SERIES ENTIERES

PLAN

I : Rayon de convergence

1– Définition

DEFINITION :

On appelle série entière d'une variable complexe une série de la forme : $\sum a_n z^n$

z est complexe, ainsi que les a_n. On pose par convention $0^0 = 1$, comme pour les polynômes, de sorte que la valeur de la série pour $z = 0$ soit a_0. La première question que l'on se pose est de savoir pour quelles valeurs de z la série converge.

DEFINITION
On appelle domaine de convergence D de la série entière l'ensemble des z tels que la série converge.

EXEMPLES :

❑ $\sum \dfrac{z^n}{n!}$

Pour $z = 0$, la série converge et vaut 1.

Pour $z \neq 0$, on applique la règle de D'Alembert.

$$\left|\frac{z^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, z^n}\right| = \left|\frac{z}{n+1}\right|$$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc la série converge pour tout z.

$\Rightarrow$ D = $\mathbb{C}$.

❑ $\sum n!\, z^n$

Pour $z = 0$, la série converge et vaut 1.
Pour $z \neq 0$, le terme général tend vers l'infini, donc la série diverge.
$\Rightarrow$ D = $\{0\}$.

❑ $\sum z^n$

Pour $|z| < 1$, il s'agit d'une série géométrique convergente.

Pour $|z| \geq 1$, il s'agit d'une série géométrique divergente.

$\Rightarrow$ D = $\{ z, |z| < 1\}$.

❑ $\sum \frac{z^n}{n}$

Pour $|z| < 1$, la règle de D'Alembert permet de conclure à la convergence.

Pour $|z| > 1$, la même règle permet de conclure à la divergence.

En ce qui concerne le cas $|z| = 1$, on peut montrer que la série converge sauf pour $z = 1$, mais cela dépasse le cadre du programme.
$\Rightarrow$ D = $\{ z, |z| < 1 \text{ ou } (z \neq 1 \text{ et } |z| = 1) \}$.

❑ $\sum \frac{z}{n^2}$

Pour $|z| \leq 1$, le module du terme général de la série est majoré par $\frac{1}{n^2}$. Elle est donc absolument convergente.
Pour $|z| > 1$, le terme général tend vers l'infini donc la série diverge.

$\Rightarrow$ D = $\{ z, |z| \leq 1\}$.

On remarque que dans tous les cas, le domaine de convergence est un disque centré à l'origine, de rayon éventuellement nul ou infini, et comprenant ou non des éléments du cercle frontière. Nous allons voir que ceci est général.

2– Rayon de convergence

LEMME D'ABEL

Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière et Z un complexe non nul tel que la suite de terme général* $a_n Z^n$ *soit bornée. Soit z tel que* $|z| < |Z|$. *Alors la série* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente.*

Démonstration :
Soit M un majorant de $|a_n Z^n|$. On a : $|a_n z^n| = |a_n Z^n| \times \left|\frac{z^n}{Z^n}\right| \leq \mathrm{M} \left|\frac{z^n}{Z^n}\right|$

La série de terme général $\mathrm{M} \left|\frac{z^n}{Z^n}\right|$ est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Elle est donc convergente. La série de terme général $a_n z^n$ est donc absolument convergente.

L'hypothèse de la proposition est en particulier vérifiée lorsque $a_n Z^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et en particulier lorsque la série de terme général $a_n Z^n$ converge. Autrement dit, si la série converge pour Z, alors elle converge nécessairement pour tout z de module inférieur à $|Z|$.

DEFINITION
Soit R *un réel positif ou nul. On appelle disque ouvert de rayon* R, *et l'on note* $\mathrm{D_o(R)}$ *l'ensemble* $\{ z, |z| < \mathrm{R} \}$ *.On appelle disque fermé de rayon* R, *et l'on note* $\mathrm{D_f(R)}$ *l'ensemble* $\{ z, |z| \leq R \}$. *Pour* $\mathrm{R} = +\infty$, $\mathrm{D_o(R)}$ *et* $\mathrm{D_f(R)}$ *sont égaux à* $\mathbb{C}$.

PROPOSITION

Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de domaine de convergence* D. *Alors il existe* R *élément de* $[0,+\infty]$ *tel que :* $\mathrm{D_o(R)} \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{D_f(R)}$. R *s'appelle le rayon de convergence de la série entière.*

Autrement dit, le domaine de convergence est un disque de rayon R, sans qu'on précise davantage si les points de la frontière du disque appartiennent ou non à D.

Démonstration 1 :
Soit $\mathrm{R} = \mathrm{Sup}\{ |z|, z \in \mathrm{D} \}$.

Si z est tel que $|z| > \mathrm{R}$, alors par définition de R, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge, ce qui prouve que : $\mathrm{D} \subset \mathrm{D_f(R)}$.

Si z est tel que $|z| < \mathrm{R}$, alors, par définition de la borne supérieure, il existe un complexe Z tel que $|z| < |\mathrm{Z}| < \mathrm{R}$ et tel que Z appartienne à D. Comme $\sum a_n \mathrm{Z}^n$ converge, la suite $(a_n \mathrm{Z}^n)$ est bornée (et tend même vers 0). Le lemme d'Abel permet de conclure que z appartient aussi à D. Ce qui prouve que : $\mathrm{D_o(R)} \subset \mathrm{D}$.

Démonstration 2 :

Soit R = Sup{ $|Z|$, la suite ($a_n Z^n$) est bornée }.

Si z est tel que $|z|$ > R, alors par définition de R, la suite ($a_n z^n$) n'est pas bornée, donc en particulier ne tend pas vers 0, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge, ce qui prouve que : D $\subset$ D_f(R).

Si z est tel que $|z|$ < R, alors, par définition de la borne supérieure, il existe un complexe Z tel que $|z| < |Z| < R$ et tel que la suite ($a_n Z^n$) soit bornée. Le lemme d'Abel permet de conclure que z appartient aussi à D. Ce qui prouve que : D_o(R) $\subset$ D.

3– Détermination pratique

La règle de D'Alembert est d'un usage fréquent pour le calcul du rayon de convergence

EXEMPLE :

Quel est le rayon de convergence de la série $\sum \frac{e^n - 1}{n} z^n$. Appliquons le critère de D'Alembert.

$$\left| \frac{\frac{e^{n+1} - 1}{n+1} z^{n+1}}{\frac{e^n - 1}{n} z^n} \right| \sim \left| \frac{\frac{e^{n+1}}{n} z^{n+1}}{\frac{e^n}{n} z^n} \right| = |ez|$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{e^{n+1} - 1}{n+1} z^{n+1}}{\frac{e^n - 1}{n} z^n} \right| = |ez|$

Donc : si $|z| < \frac{1}{e}$, la limite est strictement inférieure à 1 et la série converge

si $|z| > \frac{1}{e}$, la limite est strictement supérieure à 1 et la série diverge

Donc le rayon de convergence vaut $\frac{1}{e}$.

On peut aussi utiliser les critères usuels de majoration, minoration, équivalent pour montrer qu'une série converge ou diverge. En particulier, soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R et R'. Supposons que : $\exists$ N, $\forall$ n, $|a_n| \leq |b_n|$. Alors, si $|z|$ < R', $\sum b_n z^n$ converge absolument, donc $\sum a_n z^n$ aussi. Cela signifie donc que tout point dans D_o(R'), disque ouvert de convergence pour la deuxième série, est aussi dans le domaine de convergence de la première série, et donc que :

$$D_o(R') \subset D_f(R)$$

On a donc R $\geq$ R'. La comparaison des termes des deux séries permet donc d'en déduire une comparaison des rayons de convergence, utile lorsque a_n ou b_n n'est pas explicitement connu.

EXEMPLE :

Soit $a_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+t}\, dt$. On cherche le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$. On a :

$$\int_0^1 \frac{e^{nt}}{2}\,\mathrm{d}t \leq a_n \leq \int_0^1 e^{nt}\,\mathrm{d}t \text{ et donc, pour } n \geq 1,\ \frac{e^n - 1}{2n} \leq a_n \leq \frac{e^n - 1}{n}.$$

La série $\sum \dfrac{e^n - 1}{n} z^n$ a pour rayon R' = $\dfrac{1}{e}$. L'inégalité $0 \leq a_n \leq \dfrac{e^n - 1}{n}$ permet donc de conclure que R ≥ R'.

La série $\sum \dfrac{e^n - 1}{2n} z^n$, moitié de la précédente, a aussi pour rayon R' = $\dfrac{1}{e}$. L'inégalité $0 \leq \dfrac{e^n - 1}{2n} \leq a_n$ permet donc de conclure que R' ≥ R.

Les deux inégalités donnent R = R' = $\dfrac{1}{e}$

Le lemme d'Abel peut également servir ; si $(a_n Z^n)$ est bornée, alors R ≥ $|Z|$. Si de plus la série $\sum a_n Z^n$ diverge, alors R = $|Z|$. Le lemme d'Abel prouve également que la convergence est absolue dans $D_o(R)$. Donc si Z est tel que la série $\sum a_n Z^n$ est semi-convergente, (i.e. convergente sans être absolument convergente) alors R = $|Z|$.

EXEMPLE :

$\sum \dfrac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1, puisque, pour $z = 1$, $(\dfrac{z^n}{n})$ est bornée, donc R ≥ 1, mais pour $z = -1$, la série ne converge pas absolument, donc R ≤ 1.

4– Convergence normale

PROPOSITION

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. *Alors, pour tout r <* R, *cette série converge normalement sur le disque fermé de rayon r.*

<u>Démonstration</u> :

Le terme général de la série en effet majoré en module par $|a_n r^n|$ qui est le terme général d'une série convergente. On notera qu'il peut ne pas y avoir convergence normale sur de disque D(R). Considérer par exemple la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$.

La proposition précédente s'applique également sur un fermé borné K inclus dans le disque ouvert de convergence. En effet, la fonction de K dans $\mathbb{R}$, qui à z associe $|z|$ est continue, donc admet un maximum r strictement inférieur à R. K est donc inclus dans $D_f(r)$, et il y a bien convergence normale.

II : Fonction somme d'une série entière

1– Continuité

PROPOSITION

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *la fonction définie sur le domaine de convergence* D, *somme de la série entière, de rayon de convergence* R. *Alors f est continue sur* $D_o(R)$.

Démonstration :
Soit z tel que $|z| < R$. Soit r tel que $|z| < r < R$. Comme il y a convergence normale sur $D_f(r)$ et que chaque terme de la série est continu, il en est de même de la somme. On remarquera que la continuité sur le domaine de convergence D tout entier n'est pas assurée. Il peut en effet se poser des problèmes de continuité aux points z tel que $|z| = R$, même si la série converge en z. L'étude de ces problèmes n'est pas un objectif du programme.

Voici une conséquence immédiate de la proposition précédente.

PROPOSITION

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *la somme d'une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors f admet un développement limité à tout ordre en 0.*

Démonstration :
On a, à l'ordre n :

$$f(z) = \sum_{p=0}^{n} a_p z^p + \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p z^p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_p z^p + z^n \underbrace{\sum_{p=n+1}^{\infty} a_p z^{p-n}}_{\text{tend vers 0 quand } z \text{ tend vers 0 par continuité de cette série entière}}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_p z^p + o(z^n)$$

La réciproque est fausse en général. Il ne suffit pas d'avoir un développement limité à tout ordre pour conclure que f est développable en série entière. C'est ce que nous allons voir dans les paragraphes qui suivent.

2– Dérivée et primitive

PROPOSITION

Les séries $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$, *dites respectivement séries dérivées et séries primitives de* $\sum a_n z^n$, *ont même rayon de convergence que celle–ci.*

Démonstration :

❑ Soit R le rayon de convergence de la série initiale, R_d celui de la série dérivée et R_p celui de la série primitive. Soit z tel que $|z| < R$. Montrons que la série dérivée converge pour ce z. Prenons r tel que $|z| < r < R$. La série de terme général $a_n r^n$ est absolument convergente et l'on a :

$$|na_n z^{n-1}| \leq n \left| \frac{z^{n-1}}{r^{n-1}} \right| |a_n r^n| \frac{1}{r}$$

or $\lim_{n\to+\infty} n \left| \frac{z^{n-1}}{r^{n-1}} \right| = 0$ donc il existe une constante M majorant les $\frac{n}{r} \left| \frac{z^{n-1}}{r^{n-1}} \right|$. Le terme général de la série dérivée est alors majoré par $M|a_n r^n|$. La série dérivée est donc absolument convergente sur $D_o(R)$. Donc $R_d \geq R$.

Soit maintenant z tel que $|z| < R_d$. Montrons que la série initiale converge.

$$|a_n z^n| \leq |na_n z^{n-1}|\,|z|$$

La série de terme général $na_n z^{n-1}$ étant absolument convergente, il en est de même de la série de terme général $a_n z^n$. Donc $R \geq R_d$.

La conclusion des deux étapes est $R = R_d$

❑ La série $\sum a_n z^n$ étant la série dérivée de la série $\sum \frac{a_n\, z^{n+1}}{n+1}$, on en déduit que $R_p = R$.

PROPOSITION

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *la somme d'une série entière de rayon de convergence* R *non nul. Alors, pour tout x de l'intervalle ouvert*]–R, R[, *f est dérivable et sa derivée est définie par* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^{n-1}$. *f admet une primitive sur* $D_0(R)$, *la primitive s'annulant en* 0 *étant définie par* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, x^{n+1}}{n+1}$.

Démonstration :

On se place en x tel que $|x| < R$, et l'on choisit là aussi un r tel que $|x| < r$. Il y a convergence normale sur $]-r, r[$ de la série dérivée. On peut donc appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries.

On en tire le corollaire suivant : une série entière est indéfiniment dérivable sur]–R, R[. Par récurrence, on a:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n\, x^{n-k}$$

On en déduit que :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Ainsi, les coefficients de la série entière sont définis de manière unique par f. Par conséquent, deux séries entières de rayon de convergence non nul sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux. Une série entière de rayon de convergence non nul est nulle si et seulement si ses coefficients sont nuls.

Réciproquement, il ne suffit pas qu'une fonction soit indéfiniment dérivable pour être développable en série entière. On a seulement les implications, les réciproques étant fausses :

f développable en série entière $\Rightarrow f$ indéfiniment dérivable $\Rightarrow f$ admet un développement limité à tout ordre en 0

3– Somme de séries entières

PROPOSITION

Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectivement* R_1 *et* R_2. *Alors* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *est une série entière égale à la somme des deux séries initiales, et de rayon de convergence* R *égal au minimum de* R_1 *et* R_2 *si* $R_1 \neq R_2$, *et supérieur ou égal au minimum de* R_1 *et* R_2 *si* $R_1 = R_2$.

Démonstration :

Si z est tel que $|z| < \text{Min}(R_1,R_2)$, alors chaque série converge, de même que leur somme. Ce qui prouve que $R \geq \text{Min}(R_1,R_2)$. Si $R_1 < R_2$, par exemple, soit z tel que $R_1 < |z| < R_2$. Alors l'une des séries converge et l'autre diverge, donc la somme diverge, ce qui prouve qu'on ne peut avoir $R > R_1$. Donc $R = R_1$.

Dans le cas où $R_1 = R_2$, les termes des deux séries peuvent se compenser pour faire converger la somme au delà de la valeur commune du rayon. On peut donc avoir $R > \text{Min}(R_1,R_2)$. Prendre par exemple :

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ de rayon nul et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -n!\, z^n$ de rayon nul. Alors $(f + g)(z) = 0$ avec un rayon de convergence infini.

4– Produit de séries entières

PROPOSITION

Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectivement* R_1 *et* R_2. *Alors* $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p})\, z^n$ *est la somme d'une série entière égale au produit de* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *par* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, *et de rayon de convergence* R *supérieur ou égal au minimum de* R_1 *et* R_2.

Démonstration :

Si z est tel que $|z| < \text{Min}(R_1,R_2)$, alors chaque série converge absolument, de même que leur produit de Cauchy. Ce qui prouve que $R \geq \text{Min}(R_1,R_2)$. Rappelons en effet que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p})$$

$u_n = a_n z^n$ et $v_n = b_n z^n$ conduisent à la formule annoncée.

Même si les rayons sont différents, R peut ne pas être égal au minimum des deux. Il n'y a pas de règle particulière. Prendre par exemple $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ avec $R_1 = 1$ et $g(z) = 1 - z$ avec $R_2 = +\infty$. Le produit vaut $fg(z) = 1$ avec $R = +\infty$.

III : Développement en séries entières

1– Définition

Une fonction f d'une variable complexe est dite développable en série entière s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon R strictement positif, tel que :

$$\forall z \in D_o(R), \text{ on a : } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Une fonction f d'une variable réelle est dite développable en série entière s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de *rayon R strictement positif, tel que :*

$$\forall x \in \,]-R, R[, \text{ on a : } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Les développements en séries entières généralisent par des séries ce que les développements limités procurent par des polynômes. Une condition **nécessaire** pour que f soit développable en série entière est que f soit indéfiniment dérivable. Et dans ce cas :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Inversement, soit f indéfiniment dérivable. f est–elle développable en série entière ? Pour une fonction définie sur $]-R, R[$, on est amené à considérer la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Cette série est dite série de Taylor associée à f.

Plusieurs cas peuvent se produire :

a) La série est convergente et converge vers $f(x)$. f est alors développable en série entière.

b) La série est convergente, mais ne converge pas vers $f(x)$. f n'est pas développable en série entière. Voici un exemple[1] datant de 1823 :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \exp(-\frac{1}{x^2})$ pour x non nul

$0 \to 0$

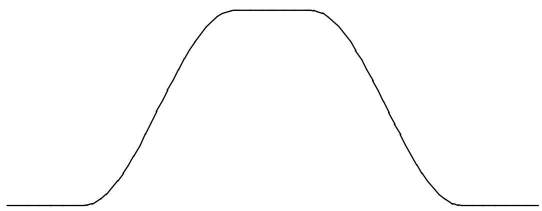
[1] A. L. Cauchy, *Résumés des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Imprimerie Royale, Paris 1823.

On montre par récurrence que, pour x non nul, $f^{(n)}(x) = Q_n(x)\exp(-\frac{1}{x^2})$ où Q_n est une fraction rationnelle en x. Montrons que, pour tout n, $f^{(n)}(0) = 0$. C'est vrai pour $n = 0$. Si c'est vrai au rang $n-1$, alors $f^{(n)}(0)$ est égal à la limite en 0 de $\frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \frac{Q_n(x)}{x}\exp(-\frac{1}{x^2})$. Cette limite est nulle.

La série de Taylor associée à f est donc identiquement nulle. Or, en dehors de 0, f est strictement positive. Ainsi, la série de Taylor est convergente, mais ne converge pas vers f.

c) La série de Taylor est divergente. f n'est pas développable en série entière. Un premier exemple[2] est donné en 1876. Un exemple explicite est donné en annexe, mais il existe bien d'autres exemples. Peano[3] en 1884 et Borel[4] en 1895 ont démontré que, si on se donne une suite réelle ou complexe (a_n) ***quelconque***, il existe une fonction C^∞ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$. Bien entendu, la série $\sum a_nx^n$ n'a alors aucune raison de converger. Par exemple, il existe une fonction C^∞ telle que $a_n = n!$, de sorte que la série de Taylor de cette fonction $\sum n!x^n$ diverge en tout x autre que 0.

Pour définir une telle fonction dans le cas où la série $\sum a_nx^n$ diverge, on remplace a_nx^n par $a_nx^nh_n(x)$ où h_n est une fonction C^∞ de la forme suivante :



nulle en dehors d'un intervalle $[-\alpha_n, \alpha_n]$, égale à 1 sur un intervalle $[-\beta_n, \beta_n]$ avec $-\alpha_n < -\beta_n < 0 < \beta_n < \alpha_n$. Le plateau égal à 1 sur $[-\beta_n, \beta_n]$ permet d'affirmer que toutes les dérivées de $a_nx^nh_n(x)$ en 0 sont identiques à celles de a_nx^n ; en particulier, elles sont toutes nulles, sauf la dérivée n-ème qui vaudra $a_nn!$. Le fait que h_n soit nulle en dehors de $[-\alpha_n, \alpha_n]$ permet de limiter la divergence de la série. Plus précisément, on peut choisir α_n et β_n de façon que la série $\sum a_nx^nh_n(x)$ converge normalement, ainsi que toutes les séries dérivées. La fonction obtenue est alors C^∞ et sa dérivée n-ème en 0 a pour valeur $a_nn!$ de sorte que la série de Taylor de la fonction est bien $\sum a_nx^n$, qui rappelons-le a toutes les possibilités de diverger[5].

Les problèmes du type b) ou c) se rencontrent uniquement pour des fonctions de variable réelle. Pour ces fonctions, il existe parfois un moyen d'étude possible, la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\frac{f''(0)}{2} + \ldots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,dt$$

---

2 P. du Bois-Rémond, *Über den Gültigkeitsbereich der Taylor'shen Reihenentwickelung*, Sitzungsb. k. Bayer. Akad. Wiss., math.-phys. Klasse (1876) 225-237, ou bien Math. Ann. 21 (1883) 107-119.

3 A. Genocchi, G. Peano, *Calculo differenziale e principi di calcolo integrale*, Fratelli Bocca, Roma, 1884, §67, https://archive.org/stream/calculodifferen00peangoog#page/n26/mode/2up

4 É. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. Sci. l'École Norm. Sup. 12 (1895) 9-55.

5 Le lecteur qui souhaitera plus de détails consultera par exemple R. Godement, *Analyse Mathématique*, Springer (1998, 2003) ou Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP (2010), p.99 ou le sujet de concours Centrale 2011 PC, 1ère épreuve de mathématiques.

qui conduit, en majorant l'intégrale, à l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(x) - f(0) - xf'(0) - x^2 \frac{f''(0)}{2} - \ldots - x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \le \frac{M_n \left| x^{n+1} \right|}{(n+1)!}$$

où M_n majore $\left| f^{(n)} \right|$. On prend la limite lorsque n tend vers $+\infty$. Si le majorant tend vers 0, alors la série de Taylor convergera vers f. Des exemples d'utilisation de cette méthode sont donnés dans le paragraphe suivant.

Sinon, on peut conclure qu'une fonction f est développable en série entière si elle obtenue comme somme, produit, dérivée ou primitive de fonctions dont on sait qu'elles sont elles-mêmes développables en série entière. Pour cela, il faut disposer d'un certain nombre de fonctions usuelles pour lesquelles on dispose du développement en série entière.

2– Développements usuels

Voici les développements des fonctions usuelles en séries entières :

Fonctions de type exponentiel

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad \text{(i)}$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad \text{(ii)}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad \text{(iii)}$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad \text{(iv)}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad \text{(v)}$$

Fonctions de type géométrique

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{sur } D_o(1) \qquad \text{(vi)}$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \quad \text{sur } D_o(1) \qquad \text{(vii)}$$

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=p-1}^{\infty} \binom{n}{p-1} z^{n-p+1} \quad \text{sur } D_o(1) \qquad \text{(viii)}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{sur }]-1,1[\qquad \text{(ix)}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{sur }]-1,1[\qquad \text{(x)}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{sur }]-1,1[\qquad \text{(xi)}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{sur }]-1,1[\qquad \text{(xii)}$$

où $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$

Démonstration :

❑ (i) : Sur tout intervalle $]-a, a[$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de l'exponentielle est majorée par M = $\exp(a)$, indépendamment de n et de x. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ pour tout x de $]-a, a[$. a étant quelconque, cette égalité est vraie pour tout x. Nous verrons plus bas que le développement en série entière de l'exponentielle est valide pour tout z complexe.

On ne peut manquer de signaler le rapprochement entre les deux expressions $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ et $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{x}{n})^n$ (cette dernière égalité pouvant être prouvée en écrivant que $(1 + \dfrac{x}{n})^n = \exp(n\ln(1 + \dfrac{x}{2n}))$. Ce rapprochement provient d'une démarche effectuée par Euler en 1728 précisément pour déterminer une valeur numérique du nombre qui ne s'appelle pas encore e. Il procède de la façon suivante, en respectant le vocabulaire de l'époque. Il prend un entier n infiniment grand (sic), de façon que e^x soit infiniment proche de $(1 + \dfrac{x}{n})^n$ puis effectue un développement selon la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(1 + \frac{x}{n})^n &= 1 + n\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\frac{x^4}{n^4} + ... \\ &= 1 + x + \frac{1-i}{2}x^2 + \frac{(1-i)(1-2i)}{3!}x^3 + \frac{(1-i)(1-2i)(1-3i)}{4!}x^4 + ...\end{aligned}$$

avec $i = \dfrac{1}{n}$ infiniment petit, "de sorte que" $\dfrac{1-i}{2}$ est infiniment proche de $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{(1-i)(1-2i)}{3!}$ de $\dfrac{1}{3!}$, $\dfrac{(1-i)(1-2i)(1-3i)}{4!}$ de $\dfrac{1}{4!}$, etc... et finalement $(1 + \dfrac{x}{n})^n$ est infiniment proche de $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + ...$ On ne peut aujourd'hui plus appliquer aussi simplement la méthode d'Euler en raison de l'éclaircissement nécessaire à apporter aux points de suspension, difficulté passée sous silence par Euler.

❑ (ii) et (iv) : sh(x) et ch(x) sont les parties paires et impaires de l'exponentielle.

❑ (iii) et (v) : sin(x) et cos(x) ont leur dérivées $n^{\text{ème}}$ majorées par 1 sur $\mathbb{R}$, indépendamment de n et x. Comme pour l'exponentielle, l'inégalité de Taylor-Lagrange permet de conclure.

❑ (vi) : $1 + z + z^2 + ... + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$. Le membre de droite admet une limite, $\dfrac{1}{1 - z}$, si et seulement si $|z| < 1$.

❑ (vii) s'obtient en dérivant la formule (iv). Nous admettrons qu'il est possible de dériver par rapport à la variable complexe z comme on le fait pour une variable réelle.

❑ (viii) s'obtient par récurrence, en dérivant successivement les formules (vi), (vii),... Elle est vraie pour p=1 et p=2. Si elle est vraie pour p, alors, en dérivant, on obtient :

$$\frac{p}{(1 - z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p-1} (n - p + 1)\, z^{n-p}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{(1 - z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p-1} \frac{n - p + 1}{p}\, z^{n-p}$$

$$= \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p}\, z^{n-p}$$

❑ (x) s'obtient en intégrant (vi) pour x réel et (ix) en changeant x en $-x$. On remarquera en outre que, pour x élément de [0,1] (y compris en 1), la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ est alternée. La différence entre la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k}$ et la somme totale est donc majorée par le premier terme négligé. On a ainsi :

$$\forall\, x \in [0,1], \left| \ln(1 + x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n + 1} \leq \frac{1}{n + 1}$$

$$\Rightarrow \qquad \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} \left| \ln(1 + x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n + 1}$$

On a donc ici un exemple de série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ qui converge uniformément vers ln(1 + x) sur [0,1], alors qu'elle ne converge pas normalement (puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \| (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} \|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge). Convergeant uniformément vers [0,1], la série est continue sur [0,1] et l'on a donc l'égalité avec ln(1 + x) sur [0,1] et pas seulement sur [0,1[. En particulier, pour x = 1, on a :

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

❑ (xi) s'obtient en intégrant (vi) pour $z = x^2$, réel. Comme pour $\ln(1 + x)$, la formule $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est valable y compris en 1, de sorte que :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(formule découverte par Madhava, mathématicien indien de la région de Kerala vers 1400, puis indépendamment, par Gregory et Leibniz au XVIIème).

❑ (xii) Cette série s'appelle série du binôme de Newton. Nous en donnons quatre démonstrations. La première utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange, la deuxième montre comment utiliser une série entière pour résoudre une équation différentielle, la troisième montre réciproquement comment utiliser une équation différentielle pour trouver la somme d'une série entière, la quatrième est une démonstration historique due à Cauchy.

<u>Démonstration 1</u>

a) Montrons que la série converge pour $|x| < 1$. Le critère de D'Alembert donne :

$$\left| \frac{\begin{pmatrix} \alpha \\ n+1 \end{pmatrix} x}{\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix}} \right| = \left| \frac{x\,(\alpha - n)}{n+1} \right|$$ qui tend vers $|x|$ quand n tend vers ∞.

b) La formule de Taylor avec reste intégral conduit à :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (1+t)^{\alpha-(n+1)} (x-t)^n \,\mathrm{d}t$$

c) Soit x tel que $|x| < 1$, il suffit maintenant de montrer que le reste intégral tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On obtiendra alors la série du binôme de Newton. Ce reste, en valeur absolue, peut s'écrire :

$$\left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (1+t)^{\alpha-1} \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \mathrm{d}t \right| = \mathrm{R}_n(x)$$

La fonction $t \to \frac{x-t}{1+t}$ est une fonction homographique monotone, variant de 0 à x lorsque t varie de 0 à x. Elle est donc majorée par $|x|$.

D'où : $R_n(x) \leq \left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}\right| \left|\displaystyle\int_0^x (1+t)^{\alpha-1} |x|^n \, dt\right|$ (on a gardé la valeur absolue autour de l'intégrale dans le cas où $x < 0$)

$$\leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}\right| |x|^n \frac{1}{|\alpha|} \left|(1+x)^\alpha - 1\right|$$

Or $\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}\right| |x|^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, car c'est le terme général d'une série convergente, comme on le vérifiera facilement en utilisant le critère de D'Alembert.

<u>Démonstration 2</u>

Considérons la fonction $y(x) = (1+x)^\alpha$. On a alors $y' = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \dfrac{\alpha y}{1+x}$ et $y(0) = 1$. Réciproquement, si on considère l'équation différentielle $y' = \dfrac{\alpha y}{1+x}$ sur $]-1, \infty[$, on trouve comme solutions les fonctions $\lambda(1+x)^\alpha$. La constante λ est donnée par la valeur $y(0)$. De sorte que :

$$y = (1+x)^\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} y' = \dfrac{\alpha y}{1+x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Cherchons donc les séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ solutions de cette équation différentielle. La condition $y(0) = 1$ donne $a_0 = 1$. Ecrivons l'équation différentielle sous la forme $(1+x)y' = \alpha y$. On obtient :

$$(1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow \quad (n+1)\, a_{n+1} + n a_n = \alpha a_n$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$$

On vérifiera par récurrence que la suite (a_n) vérifiant ces conditions est précisément définie par $a_n = \dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$. Du fait de l'unicité de la solution, on a donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

<u>Démonstration 3</u>

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. On a, pour $n > 0$, $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} = \dfrac{\alpha-n+1}{n}\binom{\alpha}{n-1}$ ou encore :

$$n\binom{\alpha}{n} = (\alpha - n + 1)\binom{\alpha}{n-1}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = xg'(x) \text{ d'une part}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha - n + 1)\binom{\alpha}{n-1}x^n \text{ d'autre part}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - n)\binom{\alpha}{n}x^{n+1} \text{ en rebaptisant les indices } n-1 \to n$$

$$= \alpha\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n+1}$$

$$= \alpha xg(x) - x^2g'(x)$$

$\Rightarrow \qquad xg'(x) = \alpha xg(x) - x^2g'(x)$

$\Rightarrow \qquad g'(x) = \alpha g(x) - xg'(x)$ pour x non nul, mais les fonctions étant continues, la relation reste vraie en $x = 0$

$\Rightarrow \qquad g'(x)(1 + x) - \alpha g(x) = 0 \qquad\qquad (*)$

On peut alors résoudre l'équation différentielle en tenant compte du fait que $g(0) = 1$, ou bien encore considérer $h(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^\alpha}$. On a en effet :

$$h'(x) = \frac{g'(x)(1+x)^\alpha - \alpha g(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0 \text{ d'après la relation } (*)$$

Donc h est constante, égale à $h(0) = 1$, donc $g(x) = (1 + x)^\alpha$.

Démonstration 4

Cette dernière démonstration est plus compliquée que les précédentes, mais présente l'intérêt historique d'être due à Cauchy lui-même. Comme dans la démonstration 1, on montre que la série converge si $|x| < 1$. Posons maintenant $\varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, x étant provisoirement fixé entre –1 et 1.

Autrement dit, on considère la série comme fonction de α et non plus de x. φ est une fonction continue de α. En effet, si α varie dans un intervalle $[-a, a]$, alors :

$$\left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right| \leq \frac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!}|x|^n$$

avec $\dfrac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!}|x|^n$ terme général d'une série convergente (appliquer d'Alembert par exemple). $\varphi(\alpha)$ converge donc normalement sur $[-a, a]$ et est donc continue sur $[-a, a]$. a étant quelconque, φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Considérons maintenant deux nombres α et β et effectuons le produit de Cauchy de $\varphi(\alpha)$ par $\varphi(\beta)$ (les séries convergeant absolument) :

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = (\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n)\ (\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} x^n$$

Or $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$. En effet, cette égalité est vérifiée pour toute valeur entière de α et β (on dénombre de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments dans un ensemble à $\alpha + \beta$ éléments, en prenant k éléments dans la partie α, et $n - k$ dans la partie β). On a donc :

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}, \forall\ \beta \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

Or les deux membres de l'égalité sont des fonctions polynomiales de α. Ces deux fonctions polynômes étant égales pour toute valeur entière de α sont égales pour toute valeur réelle de α (deux polynômes qui coïncident sur tous les entiers positifs sont égaux. Pourquoi ?). On a donc :

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \forall\ \beta \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

On regarde maintenant les deux membres comme deux fonctions polynomiale de β. Etant égales pour toute valeur entière de β, elles sont égales pour toute valeur réelle. Ainsi :

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \forall\ \beta \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

Il en résulte que :

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{n} x^n = \varphi(\alpha + \beta)$$

Or cette relation fonctionnelle, avec φ continue, caractérise les applications de la forme $\alpha \to C^\alpha$, où C est la valeur de φ en 1. En effet, par récurrence, on a, pour tout α, $\varphi(n\alpha) = \varphi(\alpha)^n$ pour tout entier n strictement positif. Pour $\alpha = 1$, on obtient donc $\varphi(n) = C^n$, pour $\alpha = \frac{1}{n}$, on obtient $\varphi(1) = C = \varphi(\frac{1}{n})^n$ soit $\varphi(\frac{1}{n}) = C^{1/n}$. (On peut remarquer que $\varphi \geq 0$ puisque $\varphi(x) = \varphi(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \varphi(\frac{x}{2})^2$). Pour $\alpha = \frac{1}{m}$, on obtient $\varphi(\frac{n}{m}) = \varphi(\frac{1}{m})^n = C^{n/m}$, et par continuité de φ, $\varphi(\alpha) = C^\alpha$ pour tout $\alpha \geq 0$ en prenant α comme suite de rationnels (et donc $\varphi(0) = C^0 = 1$). Enfin, $\varphi(0) = \varphi\ (\alpha + (-\alpha)) = \varphi(\alpha)\varphi(-\alpha) \Rightarrow 1 = C^\alpha\ \varphi(-\alpha)$ entraîne que $\varphi(-\alpha) = C^{-\alpha}$, prouvant la validité de la formule $\varphi(\alpha) = C^\alpha$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. On a donc $\varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = C^\alpha$ avec $C = \varphi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1}{n} x^n = 1 + x$, tous les autres termes de la somme étant nuls. Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1 + x)^\alpha$$

EXEMPLE :

Soit $f(x) = \sin(x) \times \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$. Cette fonction est développable en série entière et le rayon de convergence est au moins égal à 1. On applique en effet les théorèmes sur les produits de séries entières en partant des trois fonctions $\sin x$, $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

A l'inverse, il n'est pas toujours possible d'exprimer une série entière à l'aide de fonctions usuelles. Ainsi en est-il de $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$. Sa série dérivée est $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{n-1}}{n}$ égal à $-\dfrac{\ln(1-z)}{z}$ pour z réel compris entre – 1 et 1, de sorte que la série initiale est $\int_0^z -\dfrac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ (fonction dilogarithme). Mais il n'existe pas de primitive de $-\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ sous forme de fonctions élémentaires. Les séries entières permettent donc de définir de nouvelles fonctions.

3– Exponentielle complexe

Toutes les fonctions décrites au III-2) par des séries entières sur $\mathbb{R}$, peuvent être étendues à $\mathbb{C}$. C'est en particulier le cas de l'exponentielle.

DEFINITION

On pose, pour z complexe $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

Cette série, ayant un rayon de convergence infini, est définie pour tout z complexe. A noter qu'en première année, on définit l'exponentielle complexe comme étant :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Nous allons donc montrer que les deux définitions coïncident. L'intérêt de définir l'exponentielle par une série entière permet d'unifier les deux exponentielles, réelle ou complexe, sous une définition unique. (A noter que le mathématicien Landau fut chassé de l'université de Göttingen par les nazis en 1934 sous prétexte d'avoir présenté l'exponentielle de cette façon à ses étudiants).

PROPOSITION

Pour tout z et z' complexes, on a : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Démonstration :

On a :

$$e^z e^{z'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{z^p\ z'^{n-p}}{p!(n-p)!} \qquad \text{(produit de Cauchy des deux séries)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{z^p z'^{n-p}}{n!}$$

On reconnaît un développement binômial.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + z')^n}{n!}$$

$$= e^{z+z'}$$

En particulier, si $z = x + iy$, avec x et y réels, on a $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ et :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \cos(y) + i\sin(y)$$

On peut également vérifier que la dérivée de l'exponentielle est bien l'exponentielle.

Annexe 1 : Exemple de série de Taylor divergente

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{2^n}$

❑ <u>Convergence</u> de f : $\left|\frac{\cos(n^2 x)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ donc la série f est normalement convergente. Elle est définie pour tout x.

❑ <u>Continuité</u> de f : la série étant normalement convergente et chaque terme étant continue, la somme est continue.

❑ <u>Dérivabilité</u> de f :

La série dérivée est $\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n^2 \sin(n^2 x)}{2^n}$ qui est elle-même normalement convergente. Elle est donc égale à la dérivée de f. Plus généralement :

$$f^{(2k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n^{4k} \cos(n^2 x)}{2^n}$$

et $$f^{(2k+1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{n^{4k+2} \sin(n^2 x)}{2^n}$$

les séries étant toujours normalement convergentes. On a donc :

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n^{4k}}{2^n} \text{ et } f^{(2k+1)}(0) = 0$$

Ainsi, f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

❑ Cependant, nous allons voir que sa série de Taylor associée est divergente. Le terme général de cette série est $\frac{f^{(k)}(0)\, x^k}{k!}$. On a :

$$\left|\frac{f^{(2k)}(0)\, x^{2k}}{(2k)!}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{4k}}{2^n}\right| \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}$$

$$\geq \frac{(2k)^{4k}}{2^{2k}} \cdot \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \text{ pour } n = 2k$$

$$\geq \frac{|x|^{2k}(2k)^{4k}}{2^{2k}.(2k)^{2k}} \text{ car } (2k)! < (2k)^{2k}$$

$$\geq |x|^{2k}k^{2k}.$$

Or le terme général tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. La série initiale n'est donc absolument convergente pour aucune valeur de x non nulle. Le rayon de convergence est nul.

Annexe 2 : Une formule sur π découverte en 1995

Le 19 décembre 1995, à 0h29, Simon Plouffe découvrit la formule suivante :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

Ce qui est remarquable, c'est que la preuve de cette formule est à la portée d'un élève de CPGE et qu'elle aurait pu être découverte depuis longtemps. Précisons également qu'elle permet de calculer un chiffre de π d'un rang donné en base 16 sans avoir à calculer les chiffres qui précèdent, chose qu'on ne sait pas faire en base 10. On connaît ainsi (en 2000) le 40 mille millardième chiffre binaire de π (un 0 suivi de 00001111100111111111001101110001110 1).

Il suffit de calculer la somme d'une série entière de la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \frac{x^{8n+p}}{8n+p}$, dont le rayon de convergence est $16^{1/8} > 1$. On prendra ensuite $x = 1$ et $p = 1, 4, 5$ ou 6. Or :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} x^{8n+p-1} = \frac{x^{p-1}}{1 - \frac{x^8}{16}} = \frac{16\, x^{p-1}}{16 - x^8}$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = \int_0^x \frac{16\, t^{p-1}}{16 - t^8}\, dt \quad \text{et } f(1) = \int_0^1 \frac{16\, t^{p-1}}{16 - t^8}\, dt$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) = 16 \int_0^1 \frac{4 - 2t^3 - t^4 - t^5}{16 - t^8}\, dt$$

avec $4 - 2t^3 - t^4 - t^5 = -(t-1)(t^2+2)(t^2+2t+2)$
et $16 - t^8 = -(t^2-2)(t^2+2)(t^2+2t+2)(t^2-2t+2)$

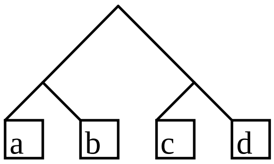
$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) = 16 \int_0^1 \frac{t-1}{(t^2-2)(t^2-2t+2)}\, dt$$

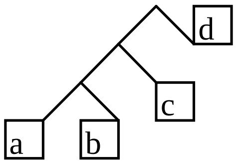
$$= 4 \int_0^1 \frac{t}{t^2-2} - \frac{t-2}{t^2-2t+2}\, dt$$

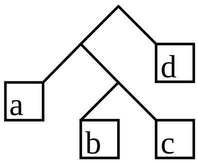
$$= 4\left[\frac{1}{2}\ln\left|t^2 - 2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2 - 2t - 2\right| + \arctan(t - 1)\right]_0^1$$
$$= \pi$$

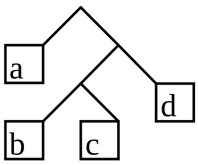
Annexe 3 : Les nombres Catalan

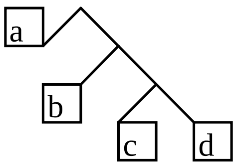
Le $n^{\text{ème}}$ nombre de Catalan dénombre les façons de parenthéser sans ambiguïté le produit non associatif de n termes (par exemple le produit vectoriel de n vecteurs) ou bien le nombre d'arbres binaires ayant n feuilles. L'identité entre parenthésage et arbre binaire est classique. Par exemple, pour $n = 4$, on associe à chaque parenthésage un arbre binaire :

(ab)(cd) est associé à 

((ab)c)d est associé à 

(a(bc))d est associé à 

a((bc)d) est associé à 

a(b(cd)) est associé à 

Si a_n est le $n^{\text{ème}}$ nombre de Catalan, on a $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, ... On dispose de la relation de récurrence :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \text{ pour } n \geq 2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad \text{si on pose } a_0 = 0$$

En effet, en partant de la racine, on crée un arbre à n feuilles en dessinant une branche à gauche suivie d'un arbre à k feuilles, et une branche à droite suivie d'un arbre à n–k feuilles. Posons alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. La relation de récurrence sur les a_n exprime que $f(x) = f(x)^2 + x$, d'où :

$f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$

En développant f en série entière, on trouve $a_n = \dfrac{\dbinom{2n}{n}}{2(2n-1)}$.

Annexe 4 : Convolution

Soit $a = (a_n)$ une suite. La série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ s'appelle fonction génératrice de la suite. Cette notion ne présente d'intérêt que si la série converge. (En cas de divergence, une variante consiste à utiliser la fonction génératrice exponentielle $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!}\, x^n$ qui a un rayon de convergence supérieur à la première série). Notons $\mathrm{T}(a)$ la fonction $x \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$. Si $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ sont deux suites, la suite obtenue par convolution de a par b est la suite $c = (c_n)$ avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.On note cette suite $c = a * b$. Le produit de deux séries entières donne le résultat remarquable suivant :

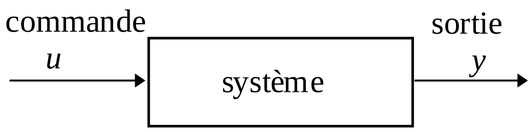
$$\mathrm{T}(a * b) = \mathrm{T}(a)\mathrm{T}(b)$$

Ainsi, la transformation T qui change une suite en une fonction, change également le produit de convolution en un produit normal.

La convolution intervient dans bien des domaines, et possède plusieurs définitions possibles.

- L'automatisme

Considérons un système dont la sortie y peut être modifiée par une commande u (ou entrée).



Par exemple, le système est une voiture, la commande est la pression exercée sur le frein, la sortie est la vitesse du véhicule. Considérons une modélisation particulièrement simple où la valeur de la sortie y à un instant x donné dépend des valeurs données à la commande dans le temps qui a précédé x. Pour chaque $t \geq 0$, la valeur de $u(x - t)$, commande donnée à un moment ayant précédé x d'une durée t, aura une influence sur la valeur de $y(x)$. Cette influence est déterminée par un coefficient multiplicatif $h(t)$. On suppose le système linéaire de sorte que toutes les entrées vont s'ajouter pour déterminer la sortie. Il s'agit donc de faire la somme des $u(t - \tau)h(\tau)$. Cette somme peut faire intervenir un nombre fini d'instants (impulsions de Dirac à des moments donnés). Le plus souvent, on sera amené à effectuer une sommation sous forme d'intégrale.

$$y(x) = \int_0^{+\infty} u(x - t)h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} u(t)h(x - t)\,\mathrm{d}t$$

On peut rendre l'écriture plus symétrique, compte tenu du fait que $h(t)$ est nul pour $t < 0$ (pour des raisons de causalité, la sortie ne peut dépendre d'une commande ultérieure).

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-\infty} u(t)h(x-t)\,\mathrm{d}t$$

On a défini ci-dessus le produit de convolution de u par h, de sorte que :

$$y = u * h$$

u, h et y jouent ici le rôle des suites a, b, c. Le terme h peut être très général : une fonction, comme ci-dessus, mais aussi ce qu'on appelle une distribution, comme une distribution de Dirac, c'est à dire une impulsion ponctuelle en un instant donné. La distribution de Dirac δ_a est telle que la notation $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,\delta_a\,\mathrm{d}t$ est par définition égale à $u(a)$, et que $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)\,\delta_a\,\mathrm{d}t$ est donc égal à $u(x-a)$. Autrement dit, la sortie y à l'instant x est purement et simplement égale à la commande u à un moment ayant précédé x d'une durée a. On peut aussi faire une somme, voire une série d'impulsions de Dirac. Un peigne de Dirac, par exemple, de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ consiste définir une sortie comme somme d'impulsions d'une commande à des intervalles réguliers : $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u(x-n)$.

Il existe alors des transformations T modifiant le produit de convolution en un produit usuel. Voyons-en quelques-unes.

- <u>La transformée de Fourier</u>

Pour u intégrable sur $\mathbb{R}$, posons $\mathrm{T}(u)$ la fonction $x \to \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$. Si u est un signal de commande, $\mathrm{T}(u)$ peut s'interpréter comme la part que prend une onde de pulsation x dans le signal u. Il s'agit en fait de densité d'onde, mais peu importe. On montre alors que $\mathrm{T}(u * h) = \mathrm{T}(u)\mathrm{T}(h)$. Cette formule s'interprète de la façon suivante : l'amplitude de l'onde de pulsation x dans le signal de sortie $y = u * h$ est égal au produit de l'amplitude de cette onde dans le signal de commande, multiplié par l'amplitude de la même onde dans le facteur h.

Dans le cas où h est une distribution de Dirac δ_a par exemple, on a :

$$y(x) = (u * \delta_a)(x) = u(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{T}(y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-a)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} u(v)\,e^{-ix(v+a)}\,\mathrm{d}t = u^{-iax}\int_{-\infty}^{\infty} u(v)\,e^{-ixv}\,\mathrm{d}v$$

$$= u^{-iax}\,\mathrm{T}(u)(x) = (\mathrm{T}(u)\mathrm{T}(\delta_a))(x) \text{ puisque } \mathrm{T}(\delta_a)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = e^{-iax}.$$

Plus généralement :

$$\mathrm{T}(y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{-\infty} u(v)h(t-v)\,\mathrm{d}v\right)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{-\infty} u(v)h(t-v)e^{-ixt}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(v)e^{-ivx}\,h(t-v)e^{-ix(t-v)}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-v)e^{-ix(t-v)}\mathrm{d}t \right) u(v)e^{-ivx}\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(w)e^{-ixw}\mathrm{d}w \right) u(v)e^{-ivx}\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{T}(h)(x)\, u(v)e^{-ivx}\mathrm{d}v = \mathrm{T}(h)(x)\int_{-\infty}^{\infty} u(v)e^{-ivx}\mathrm{d}v = \mathrm{T}(h)(x)\ \mathrm{T}(u)(x)$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{T}(y) = \mathrm{T}(h)\mathrm{T}(u)$.

- Les séries de Fourier

Pour f 2π-périodique, on définit les coefficients de Fourier $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$. Posons $\mathrm{T}(f) = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On peut considérer ces coefficients comme une version discrète de la transformée de Fourier. $c_n(f)$ correspond à l'amplitude de l'onde e^{inx} dans le signal f. Par une démonstration comparable à la précédente, on montre que $\mathrm{T}(u * h) = \mathrm{T}(u)\mathrm{T}(h)$, avec ici :

$$(u * h)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)h(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

- La transformée de Laplace

Une autre transformation possible est la transformation de Laplace, où $\mathrm{T}(u)$ est la fonction $z \to \displaystyle\int_{0}^{\infty} u(t)\, e^{-zu}\,\mathrm{d}u$, où z est un réel strictement (ou complexe à partie réelle positive). On pourrait noter $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-zu}\,\mathrm{d}u$ en considérant que l'instant 0 est l'instant où le système démarre et que toutes les fonctions (commande, sortie) étaient nulles avant 0. Si z était imaginaire pur, on retrouverait la transformée de Fourier, mais la transformée de Laplace peut s'appliquer à des fonctions non intégrables pour laquelle la transformation de Fourier n'est pas définie. On montre là aussi que $\mathrm{T}(u * h) = \mathrm{T}(u)\mathrm{T}(h)$, avec ici $(u * h)(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} u(t)h(x-t)\,\mathrm{d}t$ compte tenu du fait que les fonctions sont nulles pour une variable négative. Le quotient $\mathrm{T}(h) = \dfrac{\mathrm{T}(y)}{\mathrm{T}(u)}$ s'appelle ici fonction de transfert. On note alors $\mathrm{Y} = \mathrm{T}(y)$, $\mathrm{U} = \mathrm{T}(u)$ et $\mathrm{H} = \mathrm{T}(h)$, d'où $\mathrm{H}(z) = \dfrac{\mathrm{Y}(z)}{\mathrm{U}(z)}$ sous une forme plus usuelle.

L'intérêt de cette transformation est donc de permettre un calcul extrêmement rapide de Y à partir de U et H, ou un calcul rapide de H à partir de Y et U par simple produit ou quotient. Des tables permettent alors de remonter aux fonctions y ou h initiales, et par exemple de déterminer h connaissant y et u, ce qui serait extrêmement difficile directement.

De même, dans l'annexe 3 avions-nous à trouver une suite $a = (a_n)$ vérifiant :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad \text{et } \forall\, n \geq 2,\ a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

soit $a = a * a + u$, où u est la suite (0,1,0,0,0,...). L'application de la transformation T conduit à l'équation du second degré $\mathrm{T}(a) = \mathrm{T}(a)^2 + \mathrm{T}(u)$ et c'est bien ainsi d'ailleurs que nous avons déterminé la suite a.

Les analogies rencontrées sont donc les suivantes :

	Objets	Convolution	Transformation
Série entière	suite $a = (a_n)$	$(a * b)(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$	$T(a)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
Transformée de Fourier	fonction f sur $\mathbb{R}$	$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\mathrm{d}t$	$T(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-itx}\, \mathrm{d}t$
Série de Fourier	fonction f 2π-périodique	$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(x-t)\mathrm{d}t$	$T(f)(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, \mathrm{d}t$
Transformée de Laplace	fonction f sur $\mathbb{R}^+$	$(f * g)(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, g(x-t)\mathrm{d}t$	$T(f)(z) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-zt}\, \mathrm{d}t$

avec, dans chaque cas, $T(f * g) = T(f)T(g)$

◆