, avec $j > 2$, alors, en appliquant les deux règles précédentes, on aura :

$$\det(V_1, V_2, ..., V_j, ...) = - \det(V_1, V_j, ..., V_2, ...)$$

$= \det(V_j, V_1, ..., V_2, ...)$
$= -\det(V_j, V_2, ..., V_1, ...)$

Une conséquence immédiate est que, si $V_i = V_j$ avec $i \neq j$, alors le déterminant est nul. En effet, si on permute V_i et V_j, d'une part, le déterminant change de signe, d'autre part c'est le même car $V_i = V_j$.

2– Développement par rapport à une colonne

Considérons $\det(V_1, ..., V_j, ..., V_n)$ où $V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$. On a :

$$\det(V_1, ..., V_j, ..., V_n) = (-1)^{j-1} \det(V_j, V_1, V_2, ..., V_{j-1}, V_{j+1}, ..., V_n)$$
$$= (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1}\, a_{ij}\, M_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, M_{ij} = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\, C_{ij}$$

où M_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j du déterminant initial. La quantité $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ s'appelle cofacteur du terme (i,j).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la troisième colonne}$$
$$= (4 + 2 - 2 - 2) - (-2 + 6 - 8 + 2) =$$
$$= 2 + 2 = 4$$

On choisit évidemment de préférence des colonnes possédant un grand nombre de 0.

3- Multilinéarité

Le déterminant est une application linéaire de chacune de ses colonnes. On dit qu'il est multilinéaire. En effet, pour tout j, il est linéaire par rapport à la colonne V_j, comme on le voit dans l'expression développée par rapport à la j-ème colonne, qui donne une expression linéaire en $(a_{1j}, ..., a_{nj})$.

La multilinéarité et le caractère alterné du déterminant permettent de se ramener à une matrice triangulaire, et donc de calculer de façon efficace le déterminant :

i) Multiplier une colonne par λ multiplie le déterminant par λ

ii) Remplacer la colonne V_j par $V_j + \lambda V_k$, $k \neq i$, ne change pas la valeur du déterminant. En effet, en utilisant la linéarité vis-à-vis de $V_j + \lambda V_k$, on retrouve le déterminant avec V_j, celui avec V_k étant nul car V_k apparaît deux fois, à la colonne j et à la colonne k.

iii) Plus généralement, ajouter d'autres colonnes à une colonne donnée ne change pas la valeur du déterminant.

iv) Si l'une des colonnes est nulle, le déterminant est nul.

v) Si deux colonnes sont proportionnelles, le déterminant est nul.

vi) Si l'on permute deux colonnes, le déterminant change de signe.

vii) Si les colonnes sont liées, le déterminant est nul. En effet, l'une des colonnes est combinaison linéaire des autres et la règle iii) permet de se ramener à une colonne nulle.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -2 & -8 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } \begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \end{cases}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -8 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } C_2 \leftrightarrow C_3 \text{ et en mettant 2 en facteur}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } \begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 + 5C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 8C_2 \end{cases}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{vmatrix} \text{ en effectuant } C_4 \leftarrow C_4 - \frac{4}{3}C_3$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times 3 \times \frac{2}{3} = 4$$

Un algorithme en Scilab basé sur la méthode précédente est le suivant. n est le nombre de lignes de la matrice A, supposée carrée. Si $n = 1$, on a directement le déterminant, égal à l'unique terme A(1,1) de la matrice. Dans le cas contraire, on cherche quel est le terme maximum (en valeur absolue) de la première ligne. Soit j_m son indice de colonne et m la valeur du maximum. Si m est nul, alors cela signifie que tous les termes de la première ligne sont nuls et le déterminant est nul (car les colonnes engendrant alors un sous-espace de dimension au plus $n-1$ sont liées). Si m est non nul, on annule tous les termes de la première ligne sauf celui qui se trouve à la colonne j_m, en faisant des combinaisons linéaires entre chaque colonne et la colonne j_m. En imaginant qu'on amène la colonne j_m en tête, on obtient enfin un déterminant par bloc, qui sera égal à $(-1)^{j_m-1}$ $A(1,j_m)$ multiplié par le déterminant $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en supprimant la première ligne et la colonne j_m.

```
function d=mon_det(A)
   s=size(A)                  // donne la taille de la matrice sou forme d'un couple s
   n=s(1)                     // dont le premier élément est le nombre de lignes de A
   B=zeros(n,n)               // B est une matrice auxiliaire qui servira de mineur
   if n==1 then
      d=A(1,1)                // on a ici une matrice 1x1
   else
      m=abs(A(1,1))           // on calcule le maximum m des coefficients de la
      jm=1                    // première ligne de A, en valeur absolue
      for j=2:n
         if abs(A(1,j))>m then
            jm=j              // jm est l'indice de ce maximum
            m=A(1,j)
         end
      end
      if m==0 then            // si m est nul, la première ligne est nulle
         d=0                  // et le déterminant est nul
      else                    // sinon, on annule la première ligne par combinaison linéaire
         for j=[1:jm-1 jm+1:n]  // des colonnes, (sauf la colonne d'indice jm)
            for i=2:n
               B(i,j)=A(i,j)-A(i,jm)*A(1,j)/A(1,jm)
            end
         end
```

```
            sousMatrice=B(2:n,[1:jm-1 jm+1:n])
            d=(-1)**(jm-1)*A(1,jm)*mon_det(sousMatrice)
        end
    end
endfunction
```

Les performances de la procédure *mon_det* sont tout à fait honorables, comparées à celle de la procédure de calcul du déterminant prédéfinie dans Scilab.

4– Déterminant d'un produit de matrices

Dans ce paragraphe, on se propose de montrer le résultat suivant :

PROPOSITION

i) *Considérons* A *et* B *deux matrices* $n \times n$. *Alors* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

ii) *Si f est une forme multilinéaire alternée sur* E^n *où* E *est un espace vectoriel de dimension n muni d'une base* $(e_1, ..., e_n)$ *alors* :

$$f(v_1, ..., v_n) = \det(V_1, ..., V_n)\, f(e_1, ..., e_n)$$

où, pour tout i, V_i *est la colonne des composantes du vecteur* v_i *dans la base* $(e_1, ..., e_n)$.

On dira aussi que $\det(V_1, ..., V_n)$ est égal au déterminant des vecteurs $v_1, ..., v_n$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$. Cela signifie que toute forme multilinéaire alternée est proportionnelle au déterminant relativement à une base donnée, le coefficient de proportionnalité étant la valeur de f sur la base en question. Pour des raisons de commodité de notation, nous identifierons les vecteurs v_i à leurs composantes V_i dans la base, ce qui revient à identifier E à $\mathbb{K}^n$ et les $(e_1, ..., e_n)$ à la base canonique. Si B est la matrice de colonnes les V_i, nous noterons le résultat ii) à montrer sous la forme : $f(B) = \det(B)\, f(I_n)$, où I_n est la matrice identité.

a) Rappel sur une méthode d'inversion de matrices

On rappelle l'équivalence entre opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice quelconque C et produit à droite par une matrice.

❑ Multiplier la $j^{\text{ème}}$ colonne de C par λ est équivalent à multiplier C à droite par la matrice :

$$M(C_j \leftarrow \lambda C_j) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & & j & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & & \dots & & 0 \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

On remarque que le déterminant de cette matrice vaut λ.

❑ Ajouter la colonne i à la colonne j est équivalent à multiplier C à droite par la matrice :

$$M(C_j \leftarrow C_j + C_i) = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc} & & & j & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ & & \dots & 1 & \dots & \\ & \dots & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

On remarque que le déterminant de cette matrice vaut 1.

❑ Permuter les colonnes i et j est équivalent à multiplier C à droite par la matrice :

$$M(C_i \leftrightarrow C_j) = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc} & & i & & j & \\ & & \downarrow & & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ & \dots & 0 & \dots & 1 & \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \text{(matrice de déterminant } -1\text{)}$$

On remarque que le déterminant de cette matrice vaut -1.

Ces opérations élémentaires permettent de transformer une matrice inversible C en la matrice identité selon l'algorithme suivant :

i) Obtenir une matrice triangulaire inférieure : Pour i variant de 1 à $n-1$, placer en colonne i un vecteur parmi ceux occupant les colonnes i à n dont le $i^{\text{ème}}$ terme est non nul (ce qui est possible sinon, la matrice ne serait pas de rang n et ne serait pas inversible) et faire des combinaisons entre ce $i^{\text{ème}}$ vecteur et les vecteurs placés à sa droite de façon à annuler les termes situés en la ligne i et en colonne k, $k > i$. Ceci s'obtient par utilisation répétée des trois manipulations élémentaires. On remplit donc de 0 le triangle supérieur. C'est la méthode usuelle pour déterminer le rang d'un système de vecteurs.

ii) D'une façon analogue, obtenir une matrice diagonale en remplissant de 0 le triangle inférieur, mais en procédant de droite à gauche, en remplissant les lignes les plus basses de 0.

iii) Obtenir la matrice identité, en divisant chaque colonne par le terme de la diagonale occupant cette colonne.

Cela signifie qu'en multipliant la matrice donnée C à droite par des matrices élémentaires, on obtient la matrice identité. Le produit de ces matrices élémentaires n'est autre que l'inverse C^{-1} de la matrice donnée. Cette méthode est utilisée pour inverser des matrices car si on applique les même manipulations de colonnes à la matrice I, on obtiendra en fin de calcul directement le produit des matrices élémentaires, à savoir C^{-1}.

Cela signifie également que toute matrice B inversible est produit de matrices élémentaires. Il suffit de choisir C telle que $B = C^{-1}$ dans le calcul précédent. Autrement dit, les matrices élémentaires engendrent par produit l'ensemble des matrices inversibles. C'est ce résultat que nous allons maintenant utiliser.

b) Application à notre problème

Soient A et B deux matrices. On note $(V_1, \dots, V_n)$ les colonnes de A, plutôt que $(C_1, \dots, C_n)$, de sorte que $\det(A) = \det(V_1, \dots, V_n)$.

Cas 1 - B est une matrice élémentaire

On suppose que B est l'une des trois matrices élémentaires $M(V_j \leftarrow \lambda V_j)$, $M(V_j \leftarrow V_j + V_i)$ ou $M(V_i \leftrightarrow V_j)$.

❑ Si $B = M(V_j \leftarrow \lambda V_j)$, alors $\det(AB) = \det(V_1, ..., \lambda V_j, ..., V_n) = \lambda \det(V_1, ..., V_n) = \lambda \det(A)$. Mais on a également $\lambda = \det(B)$ donc $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

❑ Si $B = M(V_j \leftarrow V_j + V_i)$, alors $\det(AB) = \det(V_1, ..., V_i, ..., V_j + V_i, ..., V_n) = \det(V_1, ..., V_n) = \det(A)$. Mais on a également $1 = \det(B)$ donc $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

❑ Si $B = M(V_i \leftrightarrow V_j)$, alors $\det(AB) = \det(V_1, ..., V_j, ..., V_i, ..., V_n) = -\det(V_1, ..., V_n) = -\det(A)$. Mais on a également $-1 = \det(B)$ donc $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

A noter que les égalités $\det(V_1, ..., \lambda V_j, ..., V_n) = \lambda \det(V_1, ..., V_n)$ ou $\det(V_1, ..., V_i, ..., V_j + V_i, ..., V_n) = \det(V_1, ..., V_n)$ ou $\det(V_1, ..., V_j, ..., V_i, ..., V_n) = -\det(V_1, ..., V_n)$ utilisent uniquement le caractère multilinéaire alterné du déterminant et s'appliquent également à n'importe quelle fonction multilinéaire alternée f. On aura alors dans ce cas :

Si $B = M(V_j \leftarrow \lambda V_j)$, alors $f(AB) = f(V_1, ..., \lambda V_j, ..., V_n) = \lambda f(V_1, ..., V_n) = \lambda f(A) = f(A) \det(B)$.

Si $B = M(V_j \leftarrow V_j + V_i)$, alors $f(AB) = f(V_1, ..., V_i, ..., V_j + V_i, ..., V_n) = f(V_1, ..., V_n) = f(A) = f(A) \det(B)$.

Si $B = M(V_i \leftrightarrow V_j)$, alors $f(AB) = f(V_1, ..., V_j, ..., V_i, ..., V_n) = -f(V_1, ..., V_n) = -f(A) = f(A) \det(B)$.

Cas 2 - B inversible :

B est alors de la forme $M_1M_2...M_k$ avec les M_i matrices élémentaires du type $M(V_j \leftarrow \lambda V_j)$, $M(V_j \leftarrow V_j + V_i)$ ou $M(V_i \leftrightarrow V_j)$. En appliquant le cas 1) successivement sur les matrices élémentaires M_k, puis M_{k-1}, ... jusqu'à M_1, on obtient :

$$\begin{aligned}\det(AB) = \det(AM_1M_2...M_k) &= \det(AM_1M_2...M_{k-1}) \det(M_k)\\ &= \det(AM_1M_2...M_{k-2}) \det(M_{k-1}) \det(M_k)\\ &= ...\\ &= \det(A) \det(M_1) \det(M_2) ... \det(M_k)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}f(AB) = f(AM_1M_2...M_k) &= f(AM_1M_2...M_{k-1}) \det(M_k)\\ &= f(AM_1M_2...M_{k-2}) \det(M_{k-1}) \det(M_k)\\ &= ...\\ &= f(A) \det(M_1) \det(M_2) ... \det(M_k)\end{aligned}$$

En particulier, pour $A = I_n$, on obtient respectivement :

$$\det(B) = \det(M_1) \det(M_2) ... \det(M_k)$$

et $f(B) = \det(M_1) \det(M_2) ... \det(M_k) f(I_n)$

donc $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

et $f(B) = \det(B) f(I_n)$

Cas 3 - B n'est pas inversible :
Alors $f(\text{B})$ est nul, ainsi que det(B) et det(AB). En effet, si B n'est pas inversible, ses colonnes sont liées, et par exemple la $i^{\text{ème}}$ est combinaison linéaire des autres :

$$V_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j V_j$$

On a alors, en utilisant la multilinéarité :

$$f(\text{B}) = f(V_1, ..., V_i, ..., V_n)$$

$$= f(V_1, ..., \sum_{j \neq i} \alpha_j V_j, ..., V_n)$$

$$= \sum_{j \neq i} \alpha_j f(V_1, ..., V_j, ..., V_n) \text{ avec } V_j \text{ situé en } i^{\text{ème}} \text{ place mais aussi en } j^{\text{ème}}$$

Mais chaque $f(V_1, ..., V_j, ..., V_n)$ est nul puisque V_j apparaît deux fois, en i-ème et en j-ème place : en permutant ces deux vecteurs, $f(V_1, ..., V_j, ..., V_n)$ change de signe puisque f est alternée, mais n'a pas varié puisque les deux colonnes permutées sont identiques. Cela signifie bien que $f(V_1, ..., V_j, ..., V_n) = 0$. Cette relation étant vraie pour tout j différent de i, on obtient :

$$f(\text{B}) = 0$$

Un raisonnement identique conduit à det(B) = 0. On a également det(AB) = 0 car, si B n'est pas inversible, son noyau est non réduit à {0}, or le noyau de AB contient celui de B. Donc le noyau de AB n'est pas réduit à {0} non plus et AB n'est pas inversible donc det(AB) = 0.

On a donc bien dans ce cas :

$$\det(\text{AB}) = \det(\text{A})\det(\text{B}) \ (= 0)$$
$$f(\text{B}) = \det(\text{B})\, f(I_n) \ (= 0)$$

5– Déterminant de la transposée d'une matrice

Nous allons montrer que $\det(\text{A}) = \det({}^t\text{A})$. Pour cela, nous considérons $\det({}^t\text{A})$ comme une fonction f de A ou des colonnes $V_1, ..., V_n$ de A :

$$f(\text{A}) = f(V_1, ..., V_n) = \det({}^t\text{A})$$

Si nous parvenons à montrer que f est une fonction multilinéaire alternée de $V_1, ..., V_n$, alors, d'après le paragraphe précédent, f est proportionnelle à $\det(V_1, ..., V_n)$:

$$f(V_1, ..., V_n) = \det(V_1, ..., V_n)\, f(I_n)$$

avec $f(I_n) = \det({}^tI_n) = 1$

donc $\det({}^t\text{A}) = \det(\text{A})$

Cette dernière formule est importante car elle signifie que tout ce que nous avons dit sur les propriétés du déterminant relativement aux colonnes s'appliquent également aux lignes. Par exemple, on peut développer un déterminant par rapport à une ligne.

❑ <u>*f* est alternée</u> :
Considérons $f(\text{AM})$ où M est la matrice élémentaire du type $M(V_i \leftrightarrow V_j)$, définie dans le paragraphe précédent. AM est constituée des colonnes $V_1, ..., V_n$, les colonnes V_i et V_j étant permutées. On a donc :

$$f(\ldots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{V_j}, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{V_i}, \ldots) = f(AM)$$
$$= \det({}^t(AM))$$
$$= \det({}^tM\,{}^tA)$$
$$= \det({}^tM)\det({}^tA)$$
$$= -\det({}^tA) \qquad \text{car M est symétrique et } \det(M) = -1$$
$$= -f(V_1, \ldots, V_n)$$

❑ <u>*f* est multilinéaire</u> :
La multilinéarité peut se montrer en utilisant les deux autres matrices élémentaires du type $M(V_j \leftarrow \lambda V_j)$ ou $M(V_j \leftarrow V_j + V_i)$ vues au paragraphes précédents comme suit :

- Pour le produit de la $i^{\text{ème}}$ colonne par un scalaire λ, on écrit, en utilisant une matrice élémentaire du type $M(V_j \leftarrow \lambda V_j)$ que :

$$f(V_1, \ldots, \lambda V_j, \ldots, V_n) = f(AM) = \det({}^tM)\det({}^tA) \qquad \text{comme plus haut}$$
$$= \lambda \det({}^tA) \qquad \text{car } \det({}^tM) = \lambda$$
$$= \lambda f(A)$$

- Pour une $i^{\text{ème}}$ colonne de la forme $(a'_{1i} + a''_{1i}, a'_{2i} + a''_{2i}, \ldots, a'_{ni} + a''_{ni}) = V'_i + V''_i$, on a, en notant L_k les lignes égales aux ${}^tV_k$:

$$f(V_1, \ldots, V'_i, \ldots, V_n) + f(V_1, \ldots, V''_i, \ldots, V_n)$$
$$= \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \ldots \\ L'_i \\ \ldots \\ L_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \ldots \\ L''_i \\ \ldots \\ L_n \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ & \ldots \\ 0 & L_{i-1} \\ (-1)^{i-1} & L'_i \\ (-1)^i & L''_i \\ & \ldots \\ 0 & L_n \end{pmatrix} \text{en développant ce dernier déterminant par rapport à la première}$$

colonne. Considérons alors une matrice élémentaire $(n+1) \times (n+1)$ de type $M(V_j \leftarrow V_j + V_i)$. Si on multiplie M à gauche d'une matrice A, alors MA s'obtient à partir de A en ajoutant une ligne de A à une autre (au lieu d'ajouter deux colonnes quand on multiplie à droite). Choisissons M correspondant à l'ajout de la ligne i+1 à la ligne i. Compte tenu que $\det(M) = 1$, on a :

$$\det\begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ & \ldots \\ 0 & L_{i-1} \\ (-1)^{i-1} & L'_i \\ (-1)^i & L''_i \\ & \ldots \\ 0 & L_n \end{pmatrix} = \det\left(M \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ & \ldots \\ 0 & L_{i-1} \\ (-1)^{i-1} & L'_i \\ (-1)^i & L''_i \\ & \ldots \\ 0 & L_n \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ & \dots \\ 0 & L_{i-1} \\ 0 & L'_i + L''_i \\ (-1)^i & L''_i \\ & \dots \\ 0 & L_n \end{pmatrix} \text{(ajout de la ligne } i+1 \text{ à la ligne } i\text{)}$$

$$= \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L'_i + L''_i \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} \text{en développant par rapport à la première colonne}$$

$$= f(V_1, \dots, V'_i + V''_i, \dots, V_n)$$

La linéarité par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable est donc montrée.

6– Exemples de calculs

EXEMPLE 1 : Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{vmatrix} = D$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$D = x \begin{vmatrix} x & -t & z \\ t & x & -y \\ -z & y & x \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} y & z & t \\ t & x & -y \\ -z & y & x \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} y & z & t \\ x & -t & z \\ -z & y & x \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} y & z & t \\ x & -t & z \\ t & x & -y \end{vmatrix}$$

$$= x\,[x^3 + x(t^2 + y^2 + z^2)] + y\,[y(x^2 + t^2 + z^2) + y^3] + z\,[z^3 + (t^2 + y^2 + x^2)z] + t[t(y^2 + x^2 + z^2) + t^3]$$

$$= x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2t^2 + y^2z^2 + z^2t^2)$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$$

EXEMPLE 2 : Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On remarque que la colonne C_j s'obtient à partir de la colonne C_{j-1} de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} j-1 \\ j-2 \\ \dots \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n-j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j-2 \\ j-3 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ n-j+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix}$$

$D = \det(C_1,\dots,C_n) = \det(C_1 - C_2, C_2 - C_3, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n)$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & n-2 \\ & \dots & & \dots & \\ 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \det(C_1', \dots, C_n')$$

$= \det(C_1'-C_2', \dots, C_{n-2}'-C_{n-1}', C_{n-1}', C_n')$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & n-1 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & -1 & n-2 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & -1 & n-3 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.2^{n-2}.(n-1)$$

EXEMPLE 3 : Calculer $D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

On ajoute les deux dernières lignes à la première :

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

On retranche la première colonne aux autres :

$$D = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

EXEMPLE 4 : Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne. On obtient :

$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ suite récurrente linéaire

En utilisant $D_1 = a + b$, $D_2 = a^2 + b + b^2$ et donc $D_0 = 1$, on obtient :

si $a = b$: $D_n = (n+1)a^n$

si $a \neq b$: $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$

7– Déterminant de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice inversible. Si l'on applique en particulier ce qui a été prouvé précédemment à A et A^{-1}, on obtient :

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

or $AA^{-1} = I$ et $\det(I) = 1$.

Ainsi $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Nous montrerons plus loin qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Un sens de l'implication vient donc d'être montré.

8– Influence d'un changement de base

a) Déterminant d'un système de vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension n, de base initiale $(e_1, ..., e_n)$. Soit $(v_1, ..., v_n)$ n vecteurs de E, de composantes $(V_1, ..., V_n)$ dans cette base. On dira que $\det(V_1, ..., V_n)$ est le déterminant de $(v_1, ..., v_n)$ relativement à la base $(e_1, ..., e_n)$, et on notera :

$$\det(V_1, ..., V_n) = \det_e(v_1, ..., v_n)$$

Soit une nouvelle base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. Notons $\det_\varepsilon$ le déterminant relatif à cette nouvelle base. Soit P la matrice de passage de la base e à la base ε. Quel rapport y a–t–il entre $\det_e$ et $\det_\varepsilon$ et P ?

Notons (V_e) la matrice des composantes des v_i dans la base e et (V_ε) la matrice des composantes des v_i dans la base ε. On a : $(V_e) = P(V_\varepsilon)$. Donc :

$$\det_e(V) = \det(V_e) = \det(PV_\varepsilon) = \det(P)\det(V_\varepsilon) = \det(P)\det_\varepsilon(V)$$

Ainsi le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base choisie. Parler de déterminant d'un système de vecteurs sans parler de base de référence est un non–sens. Dans $\mathbb{K}^n$, la base de référence est par défaut la base canonique.

Le déterminant reste inchangé si P est telle que $\det(P) = 1$. C'est le cas en particulier des matrices des isométries directes. Il en résulte que, si on se donne une orientation de l'espace euclidien, le déterminant ne dépend pas de la base orthonormée choisie. On le nomme alors parfois produit mixte.

b) Déterminant d'un endomorphisme

Soit M la matrice associée à un endomorphisme f dans la base e, et N la matrice associée à f dans la base ε. On a :

$$M = PNP^{-1} \text{ donc } \det(M) = \det(P)\det(N)\det(P^{-1}) = \det(N)$$

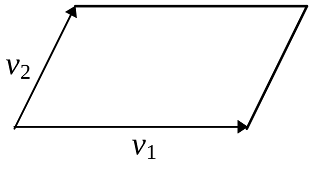
Ainsi, le déterminant d'une matrice associée à f ne dépend pas de la base choisie. On peut donc parler du déterminant de f, sans préciser la base. En transposant aux endomorphismes les propriétés vues pour les matrices, on a :

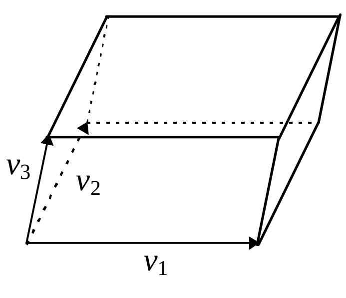
$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$$

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)} \text{ pour } f \text{ inversible.}$$

c) Interprétation géométrique

Soit donné une base $(e_1, ..., e_n)$. Alors le déterminant d'un système de vecteurs $(v_1, ..., v_n)$ dans cette base s'interprète comme le volume (algébrique) du parallélépipède d'arêtes $(v_1, ..., v_n)$, le volume unité étant défini comme celui du parallélépipède construit selon $(e_1, ..., e_n)$. Le déterminant sera positif lorsque la base $(v_1, ..., v_n)$ aura même orientation (voir plus bas) que la base $(e_1, ..., e_n)$.





L'application $(V_1, ..., V_n) \to$ volume$(V_1, ..., V_n)$ est en effet multilinéaire et alternée, en dimension n de la même façon qu'on l'a montré en dimension 3. Ainsi, volume$(V_1, ..., V_n)$ est proportionnel à $\det(V_1, ..., V_n)$. Le coefficient de proportionnalité est volume$(e_1, ..., e_n)$. Le volume dépend évidemment de l'unité choisie pour le mesurer. De même, le déterminant d'un système de vecteurs dépend de la base dans lequel on le calcule.

Soit maintenant un endomorphisme f. Celui-ci transforme un système de vecteurs $(V_1, ..., V_n)$ de volume det(V) (où V est la matrice des composantes des $(V_1, ..., V_n)$ dans une base $(e_1, ..., e_n)$) en un système de vecteurs $(f(V_1), ..., f(V_n))$, de volume det(MV) (où M est la matrice de f dans la base $(e_1, ..., e_n)$). On voit que $\det(f) = \det(M)$ est le rapport des deux volumes $\dfrac{\text{volume}(f(V_1), ..., f(V_n))}{\text{volume}(V_1, ..., V_n)}$. Autrement dit, det(M) est le facteur par lequel est multiplié le premier volume pour obtenir le second volume dans la transformation f. Si les volumes dépendent de l'unité choisie, il n'en est pas de même de leur rapport, l'unité de mesure disparaissant dans le quotient. C'est pourquoi le déterminant de f, rapport de deux volumes, ne dépend pas de la base choisie.

III : Applications des déterminants

1– Critère d'indépendance

PROPOSITION :

i) *Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base* $(e_1, e_2, ..., e_n)$, *et soit* $(V_1, V_2, ..., V_n)$ *une famille de n vecteurs. Ces vecteurs forment un système libre si et seulement si* $\det(V_1, ..., V_n)$ *est non nul.*

ii) *Soit* A *une matrice* $n \times n$. *Alors* A *est inversible si et seulement si* det(A) *est non nul.*

iii) *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, muni d'une base* $(e_1, e_2, ..., e_n)$. *Alors f est inversible si et seulement si* $\det(f)$ *est non nul.*

Ces trois propriétés sont en faite trois versions du même théorème. Prouvons le i).

<u>Démonstration</u> :
Si le système est libre, alors la matrice formée des coefficients est une matrice de rang n, donc inversible, et le déterminant d'une matrice inversible est non nul. Réciproquement, si le système est lié, alors l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres ; par exemple, $V_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i V_i$. Alors :

$$\det(V_1, ..., V_n) = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \det(V_i, V_2, ..., V_n)$$

et chaque déterminant de la somme de droite est nul, puisque V_i apparaît deux fois.

EXEMPLE : Condition d'indépendance des vecteurs $V_0, ..., V_{n-1}$ suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ ... \\ a_n^2 \end{pmatrix}...\begin{pmatrix} a_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} \\ ... \\ a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Considérons une relation de liaison :

$$\lambda_0 V_0 + ... + \lambda_{n-1} V_{n-1} = 0$$

Elle s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{n-1} a_1^{n-1} = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 a_2 + \ldots + \lambda_{n-1} a_2^{n-1} = 0 \\ \ldots \\ \lambda_0 + \lambda_1 a_n + \ldots + \lambda_{n-1} a_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

Il s'agit donc de déterminer les polynômes $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ s'annulant en $a_1, \ldots, a_n$. Si les a_i sont distincts, alors P admet n racines. Etant de degré au plus $n-1$, il est nul et tous ses coefficients sont nuls. Les vecteurs colonnes sont linéairement indépendants.
Si deux a_i sont égaux, P s'annule en au plus $n-1$ racines et il est possible de trouver un tel polynôme non nul, par exemple $\prod (X - a_i)$, le produit étant pris sur les racines distinctes. Il existe donc une relation de liaison.
Ainsi $(V_0, \ldots, V_{n-1})$ est libre si et seulement si les a_i sont distincts.

Cette propriété peut-être retrouvée en calculant le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ & \ldots & & \ldots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant s'appelle déterminant de Vandermonde (1735-1796). Il s'agit d'un polynôme des n variables $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dont tous les monômes sont de degré global $\frac{(n-1)n}{2}$. On remarque qu'il se factorise par $(a_j - a_i)$ puisque, si $a_j = a_i$, il possède deux lignes identiques. Or le produit des $(a_j - a_i)$, $i < j$, est lui–même un polynôme de degré $\frac{(n-1)n}{2.}$ Il est donc égal au déterminant de Vandermonde, à une constante près. Or les deux expressions possédant le terme $a_2 a_3^2 \ldots a_n^{n-1}$, la constante est égale à 1. Ainsi, le déterminant est égal à $\prod_{i<j} (a_j - a_i)$. Il est donc nul si et seulement si il existe i et j distincts tels que $a_i = a_j$, autrement dit, s'il existe deux lignes identiques. Cela donne aussi la condition de liaison des vecteurs.

On peut également procéder par récurrence sur n en considérant que le déterminant est un polynôme en a_n de degré $n-1$. Si les a_i sont distincts, ce polynôme s'annule en $n-1$ racines distinctes $a_n = a_1, \ldots, a_n = a_{n-1}$ et se factorise donc par $(a_n - a_1)\ldots(a_n - a_{n-1})$, le coefficient dominant étant un Vandermonde de rang $n-1$.

2– Formules de Cramer

Ce paragraphe se borne à justifier les formules découvertes par Cramer en 1750. Considérons un système de n équations à n inconnues $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $1 \leq i \leq n$. Soit A la matrice des coefficients (a_{ij}), X le vecteur de composantes (x_i) et B le vecteur de composantes (b_i). Le système est équivalent à AX = B. Il admet une solution unique si et seulement si A est inversible, c'est–à–dire, si det(A) est non nul. Notons $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ les colonnes de la matrice A. Que vaut $\det(V_1, \ldots, V_{i-1}, B, V_{i+1}, \ldots, V_n)$? Remplaçons B par $\sum_{j=1}^{n} x_j V_j$ et utilisons le fait que le déterminant est multilinéaire alterné. On obtient $x_i \det(A)$, ce qui donne les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(V_1, ..., V_{i-1}, B, V_{i+1}, ..., V_n)}{\det(A)}$$

EXEMPLE : En dimension 2, on a :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Les solutions sont :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Mais en pratique, la méthode de Gauss est plus efficace pour résoudre un système.

Annexe I : Base directe et indirecte

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On pourra réfléchir aux questions suivantes :

- Quelle différence entre une droite et un axe ?
- Dans le plan, comment est défini le sens trigonométrique ?
- Quels sont les repères usuels utilisés pour les écrans d'ordinateurs (n° de lignes et de colonnes) ?
- Dans l'espace de dimension 3, comment est défini géométriquement le produit vectoriel ?
- Comment est fait un tire–bouchon ?
- Quel sens possède cette phrase (lue dans la revue *Pour La Science*) ? "La plupart des comètes se déplacent dans le sens trigonométrique par rapport au soleil."
- Comment distingue–t–on la gauche de la droite ?

Dans ce dernier cas, il est intéressant de consulter plusieurs dictionnaires. Le Larousse en deux volumes (1991) définit le côté droit comme étant "*du côté opposé au cœur*", et le côté gauche, "*en parlant de l'homme et des animaux, qui est situé du côté où se font sentir les battements du cœur*". On peut se poser la question de savoir si tous les animaux ont le cœur du même côté. Aussi le Grand Larousse Universel en 15 volumes (1994) ne fait-il allusion qu'à l'être humain. La partie gauche du corps "*se dit de toute partie du corps qui, au regard de chaque individu, est située du côté de son cœur*". Cependant, une référence anatomique est étrangère à une définition mathématique. Cherchons s'il existe une définition ne faisant pas allusion au corps humain. L'*Oxford advanced learner's dictionary of current english* (1974) définit *the left side* comme étant "*the side of a person's body which is towards the west when he faces north*" et "*opposite of right*". De son côté, *the right side* est "*the side of the body which is toward the east when a person faces north*" et "*contrasted with left*". Ainsi, *left* et *right* sont définis à partir des points cardinaux. Mais comment ces derniers sont-ils définis ? *West* est le "*point of the horizon where the sun sets*". *East* est le "*point of horizon where the sun rises*". Mais la définition de *north* qu'il nous faut encore découvrir pour savoir ce que désigne *left* et *right*, apporte le coup fatal : "*one of the four cardinal points of the compass, lying to the **left** of a person facing the sunrise*". Ainsi, *left* est défini à partir de *north*, mais *north* est défini à partir de *left*. Il est clair alors qu'une inversion des mots *right* et *left* garde toute sa cohérence à ce dictionnaire, même si le *north* se trouverait alors dans une direction opposée à la direction usuelle. Un autre dictionnaire, le *Penguin all english dictionary* (Bordas 1970), définit *left* comme étant du côté du cœur, mais *north* comme "*the compass direction opposite to the midday sun*". Cette dernière définition a l'intérêt de ne pas lier la définition de *north* à celle de *left*, mais elle est totalement déconseillée aux petits Australiens, sous peine de placer l'Antarctique au Nord.

Il faut se rendre à l'évidence : pour l'ensemble des questions précédentes, une convention *arbitraire* a été choisie, et une autre convention, *et une seule autre*, aurait pu être préférée. On dira qu'il y a deux façons différentes d'orienter le plan ou l'espace. Cette situation est générale à toute dimension.

Considérons un espace vectoriel de dimension n. Nous dirons qu'une base $(e_1, ..., e_n)$ a même orientation qu'une autre base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ si la matrice de passage P de e à ε a un déterminant positif. Ceci définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des bases. En effet :

❑ $(e_1, ..., e_n)$ a même orientation qu'elle-même puisque la matrice de passage est ici l'identité de déterminant 1.

❑ Si $(e_1, ..., e_n)$ a même orientation que $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, alors $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ a même orientation que $(e_1, ..., e_n)$. En effet, si P est la matrice de passage de la base e à la base ε, alors la matrice de passage de la matrice ε à la base e est P^{-1}, et det(P) a même signe que $\det(P^{-1})$.

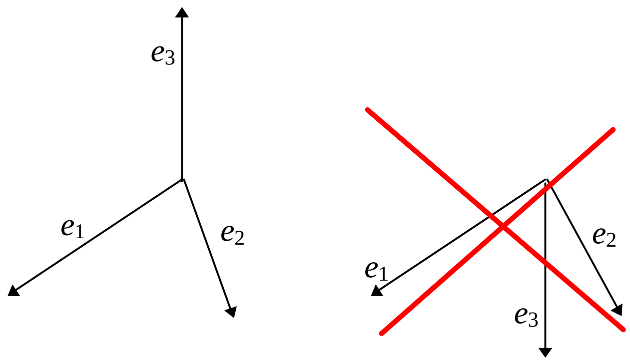
❑ Si $(e_1, ..., e_n)$ a même orientation que $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, et si $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ a même orientation que $(\eta_1, ..., \eta_n)$, alors $(e_1, ..., e_n)$ a même orientation que $(\eta_1, ..., \eta_n)$. En effet, si P est la matrice de passage de la base e à la base ε et Q la matrice de passage de la base ε à la base η, alors la matrice de passage de la base e à la base η est PQ. Et si $\det(P) > 0$ et $\det(Q) > 0$, alors $\det(PQ) = \det(P)\det(Q) > 0$.

Il n'existe que deux orientations possibles correspondant chacune à une classe d'équivalence pour la relation précédente. En effet, soit (e) une base, (e') et (e'') deux autres bases n'ayant pas même orientation que (e). Montrons que (e') a même orientation que (e''). On a en effet :

$$\begin{cases} \det(P_{ee'}) < 0 \\ \det(P_{e''e}) < 0 \end{cases} \Rightarrow \det(P_{e''e'}) = \det(P_{e''e}P_{ee'}) > 0$$

Le choix (arbitraire) d'une de ces deux orientations définit une orientation de l'espace de dimension n. Les bases de cette classe sont dites directes, les bases de l'autre classe sont dites indirectes. Il n'existe aucun moyen de privilégier une orientation par rapport à l'autre.

Usuellement, en dimension 3, on qualifie de directe la base de gauche, d'indirecte celle de droite :



Voici quelques notions mathématiques ou physiques dépendant de l'orientation de l'espace de dimension 2 ou 3 :

- La définition du sens trigonométrique
- Le produit vectoriel (voir annexe)
- Le champ magnétique ***B*** (le vecteur ***B***, dépendant de l'orientation, est dit axial)

- Le moment cinétique $m\boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{V}$ et le moment dynamique $m\boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{a}$
- Le moment d'un dipôle magnétique (petite boucle de circuit de surface S parcourue par un courant I. $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{I}\boldsymbol{S}$ où $\boldsymbol{S}$ est orienté orthogonalement à la boucle en fonction du sens du circuit.
- Les couples
- Les vecteurs de rotation
- Le rotationnel

Voici quelques notions n'en dépendant pas :
- L'orthogonalité
- Le gradient, la divergence
- Le champ électrique $\boldsymbol{E}$ (Le vecteur $\boldsymbol{E}$, ne dépendant pas de l'orientation, est dit polaire)
- Les forces, vitesses et accélérations

EXEMPLE D'APPLICATIONS

De même qu'il existe en physique la notion d'homogénéité des unités, permettant de tester rapidement la validité d'une formule, il existe également la notion d'homogénéité du caractère axial ou polaire des vecteurs. Ci-dessous, les vecteurs axiaux sont en rouge, les vecteurs polaires en bleus. Nous notons également en rouge les produits vectoriels. On a alors :

Vecteur axial = Vecteur polaire ∧ Vecteur polaire
Vecteur polaire = Vecteur polaire ∧ Vecteur axial
Vecteur axial = Vecteur axial ∧ Vecteur axial

On a également :

Rot Vecteur polaire = Vecteur axial
Rot Vecteur axial= Vecteur polaire

❑ Force électrostatique $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$: égalité de deux vecteurs polaires

❑ $\boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{grad}\mathrm{V}$: égalité de deux vecteurs polaires

❑ $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$ (force de Lorentz) ou $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = i\mathrm{d}\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{B}$ (force de Laplace) : égalité de deux vecteurs polaires. $q\boldsymbol{v}$ ou $i\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ sont polaires, $\boldsymbol{B}$ est axial, mais le produit vectoriel des deux est polaire. Ainsi, si un des membres est un vecteur polaire et si l'autre membre contient un vecteur axial et si le résultat est polaire, il faudra nécessairement qu'intervienne un produit vectoriel.

❑ $\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{i\mathrm{d}\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{u}}{r^2}$ (loi de Biot et Savart) : égalité de deux vecteurs axiaux.

❑ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\mu} \wedge \boldsymbol{B}$ (couple s'appliquant sur un dipôle magnétique plongé dans un champ magnétique) : égalité de deux vecteurs axiaux.

❑ L'orientation peut également s'appliquer à des quantités scalaires. On parle alors de pseudo-scalaires dont le signe dépend du choix arbitraire de l'orientation :

$$\int_\Gamma \boldsymbol{B}.\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \iint_D \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} \text{ (Théorème d'Ampère)}$$

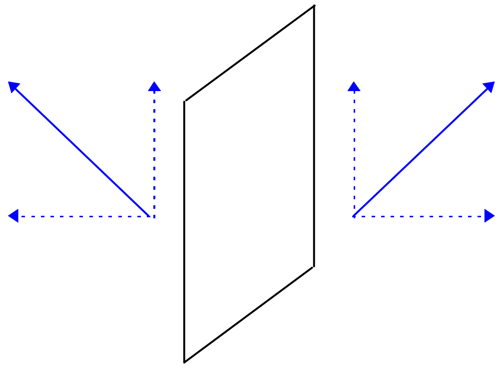
❑ $\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ (une des équations de Maxwell) : égalité entre deux vecteurs axiaux

❑ $\dfrac{1}{\mu_0}.\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ (une autre équation de Maxwell) : égalité entre deux vecteurs polaires

❑ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{F}$ (couple créé en M par une force $\boldsymbol{F}$ par rapport à O) : égalité de deux vecteurs axiaux

❑ $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM}$ (vitesse d'un point M tournant par rapport à O à la vitesse angulaire Ω) égalité de deux vecteurs polaires.

Le fait qu'une réflexion S (symétrie par rapport à un plan en dimension 3, ou plus généralement par rapport à un hyperplan en dimension quelconque) transforme une base directe en base indirecte et intervertit donc l'orientation de l'espace a des conséquences importantes sur les vecteurs polaires et les vecteurs axiaux. Un vecteur polaire est un "vrai" vecteur ; il sera donc symétrisé comme on s'y attend : sa composante parallèle au plan de symétrie sera invariante, sa composante orthogonale à ce plan sera changée de signe.



Mais un vecteur axial n'est pas un "vrai" vecteur. Il est défini par exemple comme produit vectoriel de deux vecteurs polaires $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. Or, si l'on décompose chacun de ces vecteurs en une composante parallèle au plan et une composante orthogonale, on a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{/\!/} + \boldsymbol{u}_\perp \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{/\!/} + \boldsymbol{v}_\perp \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}_{/\!/} + \boldsymbol{u}_\perp) \wedge (\boldsymbol{v}_{/\!/} + \boldsymbol{v}_\perp)$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{u}_{/\!/} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/}}_{\text{ortho-gonal au plan}} + \underbrace{\boldsymbol{u}_\perp \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/} + \boldsymbol{u}_\perp \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/}}_{\text{paralallèle au plan}} \text{ (en tenant compte du fait que } \boldsymbol{u}_\perp \wedge \boldsymbol{v}_\perp = 0)$$

On vérifiera alors que S($\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$) est différent de S($\boldsymbol{u}$) ∧ S($\boldsymbol{v}$). En effet :

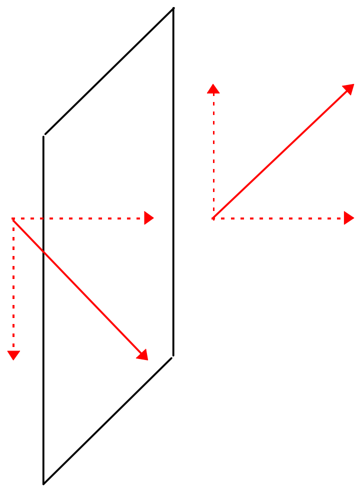
$$S(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = -\,\boldsymbol{u}_{/\!/} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/} + \boldsymbol{u}_\perp \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/} + \boldsymbol{u}_{/\!/} \wedge \boldsymbol{v}_\perp$$

alors que

$$S(\boldsymbol{u}) \wedge S(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}_{/\!/} - \boldsymbol{u}_\perp) \wedge (\boldsymbol{v}_{/\!/} - \boldsymbol{v}_\perp)$$

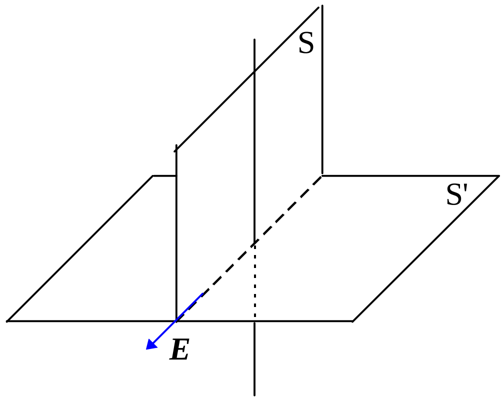
$$= \boldsymbol{u}_{/\!/} \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/} - \boldsymbol{u}_\perp \wedge \boldsymbol{v}_{/\!/} - \boldsymbol{u}_{/\!/} \wedge \boldsymbol{v}_\perp = -\,S(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$$

En physique, si l'on souhaite utiliser les symétries d'un système tout en gardant la même orientation de l'espace, on est amené à considérer que $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est transformé en S($\boldsymbol{u}$) ∧ S($\boldsymbol{v}$) et on est conduit à la règle suivante : *La composante du vecteur axial orthogonale au plan est invariante, la composante parallèle est changée en son opposée*. Ce sera le cas du vecteur champ magnétique $\boldsymbol{B}$ par exemple.

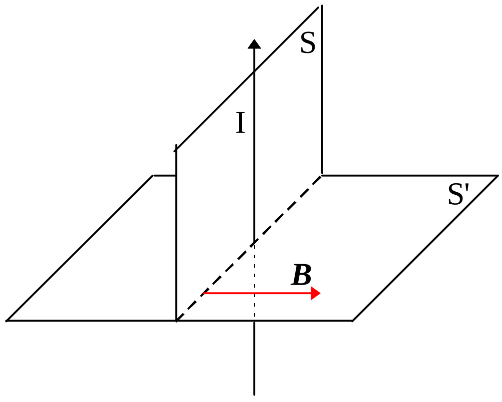


EXEMPLES :

❑ Considérons un fil rectiligne uniformément chargé. Soit S une symétrie par rapport à un plan contenant le fil. Le système reste invariant par S. Il en est donc de même du champ électrique (polaire) ***E*** créé par le fil. ***E*** est contenu dans le même plan que le fil. Soit S' une symétrie par rapport à un plan orthogonal au fil. Le système reste également invariant par S'. Il en est donc de même de ***E***. ***E*** est donc également contenu dans ce plan. La seule possibilité est que ***E*** soit radial.



❑ Considérons un fil rectiligne parcouru par un courant I. Soit S une symétrie par rapport à un plan contenant le fil. Le système reste invariant par S. Il en est donc de même du champ magnétique (axial) ***B*** créé par le fil. Mais pour un vecteur axial, cela signifie que ***B*** est orthogonal à ce plan. On peut retrouver ce résultat par l'autre symétrie S' par rapport à un plan orthogonal au fil. Dans cette symétrie, le sens du courant est inversé. Il en est de même de ***B***. Mais pour un vecteur axial, cela signifie qu'il est parallèle au plan considéré.



Annexe II : Produit vectoriel

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ le vecteur noté $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et égal à $\begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - a'b \end{pmatrix}$. Il est tel que, pour tout vecteur $\boldsymbol{w}$, $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$. On appelle parfois cette expression produit mixte de $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Il en résulte que :

❑ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *est lié si et seulement si* $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = 0$.
En effet, si $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est lié, alors pour tout $\boldsymbol{w}$, on a $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ donc $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est orthogonal à tout $\boldsymbol{w}$ donc est nul. Réciproquement, si le produit vectoriel est nul, alors pour tout $\boldsymbol{w}$, $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ donc $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est lié. Or si $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ était libre, ils engendreraient un plan et, en prenant pour $\boldsymbol{w}$ un vecteur non nul orthogonal au plan, on aurait $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ libre. On a donc une contradiction et par conséquent $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est lié.

❑ $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ *est orthogonal à* $\boldsymbol{u}$ *et à* $\boldsymbol{v}$.
Cela résulte du fait que $\langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0$ et de même pour $\boldsymbol{v}$.

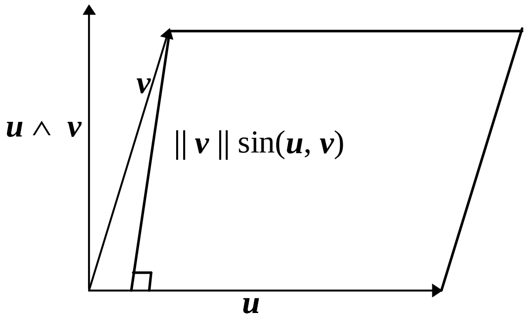
❑ *Si* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *est libre,* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})$ *forme une base directe.*
En effet, $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \rangle = \| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|^2 > 0$

❑ $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|^2 + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 = \| \boldsymbol{u} \|^2 \, \| \boldsymbol{v} \|^2$
Vérification un peu fastidieuse mais sans difficulté que :

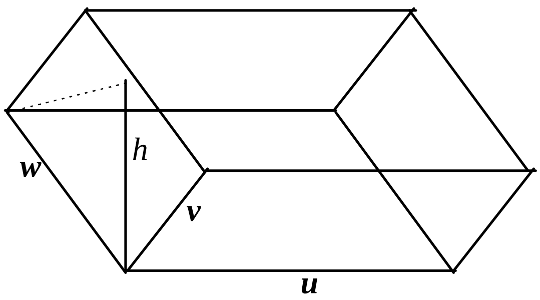
$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - a'b)^2 + (aa' + bb' + cc')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)$$

❑ $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \| = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
En effet $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ et on remplace dans la relation précédente. En particulier, si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont orthogonaux, $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \| = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \|$.

On en déduit que $\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|$ s'interprète comme l'aire dans l'espace du parallélogramme de côté $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.



La valeur absolue du produit mixte s'interprète comme le volume du parallélépipède construit sur $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$. En effet, la norme de $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est l'aire du parallélogramme servant de base, et le produit scalaire de ce vecteur par $\boldsymbol{w}$ permet de projeter $\boldsymbol{w}$ sur $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ et d'obtenir la hauteur h du parallélépipède.



❑ $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}$
Vérification sur les composantes ou bien en utilisant le caractère alterné du déterminant.

❑ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *est bilinéaire*
(c'est-à-dire linéaire par rapport à chacun des vecteurs). Cela se voit aussi soit sur les composantes, soit en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chacun de ses vecteurs.

❑ $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = -<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>\boldsymbol{u} + <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}>\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}>\boldsymbol{v} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>\boldsymbol{w}$
(*double produit vectoriel*)
Il suffit de choisir une base orthonormée directe, adaptée au problème. On choisit $\boldsymbol{I}$ unitaire tel que :

$$\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|\boldsymbol{I}$$

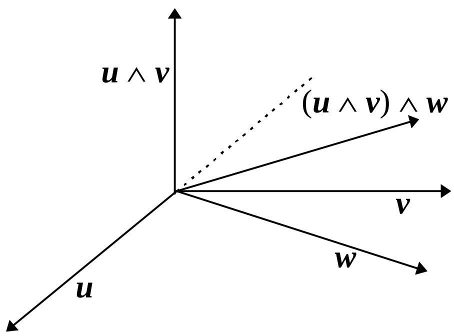
On choisit $\boldsymbol{J}$ tel que :

$$\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|(\cos\theta\,\boldsymbol{I} + \sin\theta\,\boldsymbol{J})$$

On pose alors $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{J}$. On a alors :

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\sin\theta\,\boldsymbol{K}$$

Pour $\boldsymbol{w}$ quelconque, il suffit alors de faire le calcul en utilisant l'expression des composantes du produit vectoriel. Un dessin, dans le cas particulier où les trois vecteurs sont coplanaires, permet de retrouver rapidement la formule :



Dans la figure précédente, $(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w}$ appartient au plan $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, a une composante négative selon $\boldsymbol{u}$ et positive selon $\boldsymbol{v}$. Donc :

$$(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = -\,??\,\boldsymbol{u} + \,???\,\boldsymbol{v}$$

?? et ??? ne sont autres que les produits scalaires des autres vecteurs, à savoir ?? = $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>$ et ??? = $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}>$.

❑ *Résolution de l'équation* $a \wedge x = b$ (*division vectorielle*)

L'inconnue est x, a et b sont donnés

Si $a = 0$

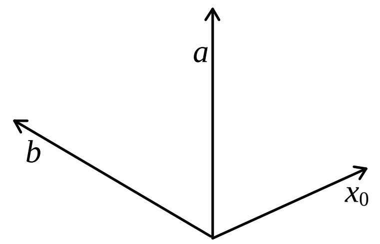
si $b = 0$, alors $S = \mathbb{R}^3$

si $b \neq 0$, alors $S = \varnothing$.

Si $a \neq 0$

si $<a, b> \neq 0$ alors $S = \varnothing$.

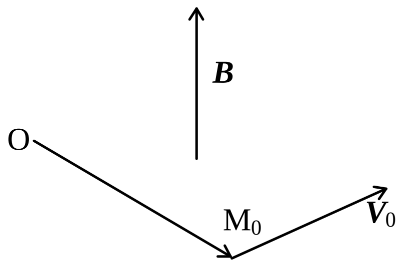
si $<a, b> = 0$, alors x est la somme d'une solution particulière x_0 et (par différence entre x et x_0) de la solution générale de l'équation homogène $a \wedge (x - x_0) = 0$. L'équation homogène admet pour solution $x - x_0 = \lambda a$. Quant à la solution particulière x_0, on peut prendre le vecteur $\frac{1}{\| a \|^2} b \wedge a$. En effet, le vecteur $b \wedge a$ est un bon candidat pour pointer dans une direction, qui, multipliée vectoriellement par a, redonne b. Il suffit juste d'ajuster convenablement sa norme de façon que $\| x_0 \| \| a \| = \| b \|$ et donc de s'arranger pour que $\| x_0 \| = \frac{\| b \|}{\| a \|}$



Ainsi :

$$x = \frac{1}{\| a \|^2} b \wedge a + \lambda a$$

EXEMPLE : Considérons une particule M de masse m, possédant une charge électrique q, pénétrant dans un champ magnétique constant et uniforme $\boldsymbol{B}$ avec une vitesse $\boldsymbol{V}_0$ orthogonale à $\boldsymbol{B}$. La particule est repérée par le vecteur $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{r}$. O sera choisi sur un axe perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$ et à $\boldsymbol{V}_0$ et passant par M à l'instant initial. Un choix plus précis sera fait plus bas. Pour le moment, O est un point choisi arbitrairement de cet axe.



Il est remarquable que tout autre choix d'une base est parfaitement inutile, la résolution pouvant être menée vectoriellement jusqu'au bout.

La particule est soumise à la force de Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B} = m \frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$.

i) Cette force est donc orthogonale à $\boldsymbol{B}$ de sorte que $<\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}, \boldsymbol{B}> = 0$ et donc que $<\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}>$ est constant.

Etant nul à l'instant initial, le produit scalaire est identiquement nul. Or $<\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}> = 0 = <\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \boldsymbol{B}>$. Donc

<$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{B}$> est constant, et étant nul à l'instant initial par choix de O, il est identiquement nul. Cela signifie que M reste dans le plan passant par O est orthogonal à $\boldsymbol{B}$. La trajectoire est plane.

ii) La force $\boldsymbol{F}$ est également orthogonale à $\boldsymbol{V}$, de sorte que $<\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{V}> = 0 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}<\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}> = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{V}^2$, donc la vitesse scalaire V est constante, égale à V_0.

iii) On peut également écrire que :

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - q\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} - q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{V} - q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B})$$

$\Rightarrow$ $m\boldsymbol{V} - q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}$ est un vecteur constant au cours du temps $= m\boldsymbol{V}_0 - q\boldsymbol{r}_0 \wedge \boldsymbol{B}$

C'est là que nous affinons notre choix de O, et que nous définissons en particulier la distance r_0 à laquelle il se situe de M_0. En effet, en changeant le choix de O le long de l'axe, on change la valeur de r_0 et donc le vecteur $\boldsymbol{L}$. Nous choisissons O de façon que $\boldsymbol{L}$ soit nul. Il suffit pour cela que :

$$q\boldsymbol{r}_0 \wedge \boldsymbol{B} = m\boldsymbol{V}_0$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{r}_0 = \frac{\boldsymbol{B} \wedge m\boldsymbol{V}_0}{q\mathrm{B}^2}$ obtenu par division vectorielle ; $\boldsymbol{r}_0$ est de module $\frac{m\mathrm{V}_0}{q\mathrm{B}} = r_0$

iv) Une fois ce choix fait, l'équation trouvée en iii) devient :

$$m\boldsymbol{V} - q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

$\Rightarrow$ $q\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{B} = m\boldsymbol{V}$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{B} \wedge m\boldsymbol{V}}{q\mathrm{B}^2}$ obtenu par la même division vectorielle que précédemment.

$\boldsymbol{r}$ est orthogonale à $\boldsymbol{V}$ de sorte que $<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}> = 0 = <\boldsymbol{r}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}> = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}> = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2$. Donc r est constant, égal à $r_0 = \frac{m\mathrm{V}_0}{q\mathrm{B}}$, ce qui signifie que la trajectoire est circulaire, de rayon $\frac{m\mathrm{V}_0}{q\mathrm{B}}$, de centre O.

◆