FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

PLAN

I : Limites

1– Vocabulaire

Dans ce chapitre, on considère des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (fonction d'une variable réelle à valeurs réelles) ou parfois à valeurs dans $\mathbb{C}$ (fonction d'une variable réelle à valeurs complexes)

Si f et g sont deux fonctions et λ un scalaire, $f + g$ est la fonction : $x \to f(x) + g(x)$. λf est la fonction : $x \to \lambda f(x)$. Ces deux opérations confère à l'ensemble des fonctions définies sur le même ensemble une structure d'espace vectoriel (voir le chapitre *Espaces Vectoriels* dans le fichier ESPVECT.PDF). La fonction fg est la fonction : $x \to f(x)g(x)$. La fonction $f \circ g$ est la fonction : $x \to f(g(x))$. La fonction $\left| f \right|$ est la fonction : $x \to \left|f(x)\right|$.

Pour des fonctions à valeurs réelles, la fonction Sup(f,g) (ou Max(f,g)) est la fonction qui à x associe la plus grande valeur de $f(x)$ et $g(x)$. La fonction Inf(f,g) (ou Min(f,g)) est la fonction qui à x associe la plus petite valeur de $f(x)$ et $g(x)$.

Une fonction f à valeurs réelles est majorée si : $\exists$ M, $\forall$ x, $f(x) \leq$ M

Une fonction f à valeurs réelles est minorée si : $\exists$ m, $\forall$ x, $f(x) \geq m$

Une fonction f à valeurs réelles est bornée si elle est majorée et minorée. On peut écrire aussi :

$$\exists \text{ M}, \forall x, |f(x)| \leq \text{M}$$

Cette dernière définition s'applique aux fonctions à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module.

Une fonction f à valeurs réelles admet un maximum si : $\exists$ x_0, $\forall$ x, $f(x) \leq f(x_0)$. On note $f(x_0) = \underset{x \in \text{I}}{\text{Max}} f(x)$ si I est l'ensemble de définition de f, ou plus succinctement, $f(x_0)$ = Max f.

Une fonction f à valeurs réelles admet un minimum si : $\exists$ x_0, $\forall$ x, $f(x) \geq f(x_0)$. On note $f(x_0) = \underset{x \in \text{I}}{\text{Min}} f(x)$ si I est l'ensemble de définition de f, ou plus succinctement, $f(x_0)$ = Min f.

Une fonction f à valeurs réelles admet un extremum si elle admet un maximum ou un minimum.

Le maximum, minimum ou extremum est dit local en remplaçant précédemment $\forall$ x par :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$$

Autrement dit, la propriété n'est vérifiée que sur un intervalle autour de x_0 et non sur l'ensemble de définition de f.

Une fonction à valeurs réelles peut être bornée sans admettre de maximum ou de minimum, mais seulement une borne supérieure ou inférieure (penser à e^{-x} sur $[0, +\infty[$ qui admet 1 comme maximum et 0 comme borne inférieure mais non comme minimum). Ces bornes sont notées respectivement $\underset{x \in \text{I}}{\text{Sup}} f(x)$, et $\underset{x \in \text{I}}{\text{Inf}} f(x)$.

Une fonction f est paire si : $\forall$ x, $f(-x) = f(x)$. L'ensemble des fonctions paires est stable par les deux opérations d'addition des fonctions et de multiplication des scalaires ; il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions.
Une fonction f est impaire si : $\forall$ x, $f(-x) = -f(x)$. Il s'agit également d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions.

Une fonction est périodique de période T ou T-périodique si : $\forall$ x, $f(x + \text{T}) = f(x)$.

Une fonction est lipschitzienne de rapport k ou k-lipschitzienne si : $\forall$ x, $\forall$ y, $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$.
(Lipschitz, mathématicien allemand, 1832-1903)

2– Définition des limites

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous allons définir $\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = L$. Cette notion, malgré l'intuition qu'on peut en avoir, a été extrêmement longue à être clarifiée par les mathématiciens et n'a reçu ses fondements définitifs que vers 1850.

L et X_0 peuvent valoir, indépendamment l'un de l'autre, une valeur finie, $+\infty$, $-\infty$, ou ∞. Cela représente potentiellement 16 définitions. En fait, toutes reposent sur un schéma général que nous donnerons ultérieurement. Voici auparavant quelques exemples de définition de $\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = L$:

- ❑ $L = l$ réel et $X_0 = x_0$ réel.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- ❑ $L = l$ réel et $X_0 = +\infty$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, \forall x, x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- ❑ $L = -\infty$ et $X_0 = x_0$ réel.

$$\forall A, \exists \alpha, \forall x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < A$$

- ❑ $L = +\infty$ et $X_0 = \infty$

$$\forall A, \exists B, |x| > B \Rightarrow f(x) > A$$

Les premières définitions de ce type ont été données par Weierstrass (1815-1897).

SCHEMA DE LA DEFINITION GENERALE :

On dit que f tend vers L lorsque x tend vers X_0 *lorsque :*

$\forall$ V *voisinage de L,* $\exists$ W *voisinage de* X_0, $\forall x, x \in W \Rightarrow f(x) \in V$

un voisinage désignant une partie contenant :

pour un réel l, un intervalle de la forme $]l - \varepsilon , l + \varepsilon[$

pour $+\infty$, un intervalle de la forme $]A, +\infty[$

pour $-\infty$, un intervalle de la forme $]-\infty, A[$

pour ∞, le complémentaire d'un intervalle de centre 0, de rayon A.

Cette définition peut être adaptée à chaque cas particulier, en utilisant des voisinages adéquats. Elle s'applique également aux suites, fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, avec $X_0 = +\infty$. Si f n'est définie que sur une partie D_f, on suppose que tout voisinage de X_0 intersecte D_f.

La limite, si elle existe, est unique. Voici la démonstration dans le cas où x_0, L et L' sont finis :

Soit L et L' deux limites différentes. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}|L - L'|$. Il existe α et β positifs tels que :

$$\forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[, |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall x \in]x_0-\beta, x_0+\beta[, |f(x) - L'| < \varepsilon$$

Pour $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\cap]x_0-\beta, x_0+\beta[$, on a :

$$|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| < 2\varepsilon$$

et on obtient une contradiction.

Si la limite de f lorsque x tend vers x_0 réel est égale à $f(x_0)$, on dit que f est continue en x_0. Lorsque f est définie en x_0, il est équivalent de dire que la limite de f existe en x_0 et que f est continue en x_0.

En remplaçant x par $x_0 + h$, on voit qu'il y a équivalence entre $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ et $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = L$.

Pour $X_0 = x_0$ réel, on parle de limite à droite ou à gauche :

- ❑ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L$ (limite à droite)

signifie : $\forall$ V voisinage de L, $\exists\ \alpha > 0$, $\forall x$, $x_0 < x < x_0+\alpha \Rightarrow f(x) \in V$
Si $L = f(x_0)$, on dit que la fonction est continue à droite.

- ❑ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L$ (limite à gauche)

signifie : $\forall$ V voisinage de L, $\exists\ \alpha > 0$, $\forall x$, $x_0-\alpha < x < x_0 \Rightarrow f(x) \in V$
Si $L = f(x_0)$, on dit que la fonction est continue à gauche.

Plus généralement, on peut définir la limite de f lorsque x tend vers X_0, fini ou non, avec x élément d'une partie A par :

$$\forall \text{ V voisinage de L, il existe W voisinage de } X_0,\ x \in W \cap A \Rightarrow f(x) \in V$$

Il faut pour cela que tout voisinage de X_0 intersecte $A \cap D_f$ de façon que la phrase ci–dessus ait un sens.

Voici un dernier exemple :

- ❑ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = L$

signifie : $\forall$ V voisinage de L, $\exists\ \alpha$, $\forall x$, $|x-x_0| < \alpha$ et $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$. On a pris $A = \mathbb{R} - \{x_0\}$.

Il résulte des définitions que, si f admet une limite finie en X_0, f est bornée au voisinage de X_0.

En ce qui concerne les fonctions à valeurs complexes, et comme pour les suites, si on écrit $f = g + ih$ avec g et h les parties réelles et imaginaires de f, on a :

$$\lim_{x\to X_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to X_0} g(x) = \mathrm{Re}(L) \text{ et } \lim_{x\to X_0} h(x) = \mathrm{Im}(L)$$

3– Opérations sur les limites

Les théorèmes sur les limites sont en tous points identiques à ceux sur les suites :

<u>a) SOMME</u>

PROPOSITION

Soient f et g deux fonctions. Lorsque x tend vers X_0 :

i) *Si f converge vers L et g vers L', alors $f + g$ converge vers $L + L'$.*
ii) *Si f est bornée au voisinage de X_0 et g tend vers ∞, alors $f + g$ tend vers ∞*
iii) *Si f est minorée au voisinage de X_0 et g tend vers $+\infty$, alors $f + g$ tend vers $+\infty$*

iv) *Si f est majorée au voisinage de* X_0 *et g tend vers $-\infty$, alors $f + g$ tend vers $-\infty$*

Les démonstrations sont données dans le cas où x_0 est fini, mais s'adaptent facilement dans le cas où X_0 est infini :

i) $\forall\ \varepsilon > 0, |f(x) + g(x) - (L + L')| \leq |f(x) - L| + |g(x) - L'|$

Or, $\exists\ \alpha > 0, \forall\ x \in\ ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x) - L| < \varepsilon$

et $\exists\ \beta > 0, \forall\ x \in\ ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |g(x) - L'| < \varepsilon$

Posons $\eta = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$$\forall\ x \in\ ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) + g(x) - (L + L')| < 2\varepsilon$$

Pour majorer par ε, il aurait suffit de partir de $\dfrac{\varepsilon}{2}$ dans les définitions des limites de f et g.

En particulier, si C est une constante, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + C) = (\lim\limits_{x \to x_0} f(x)) + C$

ii) $\forall$ A, $|f(x) + g(x)| \geq |g(x)| - |f(x)|$

Or, $\exists$ M et $\exists\ \alpha > 0, \forall\ x \in\ ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x)| \leq M$

et $\exists\ \beta > 0, \forall\ x \in\ ]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |g(x)| > A + M$

Posons $\eta = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$$\forall\ x \in\ ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) + g(x)| > A.$$

Les démonstrations pour iii) et iv) sont analogues à celles de ii)

On obtient une forme indéterminée lorsque l'une des fonctions tend vers $+\infty$, et l'autre vers $-\infty$.

b) PRODUIT

PROPOSITION

Soient f et g deux fonctions. Lorsque x tend vers X_0 *:*

i) *Si f converge vers* L *réel et g vers* L' *réel, alors fg converge vers* LL'.

ii) *Si f est bornée et g converge vers* 0, *alors fg tend vers* 0

iii) *Si $|f|$ est minoré par un réel strictement positif et si g tend vers ∞, alors fg tend vers ∞.*

Démonstration :

i) $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LL'| &= |f(x)(g(x) - L') + (f(x) - L)L'| \\ &\leq |f(x)|\,|g(x) - L'| + |f(x) - L|\,|L'| \\ &\leq M|g(x) - L'| + |f(x) - L|\,|L'| \end{aligned}$$

où M est un majorant de la fonction f bornée dans un voisinage de x_0.

Or, $\exists\ \alpha > 0, \forall\ x \in\ ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |g(x) - L'| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$

$\exists\ \beta > 0,\ \forall\ x \in\ ]x_0 - \beta,\ x_0 + \beta[,\ |f(x) - \mathrm{L}| < \dfrac{\varepsilon}{2|\mathrm{L'}|}$

Posons $\eta = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$\forall\ x \in\ ]x_0-\eta,\ x_0+\eta[,\ |f(x)g(x) - \mathrm{LL'}| < \varepsilon.$

En particulier, $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{C}f(x) = \mathrm{C} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

ii) Soit M un majorant de $|f|$ sur un voisinage $]x_0-\alpha,\ x_0+\alpha[$ de x_0. On a :

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ x \in\ ]x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha[,\ |f(x)g(x)| \leq \mathrm{M}|g(x)|$

Or, $\exists\ \beta > 0,\ \forall\ x \in\ ]x_0 - \beta,\ x_0 + \beta[,\ |g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{M}}$

Posons $\eta = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$\forall\ x \in\ ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ |f(x)g(x)| < \varepsilon.$

iii) Soit $m > 0$ minorant $|f|$ sur un voisinage $]x_0-\alpha,\ x_0+\alpha[$ de x_0. On a :

$\forall\ \mathrm{A} > 0,\ \forall\ x \in\ ]x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha[,\ |f(x)g(x)| > |g(x)|m$

Or, $\exists\ \beta > 0,\ \forall\ x \in\ ]x_0 - \beta,\ x_0 + \beta[,\ |g(x)| > \dfrac{\mathrm{A}}{m}$

Posons $\eta = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$\forall\ x \in\ ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ |f(x)g(x)| > \mathrm{A}$

On obtient une forme indéterminée lorsque l'une des fonctions tend vers ∞, et l'autre vers 0.

<u>c) INVERSE</u>

PROPOSITION

Soit f une fonction. Lorsque x tend vers X_0 *:*

i) *Si f converge vers* L *non nul, alors* $\dfrac{1}{f}$ *converge vers* $\dfrac{1}{\mathrm{L}}$.

ii) *Si f tend vers* 0*, alors* $\dfrac{1}{f}$ *tend vers* ∞.

iii) *Si f tend vers* ∞*, alors* $\dfrac{1}{f}$ *tend vers* 0.

<u>Démonstration</u> :

i) $\forall\ \varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\mathrm{L}}\right| = \frac{|f(x) - \mathrm{L}|}{|f(x)|\,|\mathrm{L}|}$$

Or $\exists\ \alpha > 0,\ \forall\ x \in\ ]x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha[,\ |f(x) - \mathrm{L}| < \dfrac{|\mathrm{L}|}{2}$ et donc $|f(x)| > \dfrac{|\mathrm{L}|}{2}$

Donc, $\forall x \in \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{\mathrm{L}}\right| < \mathrm{C}\left|f(x) - \mathrm{L}\right|$, avec $\mathrm{C} = \dfrac{2}{\left|\mathrm{L}\right|^2}$

$\exists \beta > 0, \forall x \in \,]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$, $\left|f(x) - \mathrm{L}\right| < \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{C}}$

Posons $\eta = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$$\forall x \in \,]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\mathrm{L}}\right| < \varepsilon$$

ii) $\forall \mathrm{A} > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $\left|f(x)\right| < \dfrac{1}{\mathrm{A}}$

donc $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > \mathrm{A}$

La démonstration de iii) est analogue à celle de ii)

d) QUOTIENT

PROPOSITION

Soient f et g deux fonctions. Lorsque x tend vers X_0 *:*

i) *Si f converge vers* L *et g vers* L' *non nul, alors* $\dfrac{f}{g}$ *converge vers* $\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{L'}}$.

ii) *Si f est bornée au voisinage de* X_0 *et g converge vers* ∞*, alors* $\dfrac{f}{g}$ *tend vers* 0

iii) *Si* $|f|$ *est minoré par un réel strictement positif au voisinage de* X_0*, et si g tend vers* 0*, alors* $\dfrac{f}{g}$ *tend vers* ∞ .

Démonstration :

Il suffit d'utiliser les résultats démontrés pour le produit et l'inverse, en considérant $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$.

On obtient une forme indéterminée lorsque les deux fonctions tendent vers ∞, ou vers 0.

e) COMPOSITION :

PROPOSITION

Soient f et g telles que f tende vers Y_0 *lorsque x tend vers* X_0*, et que g tende vers* L *lorsque x tend vers* Y_0*. Alors g o f tend vers* L *lorsque x tend vers* X_0.

Démonstration dans le cas où Y_0, L, X_0 sont finis :

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \alpha > 0, \forall y \in \,]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[$, $\left|g(y) - \mathrm{L}\right| < \varepsilon$

et $\exists \beta > 0, \forall x \in \,]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$, $\left|f(x) - y_0\right| < \alpha$

donc, $\forall x \in \,]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$, $\left|g(f(x)) - \mathrm{L}\right| < \varepsilon$

Il résulte des propositions précédentes qu'on ne peut conclure directement dans les cas suivants :

lim $f.g$ avec lim $f = 0$ et lim $g = \infty$ "$0.\infty$"

$\lim \frac{f}{g}$ avec $\lim f = 0$ et $\lim g = 0$ "$\frac{0}{0}$"

$\lim \frac{f}{g}$ avec $\lim f = \infty$ et $\lim g = \infty$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\lim f^g = \lim e^{g.\ln(f)}$ avec $\lim f = 0$ et $\lim g = 0$ "0^0"

$\lim f^g = \lim e^{g.\ln(f}$)avec $\lim f = \infty$ et $\lim g = 0$ "∞^0"

$\lim f^g = \lim e^{g.\ln(f)}$ avec $\lim f = 1$ et $\lim g = \infty$ "1^∞"

Les trois dernières formes indéterminées ci-dessus concernent l'exponentielle. Un exemple classique de forme inféterminée exponentielle est le suivant :

$$(1 + \frac{1}{x})^x = \exp(x\ln(1 + \frac{1}{x})) \to \exp(1) \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty$$

4– Inégalités sur les limites

Les théorèmes sur les inégalités sont en tout point identiques à ceux sur les suites.

PROPOSITION

Soit f une fonction qui converge vers L *lorsque x tend vers* X_0. *Alors :*

i) $L > a \Rightarrow \exists$ W *voisinage de* X_0, $\forall x \in W, f(x) > a$

ii) $\exists$ W *voisinage de* X_0, $\forall x \in W, f(x) \geq a \Rightarrow L \geq a$

On a des résultats analogues avec < et ≤.

Les démonstrations sont données en utilisant la notion générale de voisinage.

Démonstration :

i) résulte de la définition de la convergence en prenant $\varepsilon = L - a$ si L est fini, ou bien $A = a$ si $L = +\infty$. Dans le premier cas, il existe un voisinage W tel que, $\forall x \in W, |f(x) - L| < \varepsilon = L - a$, donc $f(x) > a$. Dans le second, il existe un voisinage W tel que, $\forall x \in W, f(x) > A = a$.

ii) Si $L < a$, alors il existe U voisinage de X_0 tel que, pour tout x élément de U, $f(x) < a$ d'après le i) avec < au lieu de >. Alors, pour x élément de $U \cap W$, on devrait avoir simultanément $f(x) \geq a$ et $f(x) < a$, ce qui est impossible.

Ce résultat s'appelle passage à la limite dans une inégalité. On remarquera qu'il se pratique avec des inégalités larges.

PROPOSITION

i) *Si f converge vers* α, *g vers* β, *lorsque x tend vers* X_0, *alors :*

$\alpha < \beta \Rightarrow \exists$ W *voisinage de* X_0, $\forall x \in W, f(x) < g(x)$

ii) *Si f converge vers* α, *g vers* β, *alors :*

$\exists$ W *voisinage de* X_0, $\forall x \in W, f(x) \leq g(x) \Rightarrow \alpha \leq \beta$

iii) *Si f et h convergent vers* L, *et si :*

$\exists$ W *voisinage de* X_0, $\forall x \in W, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

alors g converge vers l.

Démonstration :

i) et ii) se montrent en appliquant la proposition précédente à la fonction $f - g$.

iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists$ U voisinage de X_0, $\forall x \in U, L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

$\exists$ V voisinage de X_0, $\forall x \in V, L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$.

Donc, $\forall x \in U \cap V \cap W$, $L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$.

5– Lien avec les suites

PROPOSITION

Il y a équivalence entre :

i) *f tend vers* L *lorsque x tend vers* X_0.

ii) *Pour toute suite* (a_n) *tendant vers* X_0, $(f(a_n))$ *tend vers* L.

Dans le cas des fonctions continues, cette équivalence s'exprime de la façon suivante. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en x_0.

ii) Pour toute suite (a_n) tendant vers x_0, $(f(a_n))$ tend vers $f(x_0)$.

Démonstration :

i) $\Rightarrow$ ii) découle du théorème de composition des limites portant sur les fonctions suivantes :

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$n \to a_n \to f(a_n)$$

Inversement, ii) $\Rightarrow$ i).

Par l'absurde, si f ne tend pas vers L, alors :

$$\exists \text{ V voisinage de L}, \forall \text{ W voisinage de } X_0, \exists x \in W, f(x) \notin V \ (*)$$

Définissons en particulier une suite de voisinages (W_n) dont l'intersection se réduit à X_0. Considérons d'abord le cas où X_0 est réel. Prenons $W_n =]X_0 - \frac{1}{n}, X_0 + \frac{1}{n}[$. Il résulte de (*) que, pour tout n, il existe a_n élément de W_n tel que $f(a_n)$ n'appartienne pas à V. Or :

$$a_n \in W_n \Rightarrow X_0 - \frac{1}{n} < a_n < X_0 + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = X_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = L$$

ce qui est contradictoire avec le fait que le voisinage V de L ne contient aucun $f(a_n)$.

Si X_0 n'est pas réel, la démonstration est analogue en prenant :

Si $X_0 = +\infty$, $W_n =]n, +\infty[$

Si $X_0 = -\infty$, $W_n =]-\infty, -n[$

Si $X_0 = \infty$, $W_n =]-\infty, -n[\cup]n, +\infty[$

Cette proposition est souvent utilisée par la négative. S'il existe deux suites (a_n) et (b_n) convergeant vers X_0 telle que $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ tendent vers des limites différentes (ou même n'admettent pas de limite), alors f ne peut admettre de limite.

Exemple : $\sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0, puisque :

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \Rightarrow f(x_n) = 0$$

$$y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} \Rightarrow f(y_n) = 1$$

6– Exemples et contre–exemples

a) $\sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0. (cf ci–dessus)

b) $x \sin(\frac{1}{x})$ admet une limite nulle en 0, puisque :

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{ et que } \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

c) $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ (fonction de Dirichlet, 1829)

$= 0$ sinon

f n'admet de limite en aucun point. $\mathbb{Q}$ et $\complement\mathbb{Q}$ étant denses dans $\mathbb{R}$, pour tout x, il existe une suite (a_n) de rationnels qui converge vers x, et une suite (b_n) d'irrationnels qui converge vers x. On a alors :

$f(a_n) = 1$

$f(b_n) = 0$

Donc f ne peut admettre de limite en x.

II : Equivalence locale

1– Définition

DEFINITION

On dit que deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de X_0 (fini ou non) s'il existe V voisinage de X_0 et ε fonction définie de V dans $\mathbb{R}$, et tendant vers 0 quand x tend vers X_0, tels que :

$$\forall x \in V, f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$$

On note : $f \sim g$ au voisinage de X_0. Deux fonctions équivalentes ont même signe au voisinage de X_0.

Si la fonction g ne s'annule pas, c'est donc équivalent à :

$$\lim_{x \to X_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On vérifiera aisément que $\sim$ est une relation d'équivalence. En particulier :

$$f \sim g \text{ et } g \sim h \Rightarrow f \sim h$$

permettant d'effectuer des calculs en chaîne.

2– Exemples

PROPOSITION

i) *Soit x_0 réel. Si f admet une limite non nulle L quand x tend vers x_0, alors $f \sim L$*

ii) *Soit x_0 réel, f dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$. Alors $f(x_0 + x) - f(x_0)$ est équivalent à $xf'(x_0)$ au voisinage de x_0.*

On a i) car $\frac{f}{L}$ tend vers 1 quand x tend vers x_0. ii) résulte de la définition de la dérivabilité de f en x_0. En général, on se ramène en 0 par changement de variables. En utilisant les deux propriétés précédentes ou par calcul direct de la limite du quotient, on obtient, quand x tend vers 0 :

$\sin(x) \sim x$

$\cos(x) \sim 1$

$\tan(x) \sim x$

$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ (utiliser $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\dfrac{x}{2})$)

$e^x \sim 1$

$e^x - 1 \sim x$

$\ln(1 + x) \sim x$

$(1 + x)^\alpha \sim 1$

$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$a_p x^p + ... + a_n x^n \sim a_p x^p$ (avec $p < ... < n$, $a_p \neq 0$)

au voisinage de ∞

$a_p x^p + ... + a_n x^n \sim a_n x^n$ (avec $p < ... < n$, $a_n \neq 0$)

Une fonction f équivalente à la fonction identiquement nulle 0 au voisinage de x_0 est de la forme $0(1 + \varepsilon) = 0$, autrement dit elle est identiquement nulle dans un intervalle ouvert contenant x_0. Il en résulte qu'on ne trouve **JAMAIS** 0 comme équivalent d'une fonction, à moins d'être parti de la fonction identiquement nulle (mais dans ce cas pourquoi chercher un équivalent de cette fonction ??)

3– Opérations

Il résulte aisément de la définition de l'équivalence que celle–ci est compatible avec le produit des fonctions, le quotient, l'inverse, l'élévation à une puissance quelconque. On a donc :

$$\begin{cases} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{f} \sim \dfrac{1}{g} \text{ (pour des fonctions ne s'annulant pas)} \\ f_1 f_2 \sim g_1 g_2 \\ \dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2} \\ f_1^{a} \sim g_1^{a} \end{cases}$$

Par contre, l'exemple suivant **<u>prouve l'incompatibilité avec la somme</u>**.

$\ln(1 + x) \sim x$ au voisinage de 0

$-\sin(x) \sim -x$

Mais $\ln(1 + x) - \sin(x)$ n'est pas équivalent à 0, puisqu'elle n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0.

Il n'y a pas non plus de compatibilité par composition des fonctions. Ainsi, quand x tend vers 0 :

$e^x \sim \cos(x) \sim 1$ au voisinage de 0, **<u>mais</u>**

$\ln(e^x) = x$

$\ln(\cos(x)) = \ln(1 + \cos(x) - 1) \sim \cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$

$\ln(1) = 0$

et les trois images de e^x, $\cos(x)$ et 1 par le logarithme ne sont pas équivalentes.

4– Fonction négligeable devant une fonction

DEFINITION

i) *f est négligeable devant g au voisinage de* X_0 *s'il existe un voisinage* V *de* X_0 *et une fonction* ε *qui tend vers 0 lorsque x tend vers* X_0 *tels que :*

$$\forall x \in V, f(x) = g(x)\,\varepsilon(x)$$

ii) *f est dominée par g au voisinage de* X_0 *s'il existe une constante C et un voisinage* V *de* X_0 *tels que :*

$$\forall x \in V, |f(x)| \leq C\,|g(x)|$$

Si la fonction g ne s'annule pas, i) est équivalent à :

$$\lim_{x \to X_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note $f = o(g)$ au voisinage de X_0 pour f négligeable devant g, et $f = O(g)$ pour f dominée par g. Si f est négligeable devant g, f est évidemment dominée par g.

EXEMPLES :

au voisinage de $+\infty$: $(\ln(x))^r = o(x^s)$ et $x^s = o(e^{tx})$ avec r, s, t positifs quelconques.

au voisinage de 0 : $(\ln(x))^r = o(\frac{1}{x^s})$ avec r et s positifs quelconques.

au voisinage de $-\infty$: $e^{sx} = o(\frac{1}{|x|^r})$ avec r et s positifs quelconques.

Toutes ces formules se déduisent des comparaisons entre logarithmes, puissances et exponentielles, et se basent sur des formules telles que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, et qu'on trouvera dans le chapitre *Fonctions Usuelles*, dans le fichier FONCTUSU.PDF.

5– Somme d'équivalents

Nous sommes maintenant en mesure de donner une règle permettant d'additionner des équivalents. On considère deux fonctions f et g et une fonction de référence h (en général on prendra $h(x) = x$ ou une puissance de x).

PROPOSITION

Au voisinage de X_0 *:*

(i) *Si* $f \sim h$ et $g = o(h)$ *alors* $f + g \sim h$

(ii) *Si* $f \sim \lambda h$ *et* $g \sim \mu h$, *et si* $\lambda + \mu \neq 0$, *alors* $f + g \sim (\lambda + \mu)h$

(iii) *Si* $f \sim \lambda h$ *et* $g \sim \mu h$, *et si* $\lambda + \mu = 0$, *alors* $f + g = o(h)$

<u>Démonstration</u> :

(i) il existe deux fonctions α et β de limite nulle en X_0 telles que :

$$\begin{cases} f(x) = h(x)(1 + \alpha(x)) \\ g(x) = h(x)\beta(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) + g(x) = h(x)(1 + \alpha(x) + \beta(x)) \sim h(x)$$

(ii) il existe deux fonctions α et β de limite nulle en X_0 telles que :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda h(x)(1 + \alpha(x)) \\ g(x) = \mu h(x)(1 + \beta(x)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) + g(x) = h(x)(\lambda + \lambda\alpha(x) + \mu + \mu\beta(x)) = (\lambda + \mu)h(x)(1 + \frac{\lambda\alpha(x) + \mu\beta(x)}{\lambda + \mu}) \sim (\lambda + \mu)h(x)$$

(iii) Dans le cas où $\lambda + \mu = 0$, le même calcul que précédemment conduit à :

$$f(x) + g(x) = h(x)(\lambda + \lambda\alpha(x) + \mu + \mu\beta(x)) = h(x)(\lambda\alpha(x) + \mu\beta(x)) = o(h)$$

EXEMPLE :

$$f(x) = 1 + \sin^2(x) - \cos(x) + 3x^3$$

On a, au voisinage de 0 :

$$1 = 1$$
$$\sin^2(x) \sim x^2 = o(1)$$
$$-\cos(x) \sim -1$$
$$3x^3 = o(1)$$

On a donc $1 + \sin^2(x) \sim 1$, $-\cos(x) + 3x^3 \sim -1$ et donc $f(x) = o(1)$, i.e. $\lim_{x \to 0} f = 0$ ce qui était évident sans calcul d'équivalents. Par contre, si on écrit :

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$$
$$\sin^2(x) \sim x^2$$
$$3x^3 = o(x^2)$$

On peut conclure que :

$$f(x) \sim \frac{3x^2}{2}$$

On en déduit la limite non évidente : $\lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin^2(x) - \cos(x) + 3x^3}{x^2} = \frac{3}{2}$

III : Fonctions monotones

1– Définition

DEFINITION

une fonction f est croissante (respectivement décroissante, strictement croissante, strictement décroissante) sur un intervalle I *d'intérieur non vide si :*

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \forall y \in \mathrm{I},\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

(respectivement $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$; $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$; $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)

f est monotone sur I *si elle est croissante sur* I*, ou décroissante sur* I.

2– Opérations sur les fonctions monotones

On vérifiera aisément que :

- ❑ la somme de fonctions croissantes (respectivement décroissantes) est croissante (respectivement décroissante).
- ❑ l'inverse d'une fonction monotone de signe constant est monotone de monotonie opposée.
- ❑ le produit de fonctions croissantes (respectivement décroissante) ***positives*** est croissante (respectivement décroissante).
- ❑ la composée de deux fonctions de même monotonie est croissante ; la composée de deux fonctions de monotonie opposée est décroissante.

3– Limite d'une fonction monotone

On dispose pour les fonctions d'un résultat analogue à celui des suites :

PROPOSITION

Soit f monotone sur un intervalle I d'intérieur non vide. Si x_0 *est intérieur à* I, *alors f admet une limite à gauche strictement et une limite à droite strictement de* x_0*. Si* X_0 *est une borne (finie ou non) de* I, *f admet une limite finie en* X_0 *si et seulement si f est bornée au voisinage de* X_0*. C'est le cas si f est définie en* X_0*. Sinon, f tend vers l'infini.*

Démonstration :
La démonstration est faite dans le cas où f est croissante.

1) Soit x_0 intérieur à I. Montrons que f admet une limite à gauche de x_0. (La démonstration est analogue à droite). Pour tout $x < x_0$, on a $f(x) \le f(x_0)$. Donc $\{f(x) \mid x < x_0\}$ est majoré. Soit M sa borne supérieure. On remarque que $M \le f(x_0)$ car $f(x_0)$ est un majorant des $f(x)$, $x < x_0$ alros que M est le plus petit majorant. Montrons que M est égale à la limite de f à gauche de x_0. On a, d'après la caractérisation de la borne supérieure :

(i) $\forall\ x < y,\ f(x) \le f(y)$
(ii) $\forall\ x < x_0,\ f(x) \le M$
(iii) $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ x < x_0,\ f(x) > M - \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. D'après (iii), il existe $x_1 < x_0$ tel que :

$M - \varepsilon < f(x_1)$.

Pour tout x élément de $]x_1, x_0[$, on a alors :

$$M - \varepsilon < f(x_1) \underset{(i)}{\le} f(x) \underset{(ii)}{\le} M < M + \varepsilon$$

ce qui est la propriété voulue.

On note parfois $f(x_0^-)$ la limite à gauche de x_0 et $f(x_0^+)$ la limite à droite.

Il résulte de ce qui précède que :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$$

2) Si la borne X_0 est dans I, ou si f est borné au voisinage de X_0, la démonstration est analogue avec $M = \text{Sup}\ \{f(x) \mid x < X_0\}$ (pour X_0 borne droite de I).

Si f n'est pas bornée, on a :

(i) $\forall\ x < y,\ f(x) \le f(y)$
(ii) $\forall\ A, \exists\ x < X_0\ f(x) > A$

Soit A quelconque. D'après (ii), il existe $x_1 < X_0$ tel que :

$f(x_1) > A$

Pour tout x élément de $]x_1, X_0[$, on a alors :

$$A \underset{(ii)}{<} f(x_1) \underset{(i)}{\le} f(x)$$

ce qui montre que f tend vers $+\infty$ en X_0.

IV : Continuité

1– Définition

f est continue en x_0 si la limite de f lorsque x tend vers x_0 est égale à $f(x_0)$. Un cas particulièrement simple est donné par les fonctions lipschitziennes. Si f est lipschitzienne de rapport k, alors :

$$\forall x, |f(x) - f(x_0)| \leq k\,|x - x_0|$$

On a alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ puisque le majorant $|x - x_0|$ tend vers 0.

EXEMPLE :
La fonction $x \to |x|$ est continue car lispchitzienne de rapport 1. Cela résulte de l'inégalité triangulaire $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Si la limite se calcule à droite au sens large de x_0, on parle de continuité à droite. De même à gauche.

EXEMPLE :

$$f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0$$
$$\quad = 1 \text{ si } x > 0$$

alors f est continue à gauche de 0, mais pas à droite.

Si f n'est pas définie en x_0 et si f tend vers l lorsque x tend vers x_0, alors on peut poser $f(x_0) = l$, prolongeant ainsi f par continuité en x_0. Si I est un intervalle, on dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I. Si I contient l'une de ses bornes, la continuité se fait à droite ou à gauche. On note $C^0(I)$ l'espace des fonctions continues sur I.

Il résulte des théorèmes d'opérations sur les limites que des sommes, produits, inverses, quotients, composées de fonctions continues en un point ou sur un intervalle sont continues en ce point ou sur cet intervalle. Si f est continue, $|f|$ aussi comme composée de la fonction f et de la valeur absolue, toutes deux continues. Si f et g sont continues, alors $\mathrm{Sup}(f, g)$ et $\mathrm{Inf}(f, g)$ aussi. Il suffit d'écrire que :

$$\mathrm{Sup}(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

$$\mathrm{Inf}(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

2– Image d'un intervalle

PROPOSITION

Soit I *un intervalle et f continue sur* I. *Alors* $f(I)$ *est un intervalle.*

$f(I)$ désigne l'ensemble des images des éléments de I par f.

Démonstration :
La propriété à prouver est équivalente aux suivantes :

i) $\forall y \in f(I), \forall z \in f(I), [y, z] \subset f(I)$

Ceci découle de la caractérisation des intervalles comme parties convexes de $\mathbb{R}$, vue dans le chapitre sur les *Suites*, dans le fichier SUITES.PDF

ii) $\forall a \in I, \forall b \in I, [f(a), f(b)] \subset f(I)$

Ceci est obtenu à partir de i) en posant $y = f(a)$ et $z = f(b)$.

iii) $\forall a \in I, \forall b \in I, f(a) \leq z \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b], z = f(c)$

On a juste traduit dans ii) la phrase : $[f(a), f(b)] \subset f(I)$

iv) $\forall a \in \mathrm{I}, \forall b \in \mathrm{I}, f(a) \leq 0 \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b], f(c) = 0$

Découle immédiatement de iii) avec $z = 0$. Inversement, iii) s'en déduit en raisonnant sur $g = f - z$.

v) $\forall a \in \mathrm{I}, \forall b \in \mathrm{I}, f(a) < 0 < f(b) \Rightarrow \exists c \in]a, b[, f(c) = 0$

En effet, si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, il suffit de prendre $c = 0$

Ce dernier énoncé v) est connu sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires. C'est donc ce dernier qu'il s'agit de démontrer :

THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

Soit f continue sur $[a,b]$, *telle que* $f(a) < 0 < f(b)$. *Alors il existe c élément de* $]a,b[$ *tel que* $f(c) = 0$

Ce théorème n'a eu de démonstration que fort tard. Il nécessite en effet une conception claire de la continuité, qui n'est apparue qu'au XIX^ème^. En 1817, Bolzano (1781-1848) rejette les justifications usuelles basées sur des considérations liées à la géométrie, au mouvement, à l'espace, dans un domaine qu'il considère purement analytique. La première définition de la continuité, encore intuitive, a été publiée par Cauchy en 1821.

Démonstration 1 :

Soit $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$

A contient a, donc est non vide, et est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure c, $c < b$. Montrons que c convient :

Si $f(c) < 0$, alors f étant continue est strictement négative dans un voisinage $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ de c, donc $c + \varepsilon$ appartient à A, ce qui contredit le fait que c soit la borne supérieure de A.

Si $f(c) > 0$, alors f est strictement positive dans un voisinage $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ de c. Cependant, c étant la borne supérieure de A, il devrait exister un élément x de A dans $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, donc tel que $f(x) \leq 0$, ce qui est contradictoire.

Ainsi, on a bien $f(c) = 0$

Démonstration 2 :

Cette démonstration utilise le principe de dichotomie. A savoir :

Soit $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Rappelons que l'on a supposé $f(a) < 0 < f(b)$. On définit par récurrence :

$$m_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$$\text{Si } f(m_n) > 0 \text{ alors } \begin{cases} a_n = a_{n-1} \\ b_n = m_n \end{cases} \quad \text{sinon } \begin{cases} a_n = m_n \\ b_n = b_{n-1} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que :

$\forall n, a_n < b_n$

$\forall n, b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

$\forall n, f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) > 0$

(a_n) et (b_n) sont donc deux suites adjacentes, donc convergent vers un même réel c. f étant continue, on a, en passant à la limite :

$\forall n, f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(c) \leq 0$

$\forall n, f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(c) \geq 0$

Donc $f(c) = 0$.

La démonstration précédente donne une méthode de calcul d'une valeur approchée de c, une erreur e étant acceptée. On suppose $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, de signe contraire :

```
u ← a
v ← b
tant que v – u > e et f((u + v)/2) ≠ 0 faire
    si f((u + v)/2) * f(b) > 0 alors v ← (u + v)/2
                          sinon u ← (u + v)/2
    finsi
finfaire
(u + v)/2
```

Dans la pratique, il peut se poser des problèmes délicats, négligés ci-dessus, provenant du fait que les valeurs numériques sont toujours approchées. Un test tel que $f(\frac{u+v}{2}) \neq 0$ n'a numériquement guère de sens. Pour des valeurs proches de 0, il se peut même que $f(\frac{u+v}{2})$ soit positif mais que la machine en donne une valeur approchée négative, invalidant totalement le résultat. La méthode peut alors donner une valeur de la racine fort éloignée de la racine réelle. Il n'existe pas de procédé permettant de corriger universellement ces défauts sans hypothèses supplémentaires sur f.

REMARQUE :

- ❑ Il peut y avoir plusieurs solutions possibles à l'équation $f(x) = 0$.
- ❑ L'image $f(\mathrm{I})$ d'un intervalle I n'est pas nécessairement de même nature que I.

Exemple : $f(x) = \sin(x)$. $\mathrm{I} =]-\pi, \pi[$ est ouvert, $f(\mathrm{I}) = [-1, 1]$ est fermé.
On prouvera cependant ci-dessous que l'image d'un segment est un segment.

3– Image d'un segment

On appelle segment un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION

Soit f continue sur un segment $[a,b]$. Alors $f([a,b])$ est un segment $[c,d]$.

On sait déjà que $f([a,b])$ est un intervalle. Il suffit de montrer que f admet un maximum d et un minimum c.

Démonstration non exigible. Début de partie réservée aux MPSI

Démonstration 1 :

Cette démonstration utilise la propriétés des segments emboîtés.

Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Divisons le segment $[a_0, b_0]$ en deux $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ et $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$. Le nombre Sup $\{f(x), x \in [a_0, b_0]\}$ est égal au plus grand des deux nombres Sup $\{f(x), x \in [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]\}$ et Sup $\{f(x), x \in [\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]\}$. Nous appelons $[a_1, b_1]$ celui des deux intervalles pour lequel f possède le même Sup que sur l'intervalle $[a_0, b_0]$ tout entier. On a donc :

$[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ (et donc $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$)

$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ (longueur du segment $[a_1, b_1]$)

$$\text{Sup } \{f(x), x \in [a_1, b_1]\} = \text{Sup } \{f(x), x \in [a, b]\}$$

La construction de $[a_0, b_0]$ à $[a_1, b_1]$ peut évidemment être itérée, conduisant à une suite décroissante de segments $[a_n, b_n]$ telle que :

$$a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1}$$

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$$

$$\text{Sup } \{f(x), x \in [a_n, b_n]\} = \text{Sup } \{f(x), x \in [a, b]\}$$

Les suites (a_n) et (b_n) forment deux suites adjacentes, qui convergent donc vers une limite commune c. Nous allons montrer que $f(c)$ est le maximum de la fonction f sur $[a, b]$. En effet, soit ε strictement positif. f étant continue, il existe α strictement positif tel que, pour x élément de $]c - \alpha, c + \alpha[$, on a :

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$$

Pour n assez grand, $[a_n, b_n]$ est inclus dans $]c - \alpha, c + \alpha[$. Les $f(x)$ pour x décrivant $[a_n, b_n]$ sont donc majorés par $f(c) + \varepsilon$. Il en résulte que :

$$\text{Sup } \{f(x), x \in [a, b]\} = \text{Sup } \{f(x), x \in [a_n, b_n]\} \leq f(c) + \varepsilon$$

Par ailleurs, Sup $\{f(x), x \in [a, b]\}$ est plus grand que $f(c)$. Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, f(c) \leq \text{Sup } \{f(x), x \in [a, b]\} \leq f(c) + \varepsilon$$

L'inégalité ne peut avoir lieu pour tout ε positif que si Sup $\{f(x), x \in [a, b]\} = f(c)$ qui est bien le maximum de la fonction.
On procède de même pour le minimum.

Démonstration 2 :
Cette démonstration utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass.
Soit $d = \text{Sup } \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, éventuellement infini. Il existe une suite (x_n) de $[a, b]$ tel que $f(x_n)$ tend vers d. En appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass, on extrait de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers l. Alors $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(l)$, mais continue également à converger vers d, donc $d = f(l)$, ce qui signifie que d est un maximum atteint au point l. On opère de même pour le minimum.

Démonstration 3 :
Considérons l'ensemble $S = \{x \in [a, b] \mid f \text{ est bornée sur } [a, x]\}$. Cet ensemble est non vide (il contient a puisque f est évidemment borné sur le singleton $\{a\}$ par $|f(a)|$). Il est également majoré par b. Il admet donc une borne supérieure c. f étant continue en c, il existe α tel que, pour tout t de $[c - \alpha, c + \alpha] \cap [a, b]$, $|f(t) - f(c)| \leq 1$, et donc f est borné par $|f(c)| + 1$ sur cet intervalle. Par ailleurs, c étant la borne supérieure de S, il existe x élément de S tel que $c - \alpha < x \leq c$. f est borné par un nombre M sur $[a, x]$. Le nombre $\text{Max}(M, |f(c)| + 1)$ borne donc la fonction f sur $[a, c + \alpha] \cap [a, b] = [a, \text{Min}(c + \alpha, b)]$. Donc $\text{Min}(c + \alpha, b)$ appartient à S et est donc inférieur ou égal à c qui en est un majorant. Comme $c + \alpha > c$, cela signifie que $c = b$ et que f est borné sur $[a, b]$.
Fin de la partie réservée aux MPSI. Retour à la partie commune MPSI, PCSI.

4– Continuité et monotonie

On rappelle qu'une fonction monotone admet une limite strictement à gauche et à droite en chaque point.
THEOREME
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. *Il y a équivalence entre :*
i) f est strictement monotone sur I.
ii) f est bijective de I *sur* f(I).

Dans ce cas, f^{-1} *est continue et strictement monotone.* I *et* f(I) *sont de même nature.*

Démonstration :
i) ⇒ ii)
f est évidemment surjective sur f(I), i.e. tout élément de f(I) est l'image par f d'un élément de I. Par ailleurs, une fonction strictement monotone est injective. En effet, soit $x \neq y$. On a par exemple $x < y$. Donc $f(x) < f(y)$ si f est strictement croissante, et $f(x) > f(y)$ si f est strictement décroissante. Dans tous les cas, $f(x) \neq f(y)$. Ainsi, tout élément de f(I) est l'image d'un et d'un seul élément de I. f est bijective.

ii) ⇒ i)
Par l'absurde, si f n'est pas strictement monotone, on a :

$\exists\, x < y, f(x) \leq f(y)$ (f n'est pas strictement décroissante)

$\exists\, x' < y', f(x') \geq f(y')$ (f n'est pas strictement croissante).

On a en fait des inégalités strictes en raison de l'injectivité. Soit :

$g(t) = f(x + t(x'-x)) - f(y + t(y'-y))$.

Alors :

- ❑ g est définie, continue sur [0,1]
- ❑ $g(0) = f(x) - f(y) < 0$
- ❑ $g(1) = f(x') - f(y') > 0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c élément de]0,1[tel que $g(c) = 0$

⇒ $f(x + c(x'-x)) = f(y + c(y'-y))$

⇒ $x + c(x'-x) = y + c(y'-y)$ car f est injective.

⇒ $(x - y)(1 - c) = c(y' - x')$

Ceci est impossible car le premier membre est strictement négatif, alors que le second membre est strictement positif.

Montrons que f^{-1} est strictement monotone. Supposons par exemple f strictement croissante. Soit x et y élément de f(I) tels que $x < y$. Alors :

$\exists\, a \in \text{I}, \exists\, b \in \text{I}, x = f(a), y = f(b), f(a) < f(b)$

On a donc $a < b$ car $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
donc $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$. La démonstration si f est strictement décroissante est analogue.

Montrons que f^{-1} est continue. Supposons f^{-1} croissante. La démonstration en cas de décroissance est analogue. Posons $g = f^{-1}$ pour alléger les notations. L'image de g est égale à I, qui est un intervalle. Par ailleurs, g étant monotone, cette fonction admet une limite à droite et à gauche en chaque point x_0. On a :

$g(x_0^-) \leq g(x_0) \leq g(x_0^+)$

Il suffit de montrer que les limites sont égales à $g(x_0)$. Faisons-le pour la limite à gauche, le cas de la limite à droite étant analogue. Si on avait $g(x_0^-) < g(x_0)$, alors il existerait t tel que :

$g(x_0^-) < t < g(x_0)$

Pour $x < x_0 < y$, on a $g(x) \leq g(x_0^-) < t < g(x_0) \leq g(y)$.
Ce qui prouve que t n'est l'image par g d'aucun réel. Ceci est en contradiction avec le fait que l'image de g est un intervalle.

On raisonne d'une façon analogue pour un point x_0 borne de l'intervalle de définition de g.

Pour f croissante, on a :

$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

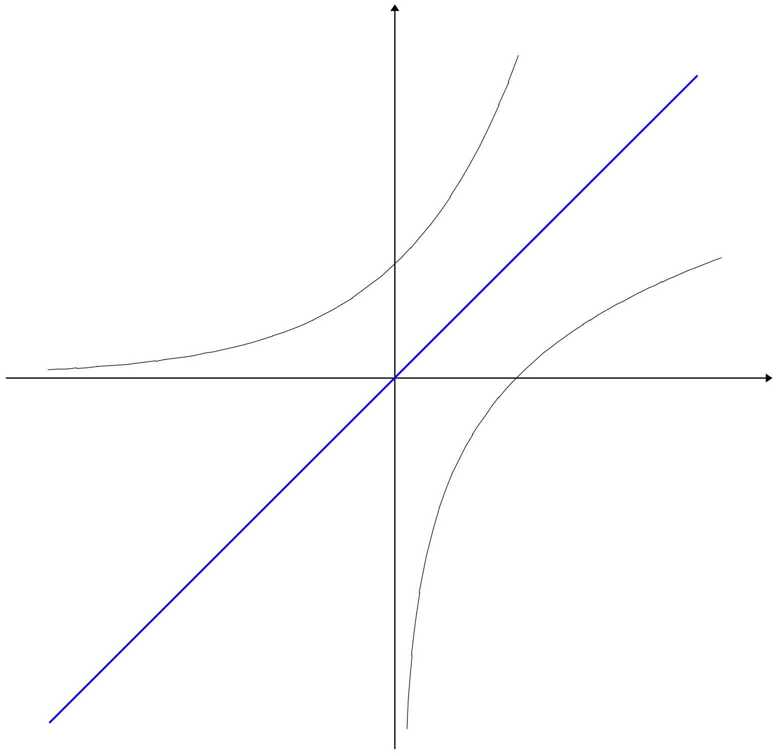
$f(]a, b[) =]f(a^+), f(b^-)[$
$f([a, b[) = [f(a), f(b^-)[$
$f(]a, b]) =]f(a^+), f(b)]$

Pour f décroissante, on a :
$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$
$f(]a, b[) =]f(b^-), f(a^+)[$
$f(]a, b]) = [f(b), f(a^+)[$
$f([a, b]) =]f(b^-), f(a)]$

La représentation graphique de f^{-1} est le symétrique de celle de f par rapport à la droite $y = x$. En effet :

(X, Y) appartient au graphe de f^{-1}
$\Leftrightarrow$ $Y = f^{-1}(X)$
$\Leftrightarrow$ $X = f(Y)$
$\Leftrightarrow$ (Y, X) appartient au graphe de f

Ainsi, on passe du graphe de f au graphe de f^{-1} en échangeant les rôles des deux coordonnées, ce qui revient à faire une symétrie par rapport à la première bissectrice. Ci-dessous, le graphe de l'exponentielle et du logarithme :



Annexe : fonction continue sur $\complement\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$

Cette annexe a pour but de montrer que la notion de continuité en un point peut se révéler complexe. On pose :

$f(x) = \dfrac{1}{q}$ si $x = \dfrac{p}{q}$ non nul irréductible, $q > 0$
$f(x) = 1$ si $x = 0$
$f(x) = 0$ si x est irrationnel.

Alors f est continue en tout point irrationnel et discontinue ailleurs. En effet :

❑ Soit x_0 rationnel. Alors $\complement\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite a_n d'irrationnels convergeant vers x_0. Mais $f(a_n) = 0$ donc la limite de cette suite est différente de $f(x_0)$ et f ne peut être continue en x_0.

❑ Soit x_0 irrationnel. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe q entier positif tel que $\frac{1}{q}$ soit inférieur à ε. Considérons les fractions de la forme $\frac{p}{q!}$ et prenons p l'entier tel que :

$$\frac{p}{q!} < x_0 < \frac{p+1}{q!}$$

(p est la partie entière de $x_0q!$)

Tout x élément de l'intervalle $I =]\frac{p}{q!}, \frac{p+1}{q!}[$ vérifie :

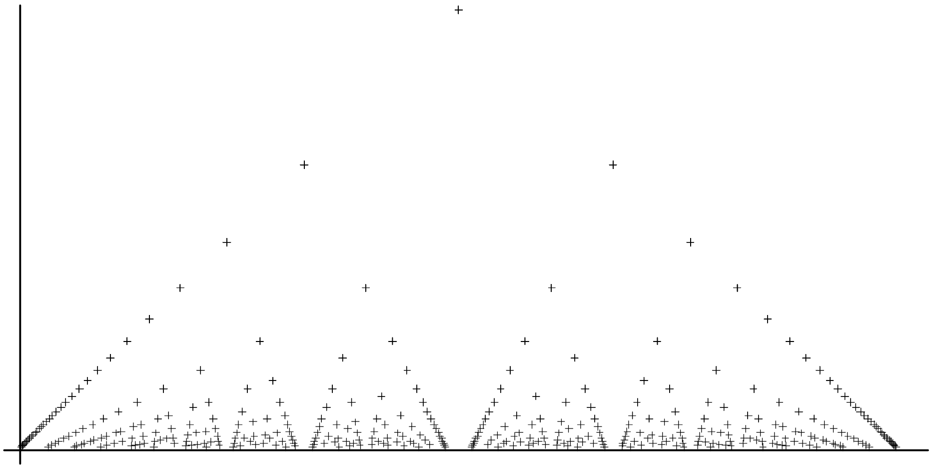
ou bien x est irrationnel et $f(x) = 0$

ou bien x est rationnel, mais son dénominateur est supérieur à q. En effet, si $x = \frac{a}{b}$ avec $\frac{p}{q!} < \frac{a}{b} < \frac{p+1}{q!}$, on a, en multipliant par $q!$: $p < \frac{aq!}{b} < p + 1$ donc $\frac{aq!}{b}$ ne peut être entier donc b est supérieur à q sinon la fraction $\frac{aq!}{b}$ pourrait se simplifier par b. Donc :

$$0 < f(x) < \frac{1}{q} < \varepsilon.$$

On a trouvé un voisinage de x_0 tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x)$ appartienne à $]f(x_0) - \varepsilon , f(x_0) + \varepsilon [$. La continuité est donc prouvée.

Voici le graphe de *f* :



◆