ESPACES EUCLIDIENS

PLAN

I : Produit scalaire

1– Définition, norme associée

DEFINITION

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est dit préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire, à savoir une forme bilinéaire symétrique < , > définie positive, ce qui signifie :

i) *Pour tout y de E, l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à x associe <x, y> est linéaire. Pour tout x, l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à y associe <x, y> est linéaire.*

ii) $\forall x \in E, \forall y \in E, \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

iii) $\forall x \in E, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iv) $\forall x \in E, \langle x, x\rangle \geq 0$

Si E est de dimension finie, E est dit euclidien. On note aussi le produit scalaire $x\mathbf{.}y$ s'il n'y a pas ambiguïté avec un autre produit.

EXEMPLE :

❑ Si E = $\mathbb{R}^n$, on dispose du produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$.

❑ si E = $C^0([a,b])$, espace des fonctions continues sur $[a, b]$, E peut être muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$

On associe au produit scalaire une norme dite euclidienne :

$\| x \| = \sqrt{<x, x>}$

Cette norme vérifie les propriétés suivantes :

a) $\forall x \in E$, $\| x \| \geq 0$ et $\| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$

c) $\forall (x, y) \in E^2$, $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

La propriété a) découle du fait que $<x, x> \geq 0$ et $<x, x> = 0 \Rightarrow x = 0$. La propriété b) se déduit de $<\lambda x, \lambda x> = \lambda^2 <x, x>$ en raison de la bilinéarité. La propriété c) n'est absolument pas évidente et est démontrée dans le paragraphe suivant.

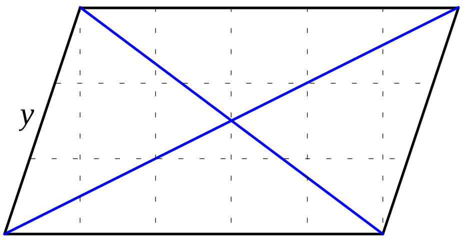
Cette norme permet de définir une distance entre deux vecteurs x et y (considérés ici plutôt comme des points lorsque E est vu comme espace affine), à savoir $\| x - y \|$.

On peut retrouver le produit scalaire à partir de la norme. En effet :

$$<x, y> = \frac{\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2}{2} = \frac{\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2}{4}$$

Ces relations sont dites identités de polarisation.

On peut interpréter l'égalité $<x, y> = \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2)$ en disant que le produit scalaire de deux vecteurs x et y est égal au quart de la différence des carrés des longueurs des deux diagonales du parallélogramme construit selon x et y.



Dans la figure ci-dessus, $<x, y> = 5$ alors que $\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 = (3\sqrt{5})^2 - 5^2 = 20$.

On a aussi l'identité dite du parallélogramme :

$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$

qui énonce que la somme des carrés des longueurs des diagonales ($x + y$ et $x - y$) d'un parallélogramme (de côtés x et y) est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés. Dans la figure précédente, le parallélogramme est construit selon deux vecteurs, x de norme 5, et y de norme $\sqrt{10}$. La grande diagonale est portée par le vecteur $x + y$ et a pour longueur $3\sqrt{5}$ alors que la petite diagonale est portée par $x - y$ et a pour longueur 5. On a bien :

$(3\sqrt{5})^2 + 5^2 = 2 \times 25 + 2 \times \sqrt{10}^2 = 70$.

2– Inégalité de Cauchy-Schwarz

PROPOSITION

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire < , >. Alors :

i) $\forall x \in E, \forall y \in E, |<x, y>| \leq \| x \| \, \| y \|$ (*inégalité de Cauchy-Schwarz*)

ii) $\forall x \in E, \forall y \in E, \| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (*inégalité triangulaire*)

Démonstration :
i) Si x ou y est nul, l'inégalité est évidente. Dans le cas contraire, on considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\to \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle t + t^2\langle y, y\rangle \end{aligned}$$

Le trinôme du second degré en t est positif ou nul pour tout t. Il ne peut donc posséder deux racines distinctes, donc son discriminant est négatif ou nul. Donc :

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \left|\langle x,y\rangle\right| \leq \| x \| \, \| y \|$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Cauchy–Schwarz. Elle permet de définir le cosinus de deux vecteurs comme étant égal à $\dfrac{\langle x, y\rangle}{\| x \| \, \| y \|}$ puisque ce nombre est compris entre – 1 et 1. On remarque que l'égalité $\left|\langle x,y\rangle\right| = \| x \| \, \| y \|$ exprime le fait que le discriminant est nul, et donc qu'il existe une racine double t qui annule $\langle x + ty, x + ty\rangle$. Autrement dit, dans ce cas, x et y sont liés.

ii) En élevant l'inégalité ii) au carré, on obtient une inégalité équivalente :

$$\langle x + y, x + y\rangle \leq (\| x \| + \| y \|)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\| x \| \, \| y \| + \| y \|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle x, y\rangle \leq \| x \| \, \| y \|$$

ce qui découle du i). Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité triangulaire

3– Bases orthonormées

DEFINITIONS

i) *Un vecteur x est dit unitaire ou normé si* $\| x \| = 1$.

ii) *Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$.*

iii) *Une base* $(e_1,...,e_n)$ *est dite orthogonale si les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux.*

iv) *Une base* $(e_1,...,e_n)$ *est dite orthonormale ou orthonormée si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont normés.*

On peut remarquer que si un système de vecteurs non nuls est constitué de vecteurs deux à deux orthogonaux, alors, ce système est libre car :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \forall j, \langle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_j\rangle = 0 \Rightarrow \forall j, \alpha_i \| e_i \|^2 = 0 \Rightarrow \forall j, \alpha_i = 0$$

Pour que ce soit une base, il suffit que le nombre de ces vecteurs soit égal à la dimension de l'espace.

L'intérêt d'une base orthonormée est que le produit scalaire s'y exprime très simplement. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, alors :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } \| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

alors que dans une base quelconque, on a :

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i <e_i, e_j>$$

ou encore, si l'on note M la matrice symétrique de terme général $<e_i, e_j>$:

$$<x, y> = {}^t\text{XMY}$$

où X et Y sont les vecteurs colonnes, composantes de x et y. Dans le cas du produit scalaire usuel, $<x, y> = {}^t\text{XY}$.

THEOREME DE PYTHAGORE

Soit $V_1, ..., V_p$ *une famille de vecteurs orthogonaux. Alors :*

$$\| V_1 + ... + V_p \|^2 = \| V_1 \|^2 + \| V_2 \|^2 + ... + \| V_p \|^2$$

Il suffit de développer le carré de gauche. Tous les doubles produits scalaires de deux vecteurs distincts sont nuls puisque les vecteurs sont orthogonaux.

Il est facile de construire une base orthonormée à partir d'une base orthogonale. Il suffit pour cela de diviser chaque vecteur par sa norme pour se ramener à des vecteurs unitaires. Nous allons décrire un procédé permettant de construire une base orthogonale d'un espace vectoriel de dimension finie à partir de n'importe quelle base. Ce procédé est appelé procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt :

❑ Prendre $\varepsilon_1 = e_1$
❑ Par récurrence, pour construire ε_k, écrire

$$\varepsilon_k = e_k + \alpha_{k-1}\varepsilon_{k-1} + ... + \alpha_1\varepsilon_1$$

On trouve la valeur de α_j en écrivant $<\varepsilon_k, \varepsilon_j> = 0$. On obtient :

$$0 = <e_k, \varepsilon_j> + \alpha_j<\varepsilon_j, \varepsilon_j> \text{ d'où } \alpha_j.$$

Pour simplifier les calculs, on peut au besoin prendre un multiple non nul de ε_k. On voit par récurrence que ε_k est combinaison linéaire de $(e_1, ..., e_k)$, la composante suivant e_k étant 1. Il en résulte qu'aucun des ε_k n'est nul, et qu'ils constituent une base de E.

EXEMPLE 1 :

Dans $\mathbb{R}^4$, on se donne le sous–espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} x + y = -z - t \\ x - y = -z \end{cases}$ ou à $\begin{cases} x = -z - \dfrac{t}{2} \\ y = -\dfrac{t}{2} \end{cases}$. Les éléments de ce sous-espace sont donc de la forme $-z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Il s'agit donc d'un sous–espace vectoriel de dimension 2. Une base est donnée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On prend $\varepsilon_1 = e_1$. On cherche $\varepsilon_2 = e_2 + \alpha\varepsilon_1$, avec α tel que :

$$<\varepsilon_1,\varepsilon_2> = 0 \Leftrightarrow <e_1,e_2> + \alpha<e_1,e_1> = 0$$

$\Leftrightarrow \qquad 1 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{1}{2}$

D'où $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Il suffit ensuite de normer chaque vecteur.

EXEMPLE 2 :

Dans $\mathbb{R}^4$, on se donne le sous-espace vectoriel d'équation $2x + 3y - z - 2t = 0$. Trouver une base orthogonale de cet hyperplan. Une base de cet espace est :

$$e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Etant de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, on dit que c'est un hyperplan). On prend :

$\varepsilon_1 = e_1$

$\varepsilon_2 = e_2 + \alpha\varepsilon_1$ avec α tel que $0 = \langle\varepsilon_2,\varepsilon_1\rangle = \langle e_2,\varepsilon_1\rangle + \alpha\langle\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle$

$\Rightarrow \qquad 0 = -3 + 13\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{3}{13}$

Pour éviter les dénominateurs, nous prendrons plutôt $13e_2 + 3e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tous les coefficients étant pairs, on obtient un vecteur plus simple en en prenant la moitié, ce qui donne $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$

Puis $\qquad \varepsilon_3 = e_3 + \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2$ avec α et β tels que :

$$\begin{cases} 0 = \langle\varepsilon_3,\varepsilon_1\rangle = \langle e_3,\varepsilon_1\rangle + \alpha\langle\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle = -3 + 13\alpha \\ 0 = \langle\varepsilon_3,\varepsilon_2\rangle = \langle e_3,\varepsilon_2\rangle + \beta\langle\varepsilon_2, \varepsilon_2\rangle = 2 + 182\,\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{3}{13} \\ \beta = -\dfrac{2}{182} = -\dfrac{1}{91} \end{cases}$$

Nous prendrons plutôt $\varepsilon_3 = 91e_3 + 21\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ -13 \\ 91 \end{pmatrix}$ dont tous les coefficients sont multiples de 13. D'où plutôt :

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir une base orthonormale, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme, soit respectivement $\sqrt{13}$, $\sqrt{182}$, $3\sqrt{7}$.

EXEMPLE 3 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère le produit scalaire $xx' + \frac{1}{2}(xy' + yx') + yy'$. La base canonique (e_1,e_2) n'est pas orthonormée. On obtient une base orthogonale en posant :

$$\varepsilon_1 = e_1$$
$$\varepsilon_2 = e_2 + \lambda e_1$$

avec λ vérifiant $<\varepsilon_1,\varepsilon_2> = 0 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$.

Il suffit ensuite de normer les vecteurs.

On dispose d'un théorème de la base orthonormée incomplète.

THEOREME

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, ..., e_p)$ une famille orthonormée. Alors il est possible de compléter $(e_1, ..., e_p)$ en une base orthonormée.

Démonstration :

On complète d'abord $(e_1, ..., e_p)$ en une base de E, puis on lui applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. Celui-ci ne va pas modifier les p premiers vecteurs qui sont déjà orthogonaux.

4– Sous–espaces orthogonaux

DEFINITION

Deux sous–espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel préhilbertien sont dits orthogonaux si :

$$\forall x \in F, \forall y \in G, <x, y> = 0$$

Si on est en dimension finie, il suffit de vérifier que les vecteurs d'une base de F sont orthogonaux aux vecteurs d'une base de G. Par ailleurs, F et G sont en somme directe. En effet, soit x élément de $F \cap G$. On a :

$$\forall y \in F, \forall z \in G, <y, z> = 0$$

Or $x \in F$ et $x \in G$

donc $<x, x> = 0$

DEFINITION

Soit F un sous–espace vectoriel d'un espace vectoriel E préhilbertien n. On appelle orthogonal de F l'ensemble des vecteurs y de E tels que :

$$\forall x \in F, <x, y> = 0$$

Si F est de dimension finie, pour appartenir à l'orthogonal de F, il suffit de vérifier l'orthogonalité avec une base de F.

Il est facile de montrer que l'orthogonal de F, noté $F^{\perp}$ ou F^{o} est un sous–espace vectoriel de E, orthogonal à F. Nous allons montrer que, **si F est de dimension finie**, ces deux sous–espaces vectoriels sont supplémentaires.

i) Nous savons déjà que F et $F^{\perp}$ sont en somme directe.

ii) Nous allons maintenant montrer que $E = F + F^{\perp}$

Pour cela, considérons $(e_1, .., e_m)$ une base orthonormée de F. Soit x élément de E. Considérons l'application p définie par $p(x) = \sum_{i=1}^{m} <e_i,x> e_i$. On note que $p(x)$ appartient à F. Vérifions que $x - p(x)$ appartient à $F^{\perp}$. Il suffit de montrer que son produit scalaire avec chaque e_j de la base de F est nul :

$$<e_j,x - p(x)> = <e_j,x - \sum_{i=1}^{m} <e_i,x> e_i>$$

$$= <e_j,x> - <e_j,\sum_{i=1}^{m} <e_i,x> e_i>$$

$$= <e_j,x> - \sum_{i=1}^{m} <e_i,x> <e_j,e_i>$$

$$= <e_j,x> - <e_j,x> = 0$$

On a donc $x = p(x) + (x - p(x))$ élément de $F + F^\perp$.

La quantité $\| x - p(x) \|$ s'appelle distance de x à F. Si on considère la quantité $\| x - z \|$ lorsque z décrit F, celle-ci atteint son minimum pour $z = p(x)$. En effet, d'après le théorème de Pythagore :

$\| x - z \|^2 = \| x - p(x) + p(x) - z \|^2$ avec $x - p(x)$ élément de $F^\perp$ et $p(x) - z$ élément de F

$= \| x - p(x) \|^2 + \| p(x) - z \|^2$

$\geq \| x - p(x) \|^2$

En outre, pour $z = 0$:

$$\| x \|^2 = \| x - p(x) \|^2 + \| p(x) \|^2$$

Il en résulte que :

$$\| p(x) \|^2 \leq \| x \|^2$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\sum_{i=1}^{n} \left|<e_i,x>\right|^2 \leq \| x \|^2 \text{ (inégalité de Bessel).}$$

p n'est autre que le projecteur orthogonal de E sur F. Si E est de dimension finie, on a :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$$

Enfin, et toujours si E est de dimension finie $(F^\perp)^\perp = F$. En effet, ces deux espaces ont même dimension puisque $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$ mais aussi $\dim(E) = \dim(F^\perp) + \dim((F^\perp)^\perp)$ donc $\dim(F) = \dim((F^\perp)^\perp)$ et on vérifie facilement que F est inclus dans $(F^\perp)^\perp$. Cette propriété est fausse en dimension infinie ce qu'on peut montrer de la façon suivante : on prend $E = C^0([0,1])$ et F le sous–espace vectoriel des fonctions polynomiales. On définit le produit scalaire :

$$<f,g> = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$

On peut montrer que la seule fonction orthogonale à tous les polynômes est la fonction nulle. Ainsi, $F^\perp = \{0\}$, et $(F^\perp)^\perp = E \neq F$. Dans ce cas, on a également $F \oplus F^\perp = F \neq E$. Le cas de la dimension infinie est donc contraire aux habitudes que l'on a en dimension finie.

Autres propriétés : si F est inclus dans G, alors $G^\perp$ est inclus dans $F^\perp$. En effet :

$$x \in G^\perp \Rightarrow \forall y \in G, <x, y> = 0 \Rightarrow \forall y \in F, <x, y> = 0 \Rightarrow x \in F^\perp$$

Si A est une partie de E, on appelle orthogonal de A l'ensemble des vecteurs x tels que :

$$\forall y \in A, <x, y> = 0$$

Cet orthogonal est identique à l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par A.

EXEMPLE :

Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan d'équation $ax + by + cz = 0$. Cette propriété se généralise en dimension quelconque de la façon suivante.

Soit $(a_1, ..., a_n) \neq (0, ..., 0)$. Soit $H = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$. Si on pose $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$, on constate que $H = \{x \in \mathbb{R}^n, <u, x> = 0\}$. Considérons la forme linéaire $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \to <x, u> \in \mathbb{R}$. $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ non nul car $\varphi(u) \neq 0$, donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Comme $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, le théorème du rang montre que $\dim(H) = n - 1$. H s'appelle hyperplan orthogonal à u.

Plus généralement, dans un espace vectoriel euclidien quelconque, soit φ une forme linéaire non nulle et $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $a_i = \varphi(e_i)$. Dans cette base, pour tout x de E de la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \varphi(e_i) = <x, u> \qquad \text{en posant } u = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i$$

On a alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{u\}^{\perp}$, sous-espace vectoriel de dimension $\dim(E) - 1$.

Réciproquement tout sous-espace vectoriel H de dimension $\dim(E) - 1$ est de cette forme. Prendre une base orthonormée $(e_1, ..., e_{n-1})$ de H et la compléter en une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de E. Alors $H = \{e_n\}^{\perp}$.

5– Projections et symétries orthogonales

Du fait que l'orthogonal d'un sous–espace vectoriel F de dimension finie est un supplémentaire de F, on peut définir une projection orthogonale sur F (parallèlement à $F^{\perp}$) et une symétrie orthogonale par rapport à F (parallèlement à $F^{\perp}$).

Dans le cas d'un hyperplan H, orthogonal à une droite D, ces fonctions s'expriment très simplement. Soit u un vecteur unitaire orthogonal à H (vecteur directeur de la droite D).

Projection sur D : $p(x) = <x, u>\, u$. Si u n'est pas unitaire, on appliquera cette formule en considérant le vecteur $\dfrac{u}{\| u \|}$ ce qui donnera $p(x) = \dfrac{<x, u>}{\| u \|^2}\, u$

Projection sur H : $q(x) = x - <x, u>\, u$

En effet, on peut écrire :

$$x = [\underbrace{x - <x, u>\, u}_{= v}] + \underbrace{<x, u>\, u}_{\in D} = q(x) + p(x)$$

v est élément de H. Il suffit de prouver que v est orthogonal à u :

$$<v, u> = <x, u> - <x, u><u, u> = 0$$

Symétrie par rapport à D : $s_D(x) = 2<x, u>\, u - x = p(x) - q(x)$

Symétrie par rapport à H : $s_H(x) = x - 2<x, u>\, u = q(x) - p(x) = - s_D(x)$

On utilise la décomposition de x précédemment mise en évidence.

Les cas précédents permettent de traiter tous les cas de symétries et de projections dans un espace de dimension 3.

EXEMPLE :
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la projection sur le plan H d'équation $2x - y + z = 0$. Ce plan est orthogonal à $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendrant une droite D. Le projecteur sur D est défini par :

$$p(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \frac{2x - y + z}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le projecteur sur H est défini par :

$$q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{2x - y + z}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2x + 2y - 2z \\ 2x + 5y + z \\ -2x + y + 5z \end{pmatrix}$$

Dans le cas général d'une projection orthogonale sur F ou d'une symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$, si (e_i) est une base orthonormée de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F (et donc les $n - p$ restants une base de $F^\perp$), la matrice du projecteur p et de la symétrie s sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

6– Hyperplans affines

Début de partie réservée aux MPSI

Si H est un hyperplan vectoriel. On appelle vecteur normal à H tout vecteur orthogonal à H et unitaire. Comme l'orthogonal de H est une droite D, il n'existe que deux vecteurs normaux, opposés l'un de l'autre. Le choix de tel ou tel vecteur revient à orienter la droite D. L'équation de H est :

$$x \in H \Leftrightarrow \langle x, n \rangle = 0$$

Soit λ un réel quelconque. L'ensemble $H_\lambda = \{x, \langle x, n \rangle = \lambda\}$ s'appelle hyperplan affine. Il est non vide car il contient l'élément λn, et si a est un élément quelconque de H_0, on a :

$$H_\lambda = \{x, \langle x, n \rangle = \lambda\} = \{x, \langle x, n \rangle = \langle a, n \rangle\} = \langle x, \langle x - a, n \rangle = 0\}$$
$$= \{x, x - a \in H\}$$

On dit que H_λ est l'hyperplan affine passant par a de direction vectorielle H. Il est souvent judicieux de considérer les éléments de H comme des vecteurs, mais ceux de H_λ comme des points. Si A et M sont deux points, on note M – A le vecteur $\boldsymbol{AM}$.

Mais on peut aussi considérer les éléments de H comme des points tout comme les éléments de E, et a comme un vecteur. H_λ est alors obtenu par translation de vecteur a de H.

$$H_\lambda = \{a + y, y \in H\}$$

EXEMPLE :
Dans $\mathbb{R}^3$, le plan affine d'équation $2x - y + z = 3$ passe par le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et possède comme vecteur

normal le vecteur $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit x un élément de E, considérer comme un point. La distance de x à H_λ est :

$$d(x, H_\lambda) = \operatorname*{Inf}_{z \in H_\lambda} \| x - z \|$$

Mais comme z s'écrit $a + y$, a donné dans H_λ, y quelconque dans H, on voit que :

$$d(x, H_\lambda) = \operatorname*{Inf}_{y \in H} \| x - a - y \| = d(x - a, H)$$

On a vu plus haut que, pour déterminer cette distance, il suffit de projeter orthogonalement $x - a$ sur H et de prendre la norme de la différence entre $x - a$ et son projeté. Ce projeté vaut :

$$x - a - \langle x - a, n \rangle n$$

donc la différence avec $x - a$ vaut $\langle x - a, n \rangle n$, projeté de $x - a$ sur $D = H^\perp$. Donc :

$$d(x, H_\lambda) = |\langle x - a, n \rangle| = |\langle \boldsymbol{AM}, n \rangle| \quad \text{si on préfère noter } a \text{ et } x \text{ comme des points A et M}$$

On notera que $x \to \langle x - a, n \rangle = 0$ est précisément l'équation de H_λ, les coefficients de l'équation dans une base orthonormée étant les composantes de n.

EXEMPLE :

Dans $\mathbb{R}^3$, quelle est la distance de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ au plan d'équation $2x - y + z = 3$? Cette équation peut s'écrire avec un vecteur normal unitaire sous la forme $\frac{2x - y + z - 3}{\sqrt{6}} = 0$. La distance de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à ce plan est précisément $\left| \frac{2x - y + z - 3}{\sqrt{6}} \right|$.

Fin de partie réservée aux MPSI

II : Automorphismes orthogonaux

La fin du chapitre est réservée aux MPSI

1– Groupe orthogonal

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie. On s'intéresse aux endomorphismes u qui préserve la norme, c'est–à–dire tels que :

$$\forall x \in E, \ \| u(x) \| = \| x \|$$

De tels endomorphismes sont qualifiés d'orthogonaux ou d'isométries vectorielles. Ils disposent des propriétés suivantes :

PROPRIETES :

i) Un opérateur orthogonal est bijectif.

ii) Un opérateur orthogonal conserve le produit scalaire.

iii) L'ensemble des opérateurs orthogonaux forme un groupe avec la composition des applications appelé groupe orthogonal $O(E)$.

iv) Un opérateur orthogonal admet pour déterminant 1 ou –1.

v) L'ensemble des opérateurs orthogonaux de déterminant 1 forme un sous–groupe de $O(E)$, appelé groupe spécial orthogonal $SO(E)$.

vi) Si F est un sous–espace vectoriel stable par un opérateur orthogonal u, alors $F^\perp$ *est aussi stable par u.*

vii) u est un opérateur orthogonal si et seulement si il change une base orthonormée en une base orthonormée.

Démonstration :

i) E étant de dimension finie, il suffit de montrer qu'un tel opérateur est injectif. Or :

$$u(x) = 0 \Rightarrow \| u(x) \| = 0 \Rightarrow \| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$$

ii) Cette propriété résulte de la relation :

$$<x, y> = \frac{1}{2} [\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2]$$

$$\Rightarrow \quad <u(x), u(y)> = \frac{1}{2} [\| u(x) + u(y) \|^2 - \| u(x) \|^2 - \| u(y) \|^2]$$

$$\Rightarrow \quad <u(x), u(y)> = \frac{1}{2} [\| u(x + y) \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2]$$

$$\Rightarrow \quad <u(x), u(y)> = \frac{1}{2} [\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2] = <x, y>$$

En particulier, un opérateur orthogonal conserve les angles.

iii) La vérification est aisée.

iv) Si (e_i) est une base orthonormée dans laquelle u possède une matrice M, alors on a, en notons X et Y les vecteurs composantes des vecteurs x et y :

$$<x, y> = {}^t\mathrm{X}\mathrm{Y}$$

$$<u(x), u(y)> = {}^t(\mathrm{MX})\mathrm{MY} = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{M}\mathrm{M}\mathrm{Y}$$

ainsi :

$$\forall \mathrm{X}, \forall \mathrm{Y}, {}^t\mathrm{X}\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{M}\mathrm{M}\mathrm{Y}$$

$$\Rightarrow \quad {}^t\mathrm{M}\mathrm{M} = \mathrm{Id}$$

$$\Rightarrow \quad \det({}^t\mathrm{M}\mathrm{M}) = 1 = \det({}^t\mathrm{M})\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M})^2 = \det(u)^2$$

v) Si u et v appartiennent à O(E) et $\det(u) = \det(v) = 1$, alors $u \circ v$ appartient à O(E) et :

$$\det(u \circ v) = \det(u) \det(v) = 1$$

donc $u \circ v \in$ SO(E). De même avec u^{-1}. Les éléments de SO(E) sont appelées rotations vectorielles ou isométries directes. Les autres isométries sont qualifiées d'indirectes.

vi) $x \in \mathrm{F}^\perp \Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{F}, <x, y> = 0$.

Or u(F) est inclus dans F et u est bijective, donc $u(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$ (il y a égalité des dimensions). On peut donc écrire :

$$x \in \mathrm{F}^\perp \Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{F}, <x, u(y)> = 0 \quad (*)$$

Comme par ailleurs, $<x, y> = <u(x), u(y)>$, on a :

$$x \in \mathrm{F}^\perp \Rightarrow \forall y \in \mathrm{F}, <x, y> = 0$$

$$\Rightarrow \forall y \in \mathrm{F}, <u(x), u(y)> = 0$$

$$\Leftrightarrow u(x) \in \mathrm{F}^\perp \text{ d'après } (*)$$

vii) Un opérateur orthogonal transforme une base orthonormée en une base orthonormée. Cela découle directement de ii).
Inversement, supposons qu'un opérateur u transforme une base orthonormée (e_i) en une base orthonormée (ε_i). Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :

$$\| u(x) \| = \| \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \| = \| \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \| x \|$$

Donc u est un opérateur orthonormé.
La matrice de u dans une base orthonormée vérifie donc les propriétés suivantes : les vecteurs colonnes sont de norme 1, les colonnes sont deux à deux orthogonales.

EXEMPLE : Les symétries orthogonales sont des opérateurs orthogonaux. Cela est évident en utilisant la définition : Soit s symétrie orthogonale par rapport à F. On a :

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp} \to \mathrm{E}$$
$$x = y + z \quad \to s(x) = y - z$$

et $\| x \|^2 = \| y \|^2 + \| z \|^2 = \| s(x) \|$

On peut également utiliser la propriété vii). Si (e_i) est une base orthonormée de E dont les p premiers vecteurs forme une base de F (et donc les $n-p$ restants une base de $\mathrm{F}^{\perp}$), la matrice de la symétrie s est $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{n-p} \end{pmatrix}$ qui est la matrice d'un opérateur orthogonal. Son déterminant vaut $(-1)^{n-p}$ et donc s appartient à SO(E) si et seulement si $n-p$ est pair. Ainsi, certaines symétries peuvent également être classée parmi les rotations. C'est le cas en dimension 3 pour les symétries par rapport à une droite.

Soit H un hyperplan et s_{H} la symétrie orthogonale par rapport à H. Alors s_{H} s'appelle une réflexion et son déterminant vaut -1.

2– Matrices orthogonales

On appelle matrice orthogonale la matrice M d'un automorphisme orthogonal u dans une base orthonormée. Les propriétés de telles matrices sont analogues à celles des applications correspondantes, en particulier :

PROPRIETES :

i) Une matrice orthogonale est inversible.

ii) Une matrice est orthogonale si et seulement si ${}^t MM = \mathrm{I}_n$

iii) L'ensemble des matrices orthogonales $n \times n$ forme un groupe avec le produit des matrices appelé groupe orthogonal $O(n)$.

iv) Une matrice orthogonale admet pour déterminant 1 *ou* –1.

v) L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 *forme un sous–groupe de $O(n)$, appelé groupe spécial orthogonal $SO(n)$.*

vi) ——

vii) Une matrice est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

La propriété ii) a été montrée dans le paragraphe 1). Elle résulte du fait que dans une base orthonormée, le produit scalaire s'exprime de la façon suivante :

$<x, y> = {}^t XY$

$<u(x), u(y)> = {}^t(MX)MY = {}^t X {}^t MMY$

La propriété vii) signifie également que les matrices de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée sont orthogonales.

3– Groupe orthogonal en dimension 2

En dimension 2, dans une base orthonormée, la matrice d'un opérateur orthogonal u est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. Il existe donc θ et Φ tels que $a = \cos(\theta)$, $c = \sin(\theta)$, $b = \sin(\Phi)$, $d = \cos(\Phi)$, avec $\sin(\theta + \Phi) = 0 \Rightarrow \theta = -\Phi\ [2\pi]$ ou $\theta = \pi - \Phi\ [2\pi]$.

Dans le premier cas, la matrice est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ de déterminant 1. C'est la rotation R_θ d'angle θ.

Dans le second cas, la matrice est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ de déterminant –1. C'est la symétrie $S_{\theta/2}$ par rapport à la droite faisant un angle $\theta/2$ avec le premier vecteur de base.

On vérifiera aisément que $R_\theta \circ R_\Phi = R_{\theta+\Phi}$.

4– Produit mixte

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$. Supposons que cette base soit considérée comme directe. Soit $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une autre base orthonormée directe. Les deux bases étant orthonormées, la matrice de passage P est une matrice orthogonale. Les deux bases étant directes, le déterminant de P est positif. P étant de plus orthogonale, det(P) = 1.

Or dans le chapitre sur les déterminants, nous avons vu que, si $v_1, ..., v_n$ sont des vecteurs de E et si on note (V_e) la matrice des composantes des v_i dans la base e et (V_ε) la matrice des composantes des v_i dans la base ε, on a : $(V_e) = P(V_\varepsilon)$ et $\det_e(V) = \det(V_e) = \det(PV_\varepsilon) = \det(P)\det(V_\varepsilon) = \det(P)\det_\varepsilon(V)$. Comme det(P) = 1, on constate que $\det_e(V) = \det_\varepsilon(V)$, autrement dit, le déterminant des vecteurs $v_1, ..., v_n$ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. Ce déterminant s'appelle alors produit mixte.

Soit H un hyperplan de base orthonormée $(v_1, ..., v_{n-1})$ et u un vecteur normal à H. u étant défini au signe près, on voit que $\det(v_1, ..., v_{n-1}, u)$ est également défini au signe près. u étant choisi, on dira que la base de H est directe si $\det(v_1, ..., v_{n-1}, u) = 1$. Si change le signe de u, on change l'orientation des bases de H. Ainsi l'orientation de H est définie à partir de l'orientation de l'espace global et de l'orientation de l'axe D orthogonal à H.

◆