DEVELOPPEMENTS LIMITES

PLAN

I : Généralités

1– Définition

f admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n si f est de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

où $o(x^n)$ désigne une fonction négligeable devant x^n quand x tend vers 0, i.e. telle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^n)}{x^n} = 0$.

EXEMPLE :
On a :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} + o(x^n)$$

d'où :

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \\ \dfrac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \end{array}}$$

f admet un développement limité au voisinage de x_0 à l'ordre n si f est de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

On retrouve la forme précédente en posant $h = x - x_0$.

f admet un développement limité au voisinage de ∞ à l'ordre n si f est de la forme :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$$

On retrouve la forme initiale en posant $h = \frac{1}{x}$. On peut donc toujours se ramener au voisinage de 0.

EXEMPLE :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{h}} = \frac{h}{1+h} = h - h^2 + \ldots + (-1)^{n-1} h^n + o(h^n) \text{ quand } h \to 0$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} + o(\frac{1}{x^n}) \text{ quand } x \to \infty$$

Il y a unicité du développement limité, puisque, si f est de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$$
$$= b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + o(x^n)$$

alors :

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n = o(x^n)$$

ce qui ne peut se produire que si tous les coefficients sont nuls. En effet, si l'un d'entre eux est non nul, le membre de gauche est équivalent au terme de plus bas degré, qui ne sera pas négligeable devant x^n.

Si f est de classe C^n au voisinage de x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre n. Il se déduit des formules de Taylor, comme nous allons le voir ci-dessous.

2– Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$. On peut alors écrire :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f\,'(t)\,dt$$

Si $f\,'$ est elle–même C^1, c'est–à–dire si f est C^2, on peut intégrer cette relation avec $u' = 1$ et $v = f\,'$, soit $u = -(b-t)$ et $v' = f''$. u est choisi de la sorte de façon à s'annuler en b. On obtient :

$$f(b) = f(a) + (b-a) f\,'(a) + \int_a^b (b-t) f\,''(t)\,dt$$

On peut itérer le procéder si on suppose $f\,''$ C^1, soit f de classe C^3. Posons $u' = (b-t)$ et $v = f\,''(t)$, soit $u = -\frac{(b-t)^2}{2}$ et $v' = f^{(3)}(t)$

$$f(b) = f(a) + (b-a)f\,'(a) + (b-a)^2\frac{f\,''(a)}{2} + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt$$

Montrons par récurrence que, pour f de classe C^n :

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f\,'(a) + (b-a)^2\frac{f\,''(a)}{2} + \ldots + (b-a)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt}$$

Cette relation a été vérifiée pour $n = 1$, 2 et 3. Si elle est vraie au rang n, et si f est de classe C^{n+1}, on intère le reste intégral dans la formule précédente par parties en posant $u' = \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et $v = f^{(n)}(t)$, soit $u = -\frac{(b-t)^n}{n!}$ et $v' = f^{(n+1)}(t)$. On obtient alors :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ \dots + (b-a)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + \ (b-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

qui est bien la relation demandée au rang $n + 1$.

Cette formule pose des difficultés de mémorisation. En dehors de la démonstration directe, les remarques suivantes permettent de la retrouver facilement :

- Pour $n = 1$, on doit retrouver $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$
- Si on s'arrête à $(b-a)^{n-1}\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$ dans la partie polynomiale, alors nécessairement l'intégrale fait intervenir $f^{(n)}$.
- Une valeur approchée de l'intégrale doit être $(b-a)^n\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ qui est le terme d'ordre n du développement de Taylor. Aussi $f^{(n)}(t)$ doit-il être multiplié par une fonction ayant une valeur prépondérante en a plutôt qu'en b, ce qui est le cas du facteur $b - t$ et a fortiori de ses puissances.
- La puissance de $b - t$ se retrouve en remarquant que $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t$ donne exactement le coefficient attendu au rang n, à savoir $\dfrac{(b-a)^n}{n!}$

3– Inégalité de Taylor-Lagrange

Si $f^{(n)}$ est majoré sur $[a, b]$ par M, on obtient, en majorant l'intégrale :

$$\left| f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - (b-a)^2\frac{f''(a)}{2} - \dots - (b-a)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \right| \le \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{M}\,\mathrm{d}t \le \frac{\mathrm{M}(b-a)^n}{n!}$$

Cette formule est valable également pour $a > b$ à condition de majorer par :

$$\int_b^a (t-b)^{n-1}\frac{\mathrm{M}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t \le \frac{\mathrm{M}\,|b-a|^n}{n!}$$

4– Formule de Taylor-Young

Soit f de classe C^n sur un intervalle I. La formule de Taylor–Young énonce que f admet un développement limité au voisinage de tout point a de I :

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} + \dots + (x-a)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \mathrm{o}((x-a)^n)}$$

Considérons en effet la différence entre le reste intégral de la formule de Taylor lorsque $b = x$ et le terme $(x-a)^n\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. On peut écrire cette différence sous la forme :

$$\int_a^x (x-t)^{n-1}\frac{f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t$$

quantité qu'on peut majorer en valeur absolue, pour $x > a$, par :

$$\int_a^x (x-t)^{n-1}\frac{\mathrm{M}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}\frac{(x-a)^n}{n!}, \text{ où M majore } \left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right|$$

Mais $\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right|$ est une fonction continue de t et admet donc un maximum M de la forme $\left|f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)\right|$, avec c compris entre a et x. Quand x tend vers 0, c tend vers a, M tend vers 0 et on obtient bien la forme du reste de Taylor–Young. On procède d'une façon comparable si $x < a$.

EXEMPLE :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$
$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$
$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\dots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

On remarque que le premier terme du développement limité est un équivalent de la fonction. Le développement limité dévoile en fait les termes cachés par l'équivalent.

On note également $\dfrac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\dots(\alpha - n + 1)}{n!} = \dbinom{\alpha}{n}$. Pour α entier, on reconnaît un coefficient binomial et la formule du binôme de Newton dans le développement de $(1 + x)^\alpha$.

Par ailleurs, l'inégalité de Taylor–Lagrange pour l'exponentielle entre 0 et x conduit à :

$$\left|e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} - \dots - \frac{x^n}{n!}\right| \leq M \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} \qquad \text{où } M = \mathrm{Max}(1, e^x)$$

ce qui donne, pour x fixé lorsque l'on fait tendre n vers l'infini :

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ que l'on note } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Ces formules permettent de calculer très efficacement des valeurs approchées de l'exponentielle. Ainsi e peut-il être approché par $1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3!} + \dots + \dfrac{1}{n!}$ avec une erreur majorée par $\dfrac{3}{(n + 1)!}$.

Il n'est pas toujours nécessaire de faire appel à la formule de Taylor comme on l'a vu pour le développement limité de $\dfrac{1}{1 - x}$ donné au début du chapitre.

Il n'est pas non plus nécessaire que f soit de classe C^n. Si $I_{\mathbb{Q}}$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ (i.e. $I_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si x est rationnel et 0 sinon), alors la fonction définie par $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 I_{\mathbb{Q}}(x)$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas continue en dehors de 0.

II : Opérations sur les développements limités

1– Somme

PROPOSITION :

Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n et m respectivement, au voisinage de x_0*, fini ou non, alors f + g admet un développement limité à l'ordre Min(m,n), obtenu en ajoutant les deux développements limités de f et g.*

Evident.

EXEMPLE :

$f(x) = 1 + 2x - x^3 + o(x^3)$

$g(x) = 2 - 3x + x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow \quad (f + g)(x) = 3 - x + x^2 + o(x^2)$

En effet, les termes $- x^3 + o(x^3)$ sont des $o(x^2)$. Il est inutile de les garder car le $o(x^2)$ chache peut-être des termes en x^3 enlevant tout caractère significatif au terme $- x^3$ de f.

On a la même démarche quand on ajoute des nombres décimaux a et b. Si on connaît a avec 10 chiffres après la virgule et b avec 15 chiffres après la virgule, les cinq derniers chiffres de b perdent leur signification.

2– Produit :

PROPOSITION :

Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n et m respectivement, au voisinage de x_0*, fini ou non, alors fg admet un développement limité à l'ordre Min(m,n), obtenu en multipliant les deux développements limités de f et g.*

Evident. Dans le calcul , on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à Min(m,n).

EXEMPLE :

$f(x) = 1 + 2x - x^3 + o(x^3)$

$g(x) = 2 - 3x + x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow \quad (fg)(x) = 2 + x - 5x^2 + o(x^2)$

Tous les termes de degré strictement supérieur à 2 partent dans le reste $o(x^2)$. C'est le produit du terme 1 de f et du terme $o(x^2)$ de g qui fixe la forme du reste du produit.

Il peut arriver que le développement limité obtenu puisse être d'un ordre supérieur à celui prévu initialement, lorsque les termes constants sont nuls.

EXEMPLE :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \quad f(x)g(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

puisque le produit du terme de plus bas degré de f x par le reste $o(x^3)$ de g donne $x o(x^3) = o(x^4)$ et de même en inversant les rôles de f et g. Donc tous les termes de degré inférieur ou égal à 4 gardent leur signification.

3– Composition

PROPOSITION :

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0*, fini ou non, si le terme constant de f vaut* a_0 *et si g admet un développement limité à l'ordre n en* a_0*, alors g o f admet un développement limité à l'ordre n en* x_0*, obtenu en développant la composée des développements limités de f et g.*

Démonstration :

$$f(x_0 + h) = A(h) + o(h^n) = a_0 + B(h) + o(h^n)$$

avec $B(h)$ polynôme en h qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

$$g(a_0 + k) = C(k) + o(k^n)$$

avec C polynôme en k

$$\Rightarrow \quad (g \circ f)(x_0 + h) = g[a_0 + \underbrace{B(h) + o(h^n)}_{k}]$$

$$= C(B(h) + o(h^n)) + o(k^n)$$

or k se factorise au moins une fois par h car $B(0) = 0$ donc $o(k^n) = o(h^n)$. Par ailleurs, on développe $C(B(h) + o(h^n))$ en ne gardant que les puissances de h inférieures ou égales à n. On obtient :

$$(g \circ f)(x_0+h) = D(h) + o(h^n)$$

où $D(h) = (C \circ B)(h)$ tronqué à l'ordre n.

EXEMPLE :

Donner le développement limité de $\exp(\cos(x))$ à l'ordre 4 en 0.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 + X$$

$$\exp(1 + X) = e \times e^X = e(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2))$$

Ici X est d'ordre 2 en x, donc il suffit de s'arrêter à X^2 pour obtenir les termes d'ordre 4 en x :

$$X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$X^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \quad \exp(\cos(x)) = e(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}) + o(x^4)$$

4– Quotient

PROPOSITION :

Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n, au voisinage de x_0*, fini ou non, et si le coefficient constant de g est non nul, alors f/g admet un développement limité à l'ordre n.*

Démonstration :

Il suffit de montrer que $1/g$ admet un développement limité à l'ordre n, puis de faire le produit par celui de f. Or (en supposant $x_0 = 0$ pour simplifier les notations) :

$$g(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + o(x^n) = a_0\,(1 - u)$$

avec $u = \dfrac{-a_1x - ... -a_nx^n - o(x^n)}{a_0}$.

donc $\quad \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{a_0}\dfrac{1}{1-u}$

Il suffit alors d'effectuer la composition du développement limité de $\dfrac{1}{1-u}$ par celui de u.

EXEMPLE :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)}{1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^5)}$$

$$= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))(1 + u + u^2 + o(x^5))$$

avec $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. Il est inutile de calculer u^3 qui donnera des termes en x^6

$$\Rightarrow \quad \tan(x) = (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5))$$

$$= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5))$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

De même, on pourra vérifier que :

$$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

Dans le cas où $g(0) = 0$, on peut opérer d'une manière analogue, mais on obtient un développement dit généralisé.

EXEMPLE :

En développant sin et cos à l'ordre 4, on obtiendra :

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3)$$

5– Intégration et dérivation

PROPOSITION

Si f est continue et admet un développement limité au voisinage du réel x_0 à l'ordre n, et si F *est une primitive de f, alors* F *admet un développement limité en x_0 à l'ordre $n + 1$, obtenu en intégrant celui de f.*

Démonstration :

Pour $x_0 = 0$.

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$$

Posons $G(x) = F(x) - F(0) - a_0x - \frac{a_1x^2}{2} - \ldots - \frac{a_nx^{n+1}}{(n+1)}$. Alors :

$$G(0) = 0, \text{ et } G'(x) = f(x) - a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = o(x^n)$$

donc en appliquant le théorème des accroissements finis sur G entre 0 et x, il existe θ élément de $]0, 1[$ tel que :

$$G(x) = xG'(\theta x)$$

$$= x\, o(\theta^n x^n) = o(x^{n+1})$$

donc $\quad F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \ldots + \frac{a_nx^{n+1}}{(n+1)}$

EXEMPLE :

En intégrant les fonctions $x \to \dfrac{1}{1+x}$ et $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$, ainsi que leur développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n-1$, on obtient :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Il est à noter que le développement limité de arctan a permis à la fin du XVIIème une avancée spectaculaire dans le calcul des décimales de π, basé jusque là sur la méthode d'Archimède (IIIème avant JC) qui approxima un cercle par un polygone dont on calcule la longueur du périmètre ou l'aire. Archimède utilisa un polygone de 96 côtés, Al-Kashi (XVème) un polygone de 3×2^{28} côtés, Ludolph van Ceulen ($\approx$ 1600) un polygone de 2^{62} côtés, obtenant pour ce dernier une trentaine de décimales. Cette méthode fut abandonnée au profit de méthodes donnant des expressions de π sous forme d'arctan. Citons en particulier la formule de Machin (1706) que le lecteur assidu se chargera de prouver :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Machin obtint ainsi une centaine de décimales. On connaît aujourd'hui (2006) plus de mille milliards de décimales de π, obtenues à partir de la formule de Takano (1982) :

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{49} + 32 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239} + 12 \arctan \frac{1}{110443}$$

On prendra garde le fait que f dérivable admette un développement limité ne suffit pas pour que f' en admette un.

EXEMPLE :

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^4 \cos(1/x) = 1 + x + x^2 + o(x^3)$

mais $f'(x) = 1 + 2x + 4x^3 \cos(1/x) + x^2 \sin(1/x) \neq 1 + 2x + o(x^2)$

Mais **si l'on sait que** f' admet un développement limité, par exemple parce que f est de classe C^n et donc f' de classe C^{n-1}, comme le développement limité de f s'obtient en intégrant celui de f', on peut effectivement conclure que celui de f' s'obtient en dérivant celui de f.

EXEMPLE :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + o(x^{n-1})$$

en dérivant $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n)$

On aurait pu aussi :

❑ effectuer le produit du développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$ par lui-même

❑ effectuer le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ avec $u = -2x + x^2$

❑ utiliser $(1-x)^\alpha$ avec $\alpha = -2$.

III : Utilisation des développements limités

1- Calcul de limites

Les développements limités se substituent aux équivalents, lorsque ceux-ci ne suffisent pas.

EXEMPLE 1 :

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3}$

On a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc $\sin(x) - \tan(x) = -\dfrac{x^3}{2}$ et la limite cherchée vaut $-\dfrac{1}{2}$.

EXEMPLE 2 :

Considérons par exemple un parachutiste sautant d'une hauteur h avec une vitesse nulle et soumis à l'accélération de la pesanteur et à une force de frottement opposée à sa vitesse et proportionnelle à celle-ci. L'équation différentielle vérifiée par son altitude z est :

$$m\ddot{z} = -mg - k\dot{z},\ z(0) = h \text{ et } \dot{z}(0) = 0$$

où $\dot{z}$ et $\ddot{z}$ désignent les dérivées premières et secondes de z par rapport à t.

En résolvant l'équation différentielle du premier ordre en $\dot{z}$, on en déduit que :

$$\dot{z} = \frac{mg}{k}\exp\left(-\frac{kt}{m}\right) - \frac{mg}{k}$$

puis, en prenant une primitive de chacun des deux membres, que :

$$z = -\frac{m^2g}{k^2}\exp\left(-\frac{kt}{m}\right) - \frac{mg}{k}t + h + \frac{m^2g}{k^2}$$

On s'intéresse à ce qui se passe lorsque l'argument de l'exponentielle tend vers 0. Un développement limité à l'ordre 3 fournit :

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{6}\frac{kt^3g}{m} + o\left(\frac{kt^3}{m}\right)$$

Ce qui signifie :

❑ Ou bien k et m sont fixés, et quand t tend vers 0, on a :

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2 + o(t^2)$$

Au début de la chute, on est quasiment en chute libre. L'erreur est en t^3.

❑ Ou bien t et m sont donnés, et k tend vers 0. On a :

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2 + o(k^0)$$

Lorsqu'il n'y a pas de frottement, on est en chute libre. L'erreur est en k.

❑ Ou bien k et t sont fixés et m tend vers ∞. On a :

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2 + o\left(\frac{1}{m^0}\right)$$

Si la masse devient importante, le parachute perd de son efficacité. On obtient la chute libre, avec une erreur en $\dfrac{1}{m}$.

2– Etude locale d'une courbe $y = f(x)$

Si, au voisinage de x_0, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

alors :

$y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est l'équation de la tangente. f se prolonge par continuité en x_0 par $f(x_0) = a_0$. On a par ailleurs $f'(x_0) = a_1$ en prenant la limite du taux d'accroissement entre x_0 et x, mais rien ne dit que f est deux fois dérivable, même si f admet un développement limité à l'ordre 2. Il suffit pour cela de considérer la fonction f définie par :

$$f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x}) \text{ en } 0, \text{ avec } a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

On a $f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x \cos(\frac{1}{x})$ et $f'(0) = 0$, mais $f''(0)$ n'est pas définie.

Si $a_2 \neq 0$, la position par rapport à la tangente est donnée par le signe de a_2.

Si, au voisinage de x_0, on a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_3(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3)$$

et si $a_3 \neq 0$, alors il y a un point d'inflexion au point d'abscisse x_0 puisque la courbe traverse sa tangente.

3– asymptotes

Si au voisinage de ∞, on a :

$$f(x) = a_0x + a_1 + \frac{a_2}{x} + o(\frac{1}{x})$$

alors :

$y = a_0x + a_1$ est l'équation de l'asymptote.

Si $a_2 \neq 0$, la position par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de a_2.

EXEMPLE :

$$f(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) = x^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o(\frac{1}{x^3}))$$

$$= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o(\frac{1}{x})$$

La droite $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote. La courbe est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.

On ne négligera pas cependant les méthodes usuelles lorsque f tend vers ∞ si x tend vers ∞, à savoir :

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ il y a branche parabolique de direction Ox.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ il y a branche parabolique de direction Oy.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$, il y a direction asymptotique $y = ax$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax = b$ alors $y = ax + b$ est asymptote.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax = \infty$ alors il y a branche parabolique dans la direction $y = ax$.

IV : Développements limités usuels

Ceux-ci doivent être parfaitement sus.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\mathrm{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

Annexe : Energie potentielle et stabilité d'un équilibre

Considérons une particule de masse m soumise à une force $\boldsymbol{F}$ dérivant d'une énergie potentielle E_p. Nous supposerons que E_p ne dépend que d'une variable d'espace que nous noterons x le long d'un axe. Par exemple dans le cas d'un ressort, x est l'élongation du ressort. Dans le cas de la pesanteur, x est l'altitude. On a alors simplement, le long de l'axe des x, $F = -\frac{dE_p}{dx}$, ce qu'on peut écrire encore sous la forme :

$$ma = -\frac{dE_p}{dx} \qquad \text{où } a \text{ est l'accélération de la particule}$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{dV}{dt} = -\frac{dE_p}{dx} \qquad \text{où V est la vitesse de la particule}$$

$$\Rightarrow \quad m\,V\frac{dV}{dt} = -\frac{dE_p}{dx}V \qquad \text{en multipliant par V}$$

$$\Rightarrow \quad m\,V\frac{dV}{dt} = -\frac{dE_p}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{dE_p}{dt} \qquad \text{en considérant la composition des fonctions } t \to x \to E_p$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mV^2 = -E_p + \mathrm{Cte} \qquad \text{en intégrant}$$

$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}mV^2 + E_p = Cte$

La Cte s'appelle énergie totale de la particule. Elle est donc invariante au cours du mouvement si aucune autre force ne s'exerce.

Soit O le point correspondant, pour simplifier, à $x = 0$ et supposons que la particule se trouve initialement au repos en O. On a alors :

$$\frac{1}{2}mV^2 + E_p = E_p(0)$$

Effectuons un développement limité de E_p au voisinage de O (en supposant E_p de classe C^2) :

$$E_p(x) = E_p(0) + x\frac{dE_p}{dx}(0) + \frac{x^2}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2} + o(x^2)$$

La force F s'exerçant sur la particule en x est :

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}(x) = -\frac{dE_p}{dx}(0) - x\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) + o(x)$$

Plusieurs cas sont à considérer :

❑ $\frac{dE_p}{dx}(0) \neq 0$

Alors en O, $F \neq 0$ et la particule est chassée du point O.

❑ $\frac{dE_p}{dx}(0) = 0$

Alors en O, $F = 0$ et la position en O est une position d'équilibre.

Dès qu'on s'éloigne de A, on a :

$$F(x) = -x\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) + o(x)$$

- Si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) > 0$, alors F est au premier ordre égal à $-x\frac{d^2E_p}{dx^2}(0)$, opposée à x. La force F est donc une force de rappel ramenant la particule en O. Proportionnelle à l'éloignement x, elle est comparable à la force de rappel d'un ressort, et, au premier ordre, le mouvement sera sinusoïdal. E_p étant supposée C^2, la condition $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$ est vérifiée dans un voisinage de O. La fonction $x \rightarrow \frac{dE_p}{dx}$ est strictement croissante. S'annulant en 0, elle est négative à gauche de 0 et positive à droite de 0, donc $x \rightarrow E_p$ décroît à gauche de 0 et croît à droite de 0, donc elle admet un minimum en O. ***Les positions d'équilibre stable correspondent aux minima de E_p.***

- Si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) < 0$, alors F est au premier ordre égal à $-x\frac{d^2E_p}{dx^2}(0)$, de même sens que x. La force F est dirigée dans la même direction que le déplacement et tend donc à amplifier ce déplacement. Au moindre écart, la particule va donc s'éloigner de O. L'équilibre est instable. E_p étant supposée C^2, la condition $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$ est vérifiée dans un voisinage de O. En raisonnant comme précédemment, on peut voir que la fonction $x \rightarrow E_p$ est croissante à gauche de 0, décroissante à droite de 0 et admet un maximum en O. ***Les positions d'équilibre instable correspondent aux maxima de E_p.***

- Si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) = 0$, il faudrait pousser le développement limité plus loin pour pouvoir conclure. Dans le cas par exemple où $\frac{d^3E_p}{dx^3}(0) \neq 0$, on a (au second ordre) $F = -\frac{x^2}{2}\frac{d^3E_p}{dx^3}(0)$. D'un côté de O, la particule est ramenée vers O, mais de l'autre côté elle en est chassée. C'est le cas où le graphe de E_p admet un point d'inflexion avec tangente horizontale.

◆