APPLICATIONS LINEAIRES

PLAN

I : Applications linéaires

1–Définition et exemples

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On appelle application linéaire ou morphisme d'espaces vectoriels une application f de E dans F telle que :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \forall y \in \mathrm{E},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall x \in \mathrm{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

En prenant $\lambda = 0$, on remarque que $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$.

EXEMPLES :

❑ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to ax$

où a est un paramètre fixé est une application linéaire.

❑ Plus généralement, on peut considérer les applications de la forme :

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}$$

ce qu'on note également :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice définissant l'application } f} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Cet exemple est caractéristique de toutes les applications linéaires en dimension finie, comme nous le verrons bientôt.

❑ Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, ..., e_n)$, alors une forme linéaire (application linéaire de E dans $\mathbb{K}$) s'écrit :

$$f(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1f(e_1) + ... + x_nf(e_n) \text{ de la forme } a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

❑ f: E $\rightarrow$ E définie par $f(x) = x$. Il s'agit de Id_E, l'application identique (ou identité) de E.

❑ Soit I : $C^0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \quad \rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = I(f)$$

Alors I est linéaire.

❑ $C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$

$$y \quad \rightarrow ay'' + by' + cy = \Phi(y)$$

Φ est linéaire.

❑ $\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente$\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u \quad \rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n$$

❑ $\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique$\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u \quad \rightarrow R(u) = \text{la raison de la suite } u$$

On peut vérifier que $\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique$\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites. En effet, u arithmétique de raison $r \Rightarrow \lambda u$ est arithmétique de raison λr. u et v arithmétiques de raison r et $s \Rightarrow u + v$ arithmétique de raison $r + s$. Ces observations prouvent par ailleurs que R est linéaire.

❑ Soient $(e_1, ..., e_p)$ une base d'un espace vectoriel E, et $(f_1, ..., f_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel F. Alors il existe une et une seule application linéaire u de E dans F telle $u(e_i) = f_i$. Elle est définie par $u(\lambda_1e_1 + ... + \lambda_pe_p) = \lambda_1f_1 + ... + \lambda_pf_p$.

Si f est bijective, on parle d'*isomorphisme*.
Si E = F, on parle d'*endomorphisme*.
Si E = F et f bijective, on parle d'*automorphisme*.
Si F = $\mathbb{K}$, on parle de *forme linéaire*.

On note L(E,F) l'ensemble des applications linéaires de E dans F. On note L(E) l'ensemble des endomorphismes de E. On note E* l'ensemble des formes linéaires de E (on l'appelle dual de E). Il s'agit d'espaces vectoriels. L'élément nul de L(E,F) est l'application identiquement nulle.

On peut composer les applications linéaires entre elles. Soit f élément de L(E,F) et g élément de L(F,G). On montrera aisément que $g \circ f$ est élément de L(E,G). En particulier, si E = F = G, il s'agit d'une loi interne. L'application $f \circ f$ est notée f^2, et de même, $f^n = f \circ \dots \circ f$ n fois. On vérifiera également les règles :

$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$

$(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$

$(\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g) = \lambda(f \circ g)$

où nous avons indiquer par la couleur bleue où l'on avait besoin de la linéarité de la fonction.

On prendra garde que $f \circ g = 0$ n'implique pas que $f = 0$ ou $g = 0$. On peut très bien avoir f et g non nulles alors que leur composée l'est. Considérer par exemple $p_F \circ p_G$ où p_F et p_G sont les projecteurs sur F (respectivement G) parallèlement à G (respectivement F), F et G étant deux supplémentaires.

On prendra garde également qu'en général $f \circ g \neq g \circ f$. Ainsi, la formule du binôme de Newton ne s'applique pas en général, mais seulement lorsque f et g commutent. Par exemple :

$(f + g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2$

Considérons l'ensemble des automorphismes de E. Cet ensemble est non vide (il contient Id), stable par o. Tout élément admet un inverse qui est lui–même linéaire. En effet :

$$\begin{aligned} f^{-1}(y + y') &= f^{-1}(f(x) + f(x')) \text{ si } y = f(x) \text{ et } y' = f(x') \\ &= f^{-1}(f(x + x')) \text{ par linéarité de } f \\ &= x + x' \\ &= f^{-1}(y) + f^{-1}(y') \end{aligned}$$

On montre de même que $f^{-1}(\lambda y) = \lambda f^{-1}(y)$.

On note GL(E) l'ensemble des automorphismes de E, appelé groupe linéaire de E.

Pour les MPSI : Il s'agit d'un groupe avec la composée des applications.

2– Image

PROPOSITION

Soit f linéaire de E dans F. Alors $f(E)$ est un sous–espace vectoriel de F. Ce sous-espace vectoriel s'appelle Image de f, noté Im(f)

Démonstration :

Montrons la stabilité de Im(f) par le produit par un scalaire, la stabilité par la somme se montrant de même. Soit y élément de Im(f), et λ un scalaire quelconque. Il existe x élément de E tel que :

$y = f(x)$

$\Rightarrow \quad \lambda y = \lambda f(x)$

$\Rightarrow \quad \lambda y = f(\lambda x)$

donc λy appartient à Im(f).

Il est clair que f est surjective si et seulement si Im(f) = F.

Si E est de dimension finie, de base $(e_1, \dots, e_n)$, alors Im(f) est engendré par $(f(e_1), \dots, f(e_n))$. En effet, les éléments de Im(f) sont de la forme $y = f(x)$, $x \in$ E, donc :

$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n,\ y = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$

$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n,\ y = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$

On prendra garde que système générateur ne signifie pas base. Les $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ peuvent être liés.

3– Noyau

PROPOSITION

Soit f linéaire de E dans F. Alors $f^{-1}(\{0\})$ est un sous–espace vectoriel de E. Ce sous-espace vectoriel s'appelle noyau de f, noté Ker(f).

<u>Démonstration</u> :

Ker(f) est non vide car $f(0_E) = 0_F$, de sorte que 0_E appartient à Ker(f).

Ker(f) est stable par la somme. En effet :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) \text{ et } x' \in \mathrm{Ker}(f) &\Rightarrow f(x) = 0_F = f(x') \\ &\Rightarrow f(x) + f(x') = 0_F \\ &\Rightarrow f(x + x') = 0_F \\ &\Rightarrow x + x' \in \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

On montre de même la stabilité par le produit par un scalaire..

L'intérêt du noyau résulte de la propriété suivante :

PROPOSITION

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors f est injective si et seulement si Ker(f) = $\{0_E\}$.

<u>Démonstration</u> :

Supposons f injective. Et soit x élément de Ker(f). Alors :

$$f(x) = 0_F = f(0_E) \Rightarrow x = 0_E$$

Donc Ker$f$ = $\{0_E\}$

Réciproquement, supposons Ker$f$ = $\{0_E\}$, et soit x et x' quelconques tels que $f(x) = f(x')$. Alors :

$$\begin{aligned} & f(x) - f(x') = 0_F \\ \Rightarrow\quad & f(x - x') = 0_F \\ \Rightarrow\quad & x - x' \in \mathrm{Ker}(f) \\ \Rightarrow\quad & x - x' = 0_E \\ \Rightarrow\quad & x = x' \end{aligned}$$

donc f est injective.

EXEMPLE 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+t \\ t+x \end{pmatrix}$$

Déterminer Ker(f). f est–elle injective ?

Ker(f) est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ t + x = 0 \end{cases}$, soit $x = -y = z = -t$. Il s'agit de la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. f n'est pas injective.

EXEMPLE 2 :

Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E et f l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans E définie par :

$$f\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \dots\\ \lambda_p\end{pmatrix} = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p$$

Im(f) est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x_1, ..., x_p)$. f est surjective si et seulement si $(x_1, ..., x_p)$ est un système générateur de E.

Ker(f) est l'ensemble des $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \dots\\ \lambda_p\end{pmatrix}$ donnant une combinaison linéaire nulle de $(x_1, ..., x_p)$. f est injective si et seulement si $(x_1, ..., x_p)$ est un système libre.
f est bijective si et seulement si $(x_1, ..., x_p)$ est une base de E.

PROPOSITION
Soit f linéaire de E dans F et b élément de F. Alors l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = b$ *ou bien est vide ou bien est de la forme* $\{x_0 + z, z \in \text{Ker}(f)\}$, *où* x_0 *est une solution particulière de l'équation*

L'ensemble $\{x_0 + y, y \in \text{Ker}(f)\}$ se note également $x_0 + \text{Ker}(f)$ et s'appelle sous-espace affine de direction Ker(f).

Démonstration :
Si l'ensemble des solutions est non vide, soit x_0 une solution particulière. Soit z élément de Ker(f). Alors $f(x_0 + z) = f(x_0) + f(z) = b$ donc $x_0 + z$ est bien solution. Réciproquement, soit y une solution vérifiant $f(y) = b$. Posons $z = y - x_0$. On a bien $y = x_0 + z$ et il n'est pas difficile de vérifier que $f(z) = 0$.

EXEMPLE :
❑ $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ avec l'un des a_i non nul est l'équation d'un hyperplan H_0 vectoriel de $\mathbb{R}^n$, sous-espace vectoriel de dimension n–1. C'est le noyau de l'application $\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix} \to \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.
❑ $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$ est l'équation d'un hyperplan affine H_b . Il est obtenu à partir de H_0 en ajoutant aux éléments de H_0 une solution particulière $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_{10}\\ \dots\\ x_{n0}\end{pmatrix}$ de l'équation complète. Géométriquement, $\boldsymbol{x}$ peut être vu comme un vecteur de translation déplaçant les éléments de H_0 jusqu'à H_b.

EXEMPLE :
Cette propriété est également couramment utilisée dans la résolution des équations différentielles linéaires de la forme $f(y) = c$, où f est une expression linéaire en y faisant intervenir y' et y'' (par exemple $y'' + 2y' + 3y$), et où la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. Cette solution générale de l'équation sans second membre n'est autre que l'élément général du noyau de f.

Pour conclure, on peut montrer qu'un ensemble H est un espace vectoriel
❑ en utilisant la définition (mais pratiquement, celle-ci est réservée aux exemples fondamentaux, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

❑ en montrant que H est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E (stabilité pour la somme et le produit)

❑ en montrant que H est un sous-espace vectoriel engendré par une partie M

❑ en montrant que H est l'image d'une application linéaire

❑ en montrant que H est le noyau d'une application linéaire.

Prenons par exemple pour H l'ensemble des suites arithmétiques. On peut montrer que H est un espace vectoriel :

❑ en montrant que H est stable pour la somme et le produit.

❑ en remarquant que H est engendré par la suite constante (1) et la suite $(n)_{n\in\mathbf{N}}$. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique, alors $\exists$ a et b tel que, $\forall$ n, $u_n = a + bn$.

❑ en remarquant que H est l'image de $\mathbb{R}^2$ par l'application $(a, b) \to (a + bn)_{n\in\mathbf{N}}$.

❑ en remarquant que H est le noyau de l'application de $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$ définie par :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \to (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

II : Cas de la dimension finie

1– Matrice associée à une application linéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie p et F un espace vectoriel de dimension finie n. On choisit une base $(e_j)_{j=1..p}$ de E et une base $(\varepsilon_i)_{i=1..n}$ de F. Dans cette base, un vecteur x de E s'écrit $\sum_{j=1}^{p} x_je_j$. Son image $f(x)$ s'écrit $\sum_{i=1}^{n} y_i\varepsilon_i$. f est définie si l'on connaît les images des e_j.

Posons $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$. On a alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j\, \varepsilon_i$ de sorte que $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j$, ce qu'on note de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice définissant l'application } f \text{ dans les bases } (e_j) \text{ et } (\varepsilon_i).} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1p}\, x_p \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots + a_{2p}\, x_p \\ \dots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \dots\, a_{np}\, x_p \end{pmatrix}$$

abrégé en Y = AX.

La $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée des composantes de l'image de e_j

a_{ij} se situe à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j$$

La matrice associée à une application linéaire dépend de la base choisie.

L'image étant engendrée par les $f(e_i)$, on voit que Im(f) est engendré par les vecteurs dont les composantes sont les colonnes de la matrice.

Le calcul matriciel correspond exactement aux opérations sur les applications linéaires. En effet :

❑ Soient f et g deux applications linéaires de matrices A et B, x un vecteur de E dont les composantes dans la base $(e_1, ..., e_p)$ sont $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}$. Nous venons de voir que l'image $f(x)$ a pour composantes AX dans la base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. De même $g(x)$ a pour composantes BX. Donc $f(x) + g(x)$ a pour composantes AX + BX = (A + B)X d'après la définition de la somme de deux matrices. Donc la matrice de $f + g$ est A + B.

❑ De même $\lambda f(x)$ a pour composantes $\lambda(AX) = (\lambda A)X$ par définition du produit d'une matrice par un scalaire. Donc la matrice de λf est λA.

❑ Enfin, $f \circ g(x)$ a pour composantes A(BX) = (AB)X par définition du produit de deux matrices. Donc la matrice de $f \circ g$ est AB.

❑ f bijective $\Leftrightarrow \exists\, g,\ g \circ f = f \circ g = \text{Id} \Leftrightarrow \exists\, B,\ BA = AB = I_p \Leftrightarrow$ A inversible. De plus la matrice de $f^{-1} = g$ est $B = A^{-1}$.

On pourra donc, en dimension finie, selon les cas, choisir de raisonner sur les applications linéaires ou sur les matrices, mais celles-ci dépendent de la base utilisée.

EXEMPLE : Soit $f : E_2 \to F_3$ et $g : F_3 \to G_4$

$$e_1 \to 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_1 \to \eta_1 + \eta_2$$
$$e_2 \to \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \qquad \varepsilon_2 \to \eta_3 - \eta_4$$
$$\varepsilon_3 \to \eta_1 - 2\eta_2 + 4\eta_4$$

La matrice de f est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice de g est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

La matrice de $g \circ f$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

Ainsi, $g \circ f(e_1) = 2\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3 - \eta_4$

$g \circ f(e_2) = 3\eta_2 - 4\eta_4$

2– Isomorphisme

PROPOSITION

Soit f un isomorphisme de E dans F, i.e. *une application linéaire bijective. Alors l'image d'une base de E par f est une base de F. En particulier dim(E) = dim(F).*
Réciproquement, si f transforme une base de E en une base de F, f est un isomorphisme.

Démonstration :
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.
$(e_1, ..., e_n)$ est donc un système libre de E. Montrons que le système $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est libre dans F. Pour cela, considérons une combinaison linéaire nulle :

$\lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n) = 0$

$\Rightarrow \quad f(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$ car f est injective

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ car la famille $(e_1, ..., e_n)$ est libre.
Donc la famille $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est libre.

Montrons que le système $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est générateur de F. Comme f est surjective, pour tout y de F, il existe x dans E tel que $y = f(x)$.

$\quad \exists\, x \in E, y = f(x)$
$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n, y = f(x)$ et $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$ car la famille $(e_1, ..., e_n)$ est génératrice de E
$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n, y = f(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n)$
$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n, y = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$
Donc la famille $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est génératrice de F.

Réciproquement, si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E et $(f(e_1), ..., f(e_n))$ une base de F, alors f est un isomorphisme. En effet :

❑ f est injective :

Soit x élément de Ker(f), de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. On a donc :

$\quad f(x) = 0$

$\Rightarrow \quad f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = 0$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$

$\Rightarrow \quad \forall\, i, \lambda_i = 0$ car les $f(e_i)$ forment un système libre.
$\Rightarrow \quad x = 0$

❑ f est surjective :

Soit y élément de F de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$. Alors $y = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i)$.

On dit que deux sous–espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme du premier sur le second.

PROPOSITION

Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Démonstration :

La proposition précédente montre que deux espaces vectoriels E et F isomorphes de dimension finie ont même dimension puisqu'un isomorphisme transforme une base du premier en une base du second. Réciproquement, soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension, $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base de F. Définissons f par :

$$\forall\, i, f(e_i) = \varepsilon_i.$$

On étend f tout entier à E par linéarité sur les combinaisons linéaires. f transformant une base de E en une base de F est un isomorphisme.

3– Supplémentaire

Tous les supplémentaires d'un sous–espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie ayant même dimension sont tous isomorphes entre eux. Si F admet pour supplémentaire G, on définit le projecteur sur F parallèlement à G par :

$$\begin{array}{rcl} E & \rightarrow & E \\ x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in G}{x_G} & \rightarrow & x_F = p(x) \end{array}$$

Il est facile de vérifier que :

- p est linéaire
- $\mathrm{Im}(p) = F$
- $\mathrm{Ker}(p) = G$
- $p \circ p = p$

Inversement, soit p linéaire telle que $p \circ p = p$. Posons $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$. Alors F et G sont supplémentaires et p est le projecteur sur F parallèlement à G. En effet :

❑ Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit x élément de $F \cap G$. Alors :

$$\begin{cases} x \in F \Rightarrow \exists\, z \in E,\ x = p(z) \\ x \in G \Rightarrow p(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow\ p \circ p\,(z) = 0 = p(z) = x$$

❑ Montrons que $E = F + G$. En effet, pour tout x de E, $x = p(x) + x - p(x)$ avec $p(x)$ élément de F et $x - p(x)$ élément de G comme on le vérifie en lui appliquant p.

La décomposition précédente prouve d'ailleurs que p est le projecteur sur F parallèlement à G. Il y a cependant deux cas dégénérés :

- $F = E$ et $G = \{0\}$. Dans ce cas, $p = \mathrm{Id}$.
- $F = \{0\}$ et $G = E$. Dans ce cas, $p = 0$

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est définie par :

$$\begin{array}{rcl} E & \rightarrow & E \\ x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in G}{x_G} & \rightarrow & x_F - x_G = s(x) \end{array}$$

On vérifiera que :

- s est linéaire.
- $\mathrm{Im}(s) = E$
- $\mathrm{Ker}(s) = \{0\}$
- $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(s + \mathrm{Id})$
- $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(s - \mathrm{Id})$
- $s \circ s = \mathrm{Id}$

Inversement, si s est un endomorphisme tel que $s \circ s = \mathrm{Id}$, alors, posant $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$, on a s symétrie par rapport à F parallèlement à G, avec comme cas dégénéré, $s = \mathrm{Id}$ et $s = -\mathrm{Id}$. La démonstration est comparable à celle utilisée pour les projecteurs.

4– Le théorème du rang

PROPOSITION

Soit u une application linéaire de E dans F. Alors u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de Ker(u) sur Im(u).

Démonstration :
Soit E' un supplémentaire de Ker(u) et considérons la restriction de u à E'.
Montrons que u : E' $\rightarrow$ Im(u) est un isomorphisme.
Cette restriction est injective. En effet :

$$x \in \text{Ker } u|_{E'} \Rightarrow x \in E' \text{ et } u(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(u) \cap E' = \{0\} \Rightarrow x = 0$$

Elle est également surjective. En effet :

$$y \in \text{Im}(u) \Rightarrow \exists\, x \in E,\ y = u(x)$$

or x peut s'écrire $v + w$ avec v dans Ker u et w dans E', de sorte que $y = u(w)$ et y appartient à Im($u|_{E'}$).

Cette proposition ne signifie nullement que Im(u) et Ker(u) sont en somme directe. Par contre, il y a une relation importante sur les dimensions de ces deux sous-espaces vectoriels.

THEOREME DU RANG
Soit u une application linéaire de E, espace vectoriel de dimension finie, dans F. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u))$$

Démonstration 1 :
En utilisant la proposition précédente, on a E = E' $\oplus$ Ker(u) avec E' isomorphe à Im(u). On a donc :

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(E') + \dim(\text{Ker}(u)) \\ &= \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u)) \end{aligned}$$

Démonstration 2 :
On peut aussi donner une démonstration directe. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de Ker$u$, complétée en $(e_1, ..., e_n)$ base de E. Alors $(u(e_1), ..., u(e_n))$ engendre Im(u). Comme $u(e_1) = ... = u(e_p) = 0$, un système générateur de Im(f) est en fait $(u(e_{p+1}), ..., u(e_n))$. Il suffit de montrer que ce système est libre pour pouvoir conclure que :

$$\dim(\text{Im}(u) = n - p = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u))$$

Soit une combinaison linéaire $\lambda_{p+1}u(e_{p+1}) + ... + \lambda_n u(e_n) = 0$

$\Rightarrow \quad u(\lambda_{p+1}e_{p+1} + ... + \lambda_n e_n) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_{p+1}e_{p+1} + ... + \lambda_n e_n \in \text{Ker}(u)$

$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_p,\ \lambda_{p+1}e_{p+1} + ... + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_p e_p$

$\Rightarrow \quad \forall\, i,\ \lambda_i = 0$ puisque le système $(e_1, ..., e_n)$ est libre

Donc $(u(e_{p+1}), ..., u(e_n))$ est libre

dim(Im(u)) s'appelle rang de u, noté rg(u). C'est le rang d'un système de vecteurs engendrant Im(u), par exemple $(u(e_1), ..., u(e_n))$ si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E. C'est également le nombre de colonnes indépendantes de la matrice de u puisque ces colonnes donnent les composantes d'un système générateur de Im(u). Dans le chapitre MATRICES.PDF sur le calcul matriciel, nous avons défini le rang comme le nombre de lignes non nulles d'une matrice échelonnée équivalente en ligne à la matrice initiale. Nous verrons plus loin qu'il s'agit bien du même nombre.

Dans le cas où u est une forme linéaire non nulle, Ker(u) s'appelle un hyperplan, et on a :

$$\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E) - 1$$

puisque Im(u) = $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 1

APPLICATIONS : Soit f linéaire de E dans F. Il y a équivalence entre :
i) f est un isomorphisme
ii) dim(E) = dim(F) et f injective

iii) $\dim(E) = \dim(F)$ et f surjective.

Montrons par exemple ii) $\Rightarrow$ i). On a :
$\dim(F) = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ car f est injective
$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = F \Rightarrow f$ surjective.
On montre de même iii) $\Rightarrow$ i). Les réciproques sont évidentes.

Ainsi, pour un endomorphisme en dimension finie, il y a équivalence entre f bijective, f injective, f surjective. On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION :
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il y a équivalence entre :
i) A *est inversible*
ii) $\exists$ B, $AB = I_n$
iii) $\exists$ B, $BA = I_n$
iv) $\mathrm{rg}(A) = n$

Démonstration :
Il est clair que i) entraîne les trois autres. Réciproquement, soit f endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, associé à A dans une base donnée et g associée à B.
ii) $\Rightarrow \exists\, g \in L(E)$, $f \circ g = \mathrm{Id} \Rightarrow f$ surjective (un antécédent de y par f est $g(y)$)
$\Rightarrow f$ bijective $\Rightarrow$ A inversible
iii) $\Rightarrow \exists\, g \in L(E)$, $g \circ f = \mathrm{Id} \Rightarrow f$ injective (car $f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = x = 0$)
$\Rightarrow f$ bijective $\Rightarrow$ A inversible.
iv) $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = E \Rightarrow f$ surjective $\Rightarrow f$ bijective $\Rightarrow$ A inversible.

EXERCICE : Soit $x_1, \ldots, x_n$ n réels distincts et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quelconque. Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que :

$$\forall\, i,\ P(x_i) = f(x_i)$$

On réfléchira à une démonstration directe avant de consulter la suite. On verra que la question est loin d'être évidente.

Considérons l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\Phi : P \to \begin{pmatrix} P(x_1) \\ \ldots \\ P(x_n) \end{pmatrix}$$

On vérifie trivialement qu'il s'agit d'une application linéaire. Les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension n. Φ est injective ; en effet, soit P tel que $\Phi(P) = 0$. Alors P, polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ s'annule en n points distincts. P est donc nul. On en conclut que Φ est un isomorphisme, et donc que Φ est surjective. Considérons le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \ldots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$. Il existe un et un seul antécédent P par Φ, et donc un et un seul polynôme P tel que : $\forall\, i$, $P(x_i) = f(x_i)$. P s'appelle polynôme interpolateur de Lagrange, coïncidant avec f aux points $x_1, \ldots, x_n$. Son expression explicite est :

$$\mathrm{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \frac{(\mathrm{X} - x_1)(\mathrm{X} - x_2)(\mathrm{X} - x_{i-1})(\mathrm{X} - x_{i+1})...(\mathrm{X} - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

En effet, le polynôme $\dfrac{(\mathrm{X} - x_1)(\mathrm{X} - x_2)(\mathrm{X} - x_{i-1})(\mathrm{X} - x_{i+1})...(\mathrm{X} - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$ s'annule en x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n et son dénominateur a pour but de lui faire prendre la valeur 1 en x_i. Notons-le $\mathrm{L}_i(\mathrm{X})$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_i(x_k) &= 0 \qquad \text{si } i \neq k \\ &= 1 \qquad \text{si } i = k \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \mathrm{L}_i(\mathrm{X})$, si on calcule $\mathrm{P}(x_k)$, tous les termes de la somme sont nuls, sauf le k-ème qui vaut justement $f(x_k)$.

5– Retour sur les systèmes linéaires

Dans le chapitre sur le calcul matriciel MATRICES.PDF, nous avons étudié l'existence et l'unicité des solutions à un système AX = B selon le rang de A, et son nombre de lignes et de colonnes. Les résultats énoncés alors peuvent se réinterpréter plus clairement au moyen des applications linéaires. A est vue comme la matrice d'une application linéaire f d'un espace vectoriel E de dimension p dans un espace vectoriel F de dimension n, des bases de chaque espace étant choisie. B est la colonne des composantes d'un vecteur donné b de F. X est la colonne des composantes d'un vecteur à trouver x de E. Posons $r = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg(A)}$.

Le système AX = B est équivalent à l'équation $f(x) = b$. On voit que l'existence des solutions est lié au fait que b appartient à l'image ou non. En particulier, si $r = n$ (rang égal au nombre d'équations), alors $\mathrm{Im}(f)$ et F ont même dimension, donc sont égaux, donc f est surjective et il y a toujours une solution.

L'unicité de la solution, si elle existe, est liée à l'injectivité de f, donc à son noyau. La dimension du noyau est, d'après le théorème du rang, égal à $p - r$. En particulier, si $p = r$ (rang égal au nombre d'inconnues), il y a unicité de la solution, si elle existe.

Le cas $r = n = p$ (autant d'inconnues que d'équations, ce nombre étant égal au rang) permet de conclure à l'existence et à l'unicité de la solution. On dit que le système est de Cramer. On voit qu'il ne suffit pas d'avoir $n = p$ pour conclure ainsi. Le rang du système joue un rôle essentiel. $r = n = p$ signifie qu'on dispose d'une matrice carrée inversible, donc que f est bijective.

Dans le cas général d'un système de rang r homogène (dont les seconds membres sont nuls), l'ensemble des solutions est $\mathrm{Ker}(f)$, sous-espace vectoriel de dimension $p - r$. Dans la pratique, la méthode de Gauss conduit à $n - r$ équations du type 0 = 0. On les élimine du système.

III : Changement de bases

1– Matrice de passage

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un espace vectoriel E. On considère une nouvelle base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. Cette nouvelle base est en général définie en donnant les composantes des ε_i dans la base initiale $(e_1, ..., e_n)$.

DEFINITION

On appelle matrice de changement de base de l'ancienne base à la nouvelle ou matrice de passage la matrice dont la colonne j est constituée des composantes de ε_j *dans l'ancienne base* $(e_1, ..., e_n)$.

Cette matrice étant de rang n est donc inversible.

EXEMPLE :
Si $\varepsilon_1 = 3e_1 + e_2$ et $\varepsilon_2 = -e_1 + 2e_2$, alors la matrice de passage de la base e à la base ε est :

$$P_{e\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2– Expression d'un vecteur

Soit (e_i) et (ε_i) deux bases ; soit $P_{e\varepsilon}$ la matrice de changement de base de (e_i) à (ε_i). On considère un vecteur v dont les composantes dans la base initiale (e) forment un vecteur colonne $(V)_e$, et l'on souhaite connaître les composantes de v dans la nouvelle base (ε). On a :

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x_j' \varepsilon_j$$

avec $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ où a_{ij} est le terme général de $P_{e\varepsilon}$.

$$\Rightarrow \qquad v = \sum_{j=1}^{n} x_j' \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' \, e_i$$

Par identification des coefficients, on en déduit que :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j'$$

Matriciellement, cela se traduit par : $(V)_e = P_{e\varepsilon}(V)_\varepsilon$

Pour connaître $(V)_\varepsilon$, il faudra donc résoudre un système ou inverser la matrice $P_{e\varepsilon}$

<u>Autre démonstration</u> :
Considérons l'application Id de E muni de la base (ε_i) dans E muni de la base (e_i). La matrice de cette application linéaire Id est la matrice $P_{e\varepsilon}$ précédemment définie. En effet, sa $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée des composantes dans la base d'arrivée (e_i) des vecteurs de la base de départ (ε_j). La relation Y = AX donnant les composantes de l'image d'un vecteur à partir des composantes de ce vecteur et de la matrice de l'application linéaire donnera dans le cas présent :

$$(V)_e = P_{e\varepsilon}(V)_\varepsilon$$

❑ **Inverse de $P_{e\varepsilon}$** :
De $(V)_e = P_{e\varepsilon}(V)_\varepsilon$, on tire $(V)_\varepsilon = P_{e\varepsilon}^{-1}(V)_e$. Mais par ailleurs, en reprenant la formule initiale en inversant les rôles de e et ε, on a aussi :

$$(V)_\varepsilon = P_{\varepsilon e}(V)_e$$

Ces formules étant vraies pour tout V, on en déduit que :

$$P_{e\varepsilon}^{-1} = P_{\varepsilon e}$$

❑ **Produit de matrices de passage** :
Si l'on dispose de trois bases e,e',e'', on a

$$(V)_e = P_{ee'}(V)_{e'}$$
$$(V)_{e'} = P_{e'e''}(V)_{e''}$$
$$\Rightarrow \quad (V)_e = P_{ee'}P_{e'e''}(V)_{e''}$$

or, par ailleurs, on a :

$$(V)_e = P_{ee''}(V)_{e''}$$

ces relations étant vraies pour tout vecteur V, on en déduit que :

$$P_{ee'}P_{e'e''} = P_{ee''}$$

3– Applications linéaires

Soit E muni de deux bases e et e', et F muni de deux bases ε et ε'. e et ε sont considérées comme les anciennes bases, e' et ε' comme les nouvelles. Soit P la matrice de passage de e à e', et Q la matrice de passage de ε à ε'. Soit f une application linéaire de E dans F, de matrice M dans les anciennes bases. Si dim(E) = p et dim(F) = n, alors :

$$M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$
$$P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$$
$$Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

On souhaite déterminer l'expression de la matrice de f dans les nouvelles bases. Notons $w = f(v)$. On a :

$(W)_\varepsilon = M(V)_e$ par définition de la matrice d'une application linéaire
$(W)_\varepsilon = Q(W)_{\varepsilon'}$ changement de base dans F
$(V)_e = P(V)_{e'}$ changement de base dans E
$\Rightarrow \quad (W)_{\varepsilon'} = Q^{-1}MP(V)_{e'}$

Ainsi, la matrice de f dans la nouvelle base est $M' = Q^{-1}MP$. (On vérifiera la possibilité d'effectuer un tel produit). On a également $M = QM'P^{-1}$. Les matrices M et M' sont dites équivalentes.

Dans le cas d'un endomorphisme où l'on effectue le même changement de base P dans le même espace de départ et d'arrivée, la formule se réduit à $M' = P^{-1}MP$. Les matrices M et M' sont dites semblables.

Il est possible de trouver des bases de E et des bases de F dans lesquelles la matrice de f est particulièrement simple :

PROPOSITION

Soit M, élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Alors M est de la forme QJ_rP^{-1}, avec P et Q carrées inversibles et J_r la matrice par bloc définie par :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_1 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice identité de dimension r, O_1 la matrice nulle à r lignes et $p-r$ colonnes, O_2 la matrice nulle à $n-r$ lignes et r colonnes, O_3 la matrice nulle à $n-r$ lignes et $p-r$ colonnes.

<u>Démonstration</u> :
On considère que M est associée à une application linéaire f d'un espace vectoriel E de dimension p dans un espace vectoriel F de dimension n dans des bases données (on peut prendre par exemple

$E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$ munis des bases canoniques). On construit alors une base $(e_1', ..., e_p')$ de E et $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', ... \varepsilon_n')$ de F dans lesquelles la matrice de f est donnée par la matrice ci-dessus, à savoir :

$$f(e_1') = \varepsilon_1', f(e_2') = \varepsilon_2', ..., f(e_r') = \varepsilon_r', f(e_{r+1}') = 0, ..., f(e_p') = 0$$

On remarque que, d'après le théorème du rang, dim Ker(f) = $p - r$. On choisit donc $e_{r+1}', ..., e_p'$ base de Ker(f), que l'on complète en $e_1', ..., e_r', e_{r+1}', ..., e_p'$ base de E. On pose $\varepsilon_1' = f(e_1'), ..., \varepsilon_r' = f(e_r')$. Dans la démonstration du théorème du rang, nous avons montré que cette famille constitue une base de Im(f). On la complète en $\varepsilon_1', ..., \varepsilon_r', \varepsilon_{r+1}', ..., \varepsilon_n'$ base de F. P et Q sont alors les matrices de changement de bases ainsi définies.

Réciproquement, si $M = QJ_rP^{-1}$ alors $rg(M) = rg(J_r)$ puisque M et J_r représenteront la même application linéaire dans des bases différentes, et que leur rang sera le rang de cette application linéaire.

Cela signifie que ce qui caractérise une application linéaire, c'est son rang. On peut classifier les applications linéaires au moyen de leur rang. Par exemple, il existe trois types d'applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension 3 dans un espace vectoriel de dimension 2, à savoir, les applications dont la matrice est, dans des bases bien choisies :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

COROLLAIRE :
$rg({}^tA) = rg(A)$

Concrètement, ce résultat exprime le fait que le rang d'une matrice peut se calculer aussi bien sur les lignes que sur les colonnes.

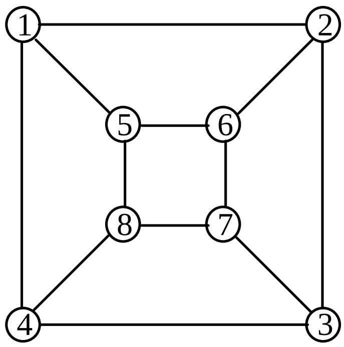
Démonstration :
Soit A de rang r. Alors A est équivalente à J_r définie plus haut. Donc il existe P, élément de $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et Q élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que :

$A = QJ_rP^{-1}$
$\Rightarrow$ ${}^tA = {}^t(QJ_rP^{-1}) = {}^tP^{-1}\,{}^tJ_r\,{}^tQ$
$\Rightarrow$ ${}^tA$ est équivalente à ${}^tJ_r$
et il est clair que $rg({}^tJ_r) = r$.

Annexe I : Une application du théorème du rang en SII, le nombre cyclomatique

En Sciences Industrielles, un mécanisme est modélisé par des solides indéformables $S_1, S_2, ..., S_n$ ayant entre eux des liaisons, traduisant les mouvements possibles entre les pièces. Notons L_{ij} une liaison entre le solide S_i et le solide S_j. Il n'existe bien évidemment pas des liaisons entre tous les solides du mécanisme, de sorte que L_{ij} n'est pas nécessairement défini pour tout i et j. On a par ailleurs $L_{ij} = L_{ji}$ lorsqu'une telle liaison existe.

Le mécanisme est symbolisé par un graphe de structure, ayant des sommets et des arêtes. Il y a autant de sommets que de solides (soit n), et une arête relie le sommet S_i et S_j si et seulement si une liaison L_{ij} existe. Autrement dit, les arêtes représentent les liaisons entre solides. Voici un exemple de graphe de structure, où les sommets (ou solides) sont numérotés de 1 à 8 :



Nous supposerons toujours un graphe de structure connexe, c'est-à-dire qu'on peut se rendre d'un sommet quelconque à un autre sommet en suivant un chemin du graphe (sinon, cela voudrait dire que l'on dispose de deux mécanismes disjoints).

Un cycle est un chemin fermé ne rencontrant pas deux fois la même arête, par exemple 1-4-8-5-1 ou 1-4-8-7-3-2-1. On peut définir la notion de cycles indépendants, et de nombre cyclomatique. Mathématiquement, cette notion d'indépendance est identique à la notion de système de vecteurs indépendants et le nombr cyclomatique est identique à la notion de dimension d'un espace vectoriel. Précisons cela.

Le corps de base utilisé sera inhabituel. Il s'agit du corps constitué des deux éléments 0 et 1, avec comme règle de la somme 1 + 1 = 0. Ce corps est noté $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On peut le voir aussi comme le corps des deux éléments {pair, impair} avec les règles d'opérations usuelles sur les nombres pairs et impairs. La caractéristique essentielle de ce corps est que :

$$\forall x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x + x = 0$$

Considérons maintenant F espace vectoriel de dimension n (le nombre de solides) sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dont une base est notée $(S_1, ..., S_n)$. Autrement dit, les sommets (ou les solides) désignent les vecteurs d'une base de F. Un vecteur quelconque de F s'écrit $S_{i_1} + S_{i_2} + ... + S_{i_k}$ où les indices i_1, i_2, ..., i_k sont distincts (car s'il y a deux indices identiques, on a $S_i + S_i = (1 + 1)\ S_i = 0\ S_i = 0$).

Considérons également E espace vectoriel de dimension p (le nombre de liaisons) sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dont une base sont les vecteurs L_{ij}.Un vecteur quelconque de E s'écrit $\sum L_{ij}$ où les indices sont également distincts.

Définissons enfin une application linéaire δ de E dans F, appelée *bord* en donnant les images des vecteurs de base de E. Si L_{ij} est une liaison entre S_i et S_j alors $\delta(L_{ij}) = S_i + S_j$. Par exemple, dans le graphe de structure dessiné ci-dessus :

$$\delta(L_{56}) = S_5 + S_6$$
$$\delta(L_{56} + L_{67} + L_{73}) = \delta(L_{56}) + \delta(L_{67}) + \delta(L_{73}) = S_5 + S_6 + S_6 + S_7 + S_7 + S_3$$
$$= S_5 + S_3 \quad \text{puisque } S_6 + S_6 = 0 = S_7 + S_7$$

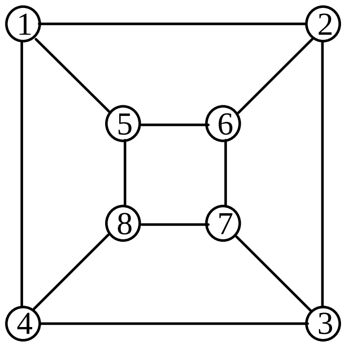
On comprend pourquoi δ s'appelle *bord*. On a calculé le bord (i.e. les extrémités) du chemin 5-6-7-3.

Quelle est l'image de δ ? Un sommet isolé ne peut être dans cette image, car $\delta(L_{ij})$ fait intervenir deux sommets et il en résulte que $\delta(\sum L_{ij})$ est combinaison linéaire d'un nombre pair de sommets (même après simplification). L'application δ ne peut être surjective. Montrons que son rang est $n - 1$ (un de moins que le nombre de sommets). Il suffit de montrer que, par exemple, le système libre

($S_1 + S_2$, $S_1 + S_3$, ..., $S_1 + S_n$) est constitué de vecteurs de Im(δ). Or nous avons supposé le graphe connexe, ce qui signifie que, pour tout i, il existe un chemin allant de S_1 à S_i. Cela ne signifie rien d'autre que le bord de ce chemin est $S_1 + S_i$ qui est donc bien dans Im(δ).

Quel est le noyau de δ ? Par définition, nous appellerons cycle un élément de ce noyau. C'est un chemin ou une combinaison linéaire de chemins de bord nul. C'est le cas par exemple de $L_{14} + L_{48} + L_{85} + L_{51}$, dont l'image par δ est nul. Les cycles dits indépendants sont précisément ceux qui sont linéairement indépendants dans E au sens mathématique du terme. Le théorème du rang nous donne la dimension de Ker(δ). C'est $\mu = p - \mathrm{rg}(\delta) = p - (n - 1) = p - n + 1$. Ce nombre est dit nombre cyclomatique du graphe. C'est le nombre maximal de cycles indépendants. Dans l'exemple précédent, $\mu = 12 - 8 + 1 = 5$. Il y a cinq cycles indépendants, par exemple :

$C_1 = L_{15} + L_{58} + L_{84} + L_{41}$
$C_2 = L_{12} + L_{26} + L_{65} + L_{51}$
$C_3 = L_{26} + L_{67} + L_{73} + L_{32}$
$C_4 = L_{37} + L_{78} + L_{84} + L_{43}$
$C_5 = L_{14} + L_{43} + L_{32} + L_{21}$



Tout autre cycle est combinaison linéaire de ces cycles, par exemple :

$L_{56} + L_{67} + L_{78} + L_{85} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$
$L_{15} + L_{56} + L_{67} + L_{73} + L_{32} + L_{21} = C_2 + C_3$

Le nombre cyclomatique s'interprête aussi comme le nombre minimal d'arêtes à supprimer pour qu'il n'y ait plus de cycles. En effet, si le graphe possède au moins un cycle, on enlève une arête de ce cycle. Cela ne déconnecte pas le graphe, mais diminue p de 1. Le nombre cyclomatique diminue donc de 1 également, et on itère le procédé, jusqu'à obtenir, après avoir enlevé successivement p arêtes, un nombre cyclomatique nul correspondant à un graphe sans cycle. δ est alors injective.

Annexe II : Composition des vitesses et des accélérations en cinématique

Les relations entre vitesse et accélération d'un point mobile relativement à deux repères différents résultent des formules de changement de base.

<u>Dérivation relativement à une base</u>

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 muni de deux bases orthonormées directes, (e_1, e_2, e_3) et (ε_1, ε_2, ε_3). Ces deux bases sont susceptibles de varier au cours du temps l'une par rapport à l'autre. C'est le cas par exemple en astronomie lorsque l'une des bases est liée à la Terre et l'autre est centrée sur le Soleil et dirigé vers des étoiles lontaines. La matrice de changement de base $P_{e\varepsilon}$ (ou son inverse $P_{\varepsilon e}$) sera donc une matrice dépendant du temps t. Le caractère variable de la matrice de passage exprime seulement comment une base varie par rapport à l'autre.

Considérons maintenant la relation de changement de base $(U)_e = P_{e\varepsilon}(U)_\varepsilon$, où $\boldsymbol{u}$ est un vecteur dépendant lui aussi du temps. $(U)_e$ sont les composantes de $\boldsymbol{u}$ dans la base (e). $(U)_\varepsilon$ sont les composantes de $\boldsymbol{u}$ dans la base (ε). Ces composantes dépendantes elles aussi du temps. Dérivons la relation de changement de base. On obtient, en notant P pour abréger $P_{e\varepsilon}$:

$$\frac{d(U)_e}{dt} = P\,\frac{d(U)_\varepsilon}{dt} + \frac{dP}{dt}(U)_\varepsilon$$

❑ Interprétons cette égalité. Considérons $\frac{d(U)_e}{dt}$. Si $\boldsymbol{u} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ avec x_1, x_2, x_3 dépendant du temps, alors $(U)_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, et $\frac{d(U)_e}{dt} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$. Ces composantes représentent un vecteur dans la base (e), à savoir $x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3$. IL NE S'AGIT PAS DE LA DERIVEE DE $\boldsymbol{u}$, puisque la dérivée de $\boldsymbol{u}$ ferait intervenir les dérivées des vecteurs e_i. Or, on s'est contenté de dériver les composantes. Nous dirons qu'il s'agit de la dérivée de $\boldsymbol{u}$ par rapport à la base (e). Elle correspond à la dérivée de $\boldsymbol{u}$ pour un observateur lié à la base (e) et qui observe l'évolution de $\boldsymbol{u}$ dans cette base. Pour un tel observateur, les e_i sont fixes et seules les composantes de $\boldsymbol{u}$ varient. Nous noterons cette dérivée $\boldsymbol{u}'|_{(e)}$.

❑ De même, $\frac{d(U)_\varepsilon}{dt}$ représente, dans la base (ε) les composantes de la dérivée de $\boldsymbol{u}$ par rapport à la base (ε), notée $\boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)}$. Il s'agit de la dérivée de $\boldsymbol{u}$ pour un autre observateur, lié à la base (ε) et pour qui les ε_i sont fixes.
Quant à $P\,\frac{d(U)_\varepsilon}{dt}$, en vertu de la formule de changement de base, ce sont les composantes, dans la base (e) cette fois-ci, du même vecteur $\boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)}$. L'observateur lié à (ε) observe un vecteur, mesure ses composantes, et transmet ces informations à l'observateur lié) (e). Celui-ci est alors en mesure d'exprimer $\boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)}$ dans sa propre base au moyen de $P\,\frac{d(U)_\varepsilon}{dt}$. Il observe que le vecteur qu'il obtient n'est pas égal à $\boldsymbol{u}'|_{(e)}$.

❑ Reste la dernière partie, $\frac{dP}{dt}(U)_\varepsilon = \frac{dP}{dt}P^{-1}(U)_e$ donnant la différence entre $\boldsymbol{u}'|_{(e)}$ et $\boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)}$. Dans la base (e), il s'agit des composantes de l'image de $\boldsymbol{u}$ par une application linéaire Φ de matrice $\frac{dP}{dt}P^{-1}$.
La relation trouvée s'écrit donc :

$$\boldsymbol{u}'|_{(e)} = \boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)} + \Phi(\boldsymbol{u})$$

❑ Etudions de plus près l'endomorphisme Φ. P, matrice de changement de base d'une base orthonormée directe à une autre, est une matrice de rotation, et vérifie :

$P \times {}^tP = I$ (cf le chapitre *Espaces euclidiens* dans le fichier ESPEUCL.PDF)

ou encore ${}^tP = P^{-1}$
En dérivant cette relation, on obtient :

$$P' \times {}^tP + P \times {}^tP' = 0$$
$$\Rightarrow \quad P' \times {}^tP = -\,P \times {}^tP' = -\,{}^t(P' \times {}^tP)$$

Ainsi, $P' \times {}^tP$ (ou $P'P^{-1}$), matrice de Φ, est antisymétrique, donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Si on note $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base (e), on a $\Phi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}$. Ainsi :

$$\boldsymbol{u}'|_{(e)} = \boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ s'appelle vecteur instantané de rotation de la base (ε) par rapport à la base (e). Il dépend lui aussi du temps. Par contre, puisque $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} = 0$, on a $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)}$, ce que nous abrègerons en $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}$, étant entendu que cette dérivée sera calculée relativement à l'une ou l'autre base et pas à une troisième.

<u>Composition des vitesses</u>

Les considérations qui précèdent sont largement utilisées en cinématique. Soit (O, e_1, e_2, e_3) et (O', ε_1, ε_2, ε_3) deux repères affines orthonormés directs d'un espace affine de dimension 3, tous deux dépendants du temps. Soit M un point variable de cet espace. Un observateur lié à (O, e_1, e_2, e_3) verra se déplacer le point M dans son référentiel, avec une vitesse $\boldsymbol{V}|_{(e)} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)}$. Un observateur lié à (O', ε_1, ε_2, ε_3) verra se déplacer le même point M dans son référentiel avec une vitesse $\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{O'M}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)}$. On cherche la relation entre ces deux vitesses. On applique le résultat qui précède-dessus avec $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{OM}$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}|_{(e)} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{O'M}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM} \\
&= \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM}
\end{aligned}$$

Le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM}$ serait la vitesse dans le référentiel (O, e_1, e_2, e_3) d'un point coïncidant avec M à l'instant considéré, mais fixe dans (O', ε_1, ε_2, ε_3). On l'appelle vitesse d'entraînement de M à l'instant considéré. On peut l'écrire également sous la forme :

$$\boldsymbol{V}_{\text{entr.}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M}$$

La formule de composition des vitesses s'écrit donc :

$$\boldsymbol{V}\,|_{(e)} = \boldsymbol{V}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{V}_{\text{entr.}}$$

<u>Composition des accélérations</u>

En dérivant la relation de compositions des vitesses, on fait apparaître les accélérations de M relativement à chaque repère, à savoir $\boldsymbol{a}|_{(e)} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}|_{(e)}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)}$ et $\boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)}$.On obtient :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}|_{(e)} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}\,|_{(e)}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{V}_{\text{entr.}})\,|_{(e)} \\
&= \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)}} \qquad + \qquad \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{\text{entr.}}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)}}{\mathrm{d}t}\Big|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\Big|_{(e)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M}\Big)\Big|_{(e)}$$

$$= \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{(e)} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{O'M}}{\mathrm{d}t}\Big|_{(e)}$$

$$= \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{(e)} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{O'M}}{\mathrm{d}t}\Big|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M}\Big)$$

$$= \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + 2\,\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{(e)} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M})$$

Si on considère un point fixe dans le référentiel (O', ε_1, ε_2, ε_3), coïncidant avec M à l'instant considéré, sa vitesse et son accélération dans ce référentiel seraient nulles, de sorte que son accélération dans le référentiel (O, e_1, e_2, e_3) serait égale au vecteur suivant, appelé accélération d'entraînement :

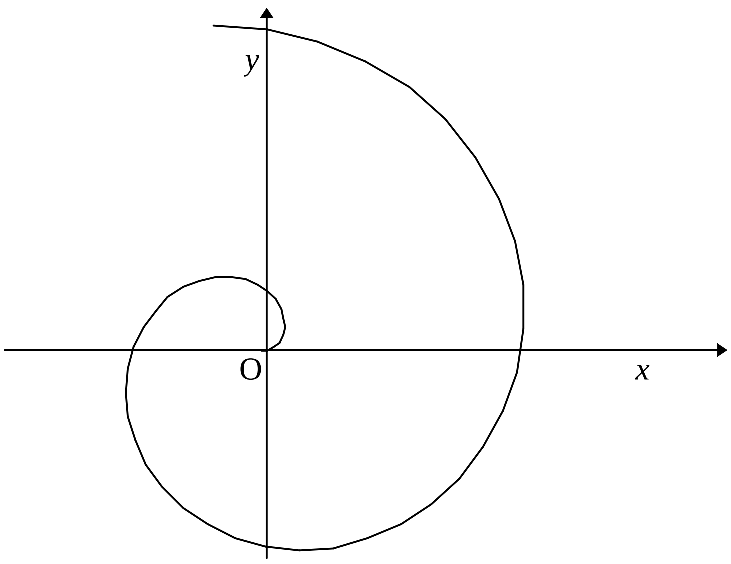
$$\boldsymbol{a}_{\text{entr.}} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{(e)} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\Big|_{(e)} \wedge \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M})$$

Il reste enfin un terme supplémentaire, à savoir $2\,\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)}$, qualifié d'accélération de Coriolis $\boldsymbol{a}_{\text{Cor.}}$.
La formule de composition des accélérations s'écrit donc :

$$\boldsymbol{a}|_{(e)} = \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{a}_{\text{entr.}} + \boldsymbol{a}_{\text{Cor.}}$$

EXEMPLE :

Considérons une spirale d'Archimède d'équation polaire $\begin{cases} \rho = \mathrm{V}t \\ \theta = \omega t \end{cases}$, soit $\rho = \frac{\mathrm{V}}{\omega}\theta$.



Il s'agit de la trajectoire dans le repère Oxy d'un point M se déplaçant à vitesse constante V sur une droite passant par O, qui elle-même tourne à vitesse constante ω autour de O. Dans un repère lié à la droite, on voit ce point s'éloigner à la vitesse constante V de O, et donc avec une accélération nulle. Dans le repère Oxy au contraire, ses composantes sont $\begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}t\cos(\omega t) \\ \mathrm{V}t\sin(\omega t) \end{pmatrix}$ et on le voit avec une vitesse $\begin{pmatrix} \mathrm{V}\cos(\omega t) - \mathrm{V}\omega t\sin(\omega t) \\ \mathrm{V}\sin(\omega t) + \mathrm{V}\omega t\cos(\omega t) \end{pmatrix}$. Cette vitesse peut se décomposer en la somme de $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}\cos(\omega t) \\ \mathrm{V}\sin(\omega t) \end{pmatrix}$, vitesse du point relativement à un repère lié à la droite, et de $\begin{pmatrix} -\mathrm{V}\omega t\sin(\omega t) \\ \mathrm{V}\omega t\cos(\omega t) \end{pmatrix} =$

$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{OM}$, vitesse d'entraînement (on rajoute une troisième direction orthogonale au plan et portant $\boldsymbol{\omega}$ pour effectuer le produit vectoriel).
Quant à l'accélération de M dans Oxy, elle vaut :

$$\begin{pmatrix} -2\omega V\sin(\omega t) - V\omega^2 t\cos(\omega t) \\ 2\omega V\cos(\omega t) - V\omega^2 t\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega V\sin(\omega t) \\ 2\omega V\cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -V\omega^2 t\cos(\omega t) \\ -V\omega^2 t\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}}_{\text{accélération de Coriolis}} - \underbrace{\omega^2\,\boldsymbol{OM}}_{\text{accélération d'entraînement centripète}}$$

◆