GROUPE SYMETRIQUE

PLAN

L'intégralité de ce chapitre est réservé aux MPSI.

I : Structure de groupe

1– Définition

Soit E un ensemble fini. On appelle permutation de E une bijection de E. On note $S(E)$ l'ensemble des permutations de E. L'utilisation des nombres de 1 à n est usuelle. On note S_n l'ensemble des permutations sur $\{1, .., n\}$. Une permutation est souvent notée σ.

Ex : pour {1, ..., 6}

$$\overset{\curvearrowright}{\boxed{1 \to 5 \to 3}}\ \overset{\curvearrowright}{\boxed{2}}\quad 4 \leftrightarrow 6$$

représente la bijection :

$1 \to 5$
$2 \to 2$
$3 \to 1$
$4 \to 6$
$5 \to 3$
$6 \to 4$

Ainsi, $\sigma(3) = 1$ et $\sigma^{-1}(5) = 1$. σ^{-1} est la bijection réciproque de σ, application telle que :

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id$$

Id est l'application identique, définie par :

$$\forall x,\ Id(x) = x$$

L'application Id est telle que $Id \circ \sigma = \sigma \circ Id = \sigma$. Id est dit élément neutre de la loi de composition o.
On a : Card $S_n = n!$

2– Représentation d'une permutation

La permutation σ précédente peut être représentée :

i) sous la forme d'application, comme dans le paragraphe 1)

ii) sous la forme usuelle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

où la première ligne représente l'ensemble de départ, et la seconde ligne l'ensemble d'arrivée, les éléments de la seconde ligne étant les images des éléments de la première ligne par σ.

iii) sous forme de cycles : (1 5 3)(2)(4 6) ou même (1 5 3)(4 6), un cycle étant une permutation écrite sous la forme $(i, \sigma(i), \sigma^2(i), \sigma^3(i), ..., \sigma^{p-1}(i))$ jusqu'à ce que $\sigma^p(i) = i$, les autres éléments étant invariants par ce cycle. Ainsi, l'image d'un élément apparaissant dans l'écriture du cycle est donné par l'élément suivant, l'image du dernier élément étant le premier. L'élément de départ est alors sans importance. Si un cycle contient un seul élément, c'est que cet élément est invariant par σ. Comme les éléments n'apparaissant pas dans l'écriture du cycle sont également invariants, il s'agit de Id. On peut omettre son écriture.

Il y a deux interprétations concrètes des permutations :

a) Concrètement, on peut interpréter 1 2 3 4 5 6 comme des numéros portés par des objets disposés devant soi. Appliquer une permutation σ (par exemple $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$) consiste à remplacer l'objet *i* par l'objet $\sigma(i)$. Si les objets numérotés étaient rangés dans l'ordre initialement, après l'application de σ, ils sont dans l'ordre 5 2 1 6 3 4. Si on applique une nouvelle permutation θ, l'objet numéroté *i* est remplacé par l'objet numéroté $\theta(i)$. Par exemple, si θ est le cycle (1 2 3), alors la nouvelle disposition obtenue à partir de 5 2 1 6 3 4 est 5 3 2 6 1 4. On réfléchira au fait que, dans le cas général, la permutation φ obtenue vaut $\varphi = \theta \circ \sigma$, notée θσ. En effet, $\sigma(i) = j$ signifie que l'objet n°*j* est mis à la place de l'objet n°*i* lors de la permutation σ ; $\theta(j) = k$ signifie ensuite que l'objet n°*k* est mis à la place de l'objet n°*j* lors de la permutation θ. Donc si on effectue σ puis θ, le bilan final est que l'objet n°*k* est venu à la place initiale de l'objet n°*i*. On a donc dans ce cas :

$$\varphi(i) = k \text{ avec } \varphi = \theta\sigma$$

b) On peut également considérer que les objets sont non numérotés mais repérés par leur rang quand on les dispose en ligne. Appliquer une permutation σ revient ici à remplacer l'objet de rang *i* par l'objet de rang $\sigma(i)$. Si on applique une nouvelle permutation θ, l'objet de rang *i* est remplacé par l'objet de rang $\theta(i)$. Par exemple, si θ = (1 2 3), alors la nouvelle permutation φ' obtenue à partir de 5 2 1 6 3 4 est 2 1 5 6 3 4. On réfléchira au fait que, dans le cas général, φ' = σθ. En effet, dans ce cas, $\sigma(i) = j$ signifie que l'objet de rang *j* est mis à la place de l'objet de rang *i* ; $\theta(k) = i$ signifie que l'objet de rang *i* est mis à la place de l'objet de rang *k*. Donc si on effectue σ puis θ, le bilan final est que l'objet de rang *j* est venu à la place initiale de l'objet de rang *k*. On a dans ce cas :

$$\varphi'(k) = j \text{ avec } \varphi' = \sigma\theta$$

Ainsi, les deux interprétations ne diffèrent que par le sens dans lequel on compose les permutations successives. C'est l'interprétation a) qui correspond aux notations habituelles pour les composées de fonctions, lues de la droite vers la gauche, et c'est celle que nous adopterons.

3– Opération entre permutations

Les permutations étant des applications, on peut les composer entre elles par la composée des applications ∘ ; la notation ∘ est parfois omise.

EXEMPLE 1 : sur {1, ..., 6}

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Alors $\sigma \circ \theta = \sigma\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

ou encore, sous forme de cycles :

$\sigma = (1\ 5\ 3)(4\ 6)$ et $\theta = (1\ 6\ 3\ 4)(2\ 5) \Rightarrow \sigma\theta = (1\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6)$

Cette dernière permutation, constituée d'un seul cycle portant sur tous les éléments, est dite permutation circulaire.

EXEMPLE 2 : sur {1, ..., 6}

$\sigma = (2\ 5\ 4)$ et $\theta = (1\ 3\ 5\ 6)(2\ 4) \Rightarrow \sigma\theta = (1\ 3\ 4\ 5\ 6)$

La composée de deux bijections étant une bijection, la loi o est une loi de composition interne à $\mathfrak{S}_n$.

4– Propriétés de $(\mathfrak{S}_n, o)$

i) La loi o est une loi de composition interne.

ii) La loi o est *associative*. Cela signifie que :

$$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall\, \sigma' \in \mathfrak{S}_n,\ \forall\, \sigma'' \in \mathfrak{S}_n,\ (\sigma\sigma')\sigma'' = \sigma(\sigma'\sigma'')$$

Ceci est en effet vérifié par la composition de toute application, bijective ou non, sur des ensembles finis ou non.

iii) Elle possède un *élément neutre*, à savoir Id.

iv) Tout élément σ de $\mathfrak{S}_n$ étant une bijection possède un *symétrique* σ^{-1} tel que :

$$\sigma\,\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\,\sigma = \mathrm{Id}$$

Ces quatre propriétés font de $(\mathfrak{S}_n, o)$ un *groupe* appelé groupe symétrique.

II : Décomposition d'une permutation

1– Orbite d'un élément

Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ et k un élément de $\{1, ..., n\}$. On appelle orbite de k l'ensemble $\{\sigma^p(k) \mid p \in \mathbb{N}\}$.

EXEMPLE :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Il y a trois orbites : {1,5,3}, {2}, {4,6}. Cela est très apparent dans l'écriture de σ sous forme de cycles : $\sigma = (1\ 5\ 3)(4\ 6)$. La différence entre un cycle et une orbite est que le cycle est constituée d'une suite ordonnée, alors que l'orbite est l'ensemble non ordonné des éléments du cycle correspondant. L'orbite de i est de la forme $\{i, \sigma(i), ... ,\sigma^{p-1}(i)\}$, formé d'éléments distincts, avec $\sigma^p(i)$ déjà trouvé dans l'orbite. On a alors nécessairement $\sigma^p(i) = i$, résultat énoncé sans preuve au début du chapitre. En effet, si $\sigma^p(i) = \sigma^k(i)$ avec $0 < k < p$, alors, en composant par σ^{-k}, on aurait $\sigma^{p-k}(i) = i$, ce qui est contraire à la définition de p. Par ailleurs les puissances n supérieures à p n'apportent pas de nouvel élément à l'orbite. Il suffit d'écrire $n = pq + r$ avec $0 \leq r < p$ pour voir que $\sigma^n(i) = \sigma^r(i)$ est déjà dans l'orbite.

2– Permutations particulières

a) Les transpositions :

On appelle transposition τ_{ij} de i et j la permutation définie par :

$\tau_{ij}(i) = j$
$\tau_{ij}(j) = i$
$\tau_{ij}(k) = k$ pour $k \neq i$ et $k \neq j$

Elle permute simplement les deux termes i et j. On a donc aussi $\tau_{ij} = (i\ j)$

b) Les cycles :

On appelle cycles les permutations dont les orbites sont réduites à un élément, sauf une.
EXEMPLE :

- Les transpositions sont des cycles à deux éléments
- $\sigma = (1\ 5\ 6\ 4)$ dans S_7. Les orbites à un élément sont {2}, {3} et {7}

c) Les permutations circulaires :

On appelle permutations circulaires les permutations constituées d'une seule orbite. Ce sont des cycles.
EXEMPLE : $\sigma = (1\ 6\ 5\ 2\ 3\ 4)$ dans S_6.

3– Décomposition en cycles

Toute permutation σ se décompose en produit de cycles disjoints. L'écriture de chaque cycle énumère chacune des orbites non réduites à un élément, les éléments étant ordonnés par l'application de σ. C'est cette décomposition que nous avons utilisée lorsque nous écrivons par exemple : $\sigma = (1\ 3\ 5)(2\ 6)$. On peut remarquer que ces cycles n'ayant aucun élément en commun commutent entre eux. La décomposition, à l'ordre prés des cycles, est unique, puisqu'elle correspond à la partition de l'ensemble {1, ..., n} en orbites.

4– Transpositions

PROPOSITION :
Les transpositions engendrent le groupe symétrique S_n.

Cela signifie que toute permutation peut s'exprimer comme le produit de transpositions (ou d'inverse de transpositions, mais on remarque que les transpositions sont involutives). Concrètement, cela signifie que, pour remettre en ordre un jeu de cartes mélangées, on peut le faire en permutant les cartes deux par deux.

EXEMPLE : décomposer $\sigma = (1\ 2\ 6)(4\ 5)$ comme produit de transpositions.
Voici quelques décompositions possibles :

$\sigma = (1\ 2)(2\ 6)(4\ 5)$
$\sigma = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6)(4\ 5)(3\ 4)(2\ 3)(4\ 5)$

Démonstration 1 : par récurrence sur n :
Pour $n = 2$, on a $\mathsf{S}_2 = \{\mathrm{Id}, \tau_{12}\}$ et Id est un produit vide, τ_{12} est elle–même une transposition.
Pour $n > 2$, supposons que S_{n-1} soit engendré par des transpositions. Considérons une permutation σ de S_n :

- Si $\sigma(n) = n$, alors la restriction de σ à {1, ..., n–1} est une permutation de {1, ..., n–1}.

Elle s'exprime donc comme produit de transpositions τ de S_{n-1}. Soit τ' la transposition prolongeant τ à $\{1, ..., n\}$ de la façon suivante :

$\tau'(k) = \tau(k)$ si $k < n$

$\tau(n) = n$

σ est alors le produit des τ', puisque les τ' laisse n invariant, et que leur produit agit sur $k < n$ comme le produit des τ, donc comme σ.

❑ Si $\sigma(n) = m$, avec $m < n$, alors $\tau_{mn}\sigma$ est une permutation laissant n invariant. Elle s'exprime donc comme produit de transpositions τ, $\Pi\ \tau$, d'après le paragraphe précédent. σ est alors le produit de τ_{mn} par ces transpositions τ. $\sigma = \tau_{mn}(\tau_{mn}\sigma) = \tau_{mn}\ \Pi\ \tau$.

Concrètement, cela signifie que, pour remettre n cartes mélangées dans l'ordre, on permute la carte qui occupe la dernière place avec celle qui doit occuper cette dernière place, puis, on remet dans l'ordre les $n - 1$ premières cartes.

Démonstration 2 : Utilisation de la décomposition en cycles.

Puisque toute permutation se décompose en cycles, il suffit de prouver que de tels cycles se décomposent en transpositions. Cela découle de la décomposition en transpositions suivantes qu'on pourra vérifier (en particulier en ce qui concerne l'image de x_p) :

$$(x_1\ \ x_2\ \ ...\ x_p) = (x_1\ \ x_2)(x_2\ \ x_3)\ ...\ (x_{p-1}\ \ x_p)$$

La démonstration est constructive et efficace. Elle permet d'obtenir une décomposition rapidement.

EXEMPLE :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \sigma = (1\ \ 5\ \ 3)(4\ \ 6) = (1\ \ 5)(5\ \ 3)(4\ \ 6)$

5– Signature d'une permutation

On remarque que le nombre de transpositions pour décomposer une permutation peut varier, mais que la *parité* de ce nombre est conservée pour une permutation donnée.

EXEMPLE :

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ \ 5\ \ 3)(4\ \ 6) = (1\ \ 5)(5\ \ 3)(4\ \ 6)$ (3 transpositions)

$= (1\ \ 2)(2\ \ 3)(3\ \ 4)(4\ \ 5)(3\ \ 4)(2\ \ 3)(1\ \ 2)\ (5\ \ 3)\ (4\ \ 6)$ (9 transpositions)

$= (1\ \ 5)\ (3\ \ 4)(4\ \ 5)(3\ \ 4)\ (4\ \ 6)$ (5 transpositions)

On définit une application $\varepsilon : \sigma \in S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ valant 1 si σ se décompose en un nombre pair de transpositions et valant –1 si σ se décompose en un nombre impair de transpositions. La difficulté essentielle de cette définition est de montrer que la parité ne dépend pas de la décomposition choisie. Pour cela, on définit $\varepsilon(\sigma)$ d'une façon qui ne dépend pas de cette décomposition (ii ci-dessous) :

PROPOSITION :

Soit σ une permutation de S_n. Il y a égalité entre les deux quantités suivantes :

(i) $(-1)^T$ *où* T *est le nombre de transpositions dans une décomposition de* σ *comme produit de transpositions, quelle que soit la décomposition choisie.*

(ii) $(-1)^D$ *où* D *est égal à la différence entre n et le nombre d'orbites de* σ

Cette quantité commune $\varepsilon(\sigma)$ *s'appelle signature de la permutation* σ. *Si ce nombre vaut* 1, *la permutation est dite paire, sinon, elle est dite impaire. En outre, pour toute permutation* σ *et* σ', *on a* $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

EXEMPLE : dans S_6, $\sigma = (1\ \ 2\ \ 6)(4\ \ 5)$

(i) $\sigma = (1\ \ 2)(2\ \ 6)(4\ \ 5)$ donc la quantité (i) vaut – 1.

(ii) Il y a trois orbites : {1,2,6}, {3}, {4,5} donc la quantité (ii) vaut –1.

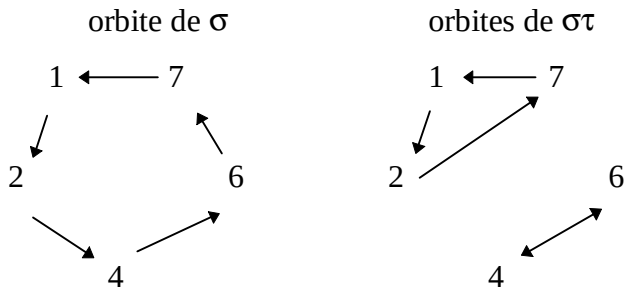
Démonstration :

La démonstration n'est pas exigible.

Appelons $\varepsilon(\sigma)$ la quantité (ii). Montrons que, pour toute permutation σ et toute transposition τ, on a $\varepsilon(\sigma\tau) = -\varepsilon(\sigma)$. En effet, si $\tau = \tau_{ij}$, il y a deux cas à considérer :

a) Cas 1 : i et j sont dans la même orbite de σ $\{i, \sigma(i), ..., \sigma^{p-1}(i)\}$, avec $\sigma^k(i) = j$ et $\sigma^p(i) = i$.

EXEMPLE : $\sigma = (1\ \ 2\ \ 4\ \ 6\ \ 7)(3\ \ 5)$ et $\tau = (2\ \ 6)$. $\sigma\tau = (1\ \ 2\ \ 7)(4\ \ 6)(3\ \ 5)$



Cas général : L'orbite de i par $\sigma\tau$ est l'ensemble des nombres suivants :

i

$\sigma\tau(i) = \sigma(j) = \sigma^{k+1}(i)$

$(\sigma\tau)^2(i) = \sigma\tau\sigma^{k+1}(i) = \sigma^{k+2}(i)$ sauf si $k + 2 = p$

...

$(\sigma\tau)^r(i) = \sigma^{k+r}(i)$ tant que $r < p - k$

...

$(\sigma\tau)^{p-k}(i) = (\sigma\tau)(\sigma\tau)^{p-k-1}(i) = (\sigma\tau)\sigma^{p-1}(i) = \sigma^p(i) = i$

L'orbite de i contient donc les éléments $\sigma^r(i)$ avec $k + 1 \le r \le p$.

L'orbite de j par $\sigma\tau$ est l'ensemble des nombres suivants :

j

$\sigma\tau(j) = \sigma(i)$

$(\sigma\tau)^2(j) = \sigma\tau\sigma(i) = \sigma^2(i)$ sauf si $k = 1$

...

$(\sigma\tau)^r(j) = \sigma^r(i)$ tant que $r < k$

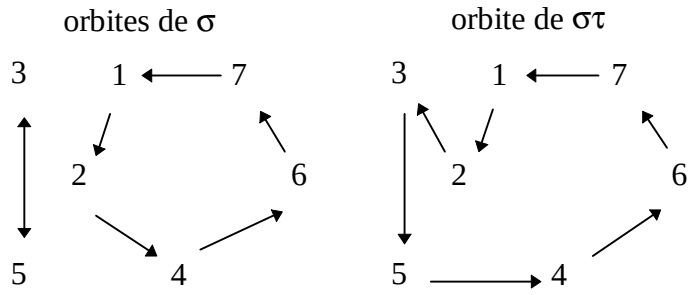
...

$(\sigma\tau)^k(j) = (\sigma\tau)(\sigma\tau)^{k-1}(j) = (\sigma\tau)\sigma^{k-1}(i) = \sigma^k(i) = j$

L'orbite de j contient donc les éléments $\sigma^r(i)$ avec $1 \le r \le k$. L'orbite initiale est donc scindée en 2. Les autres orbites sont invariantes par τ. Il y a une orbite de plus. Donc $\varepsilon(\sigma\tau)$ est de signe opposé à $\varepsilon(\sigma)$.

b) Cas 2 : *i* et *j* sont dans deux orbites différentes de σ.

EXEMPLE : σ = (1 2 4 6 7)(3 5) et τ = (2 5). στ = (1 2 3 5 4 6 7)



Cas général : L'orbite de *i* par σ est $\{i,...,\sigma^{p-1}(i)\}$ et celle de *j* est $\{j,...,\sigma^{k-1}(j)\}$. L'orbite de *i* par στ est :

i
$\sigma\tau(i) = \sigma(j)$
$(\sigma\tau)^2(i) = (\sigma\tau)\sigma(j) = \sigma^2(j)$ sauf si $k = 2$
...
$(\sigma\tau)^r(i) = \sigma^r(j)$ tant que $r < k$
...
$(\sigma\tau)^{k-1}(i) = (\sigma\tau)\sigma^{k-2}(j) = \sigma^{k-1}(j)$
$(\sigma\tau)^k(i) = (\sigma\tau)\sigma^{k-1}(j) = \sigma^k(j) = j$
$(\sigma\tau)^{k+1}(i) = (\sigma\tau)(j) = \sigma(i)$
...
$(\sigma\tau)^{k+r}(i) = \sigma^r(i)$ tant que $r < p$
...
$(\sigma\tau)^{k+p-1}(i) = (\sigma\tau)\ \sigma^{k+p-2}(i) = (\sigma\tau)\ \sigma^{p-2}(i) = \sigma^{p-1}(i)$
$(\sigma\tau)^{k+p}(i) = (\sigma\tau)\ \sigma^{k+p-1}(i) = (\sigma\tau)\ \sigma^{p-1}(i) = \sigma^p(i) = i$

L'orbite de *i* par στ est constituée de la réunion des deux orbites de *i* et *j* par σ. Les autres orbites sont invariantes par τ. Il y a donc une orbite de moins. Donc ε(σ) change de signe.

Montrons par récurrence que, si $\sigma = \tau_1...\tau_n$, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^n$ ce qui montrera que (ii) = (i) :
Pour $n = 1$, σ est une simple transposition τ. Or une transposition possède $n - 1$ orbites. Donc $\varepsilon(\tau) = -1$. La relation est donc vraie pour $n = 1$.
Supposons qu'elle soit vraie pour *n* et montrons la au rang $n + 1$. Considérons donc une permutation de la forme $\tau_1...\tau_n\tau_{n+1} = \sigma\tau_{n+1}$ avec $\sigma = \tau_1...\tau_n$. On a :

$\varepsilon(\tau_1...\tau_n\tau_{n+1}) = \varepsilon(\sigma\tau_{n+1}) = -\varepsilon(\sigma)$ d'après la relation $\varepsilon(\sigma\tau) = -\varepsilon(\sigma)$ prouvée ci-dessus
$= (-1)^{n+1}$ en utilisant l'hypothèse de récurrence.

On en déduit immédiatement la relation $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ car, si $\sigma = \tau_1...\tau_n$ et $\sigma' = \tau'_1...\tau'_m$, on a :

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^n$
$\varepsilon(\sigma') = (-1)^m$
$\sigma\sigma' = \tau_1...\tau_n\tau'_1...\tau'_m$ donc $\varepsilon(\sigma\sigma') = (-1)^{n+m} = (-1)^n(-1)^m$

REMARQUE : La décomposition des cycles en transpositions utilisée lors de la démonstration 2 du paragraphe 4) prouve qu'il existe un nombre de transpositions T égal à D. En effet, si l'on écrit :

$\sigma = (C_1)(C_2)...(C_p)$

avec (C_i) cycle de longueur n_i (éventuellement réduit à 1 en convenant donc de faire figurer également les éléments invariants), alors chaque cycle se décompose en un nombre $n_i - 1$ de transpositions, soit au total $n_1 + ... + n_p - p = n - p$ transpositions. Or $D = n - p$.

Montrons alors que D est le nombre *minimal* de transpositions dans une décomposition de σ. Pour cela, considérons un produit $\tau_1\tau_2...\tau_p$ de transpositions. Prouvons par récurrence sur k que la quantité D relative au produit $\tau_1...\tau_k$ est inférieur ou égal à k. Cela est vrai pour $k = 1$, où $D_k = 1$.
Supposons la relation vraie pour un produit de $k - 1$ transpositions, et multiplions ce produit par τ_k. Par récurrence, on a $D_{k-1} \leq k - 1$. Or le raisonnement tenu dans la démonstration de (i) = (ii) prouve que $D_k = D_{k-1} \pm 1$. Donc :

$$D_k \leq D_{k-1} + 1 \leq k-1 + 1 = k$$

UNE CURIOSITE :
Dans les années 1870, un jeu, appelé taquin, eut un succès considérable aux Etats-Unis. Il consiste en un carré de 4×4 cases occupées par 15 cubes numérotées de 1 à 15. L'une des cases reste vide, ce qui permet de déplacer par translation les cubes adjacents. Sam Loyd (1841-1911) offrit une récompense de 1000 dollars à qui serait capable de remettre dans le bon ordre le jeu ainsi disposé :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

En fait il n'existe pas de solution. En effet, on remarque que :

- Déplacer un cube revient à le permuter avec la case vide. On effectue ainsi des transpositions sur l'ensemble des 16 cases. Comme on veut permuter les cubes 14 et 15, on cherche à effectuer un nombre impair de transpositions, et donc un nombre impair de déplacements de la case vide.
- A chaque fois que l'on déplace la case vide, la somme de son abscisse et de son ordonnée change de parité. Pour remettre la case vide dans le coin en bas à droite, il faudra donc effectuer un nombre pair de déplacements.

Les deux remarques précédentes étant incompatibles, l'existence d'une solution est impossible.

◆