SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

PLAN

I : Divers types de convergence

1– Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un même ensemble de définition D et à valeurs réelles ou complexes. On s'intéresse à la fonction f limite des f_n. Quel sens donner à cette limite ? L'idée la plus naturelle est de définir, si elle existe, la fonction f par $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Si une telle fonction f existe, on dit que f est la limite simple de la suite (f_n). Cette notion est la première qui a été utilisée, surtout à partir du XVIIIème, mais il s'avère qu'elle ne possède aucune propriété satisfaisante. En effet :

❑ Si les f_n sont continues, il n'en est pas de même de f.
EXEMPLE : $f_n(x) = x^n$ sur [0,1]. On a $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(1) = 1$, donc f est discontinue en 1.
Autrement dit, $\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est différent de $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$. On ne peut pas intervertir les limites sans précaution.

❑ Si les f_n sont dérivables et convergent simplement vers une fonction dérivable f, il n'y a aucune raison que les dérivées f_n' convergent, et même si c'est le cas, qu'elles convergent vers $f\,'$.
EXEMPLE : $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$ sur $\mathbb{R}$. On a $f(x) = 0$ et donc $f\,'(x) = 0$. Mais $f_n'(x) = \cos(nx)$ n'admet en général aucune limite.
Autrement dit, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]$ est différent de $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$. On ne peut pas intervertir les symboles de limites et de dérivation sans précaution.

❑ Si les f_n sont intégrables sur I, et converge vers f, on peut très bien avoir :

$$\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit $\int_{\mathrm{I}} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est différent de $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$. On ne peut pas faire traverser le signe d'intégration par le symbole de limite sans précaution.

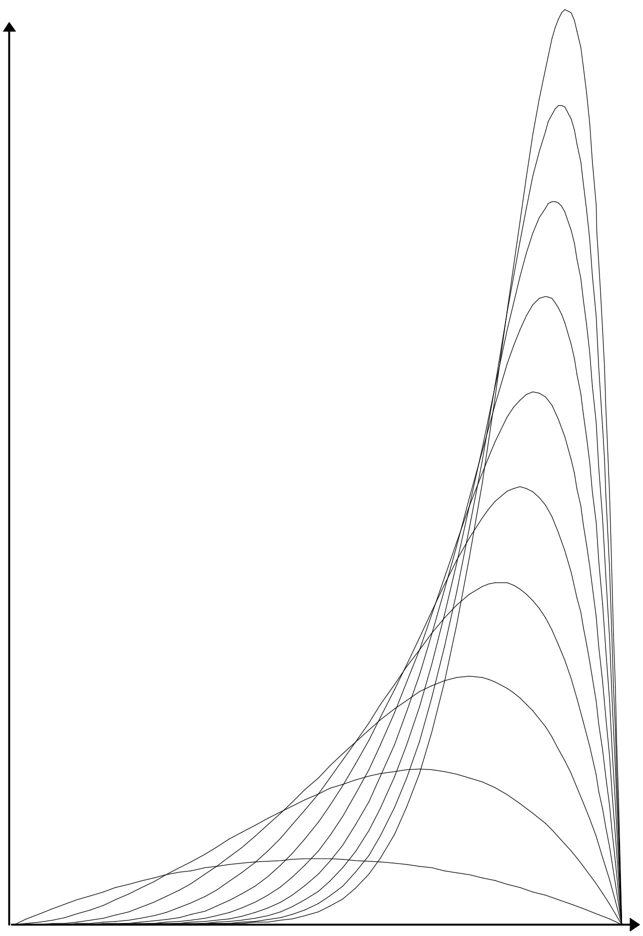
EXEMPLE 1 :
Cet exemple est dû à Darboux[1], en 1875. D'une part, $\int_0^1 2n^2x \exp(-n^2x^2)\,\mathrm{d}x$ vaut $1 - \exp(-n^2)$, de limite égale à 1, et d'autre part, sous l'intégrale, la fonction tend vers 0. Il semble que ce soit là le premier exemple explicitement mis en évidence sur cette question.

EXEMPLE 2 :
Des exemples un peu plus simples peuvent être trouvés. Sur I = [0,1[, $f_n(x) = n^2x^n$ converge vers $f(x) = 0$. Pourtant $\int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n^2}{n+1}$ tend vers l'infini, alors même que la fonction converge simplement vers la fonction nulle.

Un exemple comparable s'applique à l'intervalle fermé [0,1] en prenant $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$. Cette suite continue à converger vers la fonction nulle, pourtant :

$$\int_0^1 n^2x^n(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \text{ tend vers 1.}$$

[1] Gaston Darboux, *Mémoire sur les fonctions continues*, Annales scientifiques de l'ENS, 2ème série, tome 4 (1875), p.77, 84,
http://archive.numdam.org/ARCHIVE/ASENS/ASENS_1875_2_4_/ASENS_1875_2_4__57_0/ASENS_1875_2_4__57_0.pdf



Les fonctions $x \to n^2x^n(1-x)$ *convergent simplement vers* 0, *mais pas uniformément*

EXEMPLE 3 :

On peut vérifier par récurrence que, pour tout n, $\int_0^{\infty} e^{-t}\,\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = 1$ (effectuer une intégration par parties). En faisant tendre n vers l'infini, on a donc :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-t}\,\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = 1$$

alors que $\int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} e^{-t}\,\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = 0$

*Début de partie réservée aux PSI/PSI**

On est donc amené à chercher d'autres critères de convergence. On peut en particulier définir $\lim_{n\to\infty} f_n$ au moyen de $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$, en choisissant une norme. Il existe cependant plusieurs normes possibles, non équivalentes. On dira que :

❑ $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge <u>uniformément</u> vers f sur I si $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$, où $\| f \|_\infty = \mathrm{Sup}\ \{\left|f(x)\right| \mid x \in \mathrm{I}\}$ (notée également $\mathrm{N}_\infty(f)$). Cette définition n'a de sens que pour les fonctions bornées.

❑ $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge <u>en moyenne</u> vers f sur I si $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_1 = 0$, où $\| f \|_1 = \int_I |f(t)|\, dt$ (notée également $N_1(f)$). Cette définition n'a de sens que pour les fonctions intégrables sur I.

❑ $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge <u>en moyenne quadratique</u> vers f sur I si $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_2 = 0$, où on a posé $\| f \|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2\, dt}$, notée également $N_2(f)$. Cette définition n'a de sens que pour les fonctions de carrés intégrables.

Nous utiliserons essentiellement les notions de convergence simple et uniforme. Regardons de plus près ces deux notions :
(i) La convergence simple sur I signifie :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(ii) La convergence uniforme sur I signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

La différence entre les deux définitions provient uniquement du fait que, dans la première, la valeur de N dépend du choix de x et de ε, alors que dans la deuxième, la valeur de N dépend de ε mais est indépendant du choix de x. La convergence uniforme entraîne a fortiori la convergence simple. Du point de vue pratique, pour montrer qu'une suite (f_n) de fonctions converge uniformément vers f, on essaie de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une suite (u_n) indépendamment de x et qui converge vers 0. On a en effet dans ce cas $\| f_n - f \|_\infty \leq u_n$ qui tend vers 0.

2– Exemples

❑ Soit $f_n(x) = x^n$, pour x élément de [0,1]. Pour $x < 1$, la limite simple est 0. Pour $x = 1$, elle vaut 1. On a $\| f_n - f \|_\infty = 1$. Donc la convergence n'est pas uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. On a $|x^n| < \varepsilon$ dès que $n \geq N$, avec $N > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(x)}$. On voit bien que N dépend de ε et de x et qu'il est impossible de prendre un même N sur tout l'intervalle [0,1]. Par contre, si on se limite à un intervalle $[0, a]$, avec $a < 1$, alors on peut prendre $N > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(a)}$, et la convergence est uniforme sur $[0, a]$, ce dont on peut s'apercevoir directement en écrivant que $\| f_n \|_\infty = a^n$, la norme étant ici calculée sur $[0, a]$.

❑ Soit $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$ sur $\mathbb{R}$. La limite simple est 0, mais $\| f_n \|_\infty = 1$ qui ne tend pas vers 0, donc il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Cependant, si on se limite à un ensemble borné $[-a, a]$, on a :

$$\| f_n \|_\infty = \text{Sup } \{ \left|\sin(\frac{x}{n})\right|, x \in [-a, a] \}$$

Pour n assez grand, (par exemple dès que $\frac{a}{n} < \frac{\pi}{2}$), la fonction $x \to \sin(\frac{x}{n})$ est croissante donc :

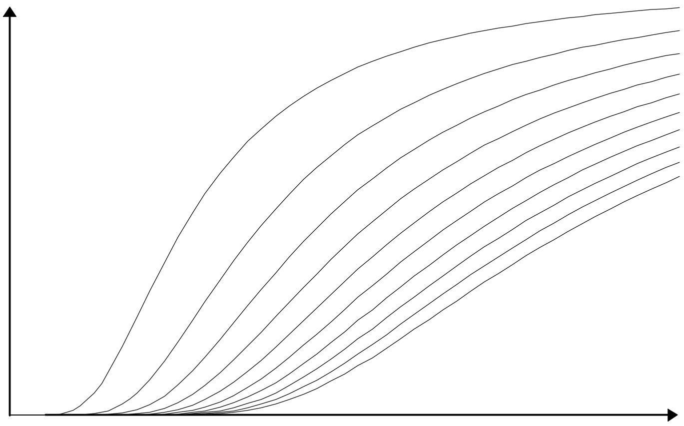
$$\forall x \in [-a, a], \left|\sin(\frac{x}{n})\right| \leq \sin(\frac{a}{n})$$

et $\qquad \| f_n \|_\infty = \sin(\frac{a}{n})$ qui tend vers 0.
et la convergence est uniforme sur tout segment.

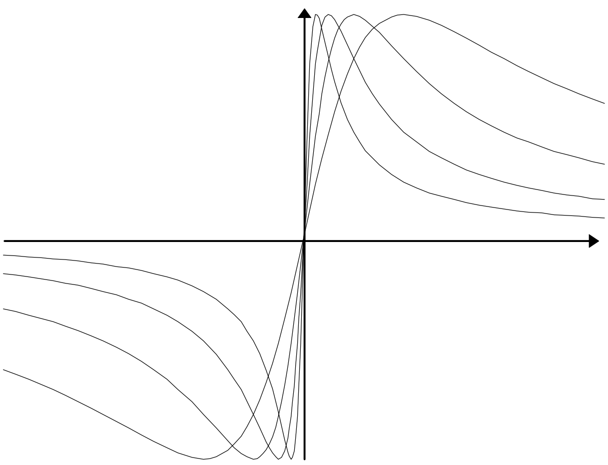
❑ Soit $f_n(x) = \dfrac{\cos(x^2 + n^2)}{n}$ sur $\mathbb{R}$. On a $\| f_n \|_\infty = \dfrac{1}{n}$, donc la suite converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

D'une manière générale, on cherche d'abord la limite simple f, puis on essaie de déterminer si $f_n - f$ converge uniformément vers 0, en calculant $\| f_n - f \|_\infty$ par une étude de fonction, ou en majorant cette quantité par une suite numérique qui converge vers 0.

❑ Soit $f_n(x) = \left(\dfrac{x^2}{1 + x^2}\right)^n$ sur $\mathbb{R}$. (f_n) converge simplement vers 0. Cependant $\| f_n \|_\infty = 1$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. Elle l'est cependant sur tout segment.



❑ Soit $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$. Pour tout x, la suite converge vers 0. Il y a donc convergence simple. Cependant, $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ donc $\| f_n \|_\infty \geq \frac{1}{2}$ et il n'y a pas convergence uniforme.



3– Continuité et convergence uniforme

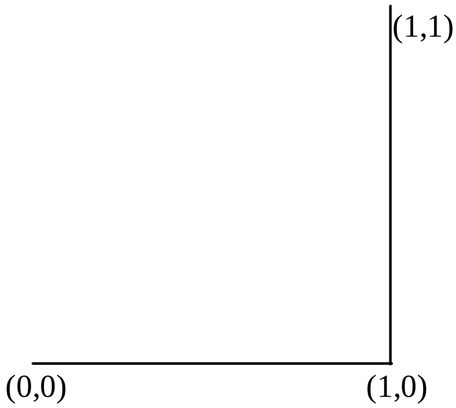
La notion de convergence uniforme résulte des tentatives de Cauchy au début du XIXème pour montrer que la limite d'une suite de fonctions continues est continue. Nous avons vu que ce résultat est faux dans le cas de la convergence simple, mais cette notion n'était pas encore dégagée du temps de Cauchy. Au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, la notion de fonction et de continuité était purement intuitive. En particulier, le fait qu'une limite de fonctions continues soit continue allait de soi et la question ne se posait pas. Cela était considéré comme une évidence. Cauchy, considérant que le concept de fonction et de limite se devait de reposer sur une rigueur analogue à celle développée en géométrie, a préféré introduire une définition arithmétique de la continuité.

> *Une fonction est continue si un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

On remarquera que cette définition est donnée dans un langage intuitif. On peut tenter d'y reconnaître notre définition avec les ε et les α, mais cette tentative est anachronique. Ayant proposé une définition de la continuité, Cauchy se devait de démontrer le principe de continuité afin de prouver l'efficacité de sa définition, ce qu'il fit en 1821. Voici le raisonnement de Cauchy :

Si chaque f_n est continue, alors f est continue. En effet, pour tout x, il existe un $f_n(x)$ arbitrairement près de $f(x)$, et pour y suffisamment près de x, $f_n(y)$ est arbitrairement près de $f_n(x)$ par continuité de f_n. Pour n assez grand, $f_n(y)$ est arbitrairement près de $f(y)$. Donc pour y suffisamment près de x, $f(y)$ est arbitrairement près de $f(x)$.

Ce raisonnement, qu'on reconnaîtra être convaincant, est incorrect, comme le prouve l'exemple de la suite de fonction x^n, sur l'intervalle [0,1], qui converge vers la fonction f égale à 0 pour x élément de [0,1[et à 1 en $x = 1$. Notons que les mathématiciens de l'époque auraient refusé de voir ici un contre–exemple, considérant que la suite de fonctions (x^n) converge vers :



qui est "visiblement" un graphe continu.

(Remarquons que cette vision originale existe encore aujourd'hui en physique, lorsque l'on représente la caractéristique d'une diode idéale, intensité I en ordonnée en "fonction" de la tension U en abscisse. Cette caractéristique s'obtient comme limite de la caractéristique d'une diode dont la tension seuil est V_0 et de résistance R_0. On a :

$$I = 0 \text{ si } U \le V_0$$
$$I = \frac{U - V_0}{R_0} \text{ si } U \ge V_0$$

On obtient une diode idéale en faisant tendre V_0 et R_0 vers 0)

La démonstration de Cauchy peut être formalisée de la façon suivante, en notation moderne. Soit $\varepsilon > 0$ et x donné :

i) Continuité de f_n en x :

$$\exists\, \alpha > 0, |y - x| < \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

ii) Convergence de $(f_n(x))$ vers $f(x)$:

$$\exists \text{ N}, \forall n > \text{N}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

iii) Convergence de $(f_n(y))$ vers $f(y)$:

$$\exists \text{ M}, \forall n > \text{M}, |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Donc, en prenant $n > \text{Max(N,M)}$, et $|y - x| < \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

Or nous savons que cette démonstration est fausse puisque nous possédons un contre-exemple. Cette contradiction entre la démonstration de Cauchy et l'existence de contre–exemples est bizarrement passée inaperçue pendant plusieurs années. Abel, en 1826, relève bien que des contre–exemples existent. Il admet cependant la validité du théorème de Cauchy pour les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ce serait cependant une erreur de la rejeter sans l'analyser davantage et surtout sans savoir où se cache l'erreur. La raison pour laquelle la démonstration de Cauchy, quoique jugée correcte pendant ces années, ne s'applique pas à toutes les suites de fonctions continues, n'a pas été trouvée avant plusieurs années. En 1849, Seidel reproduisit la démonstration ci-dessus en précisant les relations fonctionnelles entre les variables. Soit $\varepsilon > 0$ et x donné :

i) Continuité de f_n en x :

$$\exists \alpha(\varepsilon, x, n) > 0, |y - x| < \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

ii) Convergence de $(f_n(x))$ vers $f(x)$:

$$\exists \text{ N}(\varepsilon, x), \forall n > \text{N}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

iii) Convergence de $(f_n(y))$ vers $f(y)$:

$$\exists \text{ M}(\varepsilon, y), \forall n > \text{M}, |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Donc, en prenant $n > \text{Max(N,M)}$, et $|y - x| < \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

La difficulté provient que Max(N,M) dépend de ε, x et y, et que α dépend de ε, x et n donc α dépend de ε, x et y, ce qui pose problème, y étant défini à partir de α.

La démonstration garde toute sa valeur si la condition suivante, utilisée implicitement par Cauchy, est vérifiée : N et M ne dépendent que de ε et non de x et y. On reconnaît là le nouveau concept de convergence uniforme, inconnu avant Cauchy, mais cependant utilisé implicitement.

Le théorème de Cauchy devient alors parfaitement correct :

PROPOSITION :

Soit a un point d'un intervalle I *sur lequel est définie une suite de fonctions* (f_n) *convergeant uniformément vers f sur* I. *Si les* f_n *sont continues en a, il en est de même de f.*

Une suite de fonctions continues convergeant ***uniformément*** *sur un intervalle* I *admet une limite continue.*

Il suffit également que la convergence soit uniforme sur tout segment de I, à défaut d'avoir lieu sur I tout entier, puisque la continuité en un point x_0 de I pourra se montrer en considérant que x_0 appartient à un segment inclus dans I. Il en sera de même plus loin pour les séries.

On notera également la nécessité d'utiliser des définitions de limites utilisant les ε et α et allant au-delà de l'intuition, afin d'obtenir un résultat valide. Voici la démonstration moderne.

<u>Démonstration</u> :
Soit $\varepsilon > 0$. Exprimons la convergence uniforme de (f_n) vers f :

$$\exists\, N, \forall\, n > N, \forall\, x, \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

Choisissons un tel $n > N$, et exprimons la continuité de f_n en a :

$$\exists\, \alpha > 0, \forall\, x, \left|x - a\right| < \alpha \Rightarrow \left|f_n(a) - f_n(x)\right| < \varepsilon$$

Donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $\left|x - a\right| < \alpha$, on a :

$$\begin{aligned}\left|f(a) - f(x)\right| &\leq \left|f(a) - f_n(a)\right| + \left|f_n(a) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f(x)\right| \\ &< 3\varepsilon\end{aligned}$$

et f est continue en a.

La proposition précédente s'exprime encore de la façon suivante pour une suite de fonctions continues (f_n) convergeant uniformément :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Il y a interversion possible des deux symboles limites, ce qui n'est pas le cas si la convergence est simple. On a en effet, sur [0, 1[:

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 1} x^n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} \lim_{n\to+\infty} x^n = 0$$

On peut également considérer le cas où a est une borne de I.

PROPOSITION

*Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant **uniformément** vers f sur un intervalle* I *et soit a une borne de* I. *Si les limites $l_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$ existent, alors $\lim_{n\to\infty} l_n = l$ existe, $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et vaut l.*

La démonstration est hors programme.

EXEMPLE :
Soit $u_0(x) = x > 0$ et $v_0(x) = 1$. On définit par récurrence les deux suites de fonctions :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

On vérifiera facilement que, pour tout x, et tout $n \geq 1$, on a : $u_n \leq v_n$, (u_n) croît alors que (v_n) décroît. La suite (u_n) admet donc une limite f alors que la suite (v_n) converge vers une fonction g. Passant à la limite dans les relations de récurrence, on obtient $f = g$. Par récurrence également, les fonctions u_n et v_n sont continues. En est-il de même de leur limite commune f ? Pour cela, cherchons si la suite (v_n) converge uniformément vers f. On a :

$$0 \leq v_{n+1}(x) - f(x) = \frac{u_n(x) + v_n(x)}{2} - f(x) = \frac{v_n(x) - f(x)}{2} + \frac{u_n(x) - f(x)}{2} \leq \frac{v_n(x) - f(x)}{2}$$

puisque $\frac{u_n(x) - f(x)}{2} \leq 0$. Donc :

$$0 \leq v_n(x) - f(x) \leq \frac{1}{2^{n-1}} (v_1(x) - f(x)) = \frac{1}{2^n} (1 - f(x) + x - f(x))$$

On a ou bien $1 \leq f(x) \leq x$ et $1 - f(x) + x - f(x) \leq x - f(x) \leq x - 1$
ou bien $x \leq f(x) \leq 1$ et $1 - f(x) + x - f(x) \leq 1 - f(x) \leq 1 - x$

Dans tous les cas :

$$\left|v_n(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{2^n} \left|1 - x\right|$$

On n'obtient pas ainsi de convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ mais si on se limite à un segment I = [0,A], alors $\| v_n - f \|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$ (A + 1), donc il y a convergence uniforme sur [0,A], donc f continue sur [0,A]. A étant quelconque, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4- Cas des séries

On rappelle que $\| f \|_\infty$ désigne $\displaystyle\operatorname{Sup}_{x \in I} \left|f(x)\right|$.

PROPOSITION-DEFINITION

Soit ($\sum f_n$) une série telle que la série $\sum \| f_n \|_\infty$ soit convergente, ou, de manière équivalente, pour laquelle il existe une série de réels positifs convergente ($\sum \alpha_n$) telle que : $\forall n, \| f_n \|_\infty \leq \alpha_n$. Alors la série $\sum f_n$ est dite normalement convergente. Dans ce cas, la série converge uniformément.

Si les f_n sont continues en un point, il en est de même de la somme.

Toujours sous l'hypothèse de la convergence normale, si les f_n admettent une limite l_n en a, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ aussi, $\sum l_n$ est une série convergente et $\displaystyle\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n$.

<u>Démonstration</u>

La série converge. En effet, pour tout x élément de I, on a $\left|f_n(x)\right| \leq \| f_n \|_\infty$, et puisque la série $\sum \| f_n \|_\infty$ converge, on en déduit que, pour tout x, la série $\sum f_n(x)$ converge. Nous noterons $f(x)$, la somme de la série.

La convergence est uniforme. En effet :

$$\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \|_\infty = \| \sum_{k=0}^{\infty} f_k - \sum_{k=0}^{n} f_k \|_\infty = \| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \|_\infty$$

Or, pour tout $p \geq n$ et tout x de I, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{p} \left|f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{p} \| f_k \|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_\infty$$

Faisant tendre p vers l'infini, on obtient :

$$\forall x \in I, \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_\infty$$

donc $\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_\infty$

Mais $\sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \| f_k \|_\infty - \sum_{k=0}^{n} \| f_k \|_\infty$, reste d'une série convergente, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On a donc les implications suivantes :

$$\begin{array}{l} \text{CV normale} \Rightarrow \text{CV uniforme} \Rightarrow \text{CV simple en tout point} \\ \quad\Downarrow \\ \text{CV absolue en tout point} \end{array}$$

La condition de convergence normale est plus forte que celle de convergence uniforme. Elle ne lui est pas équivalente. On peut trouver des séries uniformément convergente mais pas normalement. Prendre par exemple, pour $n > 0$:

f_n linéaire par morceaux

$f_n(x) = 0$ en dehors de $[n, n + 1]$

$= \frac{1}{n}$ pour $x = n + \frac{1}{2}$

alors $\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Cependant, la série converge uniformément vers la fonction f égale à f_n sur chaque intervalle $[n, n + 1]$.

La propriété de continuité en un point d'une série normalement convergente de fonctions continues en ce point, ou la propriété sur les limites, provient du résultat analogue sur les suites de fonctions convergeant uniformément, compte tenu du fait que la suite des sommes partielles d'une série de fonctions convergeant normalement converge uniformément.

EXEMPLES :

❑ $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ est une fonction continue. En effet, pour tout x, $\left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série est normalement convergente, donc uniformément convergente. Chaque terme de la somme étant continue, la somme est elle-même continue. Ce type de situation est trivial à régler.

❑ $S(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2nx)$. Outre le fait qu'il est difficile de savoir si la série converge, puisque son terme général change de signe et qu'il est majoré en valeur absolue par $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1}$ qui diverge, on ne peut rien conclure sur la continuité de la somme. La série n'est pas normalement convergente. Ce type de série est délicat à traiter. On sera peut-être surpris d'apprendre que la somme vaut $\cos(x)$ sur l'intervalle $]0, \pi[$ (noter l'intervalle **ouvert**. Il y a discontinuité en 0). Le lecteur incrédule de voir un **cosinus** exprimé comme somme d'une série de **sinus** est invité à tracer quelques sommes partielles(de rang assez élevé pour s'en convaincre). S étant impaire, elle vaut $-\cos(x)$ sur $]-\pi, 0[$.

❑ Par contre, la série $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$ est normalement convergente et donc continue. (On peut montrer qu'elle vaut, précisons-le, $\sin(x)$ pour $0 < x < \pi$).

❑ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2 + n^2}$ est normalement convergente, puisque, pour tout x, $0 \leq \dfrac{1}{x^2 + n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$. La somme est donc continue.

❑ Pour z ayant une partie réelle strictement supérieure à 1, on pose $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$. Alors $\left|\dfrac{1}{n^z}\right| \leq \dfrac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}$, donc la série converge simplement. De plus, si on choisit $a > 1$ et si on se place sur le demi-plan $P_a = \{z \mid \mathrm{Re}(z) > a\}$, alors $\left|\dfrac{1}{n^z}\right| \leq \dfrac{1}{n^a}$ et la série est normalement convergente, donc continue. a pouvant être choisi arbitrairement, on en déduit que ζ est continue sur $P_1 = \{z \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ puisque tout z de P_1 se trouve dans un certain P_a. On connaît quelques valeurs de ζ , par exemple tous les $\zeta(2p)$ avec p entier. Par exemple $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$.

❑ Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$? On est tenté de dire que la limite est nulle, puisque $\lim\limits_{x \to 0} xe^{-nx} = 0$ et qu'une série de termes nuls est nulle. Mais on a ainsi calculé $\sum_{n=0}^{\infty} \lim\limits_{x \to 0} xe^{-nx}$ et non $\lim\limits_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$. Les deux sont égaux lorsque la convergence est normale, par exemple sur $[a, 1]$ avec $0 < a < 1$. Mais ce n'est pas le cas sur $[0, 1]$. La fonction $f_n : x \to xe^{-nx}$ admet un maximum en $\dfrac{1}{n}$ qui vaut $\dfrac{1}{en}$, de sorte que $\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_\infty$ diverge. En fait, $\lim\limits_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$ se calcule directement. La série est en effet une série géométrique de somme $\dfrac{x}{1 - e^{-x}}$ et de limite 1 quand x tend vers 0. Mais qu'en aurait-il été si on n'avait pas pu calculer la somme ?

❑ Le même problème se pose pour $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(nx)\, e^{-nx}$, pour $x > 0$. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(nx)\, e^{-nx}$? Là aussi, contrairement à ce qu'on aurait pu croire, la limite est non nulle. En effet :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(nx)\, e^{-nx} = \mathrm{Im}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} e^{inx}\, e^{-nx}\Big) = \mathrm{Im}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{ix-x})^n\Big)$$

On reconnaît la somme d'une suite géométrique de raison e^{ix-x}, dont le module e^{-x} est élément de $]0, 1[$. Donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(nx)\, e^{-nx} = \mathrm{Im}\, \frac{1}{1 - e^{ix-x}} = \mathrm{Im}\, \frac{1 - e^{-ix-x}}{(1 - e^{-ix-x})(1 - e^{ix-x})} = \frac{\sin(x)e^{-x}}{1 - 2\cos(x)e^{-x} + e^{-2x}}$$

$$= \frac{\sin(x)}{e^x - 2\cos(x) + e^{-x}} = \frac{\sin(x)}{2(\mathrm{ch}(x) - \cos(x))} \sim \frac{1}{x} \text{ quand } x \text{ tend vers } 0.$$

On a donc : $\lim\limits_{x \to 0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin(nx)\, e^{-nx} = +\infty$!!!

❑ Un exemple comparable est donné par $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$ avec $x > 0$. On a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = 1 + x$ et donc :

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = 1$$

alors que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{(1+x)^n} = 0$

II : Intégration et dérivation

Sauf dans les cas les plus simples, aucune démonstration ne sera donnée. En effet, le programme se prévoit que l'intégration des fonctions continues par morceaux. Or une suite ou une série de fonctions continues par morceaux peut fort bien converger vers une fonction qui n'est pas continue par morceaux. Pour traiter ce type de cas, il faudrait développer une théorie de l'intégration plus vaste (Intégrale de Lebesgue) que celle qui est prévue au programme.

A titre d'exemple, soit (f_n) la suite de fonctions définies comme suit :
Si p et q sont deux nombres premiers, on définit :

$f_{2^p3^q}(x) = 0$ sauf pour $x = \frac{p}{q}$ pour lequel on pose $f_{2^p3^q}(\frac{p}{q}) = 1$

Pour tout n qui n'est pas de la forme 2^p3^q avec p et q premiers entre eux, $f_n = 0$. Les fonctions f_n sont donc des fonctions identiquement nulles, sauf en un point au plus. Elles sont donc continues par morceaux et d'intégrale nulle (quel que soit l'intervalle sur lequel on intègre). La fonction $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, quant à elle, est nulle partout, sauf aux points rationnels positifs, où elle vaut 1 (fonction de Dirichlet). Elle n'est pas continue par morceaux et son intégrale ne peut être définie dans le cadre de ce cours. Il se trouve que, dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, on a bien $\int_0^1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n = 0$, mais si nous pouvons définir le membre de droite, le membre de gauche a une définition hors de portée du programme de CPGE. On touche là l'une des plus grosses difficultés auxquelles se sont affrontés les mathématiciens entre 1700 et 1900 : définir l'intégrale de fonctions les plus générales possibles.

Nous supposerons donc dans la suite que toutes les fonctions sont continues par morceaux, (y compris les limites de suites de fonctions ou les sommes de séries de fonctions, ce qui n'est pas toujours aisé à vérifier).

1- Convergence uniforme sur un segment

Nous l'avons déjà vu, $\int_I \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t)\, dt$ pouvait être différent de $\lim\limits_{n \to \infty} \int_I f_n(t)\, dt$. Il faut là aussi des hypothèses supplémentaires pour avoir l'égalité.

PROPOSITION :
Soit (f_n) *une suite de fonctions continues sur un* ***segment*** I = $[a,b]$ *et convergeant* ***uniformément*** *vers une fonction f. Alors* $\displaystyle\int_I \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration :
On a pour tout fonction continue g :

$$\| g \|_1 = \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\,\| g \|_\infty$$

donc :

$$\| f_n - f \|_1 \leq (b-a)\,\| f_n - f \|_\infty$$

de sorte que la convergence de (f_n) pour la norme uniforme entraîne la convergence en moyenne de (f_n). Comme $\displaystyle\left|\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_I |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t = \| f_n - f \|_1$, le théorème s'en déduit immédiatement.

EXEMPLE : Soient $0 < a < b$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\int_a^b e^{-ux}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b\int_0^n e^{-ux}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u \quad \text{(on admettra que l'ordre d'intégration est indifférent)} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \frac{1 - e^{-un}}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_a^b \lim_{n\to+\infty}\frac{1 - e^{-un}}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{(interversion à justifier ci-après)} \\
&= \int_a^b \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Il suffit pour prouver l'interversion de montrer que la suite de fonctions $\dfrac{1 - e^{-un}}{u}$ converge uniformément vers $\dfrac{1}{u}$ sur $[a,b]$, ce qui est le cas puisque la norme uniforme de la différence est majorée par $\dfrac{e^{-an}}{a}$.

On prendra garde au fait que le résultat énoncé s'applique uniquement aux intégrales définies sur des **segments**. En effet :

❑ Si I n'est pas un segment, les f_n peuvent toutes être intégrables, mais l'intégrale de f n'est pas la limite des intégrales des f_n. Considérons par exemple la suite de fonctions continues et affines par morceaux définies par :

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2} \quad \text{sur } [0,n]$$
$$= \frac{2}{n} - \frac{x}{n^2} \text{ sur } [n,2n]$$
$$= 0 \quad \text{sur } [2n,+\infty[$$

$\| f_n \|_\infty = \dfrac{1}{n}$ donc la suite converge uniformément vers 0, cependant, son intégrale sur $[0,+\infty[$ vaut 1.

❑ Il est également possible qu'on ait une suite de fonctions intégrables (f_n) convergeant uniformément vers une fonction f non intégrable. Soit $f_n = \dfrac{1}{x^{1 + 1/n}}$ sur $[1,+\infty[$. Les f_n sont intégrables d'intégrale n et convergent uniformément vers $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On vérifiera en effet que le maximum de $| f - f_n |$ est atteint pour $x = (1 + \dfrac{1}{n})^n$ et que la valeur de ce maximum tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

❑ On a des difficultés analogues pour les séries. Par exemple, sur $[0, 1[$, la série $\sum (nx^{n-1} - (n + 1)x^n)$ est une série télescopique de somme égale à 1, de sorte que :

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (nx^{n-1} - (n + 1)x^n) \, dx = 1$$

Par contre, $\displaystyle\int_0^1 nx^{n-1} - (n + 1)x^n \, dx = 1 - 1 = 0$ de sorte que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 nx^{n-1} - (n + 1)x^n \, dx = 0$. On a donc :

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (nx^{n-1} - (n + 1)x^n) \, dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 nx^{n-1} - (n + 1)x^n \, dx$$

Pour permuter les symboles $\sum$ et $\int$, des hypothèses supplémentaires sont donc nécessaires.

PROPOSITION
Soit $\sum f_n$ une série convergeant ***normalement*** *sur un* ***segment*** $I = [a,b]$. Alors :

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k$$

Le résultat résulte de la proposition précédente sur les suites, en prenant la suite des sommes partielles, qui converge uniformément vers la somme de la série. Une démonstration directe peut également être donnée.

$$\int_I \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \, dt - \sum_{k=0}^{n} \int_I f_k(t) \, dt = \int_I \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \, dt - \int_I \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \, dt$$
$$= \int_I \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \, dt - \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \, dt$$

$$= \int_I \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t$$

$\Rightarrow \quad \left| \int_I \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \int_I f_k(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_I \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_I \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_\infty \,\mathrm{d}t = (b-a) \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_\infty$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

EXEMPLE :

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \arctan(\frac{x}{n})\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{n}$$

En effet, $\| \frac{1}{n^2+x^2} \|_\infty = \frac{1}{n^2}$ terme général d'une série convergente.

2- Theoreme de la convergence dominée

THEOREME

Soit (f_n) *une suite de fonctions continues par morceaux à valeurs réelles ou complexes, et convergeant simplement sur* I *vers une fonction f* [*continue par morceaux*]. *On suppose qu'il existe une fonction* φ [*continue par morceaux*] *positive et intégrable sur* I *telle que, pour tout n,* $|f_n| \leq \varphi$*.*
Alors f et les f_n *sont intégrables sur* I *et* $\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$

Ce théorème est admis.

EXEMPLE :
Soit $f_n(x) = x^n e^x$ sur [0,1]. Alors $f_n(x)$ tend simplement vers $f(x) = 0$ sur [0, 1[et $f(1) = e$. En outre, les f_n sont toutes majorées par la fonction constante $\varphi = e$. Le théorème s'applique et :

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0$$

On aurait pu trouver ce résultat par le raisonnement plus élémentaire suivant, consistant à majorer l'intégrale de f_n :

$$0 \leq \int_0^1 f_n \leq \int_0^1 x^n\, e\,\mathrm{d}x = \frac{e}{n+1}$$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On notera que le théorème de convergence dominée est vérifié dans les deux cas particuliers suivants :

❑ Suite décroissante de fonctions intégrables positives : il suffit de prendre $\varphi = f_0$.

❑ Suite croissante de fonctions intégrables positives, convergeant vers une fonction f intégrable. Il suffit de prendre $\varphi = f$.

On pourra faire un parallèle entre le théorème de convergence dominée des intégrales et le théorème de passage à la limite pour une série de fonctions convergeant normalement. Ci-dessous, nous avons souligné en couleur les analogies. On passe d'une situation à l'autre en remplaçant le symbole d'intégration par celui de sommation, la variable réelle d'intégration t par l'indice de sommation n, et la variable n par la variable x. Les entiers n apparaissant dans les deux situations n'ont absolument pas le même rôle :

$$\mathrm{I}_n = \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad\qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Hypothèses :

$$\forall\, t,\ \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \qquad\qquad \forall\, n,\ \lim_{x\to a} f_n(x) = l_n$$

$$\exists\, \varphi,\ \forall\, (n, t),\ |f_n(t)| \leq \varphi(t) \qquad\qquad \exists\, (\varphi_n),\ \forall\, (x, n),\ |f_n(x)| \leq \varphi_n$$

$$\int_{\mathrm{I}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \text{ converge}$$

Alors $\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_n = \int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$ $\qquad\qquad \lim_{x\to a} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n$

Le théorème de convergence dominée ne permet pas de résoudre tous les cas. Considérons l'exemple suivant :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

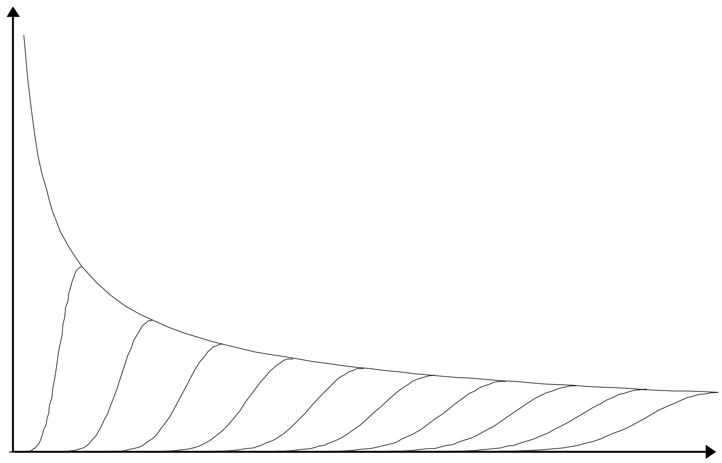
On peut écrire $\int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t$ en posant :

$f_n(t) = e^{-t}\frac{t^n}{n!}$ pour $0 \leq t < n$

$\quad = 0$ pour $t \geq n$

Cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle. Mais l'intégrale converge-t-elle vers 0 ? Il est douteux qu'on puisse majorer les f_n par une même fonction intégrable φ. En effet, on vérifiera que $\| f_n \|_\infty = e^{-n}\frac{n^n}{n!}$ obtenue lorsque t tend vers n à gauche et dont un équivalent (avec la formule de Stirling) vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. La convergence de la suite (f_n) vers 0 est donc uniforme, mais cela ne suffit pas à conclure, puisque l'intervalle $[0,\infty[$ n'est pas un segment.

La fonction φ devant majorer toutes les f_n est probablement d'une forme comparable à $\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}$ qui n'est pas intégrable. Ce raisonnement n'apporte pas de preuve certaine de l'inexistence de φ mais laisse penser qu'il est vain de chercher à appliquer le théorème de convergence dominée. Les représentations graphiques peuvent apporter une aide précieuse pour formuler des conjectures. Ci-dessous, on verra quelques graphes de fonctions f_n, ainsi que la fonction $x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}$.



On peut avoir des doutes sur le fait que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n e^{-t}\,\frac{t^n}{n!}\,dt = 0$ car le maximum des f_n décroît, mais le graphe de la fonction s'étale sur un intervalle de plus en plus grand. En fait, nous allons montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n e^{-t}\,\frac{t^n}{n!}\,dt = \frac{1}{2}$ en nous ramenant à une suite d'intégrales sur lesquelles on pourra appliquer le théorème de convergence dominée. Effectuons le changement de variables $v = \frac{n-t}{\sqrt{n}}$. On obtient :

$$\int_0^n e^{-t}\,\frac{t^n}{n!}\,dt = \frac{1}{n!}\sqrt{n}\,e^{-n}\,n^n \int_0^{\sqrt{n}} \exp(v\sqrt{n})\,(1-\frac{v}{\sqrt{n}})^n\,dv$$

La formule de Stirling $n! \sim n^n\,e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ permet de voir que le facteur $\frac{1}{n!}\sqrt{n}\,e^{-n}\,n^n$ devant l'intégrale tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Quant à l'intégrale, elle est de la forme $\int_0^\infty g_n(v)\,dv$ avec $g_n(v) = \exp(v\sqrt{n})\,(1-\frac{v}{\sqrt{n}})^n$ pour $0 \le v < \sqrt{n}$ et $g_n(v) = 0$ pour $v \ge \sqrt{n}$. Pour $0 \le v < \sqrt{n}$, en utilisant un développement limité du logarithme sous la forme

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + R(x)$$

avec $R(x) = o(x^2)$ reste du développement limité, on a :

$$g_n(v) = \exp(v\sqrt{n})\,\exp(n\ln(1-\frac{v}{\sqrt{n}})) = \exp(-\frac{v^2}{2} + nR(\frac{v}{\sqrt{n}}))$$

Par ailleurs, $R(x) = \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}$ a pour dérivée $-\frac{1}{1-x} + 1 + x = -\frac{x^2}{1-x}$. R est strictement décroissante et varie de 0 à $-\infty$. R est donc négative. Donc :

$$0 \le g_n(v) \le \exp(-\frac{v^2}{2})$$

Cette inégalité est également vraie pour $v \ge n$ puisque $g_n(v) = 0$.

Or $\exp(-\frac{v^2}{2})$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée sur la suite (g_n). Du fait que, $R(x) \sim o(x^2)$ quand x tend vers 0, il en résulte que que $nR(\frac{v}{\sqrt{n}}) = o(1)$ et donc que le majorant $\exp(-\frac{v^2}{2})$ des $(g_n(v))$ n'est autre que la limite simple de la suite des $(g_n(v))$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} g_n(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^{\infty} \exp(-\frac{v^2}{2})\,\mathrm{d}v.$$

La valeur de cette intégrale est connue est vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On trouvera une démonstration de cette propriété dans le fichier SERIES.PDF sur les séries et les intégrales généralisées.

Il en résulte finalement que $\displaystyle\int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} g_n(v)\,\mathrm{d}v$ converge bien vers $\frac{1}{2}$.

D'autres limites peuvent être déduites de celle-ci. Par exemple, on vérifiera par récurrence que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t = n!$ ou que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = 1$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, on a aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t$ est quasiment coupée en deux entre les deux intervalles $[0, n]$ et $[n, +\infty[$.

Dernière propriété sur cette question. On a, pour tout x :

$$e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!}\int_x^{\infty} e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t$$

En effet, pour $x = 0$, les deux membres sont égaux à 1, et par ailleurs, leurs dérivées par rapport à x valent respectivement $\displaystyle -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$ et $\displaystyle -e^{-x}\frac{x^n}{n!}$, qui sont égales. Les deux fonctions ayant même dérivée et coïncidant en un point sont égales. Il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}\int_n^{\infty} e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

(et non 1 comme le calcul naïf et erroné suivant aurait pu laisser le croire :

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \sim e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!} = e^{-n}\,e^n = 1$$

Ce calcul est **FAUX**)

Cela signifie au contraire que, dans le développement en série de e^n sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}$, environ la moitié de la valeur de l'exponentielle est donnée par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ et l'autre moitié par $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}$ le partage étant d'autant plus équitable que n est grand.

3- Intégration terme à terme d'une série

Dans le cas d'une série ($\sum f_n$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée sur les sommes partielles de la série, en vérifiant que les $\left|\sum_{k=0}^{n} f_k\right|$ sont majorées par une fonction intégrable φ positive.

On prend en général $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$. On admettra que, pour vérifier que φ est intégrable, il suffit de voir si la série $\sum \int_I |f_n|$ converge. On énonce donc :

THEOREME

Soit ($\sum f_n$) *une série de fonctions continues par morceaux à valeurs réelles ou complexes, intégrables sur* I. *On suppose que la série est convergente en tout point de* I *de somme f* [*continue par morceaux*] *et que la série* ($\sum \int_I |f_n|$) *converge. Alors f est intégrable et :*

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$$

On remarquera que, dans le cas de séries positives, il suffit de vérifier que $\sum \int_I f_n$ converge.

EXEMPLES :

❑ Soit p entier positif. Considérons $\int_0^{\infty} \frac{t^p}{e^t - 1}\,dt$. On vérifiera que l'intégrale est bien définie. Pour $t > 0$, on peut écrire :

$$\frac{t^p}{e^t - 1} = \frac{1}{e^t}\frac{t^p}{1 - e^{-t}} = \frac{t^p}{e^t}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{\infty} t^p\, e^{-nt}.$$

Or $\int_0^{\infty} t^p\, e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n^{p+1}}\int_0^{\infty} u^p\, e^{-u}\,du$ en posant $u = nt$

$= \frac{p!}{n^{p+1}}$ car on vérifiera par récurrence sur p que $p! = \int_0^{\infty} u^p\, e^{-u}\,du$

On obtient le terme général d'une série convergente, donc le théorème précédent s'applique et on peut écrire :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^p}{e^t - 1}\,dt = p!\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$$

En admettant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, on en déduit :

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \frac{\pi^2}{6}$$

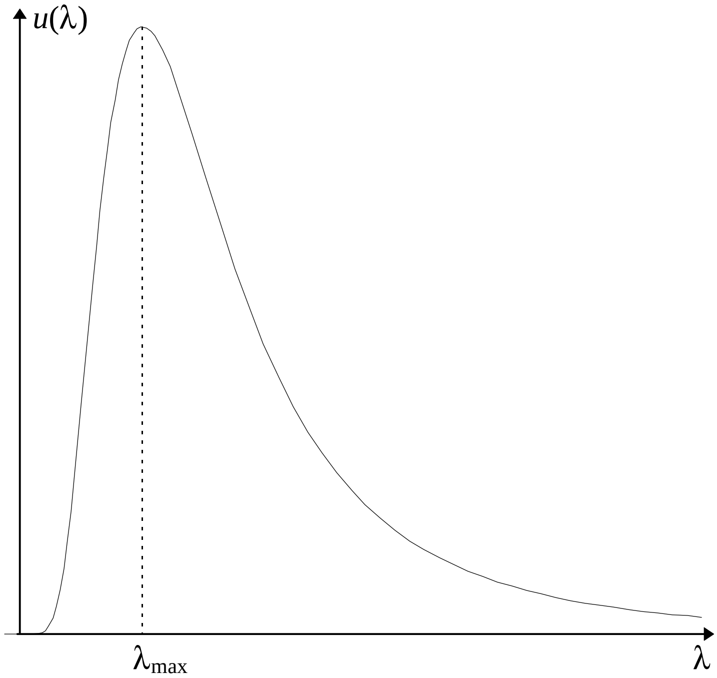
$$\int_0^{\infty} \frac{t^3}{e^t - 1}\,dt = \frac{\pi^4}{15}$$

A noter qu'il n'existe aucune formule connue pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ou $\int_0^{\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

Signalons une intéressante utilisation de la formule $\int_0^{\infty} \frac{t^3}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{15}$ en physique : dans le cadre du rayonnement dit du corps noir (rayonnement contenu dans une cavité vide dont les parois sont maintenues à température constante), on fait l'hypothèse qu'un corps chauffé à la température T émet un rayonnement électromagnétique dans toutes les longueurs d'onde λ, en satisfaisant la distribution dite de Planck ; la densité d'énergie par unité de volume émise par le corps sous forme d'un rayonnement de longueur d'onde λ vaut :

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{k\mathrm{T}\lambda}) - 1}$$

où T est la température (en °K), h la constante de Planck (6.625 10^{-34} J.s), c la vitesse de la lumière (3 10^8 $m.s^{-1}$), k la constante de Boltzmann (1.3806 10^{-23} J.K^{-1}), λ la longueur d'onde (en m).



Le corps émet principalement à la longueur d'onde λ_{max}. Quand λ tend vers $+\infty$, on a $u(\lambda) \sim \frac{8\pi k\mathrm{T}}{\lambda^4}$ (loi de Rayleigh-Jeans). On pourra également vérifier que, si α est la racine positive de l'équation $\mathrm{X}e^{\mathrm{X}} + 5 - 5e^{\mathrm{X}} = 0$, soit environ 4,965, alors $\lambda_{max} = \frac{hc}{\alpha k\mathrm{T}} \approx \frac{2{,}90\ 10^{-3}}{\mathrm{T}}$ m (loi de Wien).Cette loi permet de calculer la température du corps en observant sa couleur. Si tant est qu'on puisse appliquer cette théorie aux étoiles, on a par exemple, dans la constellation d'Orion, Bételgeuse qui est une supergéante rouge émettant un rayonnement à 0.83 μm et Rigel qui émet au contraire à 0.19 μm. On peut en déduire l'ordre de grandeur des températures superficielles de ces étoiles : 3500 °K pour Bételgeuse et 15300 °K pour Rigel (et 5300 °K pour notre Soleil qui émet dans le jaune). On a également déterminé la température de l'Univers (environ 3°K) en détectant en 1965 un fond cosmique de rayonnement dans les ondes millimétriques.

L'énergie totale émise par le corps par unité de volume est :

$$E = \int_0^\infty u(\lambda)\, d\lambda$$

Si on fait le changement de variable $t = \dfrac{hc}{kT\lambda}$, on obtient :

$$E = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{t^3}{e^t - 1}\, dt$$

On reconnaît l'intégrale dont on vient de calculer la valeur, d'où :

$$E = \frac{8\pi^5(kT)^4}{15(hc)^3} \text{ (loi de Stefan-Boltzmann)}$$

❑ Considérons $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^p}{e^t + 1}\, dt$ pour $p \geq 1$, différant très légèrement de l'exemple précédent. On vérifiera que l'intégrale est bien définie. Pour $t > 0$, on peut écrire :

$$\frac{t^p}{e^t + 1} = \frac{1}{e^t} \frac{t^p}{1 + e^{-t}} = \frac{t^p}{e^t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nt} = \sum_{n=1}^{\infty} t^p (-1)^{n-1} e^{-nt}.$$

Or $\displaystyle\int_0^\infty t^p e^{-nt}\, dt = \frac{p!}{n^{p+1}}$ comme précédemment (on a pris la valeur absolue de la fonction $t^p (-1)^{n-1} e^{-nt}$ de sorte que le signe $(-1)^{n-1}$ a disparu). Le théorème s'applique encore et on peut écrire :

$$\int_0^\infty \frac{t^p}{e^t + 1}\, dt = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} t^p (-1)^{n-1} e^{-nt}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^\infty t^p e^{-nt}\, dt$$

$$= p! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1}}$$

En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{e^t + 1}\, dt = \frac{\pi^2}{12}$.

❑ Considérons $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1 + t^2}\, dt = \int_0^{1/\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/\sqrt{3}} (-1)^{2n} t^{2n}\, dt$. On a le droit de permuter les signes intégrales et somme car $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} t^{2n}\, dt = \frac{1}{(2n + 1)3^n\sqrt{3}}$ est le terme général d'une série convergente. On obtient :

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)3^n\sqrt{3}}$$

❑ $\displaystyle\int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/2} x^n\, dx$ car cette dernière série (à termes positifs) vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)2^{n+1}}$ qui converge. On a donc :

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \qquad \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

❑ L'exemple précédent s'étend à tout t élément de [0,1[:

$$\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n\,dx \text{ car } \int_0^t x^n\,dx = \frac{t^{n+1}}{n+1} \text{ terme général d'une série convergente.}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^t \frac{1}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \qquad -\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

❑ Qu'en est-il maintenant pour $t < 0$? Pour voir si $\int_t^0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_t^0 x^n\,dx$, nous devons vérifier si la série $\sum_{n=0}^{\infty} \int_t^0 |x^n|\,dx$ converge. Or :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_t^0 |x^n|\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_t^0 (-1)^n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^n}{n}$$

qui converge pour $|t| < 1$. Dans ce cas, la permutation des symboles d'intégration et de sommation conduit au même résultat :

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \text{ pour } |t| < 1$$

❑ On notera que, pour $t = 1$, $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ aussi bien que $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergent.

❑ Considérons $\int_0^{1/3} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/3} t^{2n}\,dt$ car $\int_0^{1/3} t^{2n}\,dt = \frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)}$ terme général d'une série convergente. On obtient :

$$\frac{1}{2}\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)}$$

Par contre, $\int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\,dt$ diverge, au même titre que $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

4– Dérivation

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un espace normé de dimension finie, et convergeant uniformément vers f. Il n'est pas sûr que f soit dérivable, ni a fortiori que f_n' converge vers $f\,'$.

EXEMPLES :

❑ $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$

Cette suite converge uniformément vers 0. Chaque terme est dérivable, mais la suite des dérivées ne converge pas.

❑ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$

Cette suite converge simplement vers $|x|$, qui n'est pas dérivable en 0. La convergence est même uniforme. En effet :

$$0 \leq f_n(x) - |x| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ qui tend vers 0}$$

❑ Le même problème se pose pour les séries. On peut montrer que, sur $[-\pi,\pi]$, on a :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

Peut-on en déduire, en dérivant terme à terme, que :

$$2x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) \text{ ?}$$

Rien n'est moins sûr. Il n'est d'ailleurs pas évident de montrer que la série converge. Il se trouve cependant que l'égalité a effectivement lieu, sur $]-\pi, \pi[$, mais ni en π ni en $-\pi$, où l'égalité est clairement fausse, puisque le membre de droite est nul. En dérivant de nouveau terme à terme, a-t-on :

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} 4(-1)^{n+1}\cos(nx) \text{ ?}$$

Non, car la série diverge.

On ne peut donc rien déduire du comportement des f_n' à partir de celui des f_n. Cependant, l'inverse est possible. Si on connaît le comportement des f_n', on peut en déduire quelque chose sur les f_n, car on se ramène à un problème d'intégration. On a :

PROPOSITION :

Soit (f_n) *une suite de fonctions de classe* C^1 *sur un intervalle* I, *qui converge simplement vers une fonction* G *et telle que la suite des* ***dérivées*** *converge* **uniformément** *vers une fonction g sur tout segment de* I. *Alors* G *est* C^1 *et* $G' = g$.

Comme pour la continuité, on peut se contenter de la continuité uniforme sur tout segment de I, puisque la dérivation est, comme la continuité, un problème local.

❑ Montrons d'abord que G' = g. Nous en donnerons deux démonstrations au choix :
Démonstration 1 :
Soit x_0 un point de I. On a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \mathrm{G}(x_0)$ et, pour tout x de I :

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t + f_n(x_0)$$

En appliquant le résultat relatif à l'intégration d'une suite de fonctions convergeant uniformément sur un segment, le membre de droite converge vers $\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{G}(x_0)$, d'où :

$$\mathrm{G}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{G}(x_0)$$

donc $\mathrm{G}'(x) = g(x)$, puisque g est continue comme limite uniforme de fonctions continues.

On peut remarquer en outre que la convergence de (f_n) vers G est uniforme sur tout segment. En effet, prenons un segment J (que l'on étend éventuellement de façon à ce qu'il contienne x_0) et soit x élément de J :

$$\left|f_n(x) - \mathrm{G}(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_n'(t) - g(t)\,\mathrm{d}t + f_n(x_0) - \mathrm{G}(x_0)\right|$$

$\leq \left|x - x_0\right| \, \| f_n' - g \|_\infty + \left|f_n(x_0) - \mathrm{G}(x_0)\right|$ où $\| \ \|_\infty$ est ici la norme uniforme sur J

$\leq \left|\mathrm{J}\right| \, \| f_n' - g \|_\infty + \left|f_n(x_0) - \mathrm{G}(x_0)\right|$ où $\left|\mathrm{J}\right|$ désigne la longueur de J

$\Rightarrow \quad \| f_n - \mathrm{G} \|_\infty \leq \left|\mathrm{J}\right| \, \| f_n' - g \|_\infty + \left|f_n(x_0) - \mathrm{G}(x_0)\right|$ quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini).

Démonstration 2 :
Soit x_0 un élément de I. On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \quad \text{(à justifier)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} f_n'(x_0) \\
&= g(x_0)
\end{aligned}$$

Il suffit de justifier la permutation des limites en deuxième ligne. Pour cela, il suffit de montrer que les fonctions $h_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ forment une suite qui converge uniformément vers $h(x) = \dfrac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(x_0)}{x - x_0}$. Or, en appliquant l'inégalité des accroissements finis :

$$h_n(x) - h_p(x) = \frac{(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow \quad \left|h_n(x) - h_p(x)\right| \leq \| f_n' - f_p' \|_\infty$$

Si on fait tendre p vers l'infini, on a donc, pour tout x :

$$|h_n(x) - h(x)| \leq \| f_n' - g \|_\infty$$

donc $\quad \| h_n - h \|_\infty \leq \| f_n' - g \|_\infty$

La suite (f_n') convergeant uniformément vers g, il en est de même de la suite (h_n) qui converge donc uniformément vers $h(x) = \dfrac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0}$.

Nous admettrons la généralisation suivante pour les fonctions de classe C^k :

PROPOSITION :

Soit (f_n) *une suite de fonctions de classe* C^k *sur un intervalle* I, *telle que les suites* (f_n), (f_n'), ..., $(f_n^{(k-1)})$ *convergent simplement et telle que la suite* $(f_n^{(k)})$ *converge* ***uniformément*** *sur tout segment. Posons G la limite des* f_n. *Alors G est de classe* C^k, *et pour* $0 \leq i \leq k$, $G^{(i)}$ *est la limite simple de la suite* $(f_n^{(i)})$.

Pour une série, le théorème de dérivation s'exprime comme suit :

PROPOSITION

i) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de classes* C^1 *sur un intervalle* I. *Si la série* $(\sum f_n')$ *converge normalement sur* I *ou sur tout segment de* I, *et si la série* $(\sum f_n)$ *converge simplement, alors* $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.

ii) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de classe* C^k *sur un intervalle* I. *Si, pour tout i élément de* $[\![0, k-1]\!]$ les *séries* $(\sum f_n^{(i)})$ *converge simplement sur I* et *si la série* $(\sum f_n^{(k)})$ *converge* ***normalement*** *sur* I *ou sur tout segment de* I, *alors la somme* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *est une fonction de classe* C^k, *et pour* $0 \leq i \leq k$, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(i)}$.

Cette proposition découle de la proposition précédente sur les suites, en considérant la suite des sommes partielles. Une démonstration directe du i) peut également être donnée. Puisqu'il y a convergence normale de $(\sum f_n)$ sur tout segment, on a, pour tout x et x_0 :

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \qquad \text{(utilisation de la convergence normale sur un segment)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t)$ est continue (série convergeant normalement de fonctions continues), $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est bien une primitive de $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t)$.

EXEMPLE :

❑ Pour tout x, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ converge sur $\mathbb{R}$, car $\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. Les dérivées de chaque fonction valent $-\frac{2x}{(x^2+n^2)^2}$ dont la valeur absolue est majorée par :

$$\frac{2|x|}{(x^2+n^2)^2} \le \frac{1}{n^2} \qquad \text{(utiliser le fait que } \frac{2|x|}{x^2+n^2} \le \frac{2n|x|}{x^2+n^2} \le 1\text{)}$$

donc la série des dérivées converge normalement. La dérivée de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ est donc bien $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+n^2)^2}$

❑ Soit $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$, alors $G'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ car la série dérivée converge normalement. Par contre, on ne peut rien dire de G''.

❑ On définit l'exponentielle complexe comme étant $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Considérons une variable réelle t et la fonction $t \to e^{tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n z^n}{n!}$. La série des dérivées est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} z^n}{(n-1)!} = ze^{tz}$ qui converge normalement sur tout segment. Il s'agit donc bien de la dérivée de e^{tz}.

III : Intégrales dépendant d'un paramètre

Une intégrale dépendant d'un paramètre est une fonction de la forme

$$g(x) = \int_I f(x,t)\, dt$$

Ainsi, on intègre une fonction de t sur un intervalle I, mais cette fonction dépend d'un paramètre x. On obtient donc une fonction $g(x)$. En général, on ne sait pas calculer explicitement l'intégrale de sorte que la seule expression connue de g est sous cette forme intégrale. Se pose alors souvent la question de calculer une limite de g (ou de savoir si g est continue) ou de dériver g.

Comment calculer $\lim_{x \to x_0} g(x)$? On est évidemment tenter de dire que cette quantité vaut $\int_I \lim_{x \to x_0} f(x,t)\, dt = \int_I f(x_0,t)\, dt$ si f est continue, d'autant plus que, si l'intégrale n'est pas calculable, c'est a priori **la seule** possibilité de traitement à notre disposition. Malheureusement ***C'EST FAUX***.

EXEMPLE 1 :

Soit $g(x) = \int_0^{\infty} xe^{-tx}\, dt$ définie pour $x \geq 0$. On a donc $g(0) = 0$ et on vérifiera que pour $x > 0$, $g(x) = 1$.

De sorte que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = 1 \neq \int_0^{\infty} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} xe^{-tx}\, dt = 0$

De même, on peut être tenté de dériver g en dérivant f par rapport à x, autrement dit de dire que $\dfrac{dg}{dx} = \int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$. Mais c'est ***EGALEMENT FAUX***.

EXEMPLE 2 :
Soit $g(x) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-tx}\, dt$ définie pour $x \geq 0$. On vérifiera que pour $x \geq 0$, $g(x) = x$. On a donc $g'(x) = 1$ pour $x \geq 0$. Cependant $\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt = \int_0^{+\infty} (2x - tx^2)e^{-tx}\, dt$ et pour $x = 0$, cette quantité vaut 0 alors que nous avons vu que $g'(0) = 1$. On a donc $g'(0) \neq \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t)\, dt$.

EXEMPLE 3 :
Soit $g(x) = \int_0^{\infty} x^{3/2}\, e^{-tx}\, dt$ définie pour $x \geq 0$. On vérifiera que pour $x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{x}$. On a donc $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$. Cependant $\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt = \int_0^{+\infty} (\dfrac{3\sqrt{x}}{2} - tx^{3/2})e^{-tx}\, dt$ et pour $x = 0$, cette quantité vaut 0 alors que nous avons vu que $g'(0)$ n'est pas définie.

EXEMPLE 4 :
Soit $g(x) = \int_0^{\infty} \dfrac{x}{1 + x^2t^2}\, dt$. On a :

g(0) = 0

pour $x > 0$, $g(x) = \int_0^{\infty} \dfrac{1}{1 + u^2}\, du = \dfrac{\pi}{2}$ en posant $u = xt$

pour $x < 0$, $g(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

donc g n'est pas continue, bien que la fonction $(x, t) \to \dfrac{x}{1 + x^2t^2}$ le soit.

EXEMPLE 5 :
Pour $x \geq 0$, posons $g(x) = \int_0^{\infty} \dfrac{\exp(-(t^2 + 1)x^2)}{t^2 + 1}\, dt$. (Dans cet exemple, et contrairement aux précédents, bien malin est celui qui sait calculer g pour pouvoir vérifier ce qu'il avance ☹).
A-t-on le droit de dériver sous le signe d'intégration, obtenant ainsi :

$$g'(x) = \int_0^\infty - 2x \exp(-(t^2+1)x^2)\, dt = -2x\exp(-x^2) \int_0^\infty \exp(-t^2x^2)\, dt \ ?$$

En admettant la formule $\int_0^\infty \exp(-v^2)\, dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et en faisant le changement de variable $v = tx$, on obtient, pour $x > 0$:

$$g'(x) = -\sqrt{\pi}\exp(-x^2)$$

Cette dérivée admet une limite en $x = 0$, de sorte que $g'(0) = -\sqrt{\pi}$, alors que l'expression $\int_0^\infty - 2x \exp(-(t^2+1)x^2)\, dt$ est nulle pour $x = 0$. Que conclure ? Contrairement à l'exemple 1 où g était calculable, permettant de trouver g' et de voir quelle formule est incorrecte, ici, on ne sait pas calculer g. On voudrait au contraire se servir de l'expression de g' pour l'intégrer et retrouver une expression de g. Encore faut-il savoir si l'on a bien $g'(x) = -\sqrt{\pi}\exp(-x^2)$, malgré le problème posé en $x = 0$.

Pour intervertir limite et intégration, ou bien dérivation et intégration, il est besoin d'hypothèses supplémentaires indispensables pour garantir le résultat. **Si ces hypothèses ne sont pas vérifiées, on ne peut rien conclure**.

1- Continuité

On passe des intégrales dépendant d'un paramètre à des suites de fonctions en utilisant le résultat suivant, montré dans le chapitre sur les fonctions du cours de première année, FONCTION.PDF. IL y a équivalence entre :

i) g tend vers $g(a)$ lorsque x tend vers a.

ii) Pour toute suite (x_n) tendant vers a, $(g(x_n))$ tend vers $g(a)$

Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f :

$$\mathrm{A}\times\mathrm{I} \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$
$$(x,t) \to f(x,t)$$

On s'intéresse à la continuité de $x \to g(x) = \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\, dt$. Un minimum d'hypothèses raisonnables est vraisemblable. Il faut d'abord que l'intégrale soit définie pour tout x, donc que, pour tout x, la fonction $t \to f(x,t)$ soit continue par morceaux et intégrable sur I. Ensuite, si on veut que g soit continue en x, il paraît raisonnable d'exiger que, pour tout t, $x \to f(x,t)$ soit continue en x. Soit alors a un point de A. On a :

g est continue en a

$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$

$\Leftrightarrow \quad$ pour toute suite (x_n) de limite a, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$

$\Leftrightarrow \quad$ pour toute suite (x_n) de limite a, $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{I}} f(x_n,t)\, dt = \int_{\mathrm{I}} \lim_{n\to\infty} f(x_n,t)\, dt$

Il s'agit donc d'une simple intervertion de passage à la limite avec le symbole d'intégration pour la suite de fonctions $n \to f(x_n, .)$. Il suffit que les hypothèses du théorème de convergence dominée soient vérifiées, à savoir que la suite soit dominée par une fonction $t \to \varphi(t)$ intégrable sur I, autrement dit, que : $\forall\, n, \forall\, t, |f(x_n,t)| \le \varphi(t)$. Bien que la fonction φ puisse dépendre de la suite (x_n)

choisie, la condition sera a fortiori vérifiée si φ n'en dépend pas et si on impose que, pour tout x et tout t; $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$. On a ainsi montré le théorème suivant :

CONTINUITE

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexe définie sur $A \times I$ *où* A *et* I *sont deux intervalles de* $\mathbb{R}$. *On suppose que :*

pour tout t de I, *l'application* $x \to f(x, t)$ *est continue*

pour tout x de A, *l'application* $t \to f(x, t)$ *est continue par morceaux par rapport à t.*

il existe une fonction φ *continue par morceaux et intégrable sur* I *telle que, pour tout* (x, t) *de* $A \times I$, *on ait* $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ *(hypothèse de domination).*

Alors la fonction g définie sur A par $g(x) = \int_I f(x,t)\, dt$ *est continue sur A.*

REMARQUES :

i) La continuité étant une propriété locale, il suffit que l'hypothèse de domination soit vérifiée sur un ensemble de la forme $[a - r, a + r] \times I$ pour prouver la continuité en a.

ii) Si A et I sont des segments et f est continue, alors l'hypothèse de domination est vérifiée. En effet, f étant continue sur le fermé borné $A \times I$ y est bornée donc on peut prendre pour φ une constante M majorant $|f|$

iii) On pourra faire un parallèle entre le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre et celui des séries de fonctions convergeant normalement. Ci-dessous, nous avons souligné en couleur les analogies. On passe d'une situation à l'autre en remplaçant le symbole d'intégration par celui de sommation, et la variable réelle t par l'indice entier n :

	$g(x) = \int_I f(x, t)\, dt$	$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$
Hyp :	$\forall\, t,\ x \to f(x, t)$ est continue	$\forall\, n,\ x \to f_n(x)$ est continue
	$\exists\, \varphi,\ \forall\, (x, t),\ \lvert f(x, t)\rvert \leq \varphi(t)$	$\exists\, (\varphi_n),\ \forall\, (x, n),\ \lvert f_n(x)\rvert \leq \varphi_n$
	$\int_I \varphi(t)\, dt$ converge	$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ converge
Alors :	$x \to g(x)$ est continue	

EXEMPLE 1 :

On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^2}\, dt = \lim_{x \to 1} \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} \frac{1}{x^2 + t^2}\, dt$

En effet, la fonction $\dfrac{1}{1 + t^2} \dfrac{1}{x^2 + t^2}$ est continue en x et en t et est dominée par 1. On peut donc prendre la limite quand x tend vers 1, x étant différent de 1. Ceci permet de calculer l'intégrale de gauche en utilisant l'intégrale de droite où l'on peut faire une réduction en éléments simples :

$$\frac{1}{1 + t^2} \frac{1}{x^2 + t^2} = \frac{1}{x^2 - 1} \left[\frac{1}{1 + t^2} - \frac{1}{x^2 + t^2} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} \frac{1}{x^2 + t^2}\, dt = \frac{1}{x^2 - 1} \left[\int_0^1 \frac{1}{1 + t^2}\, dt - \int_0^1 \frac{1}{x^2 + t^2}\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+1)}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}\right]$$

qui tend vers $\frac{1}{2} \times (-f'(1))$, où f est la fonction $x \to \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\arctan\frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2}\right) \Rightarrow f'(1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

On peut aussi calculer cette intégrale en posant $t = \tan(\theta)$. Vérifions le résultat :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

EXEMPLE 2 :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\frac{1}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

La différence avec l'exemple 1 provient du fait que l'on a remplacé l'intervalle d'intégration [0,1] par [0,+∞[. La domination de la fonction $\frac{1}{1+t^2}\,\frac{1}{x^2+t^2}$ par 1 ne convient plus, puisque 1 n'est pas intégrable sur [0,+∞]. Cependant, elle est également dominée par $\frac{1}{1+t^2}$ qui, elle, est intégrable. On peut donc poursuivre les calculs comme plus haut :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\frac{1}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2-1}\left[\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+1)}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\frac{\pi}{2}\right]$$

qui tend vers $\frac{\pi}{4}$ quand x tend vers 1. Donc $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

Vérifions. Posons $t = \tan(\theta)$.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$$

EXEMPLE 3 :

Soit $\displaystyle \mathrm{I}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x^2 - 2x\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta$

Posons $f(x,\theta) = \ln(1 + x^2 - 2x\cos(\theta))$, fonction définie et continue sur $]-1,1[\, \times [-\pi,\pi]$. Soit a un point de $]-1,1[$. Montrons la continuité de f en a. Pour cela, choisissons r strictement positif tel que $[a - r, a + r]$ soit inclus dans $]-1,1[$. f est définie sur le fermé borné $[a - r, a + r] \times [-\pi,\pi]$ donc y est bornée. L'hypothèse de domination est donc vérifiée au moyen d'une constante majorant $|f|$, et I est continue sur $[a - r, a + r]$, donc en a. La démarche étant possible pour n'importe quelle point a de $]-1,1[$, I est continue sur $]-1,1[$.

EXEMPLE 4 :

Soit $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt$. On ne peut montrer facilement que f est continue. En effet, la fonction dominante la plus naturelle est $\frac{t}{1+t^2}$, mais cette fonction n'est pas intégrable en $+\infty$. De fait, il est possible de montrer (mais c'est loin d'être évident) que, $f(x) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sg}(x)\exp(-|x|)$, où $\mathrm{sg}(x) = 1$ si $x > 0$, -1 si $x < 0$ et 0 si $x = 0$. f est discontinue en 0. En particulier :

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{\infty} \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

alors qu'on aurait pu croire que la limite est nulle.

2– Dérivation

On a un théorème analogue pour la dérivation de la fonction g, en utilisant une hypothèse de domination sur $\frac{\partial f}{\partial x}$

DERIVATION

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexe définie sur $A \times I$ *où* A *et* I *sont deux intervalles de* $\mathbb{R}$, *f étant telle que* :

pour tout t de I, *l'application $x \to f(x, t)$ est de classe* C^1

pour tout x de A, *l'application $t \to f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur* I

la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie les hypothèses du théorème précédent ($x \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue, $t \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux. Il existe φ continue par morceaux et intégrable telle que, pour tout (x, t), on ait $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \varphi(t)$).

Alors la fonction g définie sur A *par $g(x) = \int_I f(x, t)\,dt$ est de classe* C^1 *sur* A *et sa dérivée est la fonction $x \to \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,dt$.*

<u>Démonstration</u> :

Soit a un élément de I. Nous voulons montrer que $g'(a) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,dt$, autrement dit que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,dt \qquad (*)$$

Par ailleurs, cette dernière fonction est une fonction continue de a en appliquant le théorème de continuité sur l'intégrale $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,dt$, de sorte que g sera bien C^1.

La démonstration de (*) est comparable à celle sur la continuité. Il suffit de prendre une suite (h_n) quelconque tendant vers 0 et de montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{g(a + h_n) - g(a)}{h_n} = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\, dt$.

$$\frac{g(a + h_n) - g(a)}{h_n} = \int_I \frac{f(a + h_n,t) - f(a,t)}{h_n}\, dt$$

Notons f_n la fonction qui, à t associe $\dfrac{f(a + h_n,t) - f(a,t)}{h_n}$, de sorte que :

$$\frac{g(a + h_n) - g(a)}{h_n} = \int_I f_n(t)\, dt.$$

Quand n tend vers l'infini, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$. Par ailleurs, en utilisant l'inégalité des accroissements finis sur la fonction $x \to f(x,t)$, on a $\left|\dfrac{f(a + h_n,t) - f(a,t)}{h_n}\right| \leq \varphi(t)$.

De sorte que $|f_n| \leq \varphi$ et on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} \frac{g(a + h_n) - g(a)}{h_n} &= \lim_{n \to \infty} \int_I \frac{f(a + h_n,t) - f(a,t)}{h_n}\, dt \\ &= \int_I \lim_{n \to \infty} \frac{f(a + h_n,t) - f(a,t)}{h_n}\, dt \text{ (application du théorème de convergence dominée)} \\ &= \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\, dt\end{aligned}$$

On admettra la généralisation suivante, pour les fonctions de classe C^k :

PROPOSITION

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexe définie sur $A \times I$ *où* A *et* I *sont deux intervalles de* $\mathbb{R}$, *f étant telle que* :

pour tout t de I, *l'application* $x \to f(x, t)$ *est de classe* C^k

pour tout x de A,*et i élément de* $[\![0, k - 1]\!]$,*les applications* $t \to \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$ *sont continues par morceaux et intégrables sur* I

la dérivée partielle $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ *vérifie les hypothèses du théorème précédent* ($x \to \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ *est continue,* $t \to \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ *est continue par morceaux. Il existe* φ *continue par morceaux et intégrable telle que, pour tout* (x, t), *on ait* $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\right| \leq \varphi(t)$).

Alors la fonction g définie sur A *par* $g(x) = \displaystyle\int_I f(x, t)\, dt$ *est de classe* C^k *sur* A *et pour tout i élément de* $[\![0, k - 1]\!]$, $g^{(i)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)\, dt$.

EXEMPLE 1 :

Reprenons l'exemple de $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x^2 - 2x\cos(\theta))\, d\theta$ dont on a montré au paragraphe précédent la continuité sur $]-1,1[$. Soit $f(x,\theta) = \ln(1 + x^2 - 2x\cos(\theta))$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x - 2\cos(\theta)}{1 + x^2 - 2x\cos(\theta)}$ continue sur tout $]-1,1[\times [-\pi,\pi]$. En procédant d'une manière analogue à I (en se restreignant à des ensembles de la forme $[a - r, a + r] \times [-\pi,\pi]$), on montre que I est dérivable sur $]-1,1[$ avec :

$$\mathrm{I}'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x - 2\cos(\theta)}{1 + x^2 - 2x\cos(\theta)}\, d\theta$$

posons $u = \tan(\frac{\theta}{2})$, de sorte que $\cos(\theta) = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$. On a :

$$\mathrm{I}'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{x(1 + u^2) - 1 + u^2}{(1 + x^2)(1 + u^2) - 2x(1 - u^2)} \frac{2}{1 + u^2}\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 4 \frac{u^2(x + 1) + x - 1}{u^2(1 + x)^2 + (1 - x)^2} \frac{1}{1 + u^2}\, du$$

$$= \frac{2}{x}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{u^2(1 + x)^2 + (1 - x)^2} + \frac{1}{1 + u^2}\, du \qquad \text{pour } x \text{ non nul}$$

$$= \frac{2}{x}\left[- \arctan \frac{u(1 + x)}{1 - x} + \arctan u\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Donc I est une fonction constante. Etant nulle pour $x = 0$, elle est identiquement nulle, donc, pour tout x de $]-1,1[$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x^2 - 2x\cos\theta)\, d\theta = 0$.

EXEMPLE 2 :

Soit a un réel strictement positif. Considérons $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^a \frac{1 - e^{-tx}}{t}\, dt$.

La fonction $x \to \dfrac{1 - e^{-tx}}{t}$ est continue et il en est de même de $t \to \dfrac{1 - e^{-tx}}{t}$ qui se prolonge par continuité en 0. En outre, si on écrit $\dfrac{1 - e^{-tx}}{t}$ sous la forme $\psi(tx)x$ avec $\psi(u) = \dfrac{1 - e^{-u}}{u}$, on remarque que ψ est une fonction continue sur $[0, \infty[$ de limite nulle en $+\infty$, donc est bornée. Il en résulte que $\psi(xt)x$ est bornée sur toute partie de la forme $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$, où A est un segment et $\mathrm{I} = [0, a]$, donc que l'hypothèse de domination s'applique avec comme fonction dominante une constante, qui est intégrable sur $[0, a]$), et donc que φ est continue sur tout segment A et donc continue sur $\mathbb{R}$.. De plus, si on dérive sous le signe intégral par rapport à x, on obtient $\displaystyle\int_0^a e^{-tx}\, dt = \varphi'(x)$, puisque, là aussi, la fonction e^{-tx} est bornée sur tout ensemble de la forme $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$, où A est un segment quelconque. On en déduit que :

$$\varphi'(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{x}$$

Comme $\varphi(0) = 0$, on a donc $\varphi(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-ta}}{t} \, dt$, intégrale fonction de la borne supérieure et non plus intégrale dépendant d'un paramètre. Curieusement, les rôles de a et x sont symétriques, ce qu'on aurait pu voir :

- ou bien en faisant le changement de variable $u = \frac{tx}{a}$ dans la première intégrale
- ou bien en développant en série l'exponentielle. On obtient :

$$\varphi(x) = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} t^{n-1} x^n \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n \int_0^a t^{n-1} \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{x^n a^n}{n}$$

fonction symétrique de a et x. (On vérifiera que le théorème de sommation terme à terme d'une série peut s'appliquer, autorisant la permutation de $\sum_{n=1}^{\infty}$ et de $\int_0^a$). Il n'existe aucune expression de φ sous forme de fonctions élémentaires simples, mais on dispose de plusieurs formes de φ : intégrales, séries...

EXEMPLE 3 :

La fonction $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt$, définie pour $x > 0$, est continue.

En effet, considérons $0 < a < 1 < b$:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} \, dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt$$

La fonction $(x,t) \to e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $[a, b] \times]0, +\infty[$. Pour t élément de $[0,1]$, elle est majorée par $e^{-t} t^{a-1}$, qui est intégrable sur $[0,1]$ donc la première intégrale est une fonction continue de x. Pour la seconde, elle est majorée par $e^{-t} t^{b-1}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc la deuxième intégrale est une fonction continue de x.

Γ étant continue sur tout intervalle $[a, b]$, elle est continue en tout point de $]0,+\infty[$ puisque tout point de cet intervalle peut être mis à l'intérieur d'un intervalle $[a, b]$ adéquat.

On prouvera de même que $\Gamma(x)$ est dérivable de dérivée $\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) \, t^{x-1} \, dt$, et par récurrence, Γ est indéfiniment dérivable et $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t)^n \, t^{x-1} \, dt$.

Une curiosité : $\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) \, dt$ et on sait montrer que cette intégrale n'est autre que $-\gamma$, où γ est la constante d'Euler $\gamma = \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

EXEMPLE 4 :

Soit $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{1 + t^2} \, dt$. Peut-on conclure que F est dérivable ? En particulier, a-t-on $F'(x) = \int_0^{\infty} \frac{t \sin(tx)}{1 + t^2} \, dt$? Ce résultat est loin d'être évident. La fonction majorante naturelle de la valeur absolue de $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1-\cos(tx)}{1+t^2} = \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}$ est en effet $\frac{t}{1+t^2}$ qui n'est pas intégrable et nous ne pouvons donc pas conclure directement en utilisant le théorème de dérivation. En fait, il est possible de montrer que $\int_0^\infty \frac{1-\cos(tx)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}(1 - \exp(-|x|))$, qui n'est pas dérivable en 0, alors que $\int_0^\infty \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt$ est nul en 0.

EXEMPLE 5 :

Soit $x > 0$ et $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$. Sur tout ensemble de la forme $]a, +\infty[\times]0, \infty[$, avec $a > 0$, $e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}$ est dominée par e^{-at}. Sa dérivée par rapport à x également. F est donc continue et dérivable en tout point de $]a,+\infty[$, et donc sur $\mathbb{R}^{+*}$, a étant quelconque. Sa dérivée vaut :

$$F'(x) = -\int_0^\infty e^{-xt}\sin(t)\,dt = -\operatorname{Im}\int_0^\infty e^{-xt+it}\,dt$$
$$= \operatorname{Im}\frac{1}{i-x} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$\Rightarrow \quad F(x) = -\arctan(x) + \text{Cte}$

Par ailleurs, $|F(x)| \leq \int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers l'infini, donc Cte $= \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a : $\boxed{\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)} = \arctan\frac{1}{x}$

La formule est également vraie en $x = 0$. En effet, on peut montrer que F se prolonge par continuité en 0 en posant $F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ (une intégration par parties permettant d'obtenir une fonction majorée par $\frac{\text{Cte}}{t^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$ permet de montrer que cette intégrale converge effectivement).

Pour voir que F est continue en 0, on écrit que $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$. On vérifiera que, pour tout x, la série $\sum f_n(x)$ est une série alternée telle que $|f_n(x)|$ décroît. On peut alors montrer que la série converge uniformément en majorant la valeur absolue du reste par la valeur absolue de son premier terme :

$$\forall x, \left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} e^{-xt}\frac{|\sin(t)|}{t}\,dt \leq \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi}\frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{(n+1)\pi}$$

La convergence étant uniforme et les fonctions f_n étant continues, il en est de même de F. En faisant tendre x vers 0 dans la formule encadrée, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

(cf Centrale PSI 2012 - I)

◆