ARCS PARAMETRES

Plan

I : Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Ce paragraphe a pour but de généraliser les procédés de dérivation aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans E, E étant un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cette généralisation, un peu fastidieuse, ne présente pas de difficultés particulière et est appliquée couramment en physique, où l'on considère des grandeurs vectorielles (vitesse, accélération) fonctions du temps.

1- Dérivation

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to E$. f est dérivable en x_0 si $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$ existe. Cette limite s'appelle dérivée de f en x_0. Si f est dérivable en tout point de I, et de dérivée continue, on dit que f est C^1 et on note l'application dérivée $f\,'$, ou Df, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Si f désigne la position d'un point mobile en fonction du temps t, $f\,'(t)$ n'est autre que la vitesse vectorielle de ce point. C'est également un vecteur directeur de la tangente à l'arc paramétré décrit par le point, à condition que la dérivée soit non nulle (point dit régulier).

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$, on peut raisonner composante par composante. En effet :

$$\frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} f_1(x_0 + h) - f_1(x_0) \\ f_2(x_0 + h) - f_2(x_0) \\ \dots \\ f_n(x_0 + h) - f_n(x_0) \end{pmatrix}$$

et la limite existe si et seulement si elle existe pour chaque composante, autrement dit si et seulement si chaque composante est dérivable. On a alors $f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ ... \\ f_n' \end{pmatrix}$.

Plus généralement, si E est muni d'une base $(e_1, ..., e_n)$ et si $f(x) = f_1(x)\, e_1 + ... + f_n(x)\, e_n$, alors f est dérivable si et seulement si chaque f_i l'est et $f' = f_1'\, e_1 + ... + f_n'\, e_n$.

Un cas particulier est E = $\mathbb{C}$, avec $f = \mathrm{Re}(f) + i\, \mathrm{Im}(f)$. f est dérivable si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont, et $f' = (\mathrm{Re}(f))' + i\, (\mathrm{Im}(f))'$. Il en résulte que, si f est dérivable, $\overline{\mathrm{f}}$ aussi, et que :

$$D(\overline{f}) = D(\mathrm{Re}(f) - i\, \mathrm{Im}(f)) = D(\mathrm{Re}(f)) - i\, D(\mathrm{Im}(f)) = \overline{D(f)}$$

2- Dérivation d'une composée de fonctions

PROPOSITION

Soient E et F *des espaces vectoriels de dimension finie,* $f : \mathbb{R} \to E$ *une application dérivable et* $u : E \to F$ *une application linéaire. Alors* $u \circ f$ *est dérivable et* $(u \circ f)' = u \circ f'$.

<u>Démonstration 1</u> :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\, f'(x_0) + o(h)$$

$$\Rightarrow \quad u(f(x_0 + h)) = u(f(x_0) + hf'(x_0) + o(h))$$

$$= u(f(x_0)) + h\, u(f'(x_0)) + u(o(h))$$

avec $u(o(h)) = u(ho(1)) = hu(o(1)) = ho(1) = o(h)$ car u étant linéaire est continue, et si $o(1)$ tend vers 0 quand h tend vers 0, il en est de même de $u(o(1))$. Il en résulte que $u \circ f$ est dérivable et que sa dérivée vaut $u \circ f'$.

<u>Démonstration 2</u> :

On prend une base $(e_1, ..., e_n)$ de E et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ de F. La matrice de u ayant pour terme général a_{ij} et f ayant pour composantes $\begin{pmatrix} f_1 \\ ... \\ f_n \end{pmatrix}$, $u \circ f$ a pour composantes $\begin{pmatrix} g_1 \\ ... \\ g_p \end{pmatrix}$ avec :

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, f_j$$

La dérivée de $u \circ f$ a pour composantes $\begin{pmatrix} g_1' \\ ... \\ g_p' \end{pmatrix}$ avec :

$$g_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, f_j'$$

où l'on reconnait $u \circ f'$.

Le cas ou u n'est pas linéaire est étudié dans le chapitre *Fonctions de plusieurs variables* (FPLSVAR2.PDF).

PROPOSITION

Soient f et g deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ *dans* E *et* F *respectivement, et* B *une application bilinéaire de* $E \times F$ *dans un espace vectoriel* G. *On peut alors considérer l'application de* $\mathbb{R}$ *dans*

G, *qui à x associe* B($f(x)$,$g(x)$), *application que nous noterons* B(f,g). *Alors* B(f,g) *est dérivable et sa dérivée vaut* B(f',g) + B(f,g').

Démonstration 1 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$$
$$g(x_0 + h) = g(x_0) + hg'(x_0) + o(h)$$
$$\Rightarrow \quad B(f(x_0 + h),g(x_0 + h)) = B(f(x_0) + hf'(x_0) + o(h),g(x_0) + hg'(x_0) + o(h))$$
$$= B(f(x_0),g(x_0)) + hB(f'(x_0),g(x_0)) + hB(f(x_0),g'(x_0)) + ...$$

Les points de suspension renferment tous les autres termes, dont on vérifiera qu'ils sont tous de la forme o(h).

Démonstration 2 :

On prend une base (e_1, ..., e_n) de E, (ε_1, ..., ε_p) de F et (η_1, ..., η_m) de G. B(e_i, ε_j) est un vecteur de G ayant pour composante sur η_k le scalaire b_{ijk}. Si f a pour composantes $\begin{pmatrix} f_1 \\ ... \\ f_n \end{pmatrix}$ et g a pour composantes $\begin{pmatrix} g_1 \\ ... \\ g_p \end{pmatrix}$, alors $B(f,g) = B(\sum_{i=1}^n f_i\, e_i, \sum_{j=1}^p g_j\, \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f_i\, g_j\, B(e_i,\varepsilon_j)$. Sa composante sur η_k est :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f_i\, g_j\, b_{ijk}$$

dont la dérivée vaut $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f_i'\, g_j\, b_{ijk} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f_i\, g_j'\, b_{ijk}$ et l'on reconnaît la composante de B(f',g) + B(f,g').

Les exemples les plus classiques sont le produit scalaire et le produit vectoriel. On a donc :

$$(\langle f,g\rangle)' = \langle f',g\rangle + \langle f, g'\rangle$$
$$(\| f \|^2)' = \langle f',f\rangle + \langle f, f'\rangle$$
$$= 2 \langle f',f\rangle$$

En particulier, si f est une fonction qui, à x, associe un vecteur unitaire, on a $\langle f',f\rangle = 0$.

En dimension 3, dans un espace vectoriel euclidien orienté, on a :

$$(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$$

On peut étendre le résultat précédent aux formes multilinéaires. La dérivée d'un déterminant est :

$$(\det(f_1, ..., f_n))' = \det(f_1', f_2, ..., f_n) + \det(f_1,f_2', ..., f_n) + ... + \det(f_1, f_2, ..., f_n')$$

PROPOSITION

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie,* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to$ E *deux applications dérivables. Alors* $f \circ \varphi$ *est dérivable et* $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.

La démonstration est la même celle vue dans le cours de première année, lorsque f arrive dans $\mathbb{R}$.

3- Fonctions de classe C^n

f est de classe C^n si f est n fois continûment dérivable. On note C^n(I, E) l'ensemble des fonctions de classe C^n d'un intervalle I dans E. Il s'agit d'un espace vectoriel.

II : Arcs paramétrés

1– Interprétation physique

Une fonction f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace de dimension finie définit un arc paramétré. En général, la fonction considérée est de classe C^k avec $k \geq 2$ (fonction k fois continûment dérivable). L'interprétation physique est la suivante : t élément de I désigne le temps. Plutôt que de voir $f(t)$ comme un vecteur dépendant de t, il peut être commode de le voir comme indiquant la poisition d'un point mobile qu'on pourra noter M(t). La vitesse vectorielle V du point mobile est donnée par $f\,'(t)$ et son accélération vectorielle a par $f\,''(t)$. (Les dérivées peuvent se calculer composante par composante). En coordonnées cartésiennes, si $f = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, où x et y sont fonctions de t, on a :

$$V = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j}$$
$$a = x''\boldsymbol{i} + y''\boldsymbol{j}$$

EXEMPLE :
La cycloïde (cf Annexe) est parametrée par :

$$\begin{cases} x = R(t - \sin(t)) \\ y = R(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

où R est une constante.

2– Etude locale

<u>a) Tangente à la courbe</u>

La configuration de l'arc au voisinage de M($\boldsymbol{t_0}$) dépend des dérivées successives de f, et des relations de liaisons entre ces dérivées. Nous supposons f au moins C^1. Considérons la droite (M($\boldsymbol{t_0}$)M(t)). Si cette droite admet une position limite lorsque t tend vers $\boldsymbol{t_0}$, alors cette position limite sera par définition la tangente à l'arc en M($\boldsymbol{t_0}$). Deux cas sont possibles :

❑ $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{1}{t - t_0}\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f\,'(\boldsymbol{t_0})$ existe et est non nulle.

Le point M($\boldsymbol{t_0}$) est dit régulier. Dans ce cas, la tangente est la droite passant par M($\boldsymbol{t_0}$) et de vecteur directeur $f\,'(\boldsymbol{t_0})$. Cette situation est la plus générale. Elle correspond d'ailleurs au cas usuel des représentations graphiques des fonctions réelles. Soit g une telle fonction, dérivable. Son graphe est représenté par l'ensemble des points M(x) de coordonnées (x, $g(x)$). La tangente au graphe en M($\boldsymbol{x_0}$) est la droite de vecteur directeur (1, $g'(\boldsymbol{x_0})$). Ce vecteur n'est jamais nul.

EXEMPLE :
Dans le cas où $\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$, on a $f\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. M($t$) est régulier si et seulement si $t \neq 0$ mod 2π. La tangente à la courbe en M(t) est donnée par $\begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Par exemple, pour $t = \pi$, la tangente est parallèle à Ox.

❑ $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{1}{t - t_0}\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(t_0) = f\,'(\boldsymbol{t_0})$ existe et est nulle.

Le point M($\boldsymbol{t_0}$) est dit stationnaire. Comment trouver la tangente dans ce cas ? Nous supposerons que f admet un développement limité à un ordre suffisamment élevé tel que :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^n\, a_n + o((t - t_0)^n) \text{ avec } a_n \neq 0$$

a_n est ici un vecteur. On obtient un tel développement limité par exemple en raisonnant composante par composante. (Le cas où à tout ordre, $a_n = 0$ est possible mais ne sera pas envisagé ici). La tangente est la droite passant par M(t_0) et de vecteur directeur a_n. En effet, $f(t) - f(t_0)$ est égal à

$\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{M}(t_0)$. C'est donc un vecteur directeur de la corde. Il en est de même de $\dfrac{1}{(t-t_0)^n}(f(t)-f(t_0))$ qui est égal à $a_n + o(1)$. a_n, qui est la limite de ce vecteur quand t tend vers t_0, est un vecteur directeur de la tangente.

Dans le cas d'un point régulier, $n = 1$, $a_n = a_1 = f\,'(t_0)$.

EXEMPLE :

Dans le cas où $\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$ avec $t_0 = 0$, on a $f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^3}{6} \\ \dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix} + o(t^3)$ donc :

$$f(t) = \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(t^2)$$

On a ici $n = 2$, $a_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La tangente est parallèle à Oy.

<u>b) Position par rapport à la tangente</u> :

Dans ce paragraphe, on se limite aux courbes planes et on suppose que f admet en t_0 un développement limité de terme général $(t-t_0)^k\, a_k$ qui vérifie les hypothèses suivantes :

i) Il existe un plus petit entier n tel que : $a_n \neq 0$.

ii) Il existe un plus petit entier m, (supérieur à n) tel que (a_n, a_m) forme une base du plan.

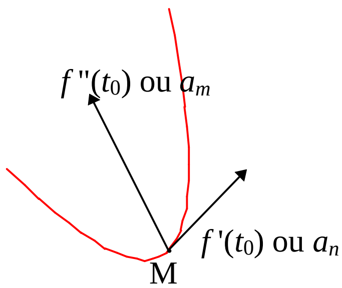
$\boldsymbol{M}(t_0)\boldsymbol{M}(t)$ peut s'écrire $\mathrm{X}(t)a_n + \mathrm{Y}(t)a_m$ avec:

$$\mathrm{X}(t) \sim (t-t_0)^n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y}(t) \sim (t-t_0)^m \text{ quand } t \text{ tend vers } t_0.$$

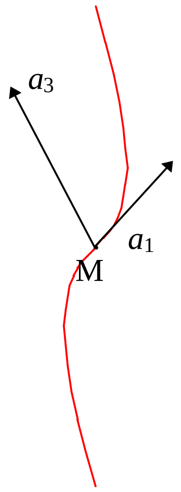
Plusieurs cas se rencontrent, obtenus en étudiant les signes de $\mathrm{X}(t)$ et $\mathrm{Y}(t)$ suivant que $t < t_0$ ou $t > t_0$:

❑ Le cas usuel : $n = 1$ et $m = 2$. C'est le cas des représentations graphiques de fonctions $y = g(x)$, où $f\,'(x_0)$ a pour composantes $(1, g'(x_0))$ et $f\,''(x_0)$ a pour composantes $(0, g''(x_0))$, si la dérivée seconde de g est non nulle en x_0. C'est également le cas des points ordinaires des courbes planes. Ces points sont appelés biréguliers.

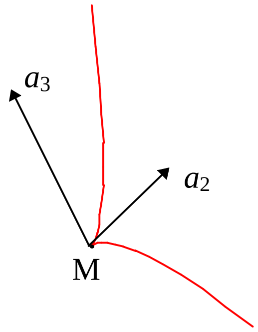
Cas analogue au cas précédent mais plus général : n impair et m pair. La courbe reste du même côté de la tangente. a_m indique le sens de concavité de la courbe.



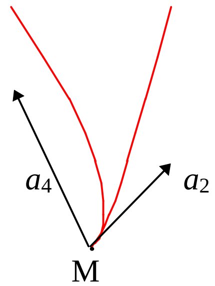
❑ Cas où n est impair et m impair (en général, n=1 et m=3) : la courbe traverse sa tangente. On a un point d'inflexion.



❑ Cas où n est pair et m impair : la courbe traverse la tangente, mais la composante suivant le vecteur tangent garde un signe constant. On a un point de rebroussement de première espèce.



❑ Cas où n est pair et m est pair : la courbe reste du même côté de la tangente, et la composante suivant le vecteur tangent garde un signe constant. On a un point de rebroussement de deuxième espèce.



3– Asymptotes

Il y a branche infinie lorsque t tend vers t_0 si $\lim_{t\to t_0} \|f(t)\| = +\infty$. Deux cas sont faciles à déterminer :

❑ Si $x(t) \to a$, et $y(t) \to \infty$ alors la droite $x = a$ est asymptote.
❑ Si $x(t) \to \infty$, et $y(t) \to b$ alors la droite $y = b$ est asymptote.

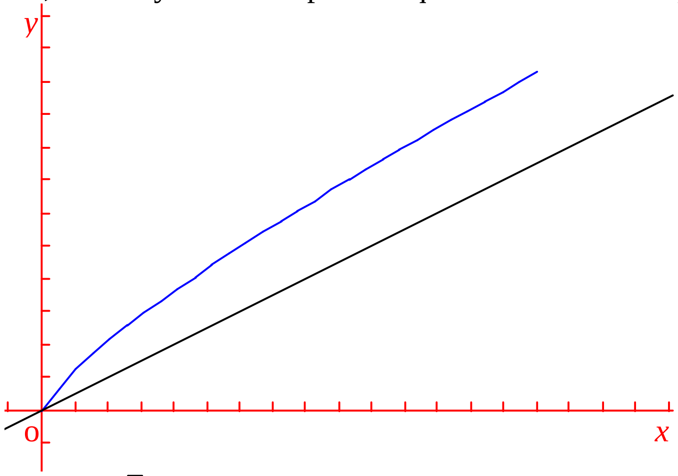
Seul le cas où x et y tendent simultanément vers l'infini pose problème. (D'autre cas pathologiques éventuels, tels que limite infinie pour x et pas de limite pour y, ne sont pas considérés ici).

❑ Si $\frac{y(t)}{x(t)} \to 0$, alors il y a branche parabolique dans la direction Ox. (Il ne peut y avoir asymptote car $y \to \infty$). C'est le cas de la courbe $y = \sqrt{x}$

❑ Si $\frac{y(t)}{x(t)} \to \infty$, alors il y a branche parabolique dans la direction Oy. (Il ne peut y avoir asymptote car $x \to \infty$). C'est le cas de la courbe $y = x^2$.

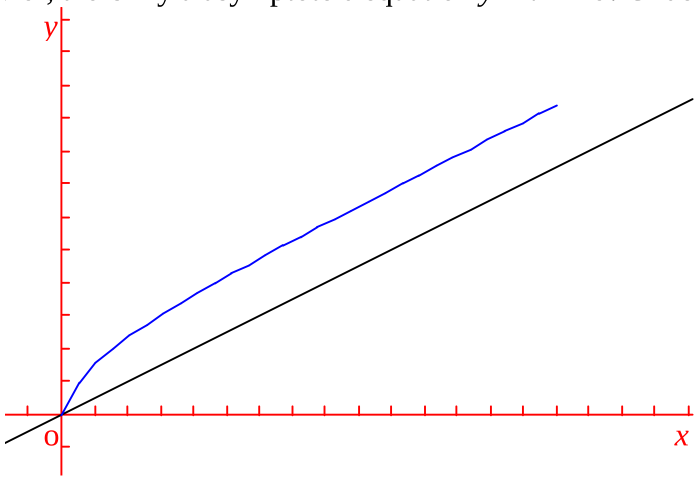
❑ Si $\frac{y(t)}{x(t)} \to a$, alors il y a direction asymptotique dans la direction $y = ax$. On ne peut encore savoir s'il y a asymptote. On distingue deux sous–cas :

Si $y(t) - ax(t) \to \infty$, alors il y a branche parabolique dans la direction $y = ax$.



C'est le cas de la courbe $y = x + \sqrt{x}$

Si $y(t) - ax(t) \to b$, alors il y a asymptote d'équation $y = ax + b$. Ci dessous, $b = 2$.



La différence entre les deux figures, c'est que, dans la première (branche parabolique), la courbe bleue s'éloigne indéfiniment mais de plus en plus lentement de la droite noire correspondant à la direction asymptotique, alors que dans la seconde (asymptote), la courbe bleue s'éloigne à distance finie de la droite noire.

4– Plan d'étude d'un arc paramétré

❑ Déterminer l'ensemble de définition de $f(t)$.

❑ Réduire l'étude à un ensemble plus petit en tenant compte des périodicités, symétries ... Les propriétés les plus courantes sont :

i) Il existe T tel que $x(t + \mathrm{T}) = x(t)$ et $y(t + \mathrm{T}) = y(t)$. Il suffit de faire l'étude sur un intervalle de longueur T.

ii) Si, pour tout t, $x(t) = x(-t)$ et $y(t) = y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul.

iii) Si pour tout t, $x(t) = x(-t)$ et $y(t) = -y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des x.

iv) Si pour tout t, $x(t) = -x(-t)$ et $y(t) = y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des y.

v) Si pour tout t, $x(t) = -x(-t)$ et $y(t) = -y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'origine.

vi) Si pour tout t, $x(t) = y(-t)$ et $y(t) = x(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à la première bissectrice.

etc ...

❑ Etudier simultanément les variations de x et y, leurs limites. Tracer un tableau de variation où l'on représente les signes de x' et y' et les variations de x et y.

❑ Etudier les branches infinies, les points stationnaires. Déterminer d'éventuels points multiples (points pour lesquels il existe t et t' tels que $\mathrm{M}(t) = \mathrm{M}(t')$).

5– Longueur d'un arc paramétré

Soit E un espace euclidien. On considère un arc paramétré par une fonction $f : [a, b] \to \mathrm{E}$ de classe C^1. On appelle longueur de cet arc la quantité suivante :

$$\mathrm{L} = \int_a^b \| f'(t) \| \, \mathrm{d}t$$

La seule justification que nous donnerons de cette formule est une interprétation physique. Si t est le temps, $f(t)$ est la position à l'instant t d'un point mobile, $f'(t)$ est sa vitesse vectorielle, $\| f'(t) \|$ est sa vitesse scalaire, $\| f'(t) \| \, \mathrm{d}t$ la longueur parcourue pendant l'intervalle de temps $[t, t + \mathrm{d}t]$ et L la somme de ces longueurs élémentaires.

Dans le cas d'une courbe plane de $\mathbb{R}^2$, la formule devient :

$$\mathrm{L} = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, \mathrm{d}t$$

EXEMPLE :

Soit la courbe $\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$. (il s'agit de la cycloïde présentée en annexe).

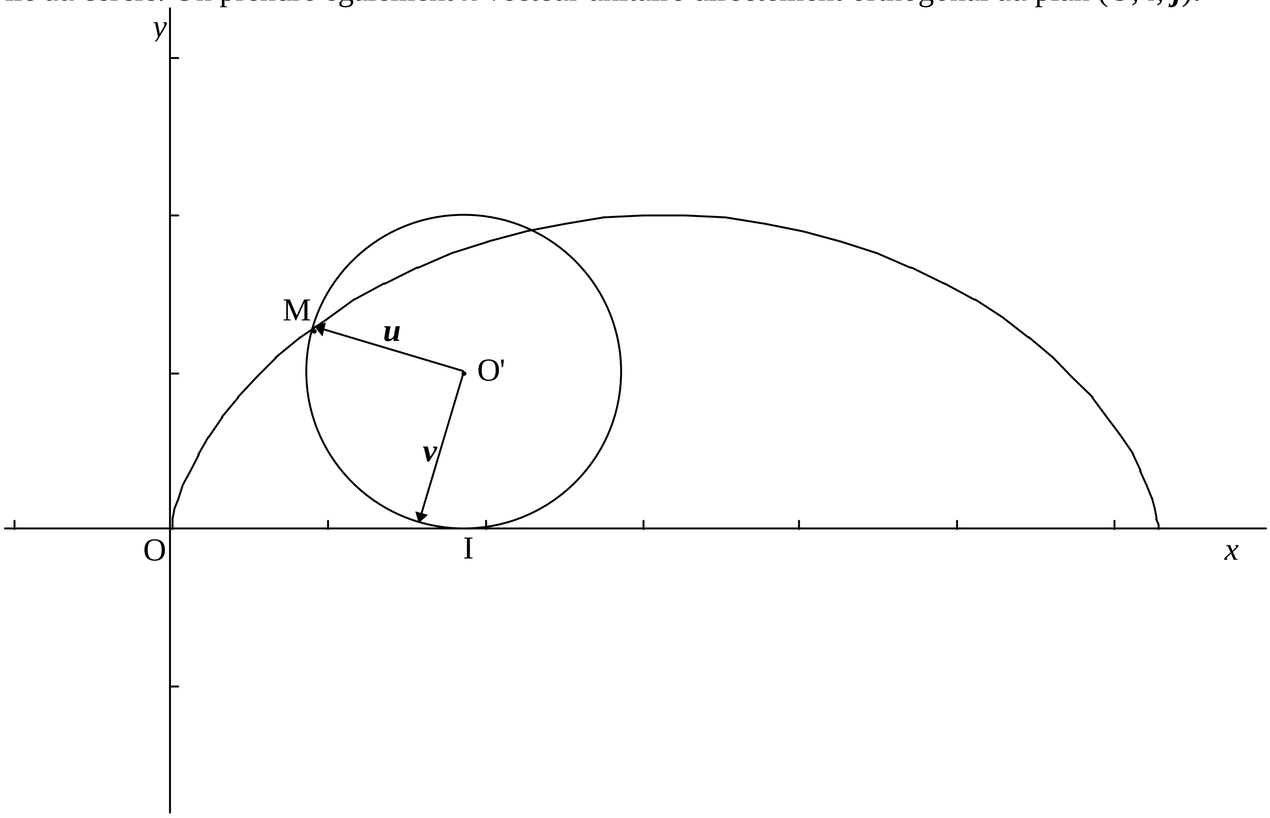
On a $f'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, donc :

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin(t)^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sqrt{2-2\cos(t)}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} 2\sin(\frac{t}{2})\ \mathrm{d}t = 8$$

Annexe : la cycloïde

On considère un cercle tangent à l'axe des x, qui roule sans glisser sur cet axe. On appelle θ l'angle dont la roue a tourné et on cherche les coordonnées de M qui était initialement en O. La courbe décrite par M s'appelle cycloïde.

On dispose de deux repères : (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$) considéré comme fixe, et (O', $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) considéré comme mobile, lié au cercle. On prendre également $\boldsymbol{k}$ vecteur unitaire directement orthogonal au plan (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$).



Initialement, $\boldsymbol{O'M} = R\boldsymbol{u} = -R\boldsymbol{j}$, puis $\boldsymbol{u} = -\sin(\theta)\boldsymbol{i} - \cos(\theta)\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v} = \cos(\theta)\boldsymbol{i} - \sin(\theta)\boldsymbol{j}$. En effet, θ est l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $-\boldsymbol{j}$. Par ailleurs, la condition de roulement sans glissement s'exprime par le fait que $\boldsymbol{OO'}$ est égal à $R\boldsymbol{j} + R\theta\boldsymbol{i}$. En effet, le centre instantané de rotation du cercle est le point de contact I du cercle avec l'axe des abscisses. La vitesse du point O' est donc égale à $-\dot{\theta}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{IO'} = R\dot{\theta}\boldsymbol{i}$ où $\dot{\theta}$ désigne la dérivée de θ par rapport au temps, donc l'abscisse de O' est $R\theta$. Ainsi :

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M} = R\boldsymbol{j} + R\theta\boldsymbol{i} + R(-\sin(\theta)\boldsymbol{i} - \cos(\theta)\boldsymbol{j})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = R\theta - R\sin(\theta) \\ y = R - R\cos(\theta) \end{cases}$$

◆