SÉRIES ET INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

PLAN

I : Compléments sur les séries
- 1) Rappels de première année
- 2) Règle de D'Alembert
- 3) Série produit
- 4) Séries alternées

II : Intégrales généralisées
- 1) Définition et exemples
- 2) Cas des fonctions positives
- 3) Fonctions de référence
- 4) Comparaison série-intégrale
- 5) Cas des fonctions de signe quelconque

Annexe I : Calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Annexe II : Absolue convergence, semi-convergence
Annexe III : La transformée de Laplace

Dans ce chapitre, on introduit les intégrales généralisées (ou impropres). On notera que leur propriétés sont très proches de celles des séries, vues en première année. On effectue donc un rappel sur ces dernières, avec quelques compléments.

I : Compléments sur les séries

1– Rappels de première année

On appelle série $(\sum x_n)$ de terme général x_n, réel ou complexe, la suite de terme général $S_n = x_0 + ... + x_n$, appelée somme partielle. La série converge si la suite des sommes partielles converge. La limite S s'appelle somme de la série. On la note $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. La quantité $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_n$ s'appelle reste de la série.

EXEMPLES :

- Série géométrique : pour $|z| < 1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Il s'agit d'une série géométrique.
- Série exponentielle : pour tout x réel, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- Série harmonique $\sum \frac{1}{n}$. Elle diverge
- Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

On connaît un certain nombre de conditions suffisantes de convergence ou de divergence :

PROPOSITION (Séries à termes de signe constant)

i) *Si* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *sont des séries de* ***signe constant****, et si* $u_n \sim v_n$ *au voisinage de* $+\infty$*, alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont simultanément convergentes ou divergentes (on dit que les deux séries sont de même nature).*

ii) *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *deux séries à termes positifs.*

Si, pour tout n, $u_n \le v_n$*, ou plus généralement, si* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ *et si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge.*

Si pour tout n, $u_n \ge v_n$ *et si* $\sum v_n$ *diverge, alors* $\sum u_n$ *diverge*

Une série $(\sum u_n)$ est dite absolument convergente si $(\sum |u_n|)$ converge.

PROPOSITION (Séries absolument convergente)

Une série absolument convergente est convergente.

2– Règle de D'Alembert

Voici un critère de convergence, particulièrement adapté pour les séries dont les termes utilisent des puissances ou des factorielles.

PROPOSITION

Soit $(\sum u_n)$ *une série à termes non nuls. Alors :*

(i) *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1$*, la série est absolument convergente.*

(ii) *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l > 1$*, la série est diverge.*

Dans tous les autres cas, on ne sait pas conclure. On notera que les cas où l'on ne sait pas conclure sont fréquents, puisqu'il y figure toutes les séries de Riemann, convergentes ou divergentes.

<u>Démonstration</u> :

(i) Soit q compris entre l et 1. Il existe N tel que, pour $n \ge \mathrm{N}$, on ait :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \le q$$

donc $|u_n| \le |u_\mathrm{N}|\, q^{n-\mathrm{N}}$ et $|u_n| = \mathrm{O}(q^n)$. Le terme général de la série $(\sum |u_n|)$ se trouve majorée par le terme général d'une série géométrique de raison q inférieure à 1, qui est convergente. La série $(\sum |u_n|)$ est donc elle–même convergente.

(ii) Soit q compris entre 1 et l. Il existe N tel que, pour $n \ge \mathrm{N}$, on ait :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \ge q$$

et donc ici, on a $|u_n| \geq |u_N|\, q^{n-N}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$, il en est de même de $|u_n|$ et la série diverge.

EXEMPLE : reprenons la série de l'exponentielle, mais appliquée aux complexes. $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$. Alors :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \text{ qui, pour tout } z \text{, tend vers 0.}$$

La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ est donc convergente pour tout z. On appelle exponentielle complexe la somme de cette série.

3- Série produit

Soit $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries. On appelle série produit (ou produit de Cauchy) la série $(\sum w_n)$ de terme général :

$$w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_kv_{n-k} + \ldots + u_nv_0 = \sum_{k=0}^{n} u_kv_{n-k}$$

PROPOSITION :
Si les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ *sont absolument convergentes, il en est de même de la série* $(\sum w_n)$ *et l'on a* :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

Démonstration non exigible
Démonstration :
❑ Si les séries sont à termes positifs, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} w_n \leq \sum_{n=0}^{N} u_n \times \sum_{n=0}^{N} v_n$$

En effet, $\sum\limits_{n=0}^{N} w_n$ est la somme des u_iv_j, où (i,j) parcourt le triangle T défini par :

$$T = \{(i, j), 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N, i + j \leq N\}$$

alors que $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n \times \sum\limits_{n=0}^{N} v_n$ est la somme des u_iv_j, (i, j) parcourant le carré $C = [0,N] \times [0,N]$. Comme $T \subset C$ et qu'on somme des termes positifs ou nuls, le second membre est bien supérieur ou égal au premier. Par ailleurs, tous les termes des séries étant positifs ou nuls, les sommes partielles sont croissantes, donc $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n \times \sum\limits_{n=0}^{N} v_n \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$. La suite des sommes partielles $(\sum\limits_{n=0}^{N} w_n)$ est donc croissante et majorée par $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$, donc converge.

On obtient l'égalité demandée en remarquant que, pour tout N :

$$\sum_{n=0}^{N} w_n \leq \sum_{n=0}^{N} u_n \times \sum_{n=0}^{N} v_n \leq \sum_{n=0}^{2N} w_n$$

En effet, le carré C est inclus dans le triangle $\{(i, j),\ 0 \leq i \leq 2N,\ 0 \leq j \leq 2N,\ i + j \leq 2N\}$ qui est parcouru par les indices des produits u_iv_j de la somme $\sum_{n=0}^{2N} w_n$. Il suffit alors de passer à la limite.

❑ Si $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont absolument convergentes, alors, la série $(\sum z_n)$ définie comme série–produit de $(\sum |u_n|)$ et $(\sum |v_n|)$ converge, avec $z_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}|$.

Comme $|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_kv_{n-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}| = z_n$, la série $(\sum w_n)$ est absolument convergente. Il reste à montrer que sa somme est le produit des sommes des deux séries. On a en effet :

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n \times \sum_{n=0}^{N} v_n - \sum_{n=0}^{N} w_n\right| = \left|\sum_{(p,q)\in E} u_pv_q\right|$$

où $E = \{(p,q) \mid p+q > N,\ p \leq N,\ q \leq N\} = C - T$. La somme est majorée par :

$$\sum_{(p,q)\in E} |u_pv_q| = \sum_{n=0}^{N} |u_n| \times \sum_{n=0}^{N} |v_n| - \sum_{n=0}^{N} z_n$$

et cette dernière expression tend vers 0 quand N tend vers l'infini en vertu du résultat précédent sur les séries-produit à termes positifs.

Les résultats suivants sont donnés à titre purement indicatif (et on ne doit pas chercher à les retenir ou les utiliser) pour montrer que la situation est moins triviale qu'il ne paraît :

- Il suffit que l'une des séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ soit absolument convergente et l'autre convergente pour que la série produit $\sum w_n$ soit bien égale au produit des deux séries.
- Si les deux séries sont convergentes, mais qu'aucune n'est absolument convergente, il se peut que $(\sum w_n)$ diverge. Prenons par exemple $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ dont nous montrerons tout à l'heure la convergence, pour $n \geq 1$. La série-produit a pour terme général $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{p(n-p)}}$. Or $p(n-p)$ est majoré par $\dfrac{n^2}{4}$, donc sa racine est majorée par $\dfrac{n}{2}$. On a donc $|w_n|$ qui est minoré par $\dfrac{2(n-1)}{n}$ et qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la série produit diverge.
- Si $\sum u_n$ converge, on peut montrer qu'il existe une série $\sum v_n$ convergente telle que $\sum w_n$ diverge.
- Si les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, la série produit $\sum w_n$ est bien égale au produit des deux séries.
- Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $u_n = O(\frac{1}{n})$ et $v_n = O(\frac{1}{n})$, alors la série produit $\sum w_n$ soit bien égale au produit des deux séries.

5– Séries alternées

On dit que $(\sum u_n)$ est alternée si $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

PROPOSITION

Soit $(\sum u_n) = (\sum (-1)^n\, v_n)$ *une série alternée dont le terme général* v_n *est positif, décroît et tend vers* 0. *Alors la série converge. En outre, le reste* R_n *est majoré en valeur absolue par* $|u_{n+1}|$ *et est du signe de* u_{n+1}.

<u>Démonstration :</u>

On a, en notant $\mathrm{S}_n = u_0 + \ldots + u_n$ les sommes partielles de la série :

$$\mathrm{S}_{2n+2} - \mathrm{S}_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$$
$$\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n-1} = u_{2n+1} + u_{2n} = -v_{2n+1} + v_{2n} \geq 0$$

Donc la suite (S_{2n}) est décroissante. La suite (S_{2n+1}) est croissante, et $\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_{2n+1} = v_{2n+1}$ tend vers 0. Les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc adjacentes et possèdent une limite commune S, ce qui signifie que la suite complète (S_n) converge vers S. On a également, pour tout n :

$$\mathrm{S}_{2n-1} \leq \mathrm{S}_{2n+1} \leq \mathrm{S} \leq \mathrm{S}_{2n}$$

Donc $u_{2n+1} = \mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n} \leq \mathrm{S} - \mathrm{S}_{2n} \leq 0$ et comme $\mathrm{S} - \mathrm{S}_{2n} = \mathrm{R}_{2n}$, on a bien $u_{2n+1} \leq \mathrm{R}_{2n} \leq 0$

De même, $u_{2n} = \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_{2n-1} \geq \mathrm{S} - \mathrm{S}_{2n-1} \geq 0$, et comme $\mathrm{S} - \mathrm{S}_{2n-1} = \mathrm{R}_{2n-1}$, on a bien $u_{2n} \geq \mathrm{R}_{2n-1} \geq 0$

EXEMPLE 1 :

Il résulte de cette proposition que, pour tout α positif, la série $\left(\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge.

Considérons plus précisément le cas de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et posons L la valeur de cette somme de série. ££

A titre de curiosité, où est l'erreur dans le raisonnement suivant ? Nous avons :

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots$$

On permute les termes de façon à ce que, pour n impair, le terme $-\dfrac{1}{2n}$ soit placé derrière le terme $\dfrac{1}{n}$, et pour n pair, le terme $-\dfrac{1}{2n}$ soit placé devant le terme $\dfrac{1}{n+1}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\ln(2) &= \underbrace{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14}} \ldots - \frac{1}{4k} + \underbrace{\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2}} \ldots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} \ldots - \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k+2} \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \ldots - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} \ldots \right] \\
&= \frac{1}{2}\ln(2) \quad ???
\end{aligned}$$

EXEMPLE 2 :

Rappelons la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction de classe C^n.

$$f(b) = f(a) + (b-a)f\,'(a) + (b-a)^2\frac{f\,''(a)}{2} + \ldots + (b-a)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + \int_a^b (b-t)^{n-1}\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t$$

Prenons $f(x) = \ln(1 + x)$, $a = 0$, $b = 1$. On a $f\,'(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ et, par récurrence $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \dfrac{(k-1)!}{(1 + x)^k}$.

La formule donne donc :

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} + \int_0^1 (1-t)^{n-1}\,(-1)^{n-1} \frac{1}{(1+t)^n}\,dt$$

et l'intégrale est majorée en valeur absolue par $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,dt = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0. Donc :

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

EXEMPLE 3 :

On peut encore procéder comme suit :

Soit $\mathrm{I}_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$. On a $\mathrm{I}_0 = \ln(2)$ et on peut écrire I_n sous la forme :

$$\mathrm{I}_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n-1}(1+t) - t^{n-1}}{1+t}\,dt = (-1)^n \int_0^1 t^{n-1}\,dt + \mathrm{I}_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{I}_{n-1}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{I}_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} + \dots - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + \mathrm{I}_0 = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

En outre, on a $0 \leq |\mathrm{I}_n| \leq \displaystyle\int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 0, donc, en passant à la limite, on obtient :

$$0 = \ln(2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

EXEMPLE 4 :

La même méthode s'applique à :

$$\mathrm{I}_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n-2}(1+t^2) - t^{2n-2}}{1+t^2}\,dt = (-1)^n \int_0^1 t^{2n-2}\,dt + \mathrm{I}_{n-1} = \frac{(-1)^n}{2n-1} + \mathrm{I}_{n-1}$$

avec $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{I}_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-3} + \dots + \frac{1}{3} - 1 + \mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

En outre, on a $0 \leq |\mathrm{I}_n| \leq \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,dt = \frac{1}{2n+1}$ qui tend vers 0, donc, en passant à la limite, on obtient :

$$0 = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \text{ ou encore } \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

EXEMPLE 5 :

Plus généralement, la même méthode permet de montrer que, pour tout α strictement positif :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k\alpha + 1}$$

Il suffit de prendre $I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{\alpha n}}{1 + t^\alpha} \, dt$. On aura $I_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n - \alpha + 1} + I_{n-1}$.

EXEMPLE 6 :
Le programme ne prévoit que deux situations où l'on sait conclure sur la convergence de séries à termes quelconques : les séries absolument convergentes, et les séries alternées.
Il est cependant possible de conclure dans d'autres cas, mais c'est plus difficile. Nous nous bornerons à un exemple :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Pour $x \neq 0 \bmod \pi$, Posons $U_n = \sin(x) + ... + \sin(nx)$ de sorte que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k - U_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U_k}{k+1}$$

$$= \frac{U_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{U_k}{k} - \frac{U_k}{k+1} = \frac{U_n}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{U_k}{k(k+1)}$$

On a utilisé la méthode dite d'Abel consistant à faire une "sommation par parties", comparable à une intégration par parties. On remarque alors que, x étant fixé, (U_n) est une suite bornée. En effet :

$$U_n = \text{Im}\,(1 + e^{ix} + e^{2ix} + ... + e^{nix}) = \text{Im}\,\frac{1 - e^{(n+1)ix}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

donc $|U_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$. Donc, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{U_n}{n}$ tend vers 0. Par ailleurs, la série $\sum \frac{U_k}{k(k+1)}$ est absolument convergente. Donc la série $\sum \frac{\sin(kx)}{k}$ converge.

II : Intégrales généralisées ou impropres

1– Définition et exemples

Les fonctions sont définies sur des intervalles I ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non. On supposera les fonctions continues par morceaux.

Si I est un segment $[a, b]$, on appelle fonction continue par morceaux sur I une fonction f pour laquelle il existe un subdivision $a_0 = a < a_1 < ... < a_n = b$ telle que :

- sur tout intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, f est continue
- $\forall\, i \in [\![0, n-1]\!]$, $\lim\limits_{x \to a_k,\, x > a_k} f(x)$ existe et $\lim\limits_{x \to a_{k+1},\, x < a_{k+1}} f(x)$ existe

On peut alors définir $\int_a^b f(t)\, dt$ en la définissant comme $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\, dt$, où $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\, dt$ est elle-même calculée en intégrant la fonction continue qui prolonge f sur $[a_k, a_{k+1}]$. (On vérifie que cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie).

Si I est un intervalle ouvert ou semi-ouvert, on appelle fonction continue par morceaux sur I une fonction continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

DEFINITION

❑ *Si f est continue par morceaux sur* $[a, b[$*, on dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est généralisée (ou impropre). Elle est convergente si* $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *admet une limite quand x tend vers b, en restant dans* $[a, b[$. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *désigne alors la valeur de cette limite. L'intégrale est divergente s'il n'y a pas de limite*.

Ci-dessus, b est éventuellement infini. Dans le cas d'un intervalle du type $]a, b]$, (a éventuellement infini), on définira :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ si cette limite existe}$$

et dans le cas d'un intervalle du type $]a, b[$, on posera :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{(x,y) \to (a,b)} \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to a} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{y \to b} \int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t \text{ si chacune des deux}$$

limites existe. c est un point quelconque de $]a, b[$.

La convergence des intégrales est souvent plus facile à traiter que celles des séries car on dispose parfois de primitives :

EXEMPLE 1 :

Soit $a > 0$

$$\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} [-e^{-t}]_0^x \text{ ce qu'on note parfois } [-e^{-t}]_0^{+\infty}$$

$$= 1$$

EXEMPLE 2 :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} [2\sqrt{t}]_x^1 = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2$$

EXEMPLE 3 :

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} [\ln t]_x^1 = \text{diverge}$$

mais nous verrons ci-après des critères de convergence rapides à mettre en oeuvre.

Par passage à la limite des bornes de l'intégrale, on montre facilement que les propriétés usuelles de l'intégrale sur un segment sont vérifiées par les intégrales impropres (linéarité, relation de Chasles, changement de variables). On prendra garde cependant que, pour l'intégration par parties pour laquelle l'intégrale $\int_{\mathrm{I}} uv'$ est transformée en la somme $[uv]_{\mathrm{I}} - \int_{\mathrm{I}} u'v$, l'intégrale initiale peut être convergente, alors que, séparément $[uv]_{\mathrm{I}}$ et $\int_{\mathrm{I}} u'v$ peuvent diverger. Il convient dans ce cas d'intégrer par parties sur des segments J inclus dans I et de ne passer à la limite qu'à la fin du calcul.

2– Cas des fonctions positives

Pour les fonctions, les théorèmes sont énoncés par exemple dans le cas où I = [a, b[. Le lecteur adaptera aisément le résultat pour les autres formes possibles d'intervalles.

PROPOSITION (fonctions posivites)

i) *Soit f et g définies sur* [a, b[, *positives.*

Si, au voisinage de b, $f \leq g$ *ou plus généralement, si* $f = \mathrm{O}(g)$ *et si* $\int_{\mathrm{I}} g$ *converge alors* $\int_{\mathrm{I}} f$ *converge.*

Si au voisinage de b, $f \geq g$ *et si* $\int_{\mathrm{I}} g$ *diverge alors* $\int_{\mathrm{I}} f$ *diverge.*

ii) *Si, au voisinage de b,* $f \sim g$, *alors* $\int_{\mathrm{I}} g$ *et* $\int_{\mathrm{I}} f$ *sont de même nature (toutes deux convergentes ou toutes deux non divergentes).*

<u>Démonstration</u> : elle est tout à fait comparable à celle relative aux séries.

i) Il existe M et c élément de [a, b[tels que, pour x élément de [c, b[, on ait : $0 \leq f(x) \leq \mathrm{M}g(x)$, et donc :

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{M}\int_c^x g(t)\mathrm{d}t \leq \mathrm{M}\int_c^b g(t)\mathrm{d}t$$ puisque $\int_c^x g(t)\mathrm{d}t$ est une fonction croissante de x majorée par sa limite $\int_c^b g(t)\mathrm{d}t$. En rajoutant $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ qui est un nombre fini, on voit que la quantité $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une fonction croissante de x est majorée, donc convergente.

Le plus souvent, on cherche directement une majoration $f \leq g$ au voisinage de b. Pour que l'intégrale d'une fonction positive converge, il suffit de la majorer par une fonction dont l'intégrale converge. La deuxième partie du i) n'est que la contraposée de la première partie. Pour qu'une intégrale d'une fonction positive diverge, il suffit de la minorer par une fonction positive dont l'intégrale diverge.

ii) Il suffit de remarquer que sur un voisinage [c, b[de b, on a un encadrement du type $\frac{g}{2} \leq f \leq \frac{3g}{2}$. Si l'intégrale de g converge, il en est de même de celle de $\frac{3g}{2}$ et donc de f, d'après i). De même, si l'intégrale de f converge, celle de g aussi.

3- Fonctions de réference

Pour voir si une intégrale généralisée d'une fonction positive converge, on prend un équivalent pour se ramener à une expression plus simple, servant de référence. On procède donc comme plus les séries. Les cas les plus fréquents que l'on obtient figurent ci-dessous.

On vérifiera aisément, en calculant une primitive que :

❑ $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

diverge si et seulement si $\alpha \leq 1$

Ce cas est analogue à celui de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Ce n'est pas un hasard, comme nous le verrons plus bas.

- ❑ $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

  diverge si et seulement si $\alpha \geq 1$

  $\int_{t_0}^{a} \frac{1}{|t - t_0|^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

  diverge si et seulement si $\alpha \geq 1$
- ❑ $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dt$ converge pour tout $\alpha > 0$
- ❑ $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge

  diverge si et seulement si $\alpha \leq 1$.

EXEMPLE 1 :

$$\int_a^\infty \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt \quad \text{où P est de degré } n \text{ et Q de degré } m.$$

En supposant Q non nul sur $[a, +\infty[$, le seul problème de convergence se pose en $+\infty$. On a alors $\frac{P(t)}{Q(t)} \sim \frac{1}{x^{m-n}}$. L'intégrale converge si et seulement si $m - n > 1$.

EXEMPLE 2 :

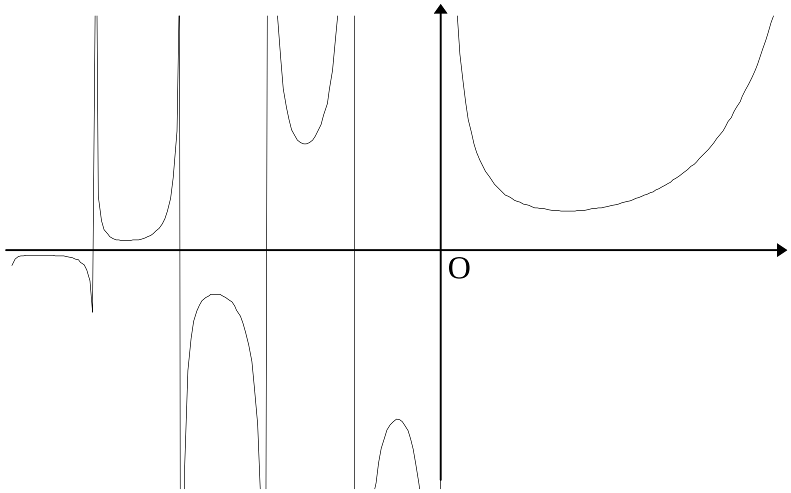
Trouver les valeurs de x pour lesquelles $\Gamma(x)$ converge, avec $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\,dt$.

En 0, $e^{-t}.t^{x-1} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ dont l'intégrale converge si et seulement si $x > 0$.

En $+\infty$, on a $0 \leq e^{-t}\, t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}$ puisque $e^{-t}\, t^{x+1}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale converge en $+\infty$ pour tout x.

Ainsi, $\Gamma(x)$ est défini sur $\mathbb{R}^{+*}$. On vérifiera en intégrant par parties que $\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$ et donc par récurrence que, pour n entier, $\Gamma(n + 1) = n!$. Ainsi, Γ est une extension aux réels strictement positifs de la factorielle.

Voici le graphe de la fonction Γ entre –5 et 5 :



On peut s'étonner d'un tel graphe alors que nous avons vu que Γ n'était défini que pour $x > 0$. En effet, on y voit Γ défini pour les valeurs négatives non entières de x. En fait, on a prolongé Γ aux valeurs négatives, par exemple au moyen de l'un des procédés suivants :

❑ Dans la relation $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, le membre de droite est défini pour x élément de $]-1,0[\cup]0,+\infty[$. On peut donc utiliser cette relation pour définir $\Gamma(x)$ sur $]-1,0[$. Mais reprenant la même relation avec l'extension de Γ, le membre de droite est cette fois défini sur $]-2,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$, permettant d'étendre Γ à $]-2,-1[$. De proche en proche, on définit ainsi Γ sur tout intervalle $]-n-1,-n[$.

❑ On peut aussi écrire (la connaissance du chapitre "*Suites et Séries de fonctions*" est nécessaire ici) :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt = \int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}\, t^{x-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \quad \text{avec convergence normale de la série sur } [0,1]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^n}{n!}\, t^{x-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)n!} + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

expression qui est définie pour tout x réel non entier négatif.

Voici une curieuse utilisation de la fonction Γ :

Considérons $\displaystyle\int \!\!\ldots\!\! \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-x_1^2 - \ldots - x_n^2)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\, dt\right)^n$

Si on passe en coordonnées sphériques, $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$ avec r variant de 0 à l'infini. L'élément de volume sera égal à $dr \times$ aire de la surface de la sphère $S_{n-1}(r) = \{(x_1, \ldots, x_n), x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2\}$. Par homothétie de centre 0 de rapport r, la surface de cette sphère est égale à $r^{n-1} \times$ aire de $S_{n-1}(1)$. (On a $S_1(r) = 2\pi r$ et $S_2(r) = 4\pi r^2$). On a donc :

$$\int\!\!\ldots\!\!\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x_1^{\,2} - \ldots - x_n^{\,2})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n = S_{n-1}(1)\int_0^\infty \exp(-r^2)\, r^{n-1}\,\mathrm{d}r$$

Posons $t = r^2$. On a $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-r^2)\, r^{n-1}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_0^\infty \exp(-t)\, t^{n/2-1}\,\mathrm{d}r = \frac{\Gamma(n/2)}{2}$.

On a donc finalement :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t\right)^n = S_{n-1}(1)\,\frac{\Gamma(n/2)}{2}$$

Pour $n = 2$, cette formule correspond à $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t\right)^2 = S_1(1)\,\frac{\Gamma(1)}{2} = \pi$, donc :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}}$$

formule qu'on rencontre également sous la forme $\displaystyle\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}}$

On en déduit également que $\sqrt{\pi}^n = S_{n-1}(1)\,\dfrac{\Gamma(n/2)}{2}$ et donc que l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est $\dfrac{2\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(n/2)}$. Pour $n = 3$, on obtient : $\sqrt{\pi}^3 = 2\pi\,\Gamma(3/2) \Rightarrow \Gamma(3/2) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \dfrac{1}{2}\,\Gamma(1/2) \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Montrons enfin la formule de Stirling : $\boxed{n! \sim n^n\, e^{-n}\,\sqrt{2\pi n}}$ (la connaissance du chapitre "*Suites et Séries de fonctions*" SUITESF.PDF est nécessaire ici). On écrit :

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^n\,\mathrm{d}t$$

$= \displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \exp(-n - u\sqrt{n})\, n^n\,(1 + \frac{u}{\sqrt{n}})^n\,\sqrt{n}\,\mathrm{d}u$ en faisant le changement de variable $t = n + u\sqrt{n}$

$$= n^n\, e^{-n}\,\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \exp(-\,u\sqrt{n} + n\ln(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}))\;\mathrm{d}u$$

L'intégrale est de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$ avec :

$$f_n(u) = 0 \text{ si } u < \sqrt{n}$$
$$= \exp(-\,u\sqrt{n} + n\ln(1 + \frac{u}{\sqrt{n}})) \text{ pour } u \geq -\sqrt{n}$$

Quand n tend vers $+\infty$, pour u fixé, $f_n(u)$ sera égal à $\exp(-\,u\sqrt{n} + n\ln(1 + \dfrac{u}{\sqrt{n}}))$ pour n assez grand, de limite $\exp(-\,\dfrac{u^2}{2})$. On vérifiera en outre que, pour tout n et tout u, $0 \leq f_n(u) \leq \varphi(u)$ avec φ intégrable définie par :

$$\varphi(u) = \exp(-\frac{u^2}{2}) \text{ pour } u \leq 0$$

$$= (1 + u)\exp(-u) \text{ pour } u \geq 0$$

Le théorème de convergence dominée permet alors de conclure que l'intégrale tend vers $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{u^2}{2})\,du$, et dont la valeur est $\sqrt{2\pi}$ comme vu précédemment.

4– Comparaison série-intégrale

L'analogie entre série et intégrale impropre apparaît de manière encore plus apparente dans le théorème suivant :

THEOREME :

Soit f *une fonction positive décroissante sur* $[0,+\infty[$, *continue par morceaux sur tout intervalle* $[0,x]$. *Alors la série* $(\sum f(n))$ *converge si et seulement si l'intégrale* $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ *converge.*

Démonstration :

f étant décroissante, pour tout n, on a :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \leq f(n-1)$$

Supposons que $\int_0^{\infty} f$ converge. On a alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(0) + \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt = f(0) + \int_0^n f(t)\,dt \leq f(0) + \int_0^{\infty} f(t)\,dt$$

donc la série converge, car les sommes partielles (S_n) forment une suite croissante ($f \geq 0$) majorée.

Réciproquement, si la série converge, on peut majorer les intégrales partielles. Si x est un réel de partie entière n, on a :

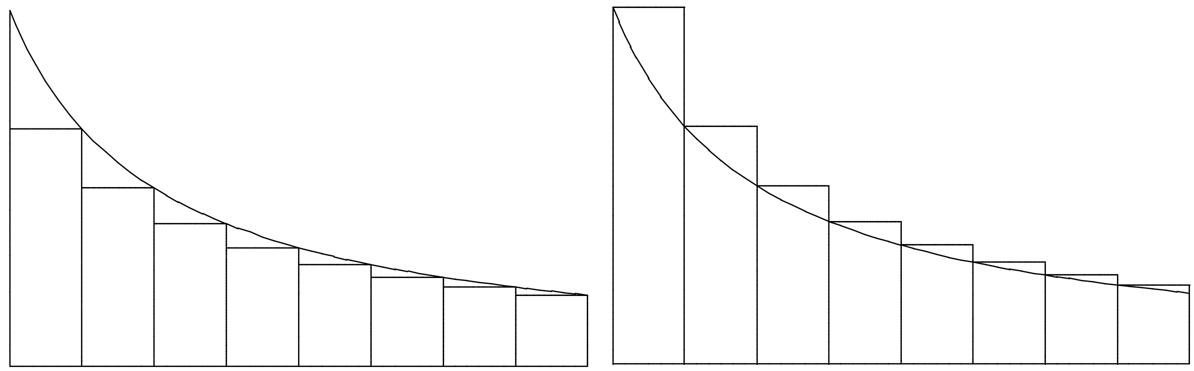
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^{n+1} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n+1} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

Comme l'intégrale partielle est une fonction F croissante de x et majorée, elle converge.

En passant à la limite dans les inégalités ci-dessus, on a enfin l'encadrement :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \leq f(0) + \int_0^{\infty} f(t)\,dt$$

Ci-dessous les graphiques permettent d'illustrer la démonstration :



$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \le \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \qquad\qquad \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

EXEMPLE 1 :

On retrouve le critère de convergence des séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$, par comparaison avec $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Les deux convergent si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 1$, on retrouve le fait que la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge car elle est de même nature que l'intégrale de $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Cependant, la différence entre la somme partielle et l'intégrale de 1 à n converge. En effet, posons :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \le 0$. Comme la suite décroît, pour montrer qu'elle converge, il suffit de la minorer. Or, pour tout $k \ge 1$:

$$\frac{1}{k} \ge \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc $\quad 1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n} \ge \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(n+1)$

donc $\quad u_n \ge \ln(n+1) - \ln(n) \ge 0$.

Si on note γ la limite de la suite (u_n) (appelée constante d'Euler), on peut alors écrire :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

et en particulier :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln(n) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

Une valeur approchée de te d'Euler, dont une valeur approchée est 0.57721566... Le fait que $1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n} \sim \ln(n)$ montre que la série harmonique diverge extrêmement lentement. Le plus petit

n tel que $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} > 100$ est de l'ordre de $e^{100-\gamma}$, soit 1.5 10^{43}. En 1968, John Wrench a montré que ce nombre valait exactement 15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497. Si la somme de chaque terme prenait un milliardième de seconde, il faudrait plus de 4×10^{17} milliards d'années pour effectuer le calcul.

La constante d'Euler permet de trouver des sommes de séries. Considérons par exemple la somme de la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Considérons la somme partielle S_{2n} :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}}_{I_n} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{P_n}$$

or $P_n + I_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2n) + \gamma + o(1)$

et $P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}(\ln(n) + \gamma + o(1))$

$\Rightarrow \quad I_n = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{\gamma}{2} + o(1)$

$\Rightarrow \quad I_n - P_n = \ln(2) + o(1)$ de sorte que la limite cherchée est $L = \ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

EXEMPLE 2 : on peut également procéder à des encadrements en cas de fonction croissante. Considérons par exemple $\ln(n!)$. On a :

$$\int_{n-1}^{n} \ln(t)\, dt \le \ln(n) \le \int_{n}^{n+1} \ln(t)\, dt$$

$\Rightarrow \quad n\ln(n) - 1 - (n-1)\ln(n-1) \le \ln(n) \le (n+1)\ln(n+1) - 1 - n\ln(n)$

On somme ensuite les inégalités, de 2 à n pour l'inégalité de gauche, et de 1 à n pour celle de droite :

$\Rightarrow \quad n\ln(n) - n + 1 \le \ln(n!) \le (n+1)\ln(n+1) - n$

$\Rightarrow \quad n^n e^{-n} \times e \le n! \le (n+1)^{n+1} e^{-n}$

Comme $(n+1)^{n+1} = \exp((n+1)\ln(n+1)) = \exp(\,(n+1)\ln(n) + (n+1)\ln(1+\frac{1}{n})\,)$

$$= \exp(\,(n+1)\ln(n) + (n+1)(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))\,)$$
$$= \exp(\,(n+1)\ln(n) + 1 + o(1)\,)$$
$$\sim n^{n+1}\, e$$

on en déduit que $\frac{n!}{n^n e^{-n}}$ est compris entre e et $en \times$ qqc qui tend vers 1. Par des méthodes un peu plus compliquées, on peut montrer que $\frac{n!}{n^n e^{-n}} \sim \sqrt{2\pi n}$, ou encore que $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, ou enfin que :

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1) \text{ (Formule de Stirling).}$$

5– Cas des fonctions de signe quelconque

DEFINITION

Une intégrale $\int_I f$ *est dite absolument convergente si* $\int_I |f|$ *converge.* On *dit aussi que f est intégrable sur I. Dans ce cas,* $\int_I f$ *converge.*

<u>Démonstration</u> :

❑ Pour f à valeurs réelles, peut écrire :

$$f^+ = \text{Sup}(f,0) = \frac{1}{2}(f + |f|)$$

$$f^- = \text{Sup}(-f,0) = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

de sorte que $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$.

Si $|f|$ est intégrable, il en est donc de même de f^+ et f^-. On a alors :

$$\int_I f(t)\,dt = \int_I f^+(t)\,dt - \int_I f^-(t)\,dt$$

On a par ailleurs :

$$\int_I |f(t)|\,dt = \int_I f^+(t)\,dt + \int_I f^-(t)\,dt$$

de sorte que $\left|\int_I f(t)\,dt\right| \leq \int_I |f(t)|\,dt$

Si I = $[a, b[$, la limite $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt$ peut fort bien exister sans qu'aucune des limites suivantes n'existent : $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f^+(t)\,dt$, $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f^-(t)\,dt$, $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x |f(t)|\,dt$. On peut très bien avoir par exemple :

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f^+(t)\,dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f^-(t)\,dt = +\infty$$

alors que la différence converge. Il en est de même pour les séries. Il existe des séries qui sont convergentes sans être absolument convergentes.

EXEMPLE : $\frac{\sin(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par contre $\frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. En effet :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$ terme général d'une série divergente.

Cependant, $\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ converge car, en intégrant par parties :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

Le crochet admet une limite et la fonction $\frac{\cos(t)}{t^2}$ est, elle, intégrable, donc le membre de droite admet une limite.

De même, $\cos(t^2)$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$, mais $\int_0^{\infty} \cos(t^2)\,dt$ existe (faire le changement de variable $u = t^2$ puis une intégration par partie).

EXEMPLE 2 :

Pour z complexe de partie réelle positive, on a $\left|e^{-t}\, t^{z-1}\right| = e^{-t}\, t^{\mathrm{Re}(z)-1}$, intégrable pour $\mathrm{Re}(z) > 0$. On pose alors $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\,dt$, définie pour z complexe tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$.

PROPRIETES

i) *L'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle* I *forme un espace vectoriel.*

ii) *L'ensemble des fonctions de carré intégrables sur un intervalle* I *forme un espace vectoriel.*

Démonstration :

i) résulte du fait que $|f + \lambda g| \leq |f| + |\lambda|\,|g|$, et donc, si f et g sont intégrables sur I, la fonction $|f| + |\lambda||g|$ est intégrable donc la fonction $f + \lambda g$ aussi

ii) est plus délicat du fait que $(f + \lambda g)^2 = f^{\,2} + 2\lambda fg + \lambda^2 g^2$. Si on suppose que f et g sont de carré intégrable, on pourra conclure si on montre que fg est intégrable. C'est bien le cas en vertu de l'inégalité :

$$|fg| \leq \frac{f^2 + g^2}{2}$$

provenant du développement de $(|f| - |g|)^2 \geq 0$

Si on se limite au sous-espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrables, on peut définir le produit scalaire suivant :

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathrm{I}} f(t)g(t)\,dt$$

Annexe I : Calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

On va calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ à partir de la formule $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ démontrée au paragraphe III-5) sur les séries alternées. La méthode est due à G. T. Williams, *A new method of evaluating* $\zeta(2n)$, Amer. Math. Monthly, **60**, (1953), 19-25. Son mérite est de ne faire appel qu'à du calcul algébrique "élémentaire", et qu'à des connaissances de ce chapitre.

Considérons la quantité suivante :

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)^2 = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} \times \sum_{m=0}^{N} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

$= \sum_{m,n} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)}$ étant entendu que, dorénavant, les indices varient entre 0 et N.

Distinguons dans la dernière somme le cas où $n = m$ et le cas où $n \neq m$. On obtient :

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)^2 = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{m \neq n} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)}$$

Or :

$$\frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)} = \frac{(-1)^{n+m}(2n+1)(2m+1)}{(2n+1)^2(2m+1)^2}$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}(2n+1)(2m+1)}{(2m+1)^2-(2n+1)^2} \times \left(\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2m+1)^2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+m}}{(2m+1)^2-(2n+1)^2}\,\frac{2m+1}{2n+1} - \frac{(-1)^{n+m}}{(2m+1)^2-(2n+1)^2}\,\frac{2n+1}{2m+1}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{m \neq n} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)} = \sum_{m \neq n} \frac{(-1)^{n+m}}{(2m+1)^2-(2n+1)^2}\,\frac{2m+1}{2n+1} - \sum_{m \neq n} \frac{(-1)^{n+m}}{(2m+1)^2-(2n+1)^2}\,\frac{2n+1}{2m+1}$$

$$= \sum_{m \neq n} \frac{(-1)^{n+m}}{(2m+1)^2-(2n+1)^2}\,\frac{2m+1}{2n+1} - \sum_{m \neq n} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)^2-(2m+1)^2}\,\frac{2m+1}{2n+1}$$

en renommant, dans la deuxième somme les indices (n,m) en (m,n)

$$\Rightarrow \quad \sum_{m \neq n} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)} = 2\sum_{m \neq n} \frac{(-1)^{n+m}}{(2m+1)^2-(2n+1)^2}\,\frac{2m+1}{2n+1}$$

Or, pour chaque n entre 0 et N, on a, en désignant par $\sum_m$ la somme sur tous les indices m variant de 0 à N en étant différent de n :

$2\sum_m \frac{(-1)^{n+m}(2m+1)}{(2m+1)^2-(2n+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_m \frac{(-1)^{n+m}(2m+1)}{(n+m+1)(m-n)}$ en factorisant le dénominateur

$$= \frac{1}{2}\sum_m (-1)^{n+m}\left(\frac{1}{n+m+1} + \frac{1}{m-n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_m \frac{(-1)^{n+m}}{n+m+1} + \frac{1}{2}\sum_m \frac{(-1)^{n+m}}{m-n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \ldots + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+N}}{n+N+1}\right)$$

+

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1)^{n+1}}{n-1}-\ldots-\frac{(-1)^{2n-1}}{1}+\frac{(-1)^{2n+1}}{1}+\ldots+\frac{(-1)^{n+N}}{N-n}\right)$$
$$=-\frac{1}{2(2n+1)}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+N}}{n+N+1}-1+\frac{1}{2}-\ldots+\frac{(-1)^{n+N}}{N-n}\right)$$
$$=-\frac{1}{2(2n+1)}+\frac{(-1)^{N+n}}{2}\left(\frac{1}{N-n+1}-\frac{1}{N-n+2}+\ldots+\frac{1}{N+n+1}\right)$$

$$\Rightarrow\qquad 2\sum_{m\neq n}\frac{(-1)^{n+m}}{(2m+1)^2-(2n+1)^2}\,\frac{2m+1}{2n+1}=$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^{N+n}}{2n+1}\left(\frac{1}{N-n+1}-\frac{1}{N-n+2}+\ldots+\frac{1}{N+n+1}\right)$$

D'où enfin :

$$\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^{N+n}}{2n+1}\left(\frac{1}{N-n+1}-\frac{1}{N-n+2}+\ldots+\frac{1}{N+n+1}\right)$$

Ouf ! (pas possible, il y en a qui ont lu jusque là ???) ☺

Or $\frac{1}{N-n+1}-\frac{1}{N-n+2}+\ldots+\frac{1}{N+n+1}$ est une somme partielle d'une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue, donc son signe est celui du premier terme et la somme est majorée par ce premier terme. Ainsi :

$$0\leq\frac{1}{N-n+1}-\frac{1}{N-n+2}+\ldots+\frac{1}{N+n+1}\leq\frac{1}{N-n+1}$$

$$\Rightarrow\qquad \left|\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^{N+n}}{2n+1}\left(\frac{1}{N-n+1}-\frac{1}{N-n+2}+\ldots+\frac{1}{N+n+1}\right)\right|\leq\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{N-n+1}$$

$$\leq\frac{1}{2}\,\frac{1}{2N+3}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(N-n+1)}\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}\,\frac{1}{2N+3}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2N+2}\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}\,\frac{1}{2N+3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2N+2}\right)\sim\frac{\ln(2N+2)}{2(2N+3)}$$ en

effectuant une comparaison série intégrale. Cette dernière quantité tend vers 0 quand N tend vers l'infini, de sorte que :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=2\times\frac{\pi^2}{4^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

On en déduit enfin que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Annexe II : Absolue convergence, semi-convergence

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente sans être absolument convergente. Elle est dite semi-convergente. En 1829, dans un article sur les séries trigonométriques, Dirichlet relève une erreur chez Cauchy. Dans un article de 1823, ce dernier utilise le fait que, si le quotient de u_n sur $\frac{\sin(nx)}{n}$ tend vers 1, alors $\sum u_n$ converge puisque $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ converge. L'erreur, communément commise de nos jours par tout étudiant débutant dans l'étude des séries, est de croire que $\sum u_n$ converge lorsque la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) et que $\sum v_n$ converge. Rappelons que ce résultat est vrai si les séries sont **<u>positives</u>**, mais si ce n'est pas le cas, le résultat peut être faux. Dirichlet donne un contre-exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge, alors même que le quotient des termes de même rang tend vers 1. En 1854, dans son mémoire sur les séries trigonométriques, Riemann définit, à la suite de Dirichlet, deux types de séries, celles que nous nommons maintenant série absolument convergente et semi-convergente :

> *En janvier 1829, parut dans le* Journal de Crelle *un mémoire de Dirichlet, où la possibilité de la représentation par les séries trigonométriques se trouvait établie en toute rigueur pour les fonctions qui sont, en général, susceptibles d'intégration, et qui se présentent pas une infinité de maxima et de minima. Il arriva à la découverte du chemin à suivre pour arriver à la solution de ce problème, par la considération que les séries infinies se partagent en deux classes suivant qu'elles restent convergentes ou non convergentes, lorsqu'on rend leurs termes tous positifs. Dans les premières, les termes peuvent être intervertis d'une manière quelconque ; dans les deux autres, au contraire, la valeur dépend de l'ordre des termes. Si on désigne, en effet, dans une série de seconde classe, les termes positifs successifs par a_1, a_2, a_3, ..., et les termes négatifs par $-b_1$, $-b_2$, $-b_3$, ..., il est clair que $\sum a$, ainsi que $\sum b$, doit être infinie ; car, si ces deux sommes étaient finies l'une et l'autre, la série serait encore convergente lorsqu'on donnerait à tous les termes le même signe ; si une seule était infinie, la série serait divergente. Il est clair maintenant que la série, en plaçant les termes dans un ordre convenable, pourra prendre une valeur donnée C ; car, si l'on prend alternativement des termes positifs de la série jusqu'à ce que sa valeur soit plus grande que C, puis des termes négatifs jusqu'à ce que sa valeur soit moindre que C, la différence entre cette valeur et C ne surpassera jamais la valeur du terme qui précède le dernier changement de signe. Or les quantités a, aussi bien que les quantités b, finissant toujours par devenir infiniment petites pour des valeurs croissantes de l'indice, les écarts entre la somme de la série et C deviendront encore infiniment petits, lorsqu'on prolongera assez loin la série, c'est-à-dire que la série converge vers C.*
>
> *C'est aux seules séries de la première classe que l'on peut appliquer les lois des sommes finies ; elles seules peuvent être considérées comme l'ensemble de leurs termes ; celles de la seconde classe ne le peuvent pas : circonstance qui avait échappé aux*

mathématiciens du siècle dernier, principalement par la raison que les séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes d'une variable appartiennent, généralement parlant (c'est-à-dire à l'exception de certaines valeurs particulières de cette variable), à la première classe.

Nous avons vu plus haut qu'en permutant l'ordre des termes de la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, on peut la faire converger ou bien vers ln(2) ou bien vers $\frac{1}{2}$ ln(2). L'explication de ce phénomène est donnée ci-dessus par Riemann. Il résulte du fait que la série n'est pas absolument convergente. La somme va dépendre de l'ordre dans lequel sont pris les termes. Ce phénomène ne se produit pas avec les séries absolument convergentes.

Annexe III : La transformée de Laplace

Définition :

On se place sur l'espace des fonctions f continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, nulles sur $]-\infty,0[$. La transformée de Laplace de f est :

$$\mathrm{L}(f)(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, \mathrm{d}t = \mathrm{F}(p)$$

où p est un complexe. Dans la plupart des cas, f sera bornée de sorte que F est définie au moins sur le demi-plan complexe $\mathrm{Re}(p) > 0$, ce qui est également le cas si f est majoré par un polynôme. L est clairement linéaire.

Table de transformée :

La table qui suit se dresse aisément. δ_0 désigne la distribution de Dirac en 0, définie dans le paragraphe suivant. u est la fonction d'Heaviside ou fonction échelon, nulle sur $]-\infty,0[$ et égale à 1 sur $]0,+\infty[$ (la valeur en un point de discontinuité d'une fonction continue par morceaux importe peu).

$f(t)$	$\mathrm{F}(p)$
δ_0	1
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-pa}}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$e^{i\omega t}$	$\frac{1}{p-i\omega} = \frac{p+i\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

Il est bien entendu que toutes les fonctions sont supposées être nulles pour t négatif. Par exemple, la fonction $\cos(\omega t)$ ci-dessus désigne en fait la fonction $u(t)\cos(\omega t)$, nulle pour $t < 0$ et égale à $\cos(\omega t)$ pour $t > 0$, donc ayant une discontinuité en 0.

- Par ailleurs, on vérifiera aisément que :

$$\mathcal{L}(e^{-at}f)(p) = \mathcal{L}(f)(p + a) = \mathrm{F}(p + a)$$

donnant bien d'autres transformées, et illustré dans la table précédente par :

$$\mathcal{L}(e^{-at})(p) = \mathcal{L}(e^{-at}u(t))(p) = \mathcal{L}(u)(p + a) = \frac{1}{p + a}$$

- On a également :

$$\mathcal{L}(tf)(p) = \int_0^\infty te^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ en vérifiant les hypothèses de domination adéquates}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathcal{L}(f)(p)$$

C'est ainsi que $\mathcal{L}(t\sin(t))(p) = \dfrac{2p}{(p^2 + 1)^2}$

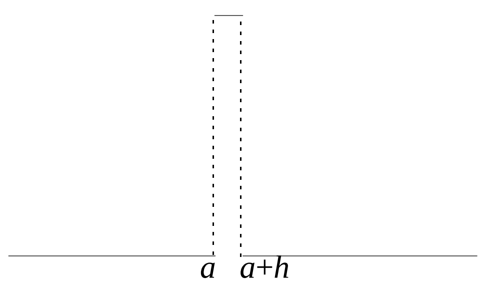
Distribution de Dirac :

Une présentation de la transformée de Laplace ne peut se faire de façon totalement cohérente qu'en introduisant les distributions, mises au point par Laurent Schwartz dans les années 1950. Une distribution est simplement une forme linéaire sur un espace de fonctions. Sans entrer dans les détails trop techniques, nous donnerons comme seul exemple la distribution de Dirac. a étant un réel positif ou nul, considérons la fonction par morceaux suivante :

$f_h(t) = 0$ si $t < a$

$f_h(t) = \dfrac{1}{h}$ si $a < t < a + h$

$f_h(t) = 0$ si $t > a + h$



f_h correspond à une impulsion, d'autant plus brève et intense que h est petit. L'aire contenue sous la courbe vaut 1. La transformée de Laplace de cette impulsion vaut :

$$\mathrm{L}(f_h)(p) = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-pa} - e^{-p(a+h)}}{ph}$$ dont la limite vaut e^{-pa} quand h tend vers 0. La limite ainsi obtenue est appelée transformée de Laplace de la distribution de Dirac δ_a en a. δ_a est une forme linéaire qui, à toute fonction g, associe $g(a)$. Par convention de notation et par analogie avec le calcul intégral, au lieu de noter $g(a) = \delta_a(g)$, on note, même si δ_a n'est pas une fonction en tant que telle :

$$g(a) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\delta_a\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\infty} g(t)\,\delta_a\,\mathrm{d}t \text{ si } g \text{ est nulle sur }]-\infty,0[.$$

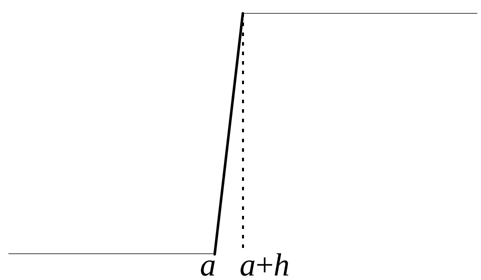
Cette notation se justifie par le fait que, si g est continue, alors :

$$g(a) = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,f_h(t)\,\mathrm{d}t$$

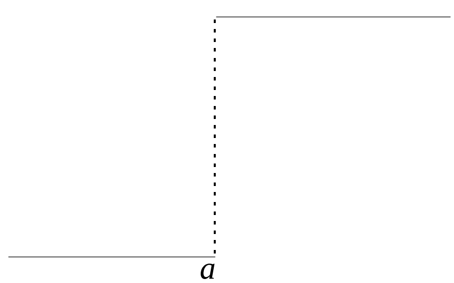
comme on pourra le montrer en exercice, de sorte que δ_a est, d'une certaine façon, la limite de f_h quand h tend vers 0. Cette convention d'écriture est en outre bien cohérente avec :

$$\mathrm{L}(\delta_a)(p) = e^{-pa} = \delta_a(e^{-pt}) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\,\delta_a\,\mathrm{d}t$$

On remarque par ailleurs que la primitive de f_h s'annulant sur $]-\infty, a[$ est de la forme :



Quand h tend vers 0, on obtient la fonction échelon en a, $t \to u(t-a)$:



Nous dirons, qu'au sens des distributions, $u(t-a)$ est une primitive de δ_a et que δ_a est la dérivée de $u(t-a)$. Nous adopterons les notations suivantes : ' ou $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ désigne la dérivée usuelle de sorte que u', dérivée usuelle de la fonction de Heaviside, est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et non définie en 0. D désigne la dérivée au sens des distributions, de sorte que $\mathrm{D}u = \delta_0$. Si f est une fonction continue C^1 par morceaux, alors

Df = f '. Si f est continue par morceaux et C^1 par morceaux, nous verrons ci-après comment est défini Df.

Transformée d'une dérivée :

Soit f continue, C^1 par morceaux, telle que f soit nulle sur]–∞,0]. On a :

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,\mathrm{d}t = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ en intégrant par parties}$$
$$= p\mathcal{L}(f)(p)$$

Qu'en est-il pour une fonction continue par morceaux, C^1 par morceaux ? On remarquera, qu'au sens des distributions, avec $f = u$, on a :

$$\mathcal{L}(\mathrm{D}u)(p) = \mathcal{L}(\delta_0)(p) = 1 = p\mathcal{L}(u)(p) \text{ puisque } \mathcal{L}(u)(p) = \frac{1}{p}$$

Considérons maintenant une fonction ayant un nombre fini de discontinuité aux points d'abscisse a_i avec $0 \le a_0 < a_1 < ... < a_n$. Notons $s_i = f(a_i^+) - f(a_i^-) = \lim\limits_{\substack{x\to a_i\\ x > a_i}} f(t) - \lim\limits_{\substack{x\to a_i\\ x < a_i}} f(t)$ le saut de f en a_i. Posons :

$$g(t) = f(t) - s_0u(t - a_0) - s_1u(t - a_1) - ... - s_nu(t - a_n)$$

g est obtenue à partir de f en recollant de façon continue les morceaux discontinus du graphe de f. Vérifions en effet que g est continue, par exemple en a_0. On a :

$$\lim\limits_{\substack{x\to a_0\\ x > a_0}} g(t) = \lim\limits_{\substack{x\to a_0\\ x > a_0}} f(t) - s_0 \text{ alors que } \lim\limits_{\substack{x\to a_0\\ x < a_0}} g(t) = \lim\limits_{\substack{x\to a_0\\ x < a_0}} f(t)$$

La différence entre les deux limites vaut $\lim\limits_{\substack{x\to a_0\\ x > a_0}} f(t) - \lim\limits_{\substack{x\to a_0\\ x < a_0}} f(t) - s_0$ qui est nul par définition de s_0. On procède de même aux autres a_i. f étant par ailleurs C^1 par morceaux, il en est de même de g, mais g est de plus continue, de sorte que la formule suivante est valide pour g :

$$\mathcal{L}(g')(p) = p\mathcal{L}(g)(p)$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}(g')(p) = p\,\mathcal{L}(f(t) - s_0u(t - a_0) - s_1u(t - a_1) - ... - s_nu(t - a_n))(p)$

en remplaçant g par sa définition

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}(g')(p) = p\left[\,\mathcal{L}(f)(p) - s_0\,\dfrac{e^{-pa_0}}{p} - s_1\,\dfrac{e^{-pa_1}}{p} - ... - s_n\,\dfrac{e^{-pa_n}}{p}\,\right]$

en utilisant la linéarité de $\mathcal{L}$ et la valeur de $\mathcal{L}(u(t-a))$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}(g')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - s_0\,e^{-pa_0} - s_1\,e^{-pa_1} - ... - s_n\,e^{-pa_n}$

en développant

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}(g')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - s_0\,\mathcal{L}(\delta_{a_0})(p) - s_1\,\mathcal{L}(\delta_{a_1})(p) - ... - s_n\,\mathcal{L}(\delta_{a_n})(p)$

en utilisant la valeur de $\mathcal{L}(\delta_a)$

$\Rightarrow$ $p\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(g')(p) + s_0\,\mathcal{L}(\delta_{a_0})(p) + s_1\,\mathcal{L}(\delta_{a_1})(p) + ... + s_n\,\mathcal{L}(\delta_{a_n})(p)$

$= \mathcal{L}(g' + s_0\delta_{a_0} + s_1\delta_{a_1} + ... + s_n\,\delta_{a_n})(p)$

en utilisant la linéarité de $\mathcal{L}$

On reconnaît dans $g' + s_0\delta_{a_0} + s_1\delta_{a_1} + ... + s_n\,\delta_{a_n}$ la dérivée de $f = g + s_0u(t-a_0) + ... + s_nu(t-a_n)$ à condition de prendre cette dérivation au sens des distributions, c'est à dire de dériver les échelons correspondants aux discontinuités de f en des distributions de Dirac. On a $f' = g'$ en dehors des a_i, mais en toute généralité, on a D$f = g' + s_0\delta_{a_0} + s_1\delta_{a_1} + ... + s_n\,\delta_{a_n} = f' + s_0\delta_{a_0} + s_1\delta_{a_1} + ... + s_n\,\delta_{a_n}$. Sous cette condition, la relation :

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathrm{D}f)(p) = p\mathcal{L}(f)(p)}$$

reste valable.

EXEMPLES : Dans les exemples, nous avons rajouté systématiquement $u(t)$ en facteur pour bien rappeler que les fonctions sont nulles pour $t < 0$:

- Prenons $f(t) = u(t)\sin(\omega t)$, continue sur $\mathbb{R}$. On a $\mathrm{D}f = f\,'(t) = \omega u(t)\cos(\omega t)$

or $\quad \mathcal{L}(u(t)\sin(\omega t))(p) = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(\omega u(t)\cos(\omega t))(p) = \dfrac{p\omega}{p^2 + \omega^2}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(u(t)\cos(\omega t))(p) = \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$ ce qui est bien vérifié.

- Prenons $f(t) = u(t)\cos(\omega t)$ discontinue en 0 avec un saut égal à 1. On a, au sens des distributions, $\mathrm{D}f = f\,'(t) + \delta_0 = \delta_0 - \omega u(t)\sin(\omega t)$.

or $\quad \mathcal{L}(u(t)\cos(\omega t))(p) = \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(\delta_0 - \omega u(t)\sin(\omega t))(p) = \dfrac{p^2}{p^2 + \omega^2}$

$\quad = 1 - \omega\mathcal{L}(u(t)\sin(\omega t))(p)$

$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(u(t)\sin(\omega t))(p) = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ ce qui est bien vérifié.

- Prenons $f(t) = u(t)e^{-at}$, discontinue en 0, avec un saut de 1. Sa dérivée au sens des distributions, vaut $\mathrm{D}f = f\,'(t) + \delta_0 = \delta_0 - au(t)e^{-at}$. Donc :

$\mathcal{L}(\delta_0 - au(t)e^{-at}) = p\mathcal{L}(u(t)e^{-at})$

$\Leftrightarrow \quad 1 - a\mathcal{L}(u(t)e^{-at}) = p\mathcal{L}(u(t)e^{-at})$

$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(u(t)e^{-at}) = \dfrac{1}{p + a}$ ce qui est bien le cas.

Fonction de transfert d'un système :

Un système, automatique, mécanique, ou électrique, reçoit en entrée une commande $e(t)$ dépendant du temps, et fournit en sortie un signal $s(t)$ dépendant du temps également. Par exemple, $e(t)$ est l'angle d'ouverture d'un robinet et $s(t)$ le débit d'eau du robinet. Ou bien $e(t)$ est l'angle dont on tourne un bouton et $s(t)$ le niveau sonore d'un haut-parleur... Dans de très nombreuses situations, e et s sont reliées par une relation prenant la forme d'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_n\,\mathrm{D}^n s + \ldots + a_1\,\mathrm{D}s + a_0 s = b_m\,\mathrm{D}^m e + \ldots + b_1\,\mathrm{D}e + b_0 e$$

On suppose que e et s sont nuls pour $t < 0$. On met le système en marche à $t = 0$ en agissant sur e. On souhaite connaître s. Une méthode de résolution aisée repose sur la transformée de Laplace. Notons $\mathrm{S}(p) = \mathcal{L}(s)(p)$ et $\mathrm{E}(p) = \mathcal{L}(e)(p)$. Compte tenu de la relation $\mathcal{L}(\mathrm{D}f)(p) = p\mathcal{L}(f)(p)$, qui, itérée, donne $\mathcal{L}(\mathrm{D}^n f)(p) = p^n\,\mathcal{L}(f)(p)$, on obtient :

$$(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0)\mathrm{S}(p) = (b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0)\mathrm{E}(p)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{S}(p) = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0}\,\mathrm{E}(p) = \mathrm{H}(p)\,\mathrm{E}(p)$$

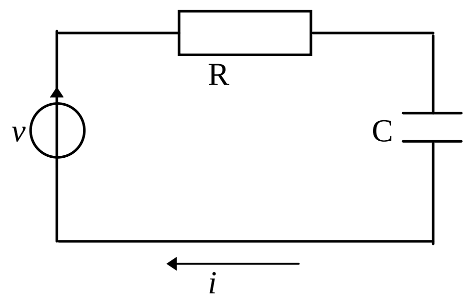
avec $H(p) = \dfrac{b_m p^m + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + ... + a_1 p + a_0}$. H, indépendante de l'entrée choisie, est intrinsèque au système. On l'appelle fonction de transfert du système. La méthode de résolution consiste, au moyen de tables de transformées de Laplace à :

(i) déterminer la transformée de Laplace E de l'entrée $e(t)$

(ii) calculer le produit $S(p) = H(p)E(p)$ et, la plupart du temps, le réduire en éléments simples.

(iii) déterminer la transformée de Laplace inverse de S à l'aide la table des transformées de Laplace.

EXEMPLE 1 : Circuit série RC. En $t = 0$, on ferme un circuit contenant en série un générateur de tension v, une résistance R, une capacité C de charge nulle.



Si i est l'intensité du courant, on a :

$i = \dfrac{dq}{dt} = Dq$ où q est la charge du condensateur. (Ici $D = \dfrac{d}{dt}$ car physiquement, q est une fonction continue du temps).

et $\quad Ri = v - \dfrac{q}{C}$

de sorte que q vérifie l'équation $R\,Dq + \dfrac{q}{C} = v$. L'entrée est la tension appliquée au circuit, fonction échelon nulle pour $t < 0$ et égale à la constante v pour $t > 0$. La sortie est la charge q du condensateur. La fonction de transfert est $H(p) = \dfrac{1}{Rp + \dfrac{1}{C}} = \dfrac{C}{1 + RCp}$. La transformée de Laplace de l'entrée v est $V(p) = \dfrac{v}{p}$. Donc la transformée de Laplace de la sortie q est :

$$Q(p) = H(p)\,V(p) = \frac{v}{p}\,\frac{C}{1 + RCp} = \frac{vC}{p} - \frac{vRC^2}{1 + RCp} = \frac{vC}{p} - \frac{vC}{\dfrac{1}{RC} + p}$$

La table donnée au début du chapitre permet de déterminer q pour $t > 0$ à partir de $Q(p)$:

$$q(t) = vC(1 - \exp(-\frac{t}{RC}))$$

EXEMPLE 2 : Résoudre l'équation différentielle $\dfrac{dx}{dt} + 2x = 3t$ avec $x(0) = 2$.

Nous résolvons l'équation pour $t > 0$ car physiquement, nous déduisons l'état du système postérieurement à l'instant initial $t = 0$. Rien ne nous empêche alors de supposer que l'entrée et la sortie x étaient nuls pour $t < 0$, cet artifice nous permettant d'appliquer la méthode des transformée de Laplace. Il faut prendre garde alors que x admet un saut de 2 à l'origine et donc que Dx = $x' + 2\delta_0$ de sorte que l'équation à résoudre est :

$$Dx - 2\delta_0 + 2x = 3t$$

Prenons les transformées de Laplace. On obtient :

$$pX(p) - 2 + 2X(p) = \frac{3}{p^2}$$

$$\Rightarrow \quad X(p) = \frac{3 + 2p^2}{p^2(p + 2)} = \frac{3}{2p^2} - \frac{3}{4p} + \frac{11}{4(p + 2)}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{3t}{2} - \frac{3}{4} + \frac{11}{4}e^{-2t}$$

EXEMPLE 3 : Résoudre l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos(t)$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = -3$. On procède comme dans l'exemple 2. On résout pour $t > 0$ en supposant les fonctions nulles pour $t < 0$. x admet un saut de 1 à l'origine de sorte que $Dx = x' + \delta_0$. Mais x' aussi admet aussi un saut de –3 en 0 de sorte que $D^2x = Dx' + D\delta_0 = x'' - 3\delta_0 + D\delta_0$. Peu importe la signification à apporter à $D\delta_0$. Nous devons seulement savoir que sa transformée de Laplace vaut $\mathcal{L}(D\delta_0) = p\mathcal{L}(\delta_0) = p$. L'équation différentielle devient donc :

$$D^2x + 3\delta_0 - D\delta_0 + x = \cos(t)$$

Prenons les transformées de Laplace. On obtient :

$$p^2X + 3 - p + X = \frac{p}{1 + p^2}$$

$$\Rightarrow \quad (p^2 + 1)X = \frac{p}{1 + p^2} - 3 + p$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{p}{(1 + p^2)^2} + \frac{p - 3}{1 + p^2}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{t\sin(t)}{2} + \cos(t) - 3\sin(t)$$

Cas où l'entrée n'est pas nulle pour $t < 0$:

Trois cas sont considérés dans ce paragraphe. Celui où e est nulle sur $]-\infty, a[$ avec $a < 0$, celui où e est constante sur $]-\infty, 0[$, et celui où e est sinusoïdal sur $\mathbb{R}$.

- Le premier cas se traite aisément : on l'obtient à partir du cas d'une entrée nulle sur $]-\infty, 0[$ par simple translation du temps. Ainsi, dans l'exemple du circuit RC, si on ferme le circuit à l'instant a avec $a < 0$, la charge sera $q(t) = vC(1 - \exp(-\frac{t - a}{RC}))$.
- Le deuxième cas se traite comme suit : si l'entrée est constante égale à e_0 sur $]-\infty, 0[$, on considère que le système est alors dans un état stationnaire, c'est à dire pour lequel s = Cte = s_0. Si la fonction de transfert est $H(p) = \frac{b_mp^m + ... + b_1p + b_0}{a_np^n + ... + a_1p + a_0}$, on aura $s_0 = \frac{b_0}{a_0}e_0 = H(0)e_0$ comme on le voit en considérant l'équation différentielle d'où est issu H. (La quantité $\frac{b_0}{a_0}$ s'appelle gain statique du système). Les équations étant linéaires, on a les relations suivantes :

  pour une entrée e_0, on a une sortie s_0

  pour une entrée $e - e_0$, nulle sur $]-\infty, 0[$, on résout le problème comme précédemment et on trouve une solution s_1.

  Donc pour une entrée e, une solution est $s_0 + s_1$. Il s'agit de la solution stationnaire pour $t < 0$.

EXEMPLE 4 : Circuit série RC fermé depuis longtemps. En $t = 0$, on ouvre le circuit. Dans le cas présent, l'entrée vaut v sur $]-\infty, 0[$ puis 0 sur $]0, +\infty[$.

Si l'entrée est constante égale à v, la sortie stationnaire (charge du condensateur) est constante égale à $q_0 = Cv$.

Si l'entrée est nulle sur $]-\infty, 0[$ et vaut $-v$ sur $]0, +\infty[$, cette entrée est opposée à celle calculée dans l'exemple 1, et il en est donc de même de la sortie, de sorte que $q_1 = -vC(1 - \exp(-\frac{t}{RC}))$

Donc pour l'entrée égale à v sur $]-\infty, 0[$ et nulle sur $]0, +\infty[$, somme des deux entrées précédentes, la sortie est $q = q_0 + q_1 = vC\exp(-\frac{t}{RC})$

- Le troisième cas se traite comme suit. Si $e(t) = e_0 e^{i\omega t}$ sur $\mathbb{R}$, on peut supposer qu'il existe une sortie également sinusoïdale sous la forme $s_0 e^{i\omega t}$, avec s_0 complexe. On cherche ce qu'on appelle la sortie en régime permanent. Si on remplace dans l'équation différentielle, on remarque que $\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega\, e^{i\omega t}$ de sorte que dériver revient à multiplier par $i\omega$, au même titre qu'en appliquant la transformée de Laplace, dériver revenait à multiplier par p. Il en résulte que, si H est la fonction de transfert, la solution s'obtient directement au moyen de la relation $s_0 e^{i\omega t} = H(i\omega)\, e_0 e^{i\omega t}$ et donc que $s_0 = H(i\omega)e_0$, relation jouant un rôle analogue à $S(p) = H(p)E(p)$. Cette méthode donne seulement la solution particulière en régime permanent.

◆