GEOMETRIE AFFINE

PLAN

I : Espaces affines

1- Définition

Considérons l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$. Un complexe $z = a + ib$ peut être considéré comme un vecteur (on parle du vecteur d'affixe z) ou comme un point (on parle du point d'affixe z). Mais il s'agit du même complexe z. Celui-ci peut donc, au gré de l'utilisateur, être un point ou un vecteur. Il en est de même de $\mathbb{R}^3$ dont les éléments $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ peuvent être considérés comme les composantes d'un vecteur ou les coordonnées d'un point. C'est seulement l'utilisateur qui va décider du regard qu'il porte sur ce triplet. On peut évidemment généraliser ce point de vue à $\mathbb{R}^n$, mais également à n'importe quel espace vectoriel E.

Soit donc E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou plus généralement sur un corps quelconque). Nous prendrons généralement E de dimension finie. Les éléments d'un espace vectoriel peuvent être considérés évidemment comme des vecteurs, mais dans ce chapitre, nous allons également les considérer comme des points. Se pose alors la question suivante : si a et b, éléments de E sont des points, quel est le vecteur qui les relie ? Si on regarde ce qui ce passe dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur reliant A $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à B $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ n'est autre que $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$, autrement dit, B – A. On procèdera de même dans le cas général. Dans E, le vecteur reliant a à b est le vecteur $b - a$. Pour conserver les notations usuelles en géométrie, nous noterons les éléments de E avec une majuscule lorsqu'on les considère comme des points (A et B). Le vecteur ***AB*** ou $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ n'est autre que B – A.

On a alors les propriétés, bien connue en géométrie :

❑ **La relation de Chasles** : ***AB*** + ***BC*** = ***AC*** puisque B – A + C – B = C – A.

❑ Pour tout point O de E, l'application M → ***OM*** est bijective. Sa réciproque est l'application qui, à un vecteur ***v*** de E associe le point M tel que ***OM*** = ***v***, autrement dit, M – O = ***v***, ce que nous noterons aussi M = O + ***v*** et qui est le **translaté** de O par la **translation** de vecteur ***v***.

Avec ce point de vue, E s'appelle **espace affine**. Si on souhaite distinguer E comme ensemble de points de E comme ensemble de vecteurs, il est loisible de prendre deux notations différentes, par exemple (A) pour désigner l'espace affine, ensemble des points, en gardant la notation E pour désigner l'espace vectoriel, ensemble des vecteurs. On dira alors que l'espace vectoriel E est la **direction** de l'espace affine de (A).

On peut être plus formel encore en utilisant deux ensembles distincts, l'ensemble (A) des points et l'ensemble E des vecteurs. On dit que l'ensemble (A) est un **espace affine** de direction vectorielle l'espace vectoriel E s'il existe une application qui, à tout couple (M, N) de $(A)^2$ associe un vecteur de E que l'on note ***MN***. Cette application doit vérifier les deux propriétés énoncées précédemment :

$\forall$ (M, N, P) $\in$ $(A)^3$, ***MN*** + ***NP*** = ***MP***

$\forall$ M $\in$ (A), l'application N $\in$ (A) → ***MN*** $\in$ E est bijective

Notre présentation précédente énonce qu'en espace vectoriel E est un espace affine ayant lui-même comme direction vectorielle, et c'est ce cas que nous utiliserons dans la suite du chapitre.

2- Repère

Un repère de l'espace affine E est constitué d'un point arbitraire O de E et d'une base de l'espace vectoriel E. Les **coordonnées** d'un point M de E dans ce repère sont les **composantes** du vecteur ***OM*** dans cette base. Par exemple en dimension 3, soit (O, ***i***, ***j***, ***k***) un repère de l'espace affine E. Les composantes de M sont les réels (x, y, z) tels que :

$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

$\mathrm{M} = \mathrm{O} + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

$\mathbb{R}^n$ dispose d'un repère canonique, à savoir l'origine O égal à l'élément nul, et la base canonique.

Un changement de repère consiste simultanément à changer d'origine et de vecteurs de base. En gardant encore l'exemple de la dimension 3, si Ω est la nouvelle origine, de coordonnées (a, b, c) en dimension 3 dans l'ancien repère, et si P est la matrice de passage de l'ancienne base (***i***, ***j***, ***k***) à la nouvelle base (***I***, ***J***, ***K***), alors les nouvelles coordonnées se trouvent en écrivant :

$\boldsymbol{\Omega M} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{O\Omega}$

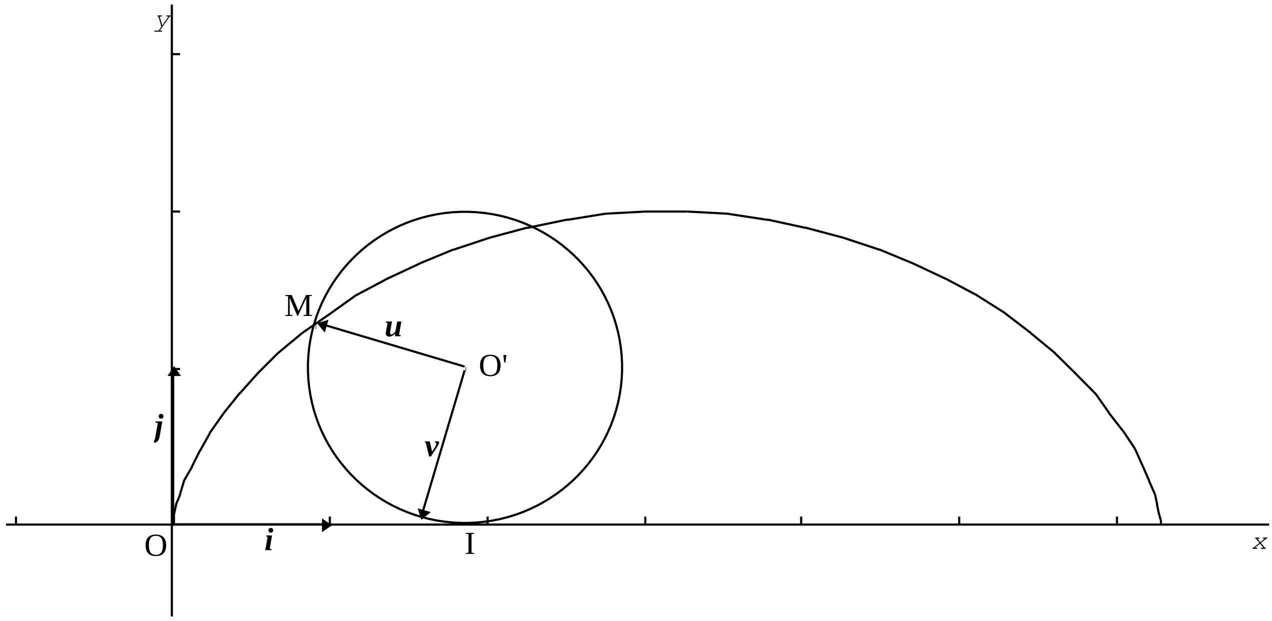
$\Leftrightarrow \quad \mathrm{X}\boldsymbol{I} + \mathrm{Y}\boldsymbol{J} + \mathrm{Z}\boldsymbol{K} = (x-a)\boldsymbol{i} + (y-b)\boldsymbol{j} + (z-c)\boldsymbol{k}$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}$$

ce qui amène à résoudre un système.

EXEMPLE : la **cycloïde**.

❑ Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère un cercle de centre O' de rayon R tangent à l'axe des x, qui roule sans glisser sur cet axe dans le sens des x croissant. On appelle θ l'angle dont la roue a tourné et on cherche les coordonnées du point M qui était initialement en O, lorsque O' se trouvait sur l'axe Oy. On dispose de deux repères : (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$) considéré comme fixe, et (O', $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$), lié à la roue, considéré comme mobile.



Initialement, pour $\theta = 0$, $\boldsymbol{OO'} = \mathrm{R}\boldsymbol{j}$, M = O, $\boldsymbol{O'M} = \mathrm{R}\boldsymbol{u} = -\mathrm{R}\boldsymbol{j}$, puis, à un instant ultérieur :

$$\boldsymbol{u} = -\sin(\theta)\boldsymbol{i} - \cos(\theta)\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{v} = \cos(\theta)\boldsymbol{i} - \sin(\theta)\boldsymbol{j}$$

où θ est l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $-\boldsymbol{j}$. Par ailleurs, la condition de roulement sans glissement s'exprime par le fait que $\boldsymbol{OO'}$ est égal à $\mathrm{R}\boldsymbol{j} + \mathrm{R}\theta\boldsymbol{i}$. $\mathrm{R}\theta$ est en effet la longueur de l'arc IM et elle est égale à celle du segment [OI].

Si on possède les notions de centre instantané de rotation et de vecteur instantané de rotation (voir une annexe du chapitre *Applications linéaires* dans L1/LINEF.PDF pour cette dernière), on peut le prouver comme suit. Le centre instantané de rotation du cercle est le point de contact I du cercle avec l'axe des abscisses. Si on plonge le plan dans un espace de dimension 3 en complétant la base ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$) en une base orthonormée directe ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$), le vecteur de rotation instantanée est, compte tenu du sens de déplacement du cercle $-\dot{\theta}\boldsymbol{k}$, où $\dot{\theta}$ désigne la dérivée de θ par rapport au temps. La vitesse du point O' est donc égale à $-\dot{\theta}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{IO'} = \mathrm{R}\dot{\theta}\boldsymbol{i}$ donc l'abscisse de O' est $\mathrm{R}\theta$. Ainsi :

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M} = \mathrm{R}\boldsymbol{j} + \mathrm{R}\theta\boldsymbol{i} + \mathrm{R}(-\sin(\theta)\boldsymbol{i} - \cos(\theta)\boldsymbol{j})$$

donc $\left[\begin{array}{l} x = \mathrm{R}\theta - \mathrm{R}\sin(\theta) \\ y = \mathrm{R} - \mathrm{R}\cos(\theta) \end{array}\right.$.

3- Barycentres

PROPOSITION

Soit (A_i) *une famille de n points d'un espace affine et* (λ_i) *n réels. Alors :*

i) *Si* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, *l'expression* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{MA}_i$ *ne dépend pas de* M

ii) *Si* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, *alors il existe un unique point* G *tel que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{GA}_i = 0$. G *s'appelle* **barycentre** *des points* A_i *affecté des coefficients* λ_i, *ou barycentre des* (A_i, λ_i).

Démonstration :

❑ i) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{MA}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (A_i - M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ ne dépend pas de M.

❑ ii) Notons $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{GA}_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (A_i - G) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i - \Lambda G = 0 \Leftrightarrow G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

Si le lecteur a un doute sur la validité du calcul qui précède, il prendra une origine arbitraire O et écrira.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{GA}_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\boldsymbol{OA_i} - \boldsymbol{OG}) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{OA_i} - \Lambda \boldsymbol{OG} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{OG} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{OA_i}$$

Comme l'expression finale ne dépend pas de O, il est inutile d'écrire le O. L'expression trouvée pour G entraîne également que le barycentre est inchangé lorsque l'on multiplie tous les λ_i par une même constante non nulle. En particulier, on peut diviser tous les λ_i par leur somme, et se ramener ainsi à des λ_i dont la somme vaut 1. G prend alors la forme simple :

$$G = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

Dans un repère, en dimension 3, si les coordonnées des A_i valent (x_i, y_i, z_i), alors celles de G valent :

$$x_G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \qquad y_G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \qquad z_G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$$

Si tous les coefficients sont égaux, on parle d'**isobarycentre**.

EXEMPLES :

❑ D'après (i), si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ désigne un vecteur. Ainsi :

$B - A = \boldsymbol{AB}$
$3B - A - 2C = (B - A) + 2(B - C) = \boldsymbol{AB} + 2\boldsymbol{CB}$

D'après (ii), si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$ désigne un point, le barycentre des $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)$.

$$\mathrm{G} = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} \text{ est le milieu de [AB]. On a :}$$

$$\boldsymbol{AG} = \mathrm{G} - \mathrm{A} = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} - \mathrm{A} = \frac{\mathrm{B} - \mathrm{A}}{2} = \frac{\boldsymbol{AB}}{2} = \mathrm{B} - \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} = \mathrm{B} - \mathrm{G} = \boldsymbol{GB}$$

Dans les autres cas, la notation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$ n'a pas de sens.

❑ Quant t varie de 0 à 1, le point A + $t\boldsymbol{AB}$ décrit le segment [AB] en partant de A pour $t = 0$ et en arrivant à B pour $t = 1$. On a aussi :

$$\mathrm{A} + t\boldsymbol{AB} = \mathrm{A} + t(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = (1 - t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}, \text{ barycentre de } (\mathrm{A}, 1 - t) \text{ et } (\mathrm{B}, t)$$

❑ Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de réels non nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Alors A_1 est barycentre des $(\mathrm{A}_j, \lambda_j)$, $2 \leq j \leq n$, si et seulement si pour tout i, A_i est barycentre des $(\mathrm{A}_j, \lambda_j)$, $j \neq i$, si et seulement si $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j = 0$ (vecteur nul). En effet :

A_1 est barycentre des $(\mathrm{A}_j, \lambda_j)$, $2 \leq j \leq n$

$\Leftrightarrow \quad \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_1 = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j$

$\Leftrightarrow \quad -\lambda_1 \mathrm{A}_1 = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j \qquad$ car $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ donc $\sum_{j=2}^{n} \lambda_j = -\lambda_1$

$\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j = 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, i,\ -\lambda_i \mathrm{A}_i = \sum_{j\neq i} \lambda_j \mathrm{A}_j$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, i,\ \sum_{j\neq i} \lambda_j \mathrm{A}_i = \sum_{j\neq i} \lambda_j \mathrm{A}_j$ car $-\lambda_i = \sum_{j\neq i} \lambda_j$

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{A}_i$ est barycentre des $(\mathrm{A}_j, \lambda_j)$, $j \neq i$

❑ Le centre de gravité en physique est un barycentre (voir plus bas).

❑ L'indice des prix est un barycentre portant sur plusieurs centaines de produits. A_i est le prix du produit n°i, et λ_i son coefficient de pondération. On a par exemple :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 10000$$

λ_i = 60 pour le pain
= 84 pour la viande de boeuf

= 23 pour les vêtements de dessus pour enfants
= 18 pour les appareils de cuisson
= 272 pour les automobiles neuves
...

Ces différents produits sont également regroupés par grandes catégories. On agrège les données relatives à la viande de boeuf, porc, volaille, etc. pour affecter un prix et un coefficient de pondération à une rubrique *viande*. On agrège ensuite les données relatives aux viandes, légumes, fruits frais, etc. pour affecter un prix et un coefficient de pondération à une rubrique *alimentation*. On obtient ainsi des rubriques *alimentation* affecté du coefficient 1499, *habillement* affecté du coefficient 493, *logement* affecté du coefficient 1357, etc. Cette procédure relève de la propriété d'associativité du barycentre décrite ci-après : la grande catégorie aura pour coefficient la somme des coefficients des sous-catégories qui la composent, et le prix moyen qui lui sera attribué sera le barycentre des prix des sous-catégories qui la composent avec leur coefficients respectifs.

ASSOCIATIVITE DU BARYCENTRE

Soit G *barycentre des* $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$. *On partitionne l'ensemble* I *des indices en k parties disjointes* $I_i, \dots, I_k$, *de façon que, pour tout i, le barycentre* G_i *des* $(A_j, \lambda_j)_{j\in I_i}$ *soit défini* (*il suffit pour cela que la somme* m_i *des* λ_j *pour j élément de* I_i *soit non nulle*). *Alors* G *est le barycentre des* $(G_i, m_i)_{i\in\{1..k\}}$

Démonstration :

❑ On a en effet, en supposant que $\sum_{j\in I} \lambda_j = \sum_{i=1}^{k} m_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i\, G_i = \sum_{i=1}^{k} \Big(m_i \sum_{j\in I_i} \frac{\lambda_j}{m_i} A_j\Big) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j\in I_i} \lambda_j\, A_j = \sum_{j\in I} \lambda_j\, A_j = G$$

Cette propriété facilite parfois le calcul du barycentre en fractionnant les difficultés.

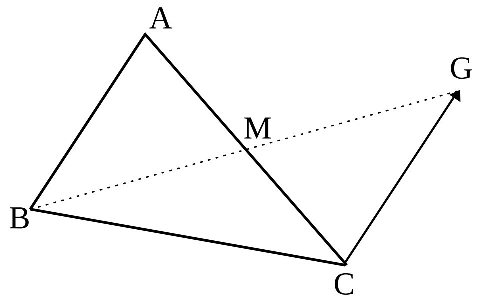
EXEMPLE :

❑ Soit un triangle ABC. Son isobarycentre est $G = \dfrac{A + B + C}{3}$. Soit M le milieu de [AB]. On a $M = \dfrac{A + B}{2}$ et $G = \dfrac{2M + C}{3}$, barycentre de M affecté du coefficient 2 et de C affecté du coefficient 1. La relation trouvée montre que G se situe au $\dfrac{2}{3}$ du segment [MC], du côté de M. (MC) est la médiane du triangle issue de C. Ceci constitue aussi une démonstration du fait que, dans un triangle, les trois médianes se coupent en un point, qui est l'isobarycentre des trois sommets.

❑ Soit un triangle ABC. Où situer le barycentre de (A, 1), (B, –1), (C, 1) ? On a :

$G = A - B + C = C + \boldsymbol{BA}$ translaté de C du vecteur $\boldsymbol{BA}$

Mais aussi, en posant M le milieu de [AC], G = 2M – B, barycentre de (M, 2) et (B, –1). On a $\boldsymbol{BG} = 2\boldsymbol{BM}$



BARYCENTRE EN PHYSIQUE

La propriété $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{GA_i} = 0$ joue un rôle fondamental en mécanique, lorsque les coefficients λ_i représentent les masses m_i des points A_i. En effet, dans bien des cas, un ensemble de points matériels peut être remplacé par le barycentre. Cela apparaît dans les théorèmes de Koenig.

Théorème de Koenig pour le moment cinétique :
Le moment cinétique par rapport à un point O d'un système de n points matériels A_i de masse m_i, animés d'une vitesse $\boldsymbol{V}_i$ dans un repère donné vaut :

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{OA}_i \wedge m_i \boldsymbol{V}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GA}_i) \wedge m_i \boldsymbol{V}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{OG} \wedge m_i \boldsymbol{V}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i \boldsymbol{V}_i$$

$$= \boldsymbol{OG} \wedge \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{V}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i \boldsymbol{V}_i$$

Or de l'égalité $\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{GA}_i = 0$, on tire, en dérivant par rapport au temps : $\sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_G) = 0$ où $\boldsymbol{V}_G$ est la vitesse du point G. Donc :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{V}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{V}_G = \mathrm{M}\, \boldsymbol{V}_G \text{ en notant } \mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{OG} \wedge \mathrm{M}\, \boldsymbol{V}_G + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i \boldsymbol{V}_i$$

$$= \boldsymbol{OG} \wedge \mathrm{M}\, \boldsymbol{V}_G + \boldsymbol{L}_G$$

Le moment cinétique du système par rapport à O est la somme du moment cinétique de G auquel on attribue la masse totale M par rapport à O, et du moment cinétique du système par rapport à G. A noter que ce dernier peut être calculé à l'aide des vitesses initiales $\boldsymbol{V}_i$ aussi bien qu'à l'aide des vitesses relatives au point G, $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_\mathrm{G}$, puisque :

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i\, \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i\, (\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_\mathrm{G})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i\, \boldsymbol{V}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{GA}_i \wedge \boldsymbol{V}_\mathrm{G}$$

$$= \boldsymbol{L}_\mathbf{G} \qquad \text{puisque } \sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{GA}_i = 0$$

Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique

Avec les notations précédentes, l'énergie du système dans le repère considéré vaut :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathrm{V}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{V}_\mathrm{G})^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathrm{V_G}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i <\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{V}_\mathrm{G}>$$ où < , > désigne le produit scalaire

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathrm{V_G}^2 + <\sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{V}_\mathrm{G}>$$

or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{GA}_i = 0$

donc $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathrm{V}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathrm{V_G}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2 + \frac{1}{2}\mathrm{MV_G}^2$

L'énergie cinétique du système est égal à la somme de l'énergie cinétique du barycentre G auquel on attribue la masse totale M, et de l'énergie cinétique du système dans le repère lié à G.

II : Sous-espaces affines

1- Définitions

DEFINITION

Soit M_0 *un point de* E *et* F *un sous-espace vectoriel de E. On appelle* **sous-espace affine** *ou* **variété linéaire affine** *passant par* M_0 *de* **direction** F *l'ensemble des points* M *tels que* $\boldsymbol{M_0M}$ *appartienne à* F. *On le note* $\mathrm{M}_0 + \mathrm{F}$.

Si F est une droite vectorielle engendrée par $\boldsymbol{V}$, $\mathrm{M}_0 + \mathrm{F}$ est appelée **droite affine** et est égal à $\{\mathrm{M} \mid \exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{M_0M} = \alpha\boldsymbol{V}\} = \{\mathrm{M}_0 + \alpha\boldsymbol{V} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Si F est un plan vectoriel engendré par $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$, $\mathrm{M}_0 + \mathrm{F}$ est dit **plan affine** et est égal à $\{\mathrm{M} \mid \exists\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{M_0M} = \alpha\boldsymbol{U} + \beta\boldsymbol{V}\} = \{\mathrm{M}_0 + \alpha\boldsymbol{U} + \beta\boldsymbol{V} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

Si F = {0}, alors M_0 + F = {M_0}.

Si F = E, alors M_0 + F = E

EXEMPLES :

❑ Considérons E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ (vu également comme espace affine). E n'est pas de dimension finie, mais cela importe peu ici. Lorsque l'on résout une équation différentielle linéaire à second membre nul, on trouve que l'ensemble F des solutions est un espace vectoriel de dimension égale à l'ordre de l'équation différentielle. C'est une droite vectorielle pour une équation différentielle du premier ordre, un plan vectoriel pour une équation différentielle du second ordre. Par exemple, $y'' - 3y' + 2y = 0$ admet pour solutions les fonctions $y : x \to \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mu \in \mathbf{R}$ Lorsque le second membre est non nul, la solution générale s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène (i.e. sans second membre) une solution particulière de l'équation avec second membre. Par exemple, $y'' - 3y' + 2y = 1$ admet $\frac{1}{2}$ comme solution particulière et ses solutions sont $\frac{1}{2} + \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mu \in \mathbf{R}$. Soit (A) l'ensemble des solutions avec second membre, et y_0 un élément particulier de (A). (A) et F sont tous deux inclus dans l'espace E des fonctions. Dans l'exemple précédent :

$$(A) = \{\frac{1}{2} + \lambda e^x + \mu e^{2x}, \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}\}$$

$$y_0 = \frac{1}{2}$$

$$F = \{\lambda e^x + \mu e^{2x}, \lambda \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}\}$$

On constate que (A) est le sous-espace affine de E passant par la solution particulière $y_0 = \frac{1}{2}$ et de direction F. F étant de dimension 2, (A) est un plan affine. Dans cet exemple, soit Φ l'application de E dans E définie par $\Phi(y) = y'' - 3y' + 2y$. On a $F = \text{Ker}(\Phi)$ et $(A) = \Phi^{-1}(\{1\})$.

❑ Plus généralement, soit $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ une application linéaire et B un vecteur de Im(Φ). Alors l'ensemble $\Phi^{-1}(\{B\})$ des éléments X tels que $\Phi(X) = B$ est un sous-espace affine (A) de direction le sous-espace vectoriel F égal à Ker(Φ). En effet, si X_0 est un élément donné de A, alors :

$$X \in (A) \Leftrightarrow \Phi(X) = B = \Phi(X_0) \Leftrightarrow \Phi(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in F$$

Donc $(A) = X_0 + F$. Ainsi, $\Phi(X) = B$ est l'équation d'un sous-espace affine (s'il y a au moins une solution), alors que l'équation sans second membre associée $\Phi(X) = 0$ est l'équation de la direction vectorielle de ce sous-espace affine.

La **dimension** du sous-espace affine est celle de sa direction vectorielle. Une droite affine est de dimension 1, un plan affine est de dimension 2.

Le sous-espace affine ne dépend pas du point M_0 qui a servi à le définir. Si M_0' est un autre point de ce sous-espace, on a $\boldsymbol{M_0M_0'}$ vecteur de F donc :

$$\begin{aligned}
& M \in M_0 + F \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\, \boldsymbol{u} \in F,\ M = M_0 + \boldsymbol{u} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\, \boldsymbol{u} \in F,\ M = M_0' + \boldsymbol{u} - \boldsymbol{M_0M_0'} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\, \boldsymbol{v} \in F,\ M = M_0' + \boldsymbol{v} \qquad \text{avec } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{M_0M_0'}
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \quad M \in M_0' + F$

Deux sous-espaces affines $M_0 + F$ et $M_1 + F$ de même direction F sont dits **parallèles**. Les éléments de $M_1 + F$ sont de la forme $M_1 + \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}$ élément de F, qu'on peut également écrire $M_0 + \boldsymbol{M_0M_1} + \boldsymbol{u}$. On obtient un élément de $M_0 + F$ si et seulement si $\boldsymbol{M_0M_1}$ est élément de F. Les deux sous-espaces affines sont alors confondus, sinon, ils sont disjoints. Il est facile de vérifier que la relation de parallélisme est une relation d'équivalence. On la note //. (Voir L1/ENSEMBLE.PDF).

Dans un sens étendu, on dit qu'un sous-espace affine $M_0 + F$ est parallèle à un sous-espace affine $M_1 + G$ si $F \subset G$. Ainsi, une droite affine est parallèle à un plan affine si la direction vectorielle de la droite est incluse dans la direction vectorielle du plan. Dans ce sens étendu, la relation de parallélisme est une relation d'ordre.

2- Equations et paramétrages

Un repère est choisi. Il faut noter que les seules propriétés affines concernent le parallélisme ou les barycentres, et ne font aucunement intervenir la notion d'angles. Il est donc inutile de choisir systématiquement des repères orthonormés.

a) Droites en dimension 2 :

Une droite affine (D) est définie deux points distincts A et B, ou par un point et un vecteur directeur $\boldsymbol{V}$ (base de la droite vectorielle direction de (D)). Le premier cas se ramène au second en posant $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{V}$. Si (a, b) sont les coordonnées de A dans le repère choisi, et (u, v) les composantes de $\boldsymbol{V}$, alors :

$$M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow \exists\, \lambda,\ M = A + \lambda\boldsymbol{V} \Leftrightarrow \exists\, \lambda,\ x = a + \lambda u,\ y = b + \lambda v.$$

Cela est une **représentation paramétrique** de (D), de paramètre λ. Inversement, étant donné une représentation paramétrique d'une droite, on trouve un point quelconque de cette droite en prenant une valeur arbitraire pour λ, et un vecteur directeur de cette droite en prenant les composantes u et v, en facteur du paramètre. Si on élimine λ, alors on obtient une **équation** de (D) :

$$M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow vx - uy = va - ub$$

Une méthode directe d'écriture de l'équation consiste à écrire que $\boldsymbol{AM}$ et $\boldsymbol{v}$ sont liés et donc que :

$$\det(\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{V}) = 0$$

On retrouve en effet $\begin{vmatrix} x-a & u \\ y-b & v \end{vmatrix} = 0 = (x-a)v - (y-b)u.$

Inversement, $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite à condition que $(a, b) \neq (0, 0)$. Un vecteur directeur est alors donné par $(-b, a)$.

b) Plans en dimension 3 :

On se donne maintenant trois points non alignés, ou de manière équivalente un point A et deux vecteurs $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ non colinéaires. Alors :

$$M \in (P) \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \exists\, \beta,\ \boldsymbol{AM} = \alpha\boldsymbol{U} + \beta\boldsymbol{V} \Leftrightarrow (\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) \text{ liés} \Leftrightarrow \det(\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = 0$$

En utilisant des coordonnées, on obtient une **représentation paramétrique** du plan sous la forme d'un système de trois équations aux deux paramètres α et β. Cette représentation est cependant peu pratique, car pour savoir si un point appartient à (P), on est contraint de résoudre un système. Il est donc plus pratique d'utiliser directement la relation $\det(\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = 0$ qui donne une équation du plan.

EXEMPLE :

❑ On se donne A(1, 1, 1), B(2, 3, 4) et C(2, 0, 1). Nous prendrons $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AB}$ de composantes (1, 2, 3) et $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{AC} = (1, -1, 0)$. M($x$, y, z) appartient au plan si et seulement si :

$$\det(\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{qu'on développe par rapport à la première colonne}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(x-1) + 3(y-1) - 3(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y - z = 1$$

On s'assure qu'il n'y a pas d'erreurs de calcul en vérifiant que A, B et C satisfont cette équation.

On aurait pu aussi résoudre le système M = A + $\alpha\boldsymbol{U} + \beta\boldsymbol{V}$:

$$\exists\, \alpha, \exists\, \beta \left[\begin{array}{l} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 1 + 2\alpha - \beta \\ z = 1 + 3\alpha \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha, \exists\, \beta \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{z-1}{3} \\ \beta = x - \dfrac{z}{3} - \dfrac{2}{3} \\ x + y - z - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y - z = 1$$

Quant au plan vectoriel direction du plan affine, son équation est obtenue en supprimant les termes constants : $x + y - z = 0$. En effet, un vecteur $\boldsymbol{W}$ appartient à ce plan vectoriel si et seulement si $\det(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = 0$ et le calcul est identique au précédent, mais sans constante.

On aurait donc pu procéder également comme suit : chercher d'abord l'équation du plan vectoriel, puis ajuster la constante du second membre. Or, si on munit l'espace d'une structure euclidienne, on a $\det(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = 0 = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{V} \rangle$ avec $\boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ vecteur normal au plan vectoriel, donc l'équation du plan vectoriel est $x + y - z = 0$, donc l'équation du plan affine est $x + y - z = 1$, la constante étant obtenue avec l'un quelconque des points A, B, C.

c) Droites en dimension 3 :

La situation décrite en a) se généralise à la dimension 3, (et même à n'importe quelle dimension). On se donne A(a, b, c) et $\boldsymbol{V}(u, v, w)$. Alors :

$$M(x, y, z) \in (D) \Leftrightarrow \exists\, \lambda,\ x = a + \lambda u,\ y = b + \lambda v,\ z = c + \lambda w$$

Si l'on élimine λ, on obtient un système de deux équations indépendantes, chacune d'elles étant en fait l'équation d'un plan. La droite est alors vue comme intersection de deux plans.

Inversement, si on se donne une droite par un système de deux équations, ces deux équations ne doivent pas être celles de deux plans parallèles. Les équations homogènes (obtenues en annulant les seconds membres) ne doivent donc pas représenter la même direction plane vectorielle. Pour cela, il faut et il suffit que ces deux équations homogènes ne soient pas proportionnelles. Considérons le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Il est extrêmement rapide de trouver un vecteur directeur de la droite vectorielle. Celle-ci ayant pour équation $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$, il suffit de prendre :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

On peut en effet vérifier que le vecteur obtenu vérifie les équations homogènes. On peut aussi considérer que l'espace est muni d'un produit scalaire pour lequel la base dans laquelle on travaille est orthonormée. Dans ce cas, le vecteur (a, b, c) est orthogonal au premier plan, et le vecteur (a', b', c') est orthogonal au deuxième. Un vecteur directeur de la droite doit appartenir aux deux plans vectoriels donc doit être orthogonal à ces deux vecteurs. Il suffit de prendre le produit vectoriel.

3- Coordonnées barycentriques

PROPOSITION

Soient $(\mathrm{A}_i)_{1\leq i\leq n}$ *une famille de points d'un espace affine. L'ensemble des barycentres de ces points affectés de coefficients quelconques forme un sous-espace affine appelé* **sous-espace affine engendré** *par les* (A_i)*. Ce sous-espace affine est le sous-espace affine passant par l'un de ces points et de direction le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs* $(\boldsymbol{A_1A_2}, ..., \boldsymbol{A_1A_n})$*. C'est le plus petit sous-espace affine contenant la famille de points* (A_i)*.*

Démonstration :

❑ Notons (B) le sous-espace affine passant par A_1 et de direction F le sous-espace vectoriel engendré par $(\boldsymbol{A_1A_2}, ..., \boldsymbol{A_1A_n})$. Soit (C) l'ensemble des barycentres des A_i.

Si G est barycentre des $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)$, avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors $\mathrm{G} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$ donc :

$$\boldsymbol{A_1G} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \boldsymbol{A_1A_i} = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i\, \boldsymbol{A_1A_i} \text{ est élément de F}$$

ce qui prouve que G est élément de (B). Donc (C) $\subset$ (B).

Réciproquement, si M est élément de (B), alors il existe des λ_i, $2 \leq i \leq n$, tels que :

$$\boldsymbol{A_1M} = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i\, \boldsymbol{A_1A_i}$$

Si l'on pose $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - ... - \lambda_n$, alors l'égalité précédente est équivalente à écrire que M est barycentre des $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)$, $1 \leq i \leq n$. Donc (B) $\subset$ (C).
Ainsi (B) = (C).

Enfin, montrons que (B) est le plus petit sous-espace affine contenant les A_i. Soit (D) un sous-espace affine contenant les A_i. Alors les $\boldsymbol{A_iA_j}$ appartient à la direction de (D), donc F est inclus dans la direction de (D). Donc A_1 + F est inclus dans (D), donc (B) est inclus dans (D).

DEFINITION

Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille de points d'un espace affine. Si les vecteurs* $(\boldsymbol{A_1A_2}, ..., \boldsymbol{A_1A_n})$ *sont linéairement indépendants, on dit que les points* A_i *sont* **affinement indépendants**.

La définition ne dépend pas de l'ordre des points et A_1 ne joue pas de rôle privilégié. En effet, $(\boldsymbol{A_1A_2}, \boldsymbol{A_1A_3} .., \boldsymbol{A_1A_n})$ est libre si et seulement si $(\boldsymbol{A_2A_1}, \boldsymbol{A_2A_3}, ..., \boldsymbol{A_2A_n})$ est libre car ces deux systèmes engendrent le même sous-espace vectoriel. On peut donc échanger les rôles de A_1 et A_2, et plus généralement de A_1 et de n'importe quel A_i.

EXEMPLE

❑ Deux points A et B sont affinement indépendants si et seulement si ils sont distincts. Dans ce cas, le barycentre G de $(A, 1 - t)$ et (B, t), $t \in \mathbb{R}$, décrit la droite (AB) :

$$G = (1 - t)A + tB = A + t(B - A) = A + t\boldsymbol{AB} \text{ donc } \boldsymbol{AG} = t\boldsymbol{AB}$$

❑ Dans un plan, trois points sont affinement indépendants si et seulement si ils sont non alignés.

PROPOSITION

Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille de points d'un espace affine, affinement indépendants. Alors tout point* M *du sous-espace affine engendré s'écrit de manière unique comme barycentre des* A_i *avec des coefficients* λ_i *de somme* 1. *Les* λ_i *s'appellent* **coordonnées barycentriques** *de* M *relativement aux* A_i.

Démonstration :

❑ On sait déjà que M peut s'écrire comme barycentre des A_i et on peut supposer que la somme des coefficients λ_i vaut 1. Il reste à montrer l'unicité de la décomposition. Supposons donc que l'on ait :

$$M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

et

$$M = \sum_{i=1}^{n} \mu_i A_i \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$$

alors $\boldsymbol{A_1M} = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A_1A_i}$ et $\boldsymbol{A_1M} = \sum_{i=2}^{n} \mu_i \boldsymbol{A_1A_i}$, donc en retranchant membre à membre :

$$0 = \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \boldsymbol{A_1A_i}$$

Comme le système $(\boldsymbol{A_1A_2}\ \boldsymbol{A_1A_3} .., \boldsymbol{A_1A_n})$ est libre, on a $\lambda_i - \mu_i = 0$ pour $2 \leq i \leq n$ et donc $\lambda_i = \mu_i$. Comme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, on a également $\lambda_1 = \mu_1$. D'où l'unicité.

Si M a pour coordonnées barycentriques les λ_i, et si N a pour coordonnées barycentriques les μ_i, alors le barycentre $\alpha M + \beta N$ (avec $\alpha + \beta = 1$) a pour coordonnées barycentriques les $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i$. Il suffit d'appliquer la propriété d'associativité du barycentre aux deux familles $(A_i, \alpha\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(A_i, \beta\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$. Ainsi, le calcul suivant est valide :

$$M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \quad \text{et} \qquad N = \sum_{i=1}^{n} \mu_i A_i$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha M + \beta N = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i + \beta\mu_i) A_i$$

On voit donc que le calcul barycentrique avec les coordonnées barycentriques est formellement comparable à du calcul vectoriel. La seule différence est que la somme des coefficients utilisés vaut 1.

EXEMPLES :

❑ Soient deux points A et B distincts et M un élément de la droite (AB). Il existe un t unique tel que :

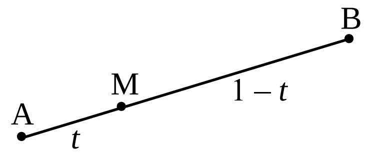
$$M = (1 - t)A + tB$$

ou $\qquad \boldsymbol{AM} = t\boldsymbol{AB}$

ou $\qquad t = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$

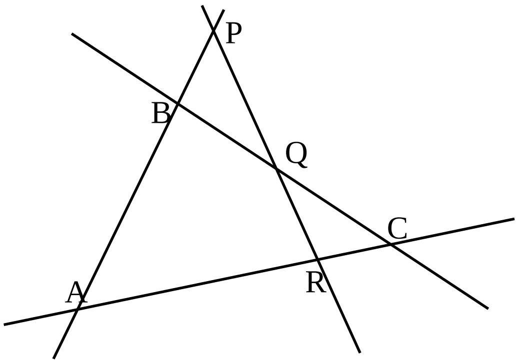
Les coordonnées barycentriques de M par rapport à A et B sont $1 - t$ et t.

Dans la notation ci-dessus, $\overline{AB}$ désigne la **mesure algébrique** du couple (A, B). Il s'agit de la composante du vecteur ***AB*** suivant un vecteur directeur de la droite (AB). Cette mesure dépend du vecteur directeur choisi, mais le quotient $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ n'en dépend pas, car le changement de vecteur directeur aura pour conséquence de changer $\overline{AM}$ et $\overline{AB}$ par un même facteur.
Lorsque t décrit l'intervalle [0, 1], M décrit le segment [AB]. t représente la proportion prise par le segment [AM] relativement à [AB].



❑ Nous donnerons une interprétation géométrique des coordonnées barycentriques d'un point M du plan relativement à trois points non alignés A, B, C plus loin dans le chapitre.

❑ **Le théorème de Ménélaus** (fin du Ier siècle)
Il s'énonce :
Soit un triangle ABC, *et trois points distincts de* A, B *et* C : P *sur* (AB), Q *sur* (BC) *et* R *sur* (AC).



Alors P, Q *et* R *sont alignés si et seulement si* :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$$

Pour montrer que cette condition est nécessaire, on peut raisonner sur les coordonnées barycentriques de P, Q et R, relativement à A, B et C. Il existe p et q tels que :

$P = pA + (1 - p)B$ ou $p\boldsymbol{AP} + (1 - p)\boldsymbol{BP} = 0$

$Q = qB + (1 - q)C$ ou $q\boldsymbol{BQ} + (1 - q)\boldsymbol{CQ} = 0$

Si P, Q et R sont alignés, alors R appartient au sous-espace affine engendré par P et Q, donc est barycentre de P et Q. Il existe λ tel que :

$R = \lambda P + (1 - \lambda)Q = \lambda pA + (\lambda(1 - p) + (1 - \lambda)q)B + (1 - \lambda)(1 - q)C$

Mais R est aligné avec A et C donc est barycentre de A et C. Il existe r tel que :

$R = (1 - r)A + rC$ ou $(1 - r)\boldsymbol{AR} + r\boldsymbol{CR} = 0$

donc, d'après l'unicité des coordonnées barycentriques relativement à A, B, C :

$$\begin{cases} 1 - r = \lambda p \\ 0 = \lambda(1 - p) + (1 - \lambda)q \\ r = (1 - \lambda)(1 - q) \end{cases}.$$

On en déduit que $\lambda = -\dfrac{q}{1 - p - q}$, puis $r = \dfrac{(1 - p)(1 - q)}{1 - p - q}$ et $1 - r = -\dfrac{pq}{1 - p - q}$

Par ailleurs : $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\dfrac{1 - p}{p}$, $\dfrac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = -\dfrac{1 - q}{q}$ et $\dfrac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -\dfrac{1 - r}{r}$

donc $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \dfrac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \dfrac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -\dfrac{1 - p}{p}\,\dfrac{1 - q}{q}\,\dfrac{1 - r}{r} = \dfrac{1 - p}{p}\,\dfrac{1 - q}{q}\,\dfrac{pq}{(1 - p)(1 - q)} = 1$

La réciproque se montre de la façon suivante. Curieusement, on va utiliser le sens direct du théorème :

Soient P, Q, R trois points vérifiant la relation, et soit R' l'intersection de (PQ) et (AC). Il s'agit de montrer que R = R'. Mais P, Q et R' sont alignés donc vérifient la relation de Ménélaus d'après le sens direct démontré précédemment. Si $R' = (1 - r')A + r'C$, on aura donc simultanément :

$-\dfrac{1 - p}{p}\,\dfrac{1 - q}{q}\,\dfrac{1 - r}{r} = 1$ et $-\dfrac{1 - p}{p}\,\dfrac{1 - q}{q}\,\dfrac{1 - r'}{r'} = 1$

donc $\dfrac{1 - r}{r} = \dfrac{1 - r'}{r'}$ donc $r = r'$, donc R = R'.

Un cas intéressant se produit lorsque l'un des points, P par exemple, s'éloigne indéfiniment sur sa droite, (AB). A la limite, (QR) devient parallèle à (AB) et $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ tend vers 1, de sorte qu'on obtient à la limite $\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$, ou bien $\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RC}}$. On obtient alors le **théorème de Thales**.

4- Intersections

PROPOSITION

Soit (B) *et* (C) *deux sous-espaces affines de direction respectives* F *et* G*. Alors, ou bien* (B) $\cap$ (C) = $\emptyset$*, ou bien* (B) $\cap$ (C) *est un sous-espace affine de direction* F $\cap$ G.

Démonstration :

❑ En effet, si M_0 est un point de (B) $\cap$ (C), alors (B) $\cap$ (C) = $\{M \mid \boldsymbol{M_0M} \in F \cap G\}$.

APPLICATION :

❑ Dans l'espace affine de dimension 3, soit (D) une droite parallèle à un plan (P) et à un plan (P'). Alors (D) est parallèle à (P) $\cap$ (P'). En effet, soit Δ la droite vectorielle direction de (D), Π le plan vectoriel direction de (P) et Π' le plan vectoriel direction de (P'). On a $\Delta \subset \Pi$ et $\Delta \subset \Pi'$ donc $\Delta \subset \Pi \cap \Pi'$. Mais $\Pi \cap \Pi'$ est la direction vectorielle de (P) $\cap$ (P'). Donc (D) est parallèle à (P) $\cap$ (P').

PROPOSITION

Soit F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel* E*, et soit* (B) *et* (C) *deux sous-espaces affines de directions respectives* F *et* G.

(i) *Si* F *et* G *sont en somme directe, alors* (B) $\cap$ (C) *est vide ou réduit à un point.*

(ii) *Si* E = F + G*, alors* (B) $\cap$ (C) $\neq \emptyset$

(iii) *Si* E = F $\oplus$ G*, alors* (B) $\cap$ (C) *est un point*

Démonstration :

❑ (i) (B) $\cap$ (C), s'il est non vide, est de direction F $\cap$ G = {0}. Or un sous-espace affine de direction {0} est réduit à un point.

❑ (ii) Soit b élément de (B) et c élément de (C). Puisque E = F + G, le vecteur $c - b$ se décompose en la somme $u + v$, $u \in F$, $v \in G$:

$$c - b = u + v$$
$$\Leftrightarrow \quad c - v = b + u$$

$c - v$ est élément de (C) et $b + u$ est élément de (B). Les deux éléments étant égaux, on a trouvé un élément de (B) $\cap$ (C)

❑ (iii) On applique (i) et (ii).

Le cas typique de (iii) est donné par l'espace de dimension 3, avec F droite vectorielle non incluse dans le plan vectoriel G. Toute droite de direction F intersecte tout plan de direction G (auquel elle n'est pas parallèle) en un point unique. Ou encore, en dimension 3, toute droite non parallèle à un plan intersecte ce plan en un point unique.

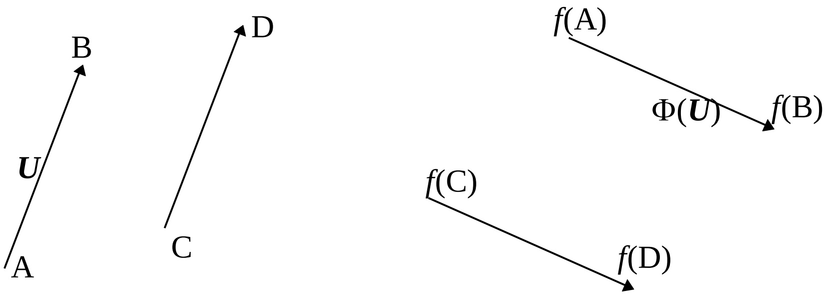
III : Applications affines

1- Définition

Une application affine *f* est une application d'un espace affine (X) dans un espace affine (Y) et qui préserve la structure de ces espaces. Cela signifie en particulier que le parallélisme et les propriétés barycentriques devront être conservés.

Soit un parallélogramme ABCD et soit $\boldsymbol{U}$ un vecteur égal à $\boldsymbol{AB}$ et à $\boldsymbol{CD}$. La conservation du parallélisme se traduit par le fait que, (AB) et (CD) étant deux droites parallèles (respectivement (AC) et (BD)), il doit en être de même de leurs images. Ainsi le parallélogramme ABCD doit être transformé en un parallélogramme $f(A)f(B)f(C)f(D)$. Cela signifie entre autre que les vecteurs $\boldsymbol{f(A)f(B)}$ et $\boldsymbol{f(C)f(D)}$ sont égaux. Le vecteur ainsi obtenu ne dépend donc que de $\boldsymbol{U}$ et non d'un couple de points particuliers représentant ce vecteur. Nous le noterons donc $\Phi(\boldsymbol{U})$, définissant ainsi une application Φ définie de la direction vectorielle de (X) dans la direction vectorielle de (Y). Nous obtenons donc la relation :

$$\boldsymbol{f(A)f(B)} = \Phi(\boldsymbol{AB})$$



On a alors, en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(A)f(C)} &= \Phi(\boldsymbol{AC}) \\ &= \Phi(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC}) \text{ d'une part} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(A)f(C)} &= \boldsymbol{f(A)f(B)} + \boldsymbol{f(B)f(C)} \\ &= \Phi(\boldsymbol{AB}) + \Phi(\boldsymbol{BC}) \text{ d'autre part} \end{aligned}$$

donc on doit avoir, en posant $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{BC}$:

$$\Phi(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}) = \Phi(\boldsymbol{U}) + \Phi(\boldsymbol{V})$$

La conservation du barycentre signifie que, si G est barycentre de (A, λ) et $(B, 1 - \lambda)$, alors $f(G)$ est barycentre de $(f(A), \lambda)$ et $(f(B), 1 - \lambda)$. Nous avons donc :

$$G = \lambda A + (1 - \lambda)B \Rightarrow f(G) = \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B)$$

ou encore

$$\boldsymbol{GB} = \lambda \boldsymbol{AB} \Rightarrow \boldsymbol{f(G)f(B)} = \lambda \boldsymbol{f(A)f(B)} \text{ donc } \Phi(\boldsymbol{GB}) = \lambda\Phi(\boldsymbol{AB})$$

donc on doit avoir $\Phi(\lambda\boldsymbol{AB}) = \lambda\Phi(\boldsymbol{AB})$ ou $\Phi(\lambda\boldsymbol{U}) = \lambda\Phi(\boldsymbol{U})$

Il résulte des propriétés précédentes que Φ est linéaire. Nous posons donc :

DEFINITION

Une application f d'un espace affine (X) *de direction* E *dans un espace affine* (Y) *de direction* F *est une* **application affine** *s'il existe une application linéaire* Φ *de* E *dans* F *telle que :*

$$\forall M \in (X), \forall N \in (X), \boldsymbol{f(M)f(N)} = \Phi(\boldsymbol{MN})$$

Dans la plupart des cas, nous prendrons (X) = (Y) et donc E = F.

CONSEQUENCES :

❑ i) La connaissance de f ne nécessite que la connaissance de l'image d'un point M donné par f et l'image d'une base de E par Φ. La définition donnée est en effet équivalente à :

$$f(\mathrm{N}) = f(\mathrm{M}) + \Phi(\boldsymbol{MN})$$

permettant de déterminer l'image de n'importe quel point N, ou encore, si on pose $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{MN}$ et donc $\mathrm{N} = \mathrm{M} + \boldsymbol{U}$:

$$f(\mathrm{M} + \boldsymbol{U}) = f(\mathrm{M}) + \Phi(\boldsymbol{U})$$

Cette dernière relation est facile à retenir : f s'applique sur les points et Φ sur les vecteurs.

❑ ii) Si l'on se donne, par exemple en dimension 2, un repère (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$), alors $f(\mathrm{N}) = f(\mathrm{O}) + \Phi(\boldsymbol{ON})$, donc toute application affine est de la forme analytique suivante :

$$\left[\begin{array}{l} x' = ax + by + c \\ y' = \underbrace{dx + ey}_{\substack{\text{partie}\\ \text{linéaire}\\ \text{image de } \boldsymbol{ON}\\ \text{par } \Phi}} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{image}\\ \text{de O par } f}}{g} \end{array}\right.$$

Ce qui distingue l'expression d'une application affine de celle d'une application linéaire, c'est l'apparition des constantes c et g. On obtient l'expression de l'application linéaire à partir de celle de l'application affine en supprimant ces constantes.

PROPOSITION

i) *La composée $f_2 \circ f_1$ de deux applications affines f_1 et f_2, associées aux applications linéaires Φ_1 et Φ_2 est une application affine associée à l'application linéaire $\Phi_2 \circ \Phi_1$.*

ii) *Une application affine f est bijective si et seulement si son application linéaire associée Φ est bijective. Dans ce cas f^{-1} est affine et associée à l'application linéaire Φ^{-1}.*

<u>Démonstration</u> :

❑ i) Posons $\mathrm{M}' = f_1(\mathrm{M})$, $\mathrm{M}'' = f_2(\mathrm{M}')$, et de même pour N. On a alors :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M''N''} &= \boldsymbol{f_2(M')f_2(N')} = \Phi_2(\boldsymbol{M'N'}) = \Phi_2(\boldsymbol{f_1(M)f_1(N)}) = \Phi_2(\Phi_1(\boldsymbol{MN})) \\ &= (\Phi_2 \circ \Phi_1)(\boldsymbol{MN}) \end{aligned}$$

❑ ii) On a plus précisément :

- f surjective $\Leftrightarrow$ Φ surjective

Soit f surjective. Soit $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{AB}$ un vecteur de l'ensemble d'arrivée. Il existe M et N tels que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$ et $f(\mathrm{N}) = \mathrm{B}$. D'où $\Phi(\boldsymbol{MN}) = \boldsymbol{f(M)f(N)} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{V}$ donc $\boldsymbol{V}$ admet un antécédent par Φ. Φ est surjective.
Inversement, soit Φ surjective, et A un point de l'espace affine d'arrivée. Soit N un point quelconque de l'espace de départ et $\mathrm{B} = f(\mathrm{N})$. Φ étant surjective, il existe un vecteur $\boldsymbol{U}$ tel que $\Phi(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{AB}$. Posons M tel que $\boldsymbol{MN} = \boldsymbol{U}$. On a alors :

$$\Phi(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{AB} \Leftrightarrow \Phi(\boldsymbol{MN}) = \boldsymbol{AB} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(M)f(N)} = \boldsymbol{AB}$$

et comme $f(\mathrm{N}) = \mathrm{B}$, on a $f(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$. A admet donc un antécédent par f et f est surjective.

- f injective $\Leftrightarrow$ Φ injective

Soit f injective et $\boldsymbol{U}$ est tel que $\Phi(\boldsymbol{U}) = 0$. Si $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AB}$, alors $\boldsymbol{f(A)f(B)} = 0$, donc $f(\text{A}) = f(\text{B})$ et f étant injective, on en déduit que A = B et que $\boldsymbol{U} = 0$. Ainsi, Φ est injective.
Réciproquement, si $f(\text{M}) = f(\text{N})$, alors $\boldsymbol{f(M)f(N)} = 0 = \Phi(\boldsymbol{MN})$ et Φ étant injective, on en déduit que $\boldsymbol{MN} = 0$, et donc que M = N.

Montrons maintenant que f^{-1} est affine, associée à Φ^{-1} :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f^{-1}(M)f^{-1}(N)} &= (\Phi^{-1} \circ \Phi)(\boldsymbol{f^{-1}(M)f^{-1}(N)}) = \Phi^{-1}(\boldsymbol{f(f^{-1}(M))f(f^{-1}(N))}) \\ &= \Phi^{-1}(\boldsymbol{MN}) \end{aligned}$$

Il résulte de ce qui précède que l'ensemble des applications affines d'un espace affine dans lui-même est stable par $\circ$, et que l'ensemble des applications affines bijectives forme un groupe, appelé **groupe affine**. L'application identique en est l'élément neutre, application affine dont l'application linéaire associée est également l'application identique. On note GA(E) le groupe affine de E. La proposition que nous venons d'énoncer signifie que l'application qui, à f élément de GA(E), associe Φ élément de GL(E) est un morphisme de groupes. (Voir L2/GROUPES.PDF pour la définition d'un morphisme de groupes).

2- Exemples

❑ L'application identique $f = \text{Id}$ est une application affine associée à l'application vectorielle $\Phi = \text{Id}$.

❑ Inversement, si $\Phi = \text{Id}$, quelles sont les applications affines f qui lui sont associées ? Si $\Phi = \text{Id}$, alors on a :

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{f(M)f(N)} = \boldsymbol{MN} \\ \Leftrightarrow\quad & f(\text{N}) - f(\text{M}) = \text{N} - \text{M} \\ \Leftrightarrow\quad & f(\text{N}) - \text{N} = f(\text{M}) - \text{M} \\ \Leftrightarrow\quad & \boldsymbol{Nf(N)} = \boldsymbol{Mf(M)} \end{aligned}$$

Cela signifie qu'il existe un vecteur $\boldsymbol{U}$ tel que, pour tout M, $\boldsymbol{Mf(M)} = \boldsymbol{U}$ ou encore $f(\text{M}) = \text{M} + \boldsymbol{U}$. f est la **translation** de vecteur $\boldsymbol{U}$.
Nous avons montré qu'une application affine est associée à l'application linéaire Id si et seulement si c'est une translation.

❑ Soient f et g sont deux applications affines associées à la même application linéaire Φ. Soit O un point quelconque et t la translation de vecteur $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{g(O)f(O)}$. $\boldsymbol{U}$ ne dépend pas de O et $f = t \circ g$. En effet, si O' est un autre point, alors :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g(O)f(O)} - \boldsymbol{g(O')f(O')} &= f(\text{O}) - g(\text{O}) - f(\text{O'}) + g(\text{O'}) \\ &= f(\text{O}) - f(\text{O'}) + g(\text{O'}) - g(\text{O}) \\ &= \boldsymbol{f(O')f(O)} + \boldsymbol{g(O)g(O')} \\ &= \Phi(\boldsymbol{O'O}) + \Phi(\boldsymbol{OO'}) \\ &= \Phi(\boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{OO'}) \\ &= \Phi(0) = 0 \end{aligned}$$

Puis, pour tout M :

$$\begin{aligned} (t \circ g)(\text{M}) = t(g(\text{M})) &= t(g(\text{O}) + \Phi(\boldsymbol{OM})) \\ &= g(\text{O}) + \Phi(\boldsymbol{OM}) + \boldsymbol{g(O)f(O)} \\ &= f(\text{O}) + \Phi(\boldsymbol{OM}) \\ &= f(\text{M}) \end{aligned}$$

❑ Soit $\Phi = \lambda$Id. Le cas $\lambda = 1$ est traité en ii). Si $\lambda = 0$, alors on a :

$\forall$ M, $\forall$ N, $\mathbf{\mathit{f(M)f(N)}} = 0$

$\Rightarrow$ $\forall$ M, $\forall$ N, f(M) = f(N) et f est constante. Nous supposerons désormais $\lambda \neq 0$.

Supposons $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 0$. Φ est une **homothétie vectorielle** de rapport λ. Alors, on a :

$$\mathbf{\mathit{f(M)f(N)}} = \lambda \mathbf{\mathit{MN}} \quad (*)$$

Cherchons les points fixes N, tels que N = f(N), s'il en existe. Prenons une origine arbitraire M = O et écrivons :

$\mathbf{\mathit{f(O)N}} = \lambda \mathbf{\mathit{ON}}$

$\Leftrightarrow$ $N - f(O) = \lambda(N - O)$

$\Leftrightarrow$ $N = \dfrac{1}{1-\lambda} f(O) - \dfrac{\lambda}{1-\lambda} O$ barycentre de $(f(O), \dfrac{1}{1-\lambda})$ et $(O, -\dfrac{\lambda}{1-\lambda})$

Il existe donc un unique point fixe que nous noterons désormais Ω. Si nous remplaçons M par Ω dans (*), nous obtenons :

$$\mathbf{\Omega \mathit{f(N)}} = \lambda\, \mathbf{\Omega \mathit{N}}$$

ou bien $f(N) = \Omega + \lambda\, \mathbf{\Omega \mathit{N}}$, ce qui définit parfaitement f à partir de N. f est une **homothétie affine** de centre Ω et de rapport λ. Ω est le seul point fixe. L'identité peut être assimilée à une homothétie de centre quelconque de rapport 1. Tous les points sont invariants dans ce cas.

L'ensemble des homothéties vectorielles de rapport non nul, muni de la composition des applications, forme un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}^*,\times)$. L'ensemble des applications affines qui leur sont associées, muni de la composition des applications, forme donc aussi un groupe. Cet ensemble est constitué des homothéties de centre quelconque, de rapport non nul (y compris l'identité), et des translations. Ce groupe s'appelle **groupe des homothéties-translations**. La nature de la composée de deux de ces applications se trouvent en regardant la composée des applications linéaires associées.

TranslationDe$\mathbf{\mathit{U}}$ ∘ TranslationDe$\mathbf{\mathit{V}}$ = TranslationDe($\mathbf{\mathit{U}} + \mathbf{\mathit{V}}$)
Translation ∘ HomothétieDeRapportλ = HomothétieDeRapportλ
HomothétieDeRapportα ∘ HomothétieDeRapportβ = HomothétieDeRapport($\alpha\beta$) si $\alpha\beta \neq 1$
HomothétieDeRapportα ∘ HomothétieDeRrapport($1/\alpha$) = Translation

On peut chercher des sous-groupes du groupe des homothéties-translations en cherchant des sous-groupes du groupe des homothéties vectorielles, ou même de $\mathbb{R}^*$, par isomorphisme :

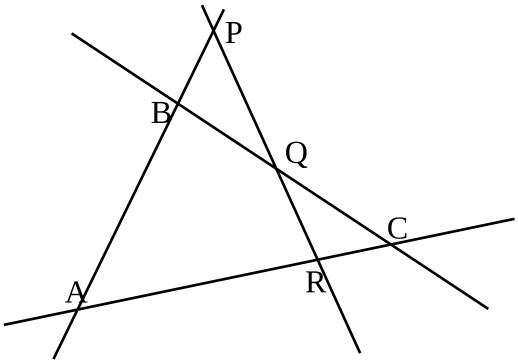
$\mathbb{R}^*$	{homothéties vectorielles}	{homothéties–translation}
{1}	{Id}	{translation}
{±1}	{±Id}	{symétries centrales translations}

etc...

EXEMPLE : théorème de Ménélaus – deuxième méthode.

❑ Rappelons-le : soit un triangle ABC, et trois points distincts de A, B et C : P sur (AB), Q sur (BC) et R sur (AC). Alors P, Q et R sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$$



Donnons une autre démonstration de la nécessité de la condition.
On considère :

u homothétie de centre P de rapport $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$. On a $u(B) = A$

v homothétie de centre Q de rapport $\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}$. On a $v(C) = B$

w homothétie de centre R de rapport $\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}}$. On a $w(A) = C$

$h = u \circ v \circ w$ est donc une homothétie-translation. Comme A est invariant par h, il s'agit d'une homothétie. Son rapport est le produit des rapports de chaque homothétie, à savoir $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}}$.
Si les points P, Q et R sont alignés, la droite (PQR) est globalement invariante par l'homothétie h car elle l'est par u, v et w, puisqu'elle contient le centre de chacune de ces homothéties. Or A, centre de h n'étant pas sur cette droite, la seule possibilité pour qu'elle soit invariante est que h = Id. Son rapport est donc égal à 1. Donc $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$

❑ Supposons que $E = F \oplus G$. Soit (B) un sous-espace affine de direction F et (C) de direction G. (B) $\cap$ (C) est réduit à un point que nous noterons O (cf II-4). Pour tout M de E, en décomposant le vecteur ***OM*** en sa composante sur F et sur G, on obtient P tel que :

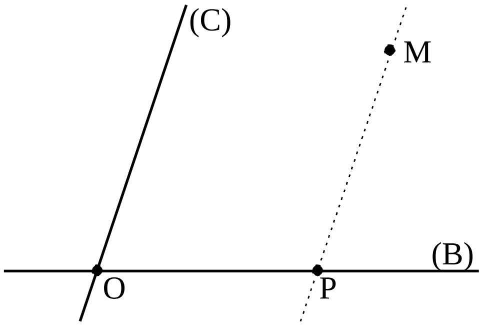
$$\mathbf{OM} = \mathbf{OP} + \mathbf{PM},\ \mathbf{OP} \in F \text{ et } \mathbf{PM} \in G.$$

P est donc élément de (B) puisque O $\in$ (B) et ***OP*** $\in$ F. L'application f qui à M associe P s'appelle **projection affine** sur (B) parallèlement à (C) (ou parallèlement à G puisque seule la direction de (C) a une importance). Il s'agit d'une application affine. En effet, si N se projette en Q, on a :

$$\mathbf{ON} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QN}$$

donc $\mathbf{MN} = \underbrace{\mathbf{PQ}}_{\in F} + \underbrace{\mathbf{QN} - \mathbf{PM}}_{\in G}$

ce qui signifie que $\boldsymbol{f(M)f(N)} = \boldsymbol{PQ}$ est l'image de $\boldsymbol{MN}$ par la projection vectorielle Φ sur F parallèlement à G.



Inversement, si Φ est la projection vectorielle sur F parallèlement à G, peut–on en déduire que toute application affine *f* associée est une projection ? Pas nécessairement, comme le montre l'exemple suivant :

E est le plan muni d'une base ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$).
F est la droite engendrée par $\boldsymbol{i}$
G est la droite engendrée par $\boldsymbol{j}$
O est un point quelconque de E
f est l'application définie analytiquement par $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = 0 \end{cases}$

f est la composée d'une projection et d'une translation.

❑ Supposons que E = F ⊕ G. Soit (B) de direction F et (C) de direction G, O l'unique intersection de (B) et (C). Pour tout point M, il existe P tel que :

$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$ de façon que $\boldsymbol{U} \in$ F et $\boldsymbol{V} \in$ G
$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}$

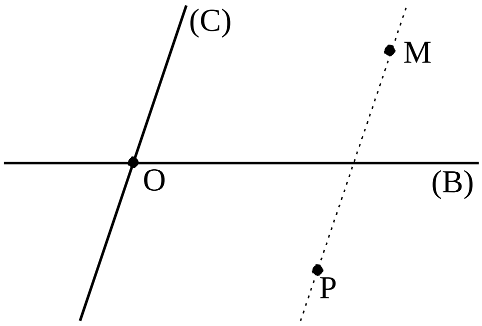
L'application *f* qui à M associe P s'appelle **symétrie affine** par rapport à (B) parallèlement à (C) (ou parallèlement à G puisque seule la direction de (C) a une importance). Il s'agit d'une application affine. En effet, si *N* admet pour image Q, on a :

$\boldsymbol{ON} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{Z}$ avec $\boldsymbol{W} \in$ F et $\boldsymbol{Z} \in$ G
$\boldsymbol{OQ} = \boldsymbol{W} - \boldsymbol{Z}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{MN} = \underbrace{\boldsymbol{W} - \boldsymbol{U}}_{\in \text{F}} + \underbrace{\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{V}}_{\in \text{G}}$

et $\quad \boldsymbol{PQ} = \underbrace{\boldsymbol{W} - \boldsymbol{U}}_{\in \text{F}} - \underbrace{\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{V}}_{\in \text{G}}$

ce qui signifie que $\boldsymbol{f(M)f(N)} = \boldsymbol{PQ}$ est l'image de $\boldsymbol{MN}$ par la symétrie vectorielle Φ par rapport à F parallèlement à G.



Inversement, si Φ est la symétrie vectorielle sur F parallèlement à G, comme pour la projection, on ne peut en déduire que toute application affine f associée est une symétrie. On peut prendre un exemple analogue à celui de la projection :

E est le plan muni d'une base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$.
F est la droite engendrée par $\boldsymbol{i}$
G est la droite engendrée par $\boldsymbol{j}$
O est un point quelconque de E
f est l'application définie analytiquement par $\left[\begin{array}{l} x' = x + 1 \\ y' = -y \end{array}\right.$

f est la composée de la symétrie par rapport à Ox et de la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, parallèle à O$x$.

Il n'y a aucun point invariant. On dit que f est une **symétrie glissée**. Plus généralement, on peut montrer que toute application affine associée à une symétrie vectorielle est une symétrie glissée, composée d'une symétrie et d'une translation parallèlement au sous-espace affine stable par la symétrie (cette translation pouvant également être réduite à l'identité, la symétrie glissée étant alors simplement une symétrie affine). Voir L2/GEOMEUCL.PDF pour le cas particulier où les symétries sont des symétries orthogonales en dimension 2 ou 3, mais le raisonnement tenu peut s'adapter au cas général.

❑ La symétrie et la projection entrent dans un cadre plus général.
Supposons toujours que E = F ⊕ G. Soit (B) de direction F et (C) de direction G, et O le point intersection de (B) et (C). Soit λ un réel. Pour tout point M, il existe P tel que :

$\mathbf{OM} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$ de façon que $\mathbf{U} \in$ F et $\mathbf{V} \in$ G
$\mathbf{OP} = \mathbf{U} + \lambda\mathbf{V}$

Le cas λ = 0 correspond à la projection sur (B) parallèlement à (C). Le cas λ = 1 correspond à l'application identique. Le cas λ = –1 correspond à la symétrie par rapport à (B) parallèlement à (C). Le cas où F = {0} et donc (B) est un point O correspond à l'homothétie de centre O et de rapport λ. Le cas où G = {0} correspond à l'identité. Le cas général s'appelle **affinité** de rapport λ par rapport à (B) (ou de base (B)), parallèlement à (C). Il s'agit d'une application affine. En effet, si N admet pour image Q, on a :

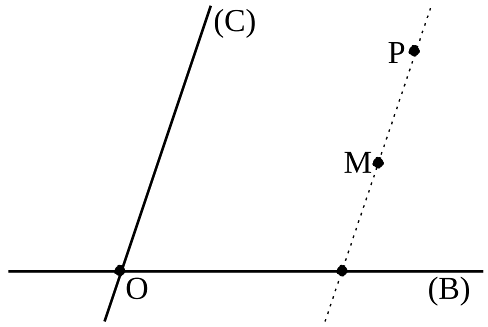
$\mathbf{ON} = \mathbf{W} + \mathbf{Z}$ avec $\mathbf{W} \in$ F et $\mathbf{Z} \in$ G
$\mathbf{OQ} = \mathbf{W} + \lambda\mathbf{Z}$

⇒ $\mathbf{MN} = \underbrace{\mathbf{W} - \mathbf{U}}_{\in \text{F}} + \underbrace{\mathbf{Z} - \mathbf{V}}_{\in \text{G}}$

et $\mathbf{PQ} = \underbrace{\mathbf{W} - \mathbf{U}} + \underbrace{\lambda(\mathbf{Z} - \mathbf{V})}$

$\in$ F $\qquad\qquad \in$ G

ce qui signifie que ***f(M)f(N)*** = ***PQ*** est l'image de ***MN*** par l'**affinité vectorielle** Φ de rapport λ relativement à F parallèlement à G.



affinité de rapport 2 de base (B) parallèlement à (C)

EXEMPLE 1 :

❑ Dans l'espace de dimension 3 muni d'un repère (O, ***i***, ***j***, ***k***), on demande l'expression analytique de l'affinité de rapport –2 relativement au plan (B) d'équation $2x + y - z = 3$ et parallèlement à la droite (C) de vecteur directeur ***V*** (1,0,1).

On peut déjà constater que la droite n'est pas contenue dans le plan, puisque, pour ***V***, $x = 1$, $y = 0$ et $z = 1$ donc $2x + y - z \neq 0$. Soit un point M(x, y, z). On cherche une représentation paramétrique de la droite passant par M et de vecteur directeur ***V***. L'intersection de cette droite avec le plan (B) donne le point projeté N de M. Il est alors facile d'appliquer un rapport d'affinité. La représentation de la droite est :

$$\begin{cases} X = x + \lambda \\ Y = y \\ Z = z + \lambda \end{cases}$$

Le projeté N de M sur (B) parallèlement à (C) vérifie les équations ci-dessus ainsi que celle de (B) :

$$2X + Y - Z = 3$$

d'où $\quad -2x - y + z + 3 = \lambda$. Les coordonnées de N sont donc :

$$N : \begin{cases} X = -x - y + z + 3 \\ Y = y \\ Z = -2x - y + 2z + 3 \end{cases}$$

Le vecteur ***NM*** a donc pour composantes :

$$\boldsymbol{NM} : \begin{cases} 2x + y - z - 3 \\ 0 \\ 2x + y - z - 3 \end{cases}$$

L'image P de M par l'affinité vérifie : ***NP*** = –2***NM***. Le vecteur ***NP*** a donc pour composantes :

$$\boldsymbol{NP} : \begin{cases} -4x - 2y + 2z + 6 \\ 0 \\ -4x - 2y + 2z + 6 \end{cases}$$

Le point P cherché a donc pour coordonnées :

$$P : \begin{cases} -5x - 3y + 3z + 9 \\ y \\ -6x - 3y + 4z + 9 \end{cases}$$

EXEMPLE 2 :

❑ Dans l'espace de dimension 3 muni d'un repère (O, ***i***, ***j***, ***k***), on demande de montrer que l'application affine définie par : $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow P = \begin{pmatrix} -2 + x + 2y + 2z \\ 2 - 2x + 5y + 2z \\ -4 + 2x - 2y + z \end{pmatrix}$ est une affinité, de déterminer sa base, sa direction, son rapport.

Cherchons les points invariants. Ils vérifient :

$$\left[\begin{array}{l} y + z = 1 \\ x - 2y - z = 1 \\ x - y = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 + y \\ z = 1 - y \end{array}\right.$$

Il s'agit de la base, droite (B) de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par le point (2,0,1).

Si l'application est une affinité, tous les vecteurs ***PM*** doivent appartenir à un même plan vectoriel, supplémentaire de la direction de la droite (B). Le vecteur ***PM*** a pour composantes :

$$\boldsymbol{PM} = \begin{pmatrix} 2 - 2y - 2z \\ -2 + 2x - 4y - 2z \\ 4 - 2x + 2y \end{pmatrix}$$

et appartient au plan vectoriel d'équation X = Y + Z. Il est bien supplémentaire de la droite $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. C'est la direction de l'affinité.

Le plan affine passant par M et de direction le plan précédent a pour équation $X - Y - Z = x - y - z$. Il coupe la droite (B) en un point N = (X, Y, Z) tel que :

$$\left[\begin{array}{l} X - Y - Z = x - y - z \\ X = 2 + Y \\ Z = 1 - Y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 + x - y - z \\ Y = -1 + x - y - z \\ Z = 2 - x + y + z \end{array}\right.$$

On a alors :

$$\boldsymbol{NM} = \begin{pmatrix} -1 + y + z \\ 1 - x + 2y + z \\ -2 + x - y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{NP} = 3\begin{pmatrix} -1 + y + z \\ 1 - x + 2y + z \\ -2 + x - y \end{pmatrix} = 3\,\boldsymbol{NM}$$

Le rapport de l'affinité est 3.

3- Propriétés des applications affines

PROPOSITION :

Soit f une application affine et Φ l'application linéaire associée à f. Alors :

i) *Si* (A) *est un sous-espace affine de l'ensemble de départ de direction* F, *alors* f(A) *est un sous-espace affine de l'ensemble d'arrivée de direction* Φ(F).

ii) Si (B) *est un sous-espace affine de l'ensemble d'arrivée de direction* G, *et si* f^{-1}(B) *est non vide, c'est un sous-espace affine de l'ensemble de départ de direction* Φ^{-1}(G).

iii) *Si* (B) *est parallèle à* (C) *alors* f(B) *est parallèle à* f(C)

iv) *Si* G *est le barycentre des* $(A_i,\lambda_i)_{i\in I}$, *alors* f(G) *est le barycentre des* $(f(A_i),\lambda_i)_{i\in I}$.

On ne sera pas surpris des propriétés iii) et iv) puisque nous avons introduit la définition des applications affines à partir de ces propriétés.

<u>Démonstration</u> :

❑ i) En effet, si M_0 est un point donné de (A), d'image $f(M_0)$ dans $f(A)$, alors $f(A)$ est le sous-espace affine passant par $f(M_0)$ de direction $\Phi(F)$, car :

$$\begin{array}{ll} & N \in f(A) \\ \Leftrightarrow & \exists\, M \in (A),\ N = f(M) \\ \Leftrightarrow & \exists\, \boldsymbol{U} \in F,\ M = M_0 + \boldsymbol{U} \text{ et } N = f(M) \\ \Leftrightarrow & \exists\, \boldsymbol{U} \in F,\ N = f(M_0 + \boldsymbol{U}) \\ \Leftrightarrow & \exists\, \boldsymbol{U} \in F,\ N = f(M_0) + \Phi(\boldsymbol{U}) \\ \Leftrightarrow & \exists\, \boldsymbol{V} \in \Phi(F),\ N = f(M_0) + \boldsymbol{V} \end{array}$$

❑ ii) Soit M_0 un point de $f^{-1}(B)$. Alors :

$$\begin{array}{ll} & N \in f^{-1}(B) \\ \Leftrightarrow & f(N) \in (B) \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{f(M_0)f(N)} \in G \\ \Leftrightarrow & \Phi(\boldsymbol{M_0N}) \in G \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{M_0N} \in \Phi^{-1}(G) \end{array}$$

❑ iii) Supposons (B) de direction F et (C) de direction G.

$$\begin{array}{ll} & (B) \mathbin{//} (C) \\ \Leftrightarrow & F = G \\ \Rightarrow & \Phi(F) = \Phi(G) \\ \Leftrightarrow & f(B) \mathbin{//} f(C) \end{array}$$

❑ iv) On peut supposer que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. On a :

$$\begin{array}{ll} & \sum_{i\in I} \lambda_i\, \boldsymbol{GA_i} = 0 \\ \Rightarrow & \Phi\left(\sum_{i\in I} \lambda_i\, \boldsymbol{GA_i}\right) = \Phi(0) = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{i\in I} \lambda_i\, \Phi(\boldsymbol{GA_i}) = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{i\in I} \lambda_i\, \boldsymbol{f(G)f(A_i)} = 0 \\ \Rightarrow & f(G) \text{ est barycentre des } (f(A_i),\lambda_i) \end{array}$$

Cette dernière propriété se traduit donc de la façon suivante :

$$\text{Si } \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i = 1, \text{ alors } f(\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i \mathrm{A}_i) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i f(\mathrm{A}_\mathrm{i})$$

Formellement, les notations sont analogues à une notion de linéarité, mais elle s'utilise ici à une application affine qui s'applique sur des points et uniquement si $\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i = 1$.

REMARQUE :

❑ Nous avons vu que, si $\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i = 0$, alors $\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i \mathrm{A}_i$ est un vecteur. Il a donc une image par Φ. Quelle est cette image ? Prenons un point O quelconque. On a :

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i \mathrm{A}_i = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i \mathrm{A}_i - \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i \mathrm{O} = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i \boldsymbol{OA}_i$$

donc, en utilisant la linéarité de Φ :

$$\Phi(\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i \mathrm{A}_i) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i\, \Phi(\boldsymbol{OA}_i) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i\, f(\mathrm{O})f(\mathrm{A}_i) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i\, f(\mathrm{A}_i) - \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i\, f(\mathrm{O}) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i\, f(\mathrm{A}_i)$$

Ainsi :

$$\text{Si } \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i = 0, \text{ alors } \Phi(\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i \mathrm{A}_i) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i\, f(\mathrm{A}_\mathrm{i})$$

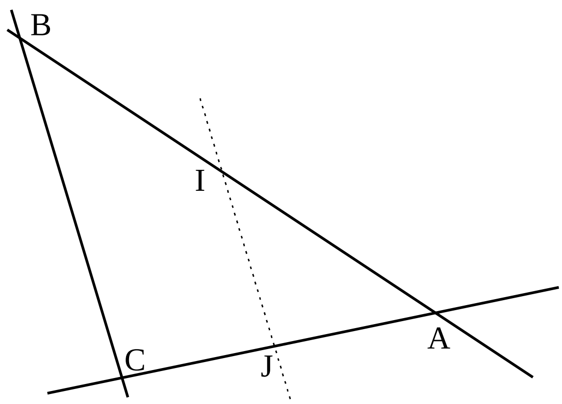
La relation de linéarité ci-dessus ne s'utilise que si $\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i = 0$, Φ s'appliquant sur les vecteurs de f sur les points.

EXEMPLES ET APPLICATIONS :

❑ **Le théorème de Thalès**

Soit ABC *un triangle et* (IJ) *une droite parallèle à* (BC) *coupant* (AB) *en* I *et* (AC) *en* J. *Alors* :

$$\frac{\overline{\mathrm{IA}}}{\overline{\mathrm{IB}}} = \frac{\overline{\mathrm{JA}}}{\overline{\mathrm{JC}}}$$



I appartenant à (AB), il existe un réel λ tel que I soit barycentre de (A, λ) et $B(1 - \lambda)$:

$$I = \lambda A + (1 - \lambda)B$$

Considérons la projection sur (AC) parallèlement à (BC). B a pour image C et I a pour image J, donc :

$$J = \lambda A + (1 - \lambda)C$$

Ces deux relations donnent respectivement :

$$0 = \lambda\boldsymbol{IA} + (1 - \lambda)\boldsymbol{IB} \qquad \text{et} \qquad 0 = \lambda\boldsymbol{JA} + (1 - \lambda)\boldsymbol{JC}$$

donc $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -\dfrac{1-\lambda}{\lambda} = \dfrac{\overline{JA}}{\overline{JC}}$

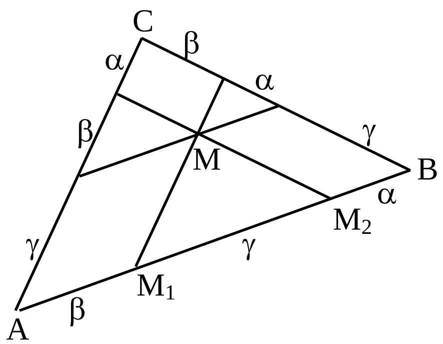
❑ **Coordonnées barycentriques dans le plan**. Soient trois points A, B, C non alignés et M un point du plan, ayant pour coordonnées barycentriques α, β et γ relativement à A, B et C :

$$M = \alpha A + \beta B + \gamma C \quad \text{avec } \alpha + \beta + \gamma = 1$$

Projetons M sur (AB) parallèlement à (AC). C se projette en A et le projeté de M est :

$$M_1 = (\alpha + \gamma)A + \beta B = (1 - \beta)A + \beta B$$

Si M est intérieur à (ABC), M_1 appartient au segment [AB] et β est la proportion occupé par $[AM_1]$ au sein de ce segment.



Projetons maintenant M sur (AB) parallèlement à (BC). On obtient cette fois :

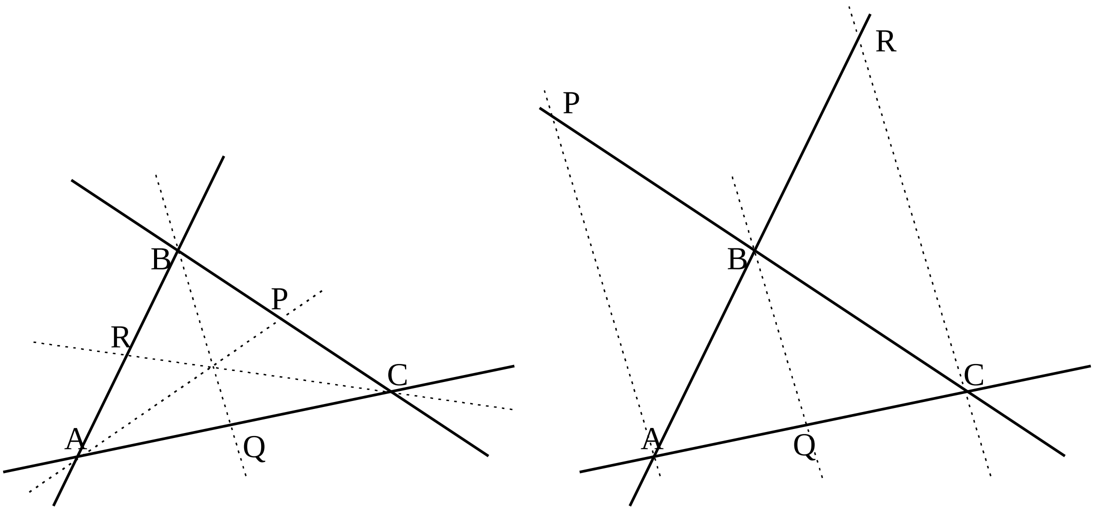
$$M_2 = \alpha A + (\beta + \gamma)B = \alpha A + (1 - \alpha)B$$

α est la proportion du segment $[M_2B]$ au sein du segment [AB].
Par différence, γ est la proportion du segment $[M_1M_2]$ au sein du segment [AB].
On peut de même projeter M sur les autres côtés, faisant apparaître les coordonnées barycentriques α, β et γ sur chacun d'eux.

❑ **Le théorème de Céva** (1648-1734).

Il s'énonce :

Soit ABC *un triangle*, P *élément de* (BC), Q *élément de* (AC) *et* R *élément de* (AB).



Les droites (AP), (BQ) *et* (CR) *sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a* :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

Si les droites sont parallèles, le théorème de Thalès dans le triangle ACP coupé par la droite (BQ) donne $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}$, et le théorème de Thalès dans le triangle ACR coupé par la droite (BQ) donne $\frac{\overline{QC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{AR}}$ donc :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\frac{\overline{QC}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\frac{\overline{BR}}{\overline{AR}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

Supposons maintenant les droites sécantes. Soit H intersection des trois droites. Notons x, y, z les coordonnées barycentriques de H relativement à (A, B, C). On a :

$$H = xA + yB + zC \text{ avec } x + y + z = 1$$

Considérons la projection sur (BC) parallèlement à (AH). A et H se projettent en P, d'où, en utilisant la conservation du barycentre par une projection :

$$P = xP + yB + zC$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{y}{1-x} B + \frac{z}{1-x} C$$

$$\Rightarrow \quad 0 = y\mathbf{PB} + z\mathbf{PC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{z}{y}$$

et de même pour les autres points :

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\frac{y}{x}$$

Le produit demandé vaut $-\frac{y}{x}\frac{z}{y}\frac{x}{z} = -1$.

La réciproque se traite d'une façon analogue à celle du théorème de Ménélaus. Supposons que deux des trois droites se coupent (sinon elles sont toutes trois parallèles), par exemple (AP) et (BQ). Soit H le point d'intersection. Soit R' l'intersection de (CH) et (AB). Le sens direct du théorème de Céva donne $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = -1$, alors que l'hypothèse de la réciproque est $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$. On en déduit que $\frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ et donc que R = R'. Donc (CR) = (CR') = (CH). Les trois droites initiales (AP), (BQ), (CR) sont donc sécantes en H.

❑ Le théorème de Céva permet de retrouver facilement que les **trois médianes du triangle sont concourantes**. En effet, P, Q, R étant les milieux des côtés, on a $\overline{QC} = -\overline{QA}$, $\overline{PB} = -\overline{PC}$, $\overline{RA} = -\overline{RB}$, donc :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

❑ Il permet de retrouver le fait que les **trois hauteurs du triangle sont concourantes**. En effet, si α, β et γ sont les angles en A, B et C, et a, b, c les longueurs des côtés opposés à A, B et C, alors P, Q, R étant les pieds des hauteurs, on a :

$$\overline{PC} = b\cos(\gamma) \qquad \text{et} \qquad \overline{PB} = -c\cos(\beta)$$

donc $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{c}{b}\frac{\cos(\beta)}{\cos(\gamma)}$

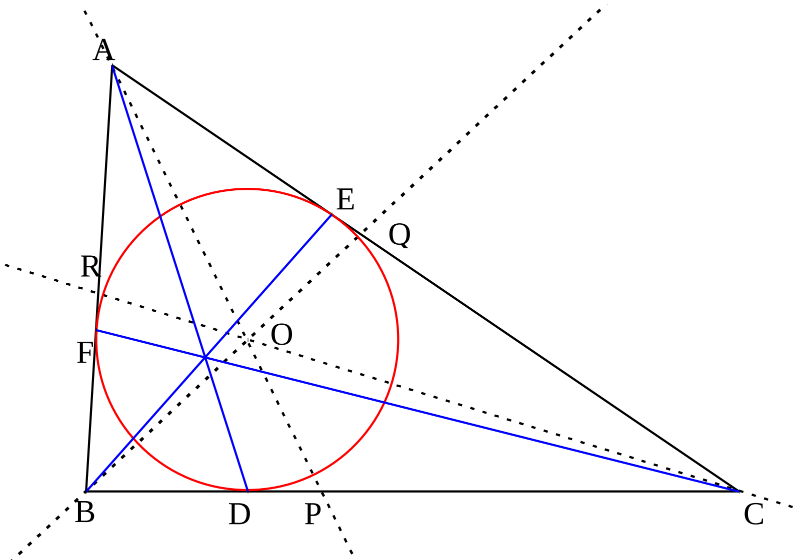
De même, $\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = -\frac{a}{c}\frac{\cos(\gamma)}{\cos(\alpha)}$ et $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -\frac{b}{a}\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}$

Donc $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.

❑ Les **bissectrices intérieures sont concourantes**. En effet, soit O l'intersection des bissectrices en A et B. O appartenant à la bissectrice de A est à égale distance r de (AB) et de (AC). Appartenant à la bissectrice de (AB) et (BC), il est à égale distance de (AB) et (BC). Cette distance est donc aussi r. Par conséquent, O est à égale distance r de (AC) et (BC) donc appartient à la bissectrice de (AC)

et (BC). Etant à égale distance des trois côtés, O est le centre du cercle inscrit dans le triangle. r est le rayon de ce cercle.
On peut aussi utiliser le théorème de Céva pour le montrer. Soient P, Q, R les intersections des bissectrices issues de A, B, C avec leur côté opposé. Soient a, b, c les longueurs des côtés opposés à A, B, C. Dans le chapitre L2/GEOMEUC.PDF, on montre que $\dfrac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{PC}}} = -\dfrac{c}{b}$. On a de même $\dfrac{\overline{\mathrm{QC}}}{\overline{\mathrm{QA}}} = -\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{\overline{\mathrm{RA}}}{\overline{\mathrm{RB}}} = -\dfrac{b}{a}$ donc $\dfrac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{PC}}} \times \dfrac{\overline{\mathrm{QC}}}{\overline{\mathrm{QA}}} \times \dfrac{\overline{\mathrm{RA}}}{\overline{\mathrm{RB}}} = -1$.
Ci-dessous, on a également tracé les droites reliant les sommets A, B, C du triangle aux points de contact D, E, F avec les côtés (BC), (AC) et (AB). On constate que ces trois droites sont concourantes en un point, appelé **point de Gergonne** du triangle. En effet, (BD) et (BF) sont les deux tangentes au cercle inscrit issues de B donc BD = BF. On a de même CD = CE et AF = AE. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Céva :

$$\frac{\overline{\mathrm{DB}}}{\overline{\mathrm{DC}}} \times \frac{\overline{\mathrm{EC}}}{\overline{\mathrm{EA}}} \times \frac{\overline{\mathrm{FA}}}{\overline{\mathrm{FB}}} = \left(-\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DC}}\right)\left(-\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EA}}\right)\left(-\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{FB}}\right) = -\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BF}}\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CD}}\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}} = -1$$



IV : Parties convexes

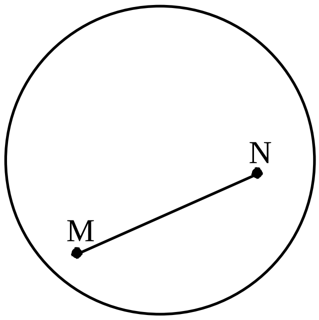
1- Définition

DEFINITION

Une partie C *d'un espace affine* (A) *est dite* **convexe** *si, pour tout point* M *et* N *de* C, *le segment* [MN] *est inclus dans C.*

Le **segment** [MN] est défini comme étant l'ensemble des barycentres de M et N à coefficients positifs ou nuls λM + $(1 - \lambda)$N, $\lambda \in [0, 1]$.

EXEMPLES : Un disque, un sous-espace affine, un demi-plan sont des convexes.



PROPOSITION

Soit $(C_i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles convexes. Alors* $\bigcap_{i\in I} C_i$ *est un convexe.*

Démonstration :

❑ Soient M et N deux points de $\bigcap_{i\in I} C_i$. Alors, pour tout i, $[MN] \subset C_i$ donc $[MN] \subset \bigcap_{i\in I} C_i$

2- Convexes et applications affines

PROPOSITION

Soit f une application affine

i) *Soit* C *une partie convexe de l'ensemble de départ. Alors* $f(C)$ *est convexe.*

ii) *Soit* C *une partie convexe de l'ensemble d'arrivée. Alors* $f^{-1}(C)$ *est convexe.*

Démonstration :

❑ i) Soient M et N éléments de $f(C)$. Il existe A et B éléments de C tels que $M = f(A)$ et $N = f(B)$. Pour tout λ élément de $[0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} G &= \lambda M + (1-\lambda)N \\ &= \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B) \\ &= f(\lambda A + (1-\lambda)B) \\ &= f(g) \end{aligned}$$

avec $g = \lambda A + (1-\lambda)B \in C$ car C est convexe, donc $G \in f(C)$. On a bien prouvé que $f(C)$ est convexe.

❑ ii) Soient A et B éléments de $f^{-1}(C)$. Pour tout élément de $[0, 1]$, on a :

$$g = \lambda A + (1-\lambda)B$$

$$\Rightarrow \quad f(g) = f(\lambda A + (1-\lambda)B)$$

$$= \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B) \text{ avec } f(A) \in C \text{ et } f(B) \in C$$

donc $f(g) \in C$ car C est convexe, donc $g \in f^{-1}(C)$. On a bien prouvé que $f^{-1}(C)$ est convexe.

3- Enveloppe convexe

DEFINITION

Soient $M_1, M_2, .., M_n$ *n points d'un espace affine. On appelle enveloppe convexe de ces points l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de ces points :*

$$C = \{M \mid \exists\, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, ..., \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ et } M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i\}$$

PROPOSITION

L'enveloppe convexe de $M_1, M_2, .., M_n$ *est le plus petit convexe contenant les points* $M_1, M_2, .., M_n$.

<u>Démonstration</u> :

❑ Montrons que C est convexe. Si A et B sont deux éléments de C, on a :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, M_i$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, M_i$$

avec chaque α_i et chaque β_i positif ou nul, et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Un point P du segment [AB] s'écrit, avec $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$P = \lambda A + (1 - \lambda)B$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda\alpha_i + (1 - \lambda)\beta_i) \, M_i$$

Tous les coefficients $\lambda\alpha_i + (1 - \lambda)\beta_i$ sont positifs ou nul et leur somme vaut 1, donc P appartient à C et C est convexe.

❑ Montrons que si D est un convexe possédant tous les points M_i, alors D contient C. On montre cette dernière propriété par récurrence sur le nombre n de points M_i dont C est l'enveloppe convexe.

Pour $n = 2$, si D possède deux points M_1 et M_2, il contient $[M_1M_2]$ puisqu'il est convexe. Mais $[M_1M_2]$, ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de M_1 et M_2, est l'enveloppe convexe C de M_1 et M_2. Donc D contient C.

Supposons la propriété vraie pour $n - 1$ points et soit D convexe possédant $M_1, ..., M_n$. Soit $M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, M_i$ un barycentre à coefficients positifs ou nuls des M_i. Il s'agit de montrer que D possède M. Si λ_n est nul, il suffit d'appliquer directement l'hypothèse de récurrence. Sinon, M est barycentre de M_n affecté du coefficient λ_n, et de $N = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} M_i$ affecté du coefficient $1 - \lambda_n$. Comme N est baycentre de $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ à coefficients positifs ou nuls, N appartient à D en appliquant l'hypothèse de récurrence, et comme M appartient au segment $[NM_n]$ et que D est convexe, M appartient bien à D.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Soit M un point intérieur à un triangle ABC. On note a, b, c les aires des triangles BMC, AMC et AMB. Quel est le barycentre des points (A,a), (B,b) et (C,c) ?

Exo.2) a) Dans le plan, soient trois points A, B, C non alignés, D un point de la droite (AB), E un point de (AC), F intersection de (CD) et (BE) (lorsqu'elle existe). Soient I, J, K milieux respectifs de [BC], [DE], [AF]. Montrer que I, J, K sont alignés.

b) Soient A, B, C trois points non alignés, et Δ une droite sécante en R à (AB), en Q à (AC) et en P à (BC). Soient I, J, K trois points tels que ARIQ, BRJP et CQKP soient des parallélogrammes. Montrer que I, J, K sont alignés.

Exo.3) Montrer que l'application affine suivante $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7x - 2y + 1}{3} \\ \dfrac{-4x + 5y + 8}{3} \end{pmatrix}$ est la composée d'une affinité et d'une translation parallèlement à la base de l'affinité.

Exo.4) Dans $\mathbf{R}^3$, soit (P) le plan affine d'équation $2x - y - 3z + 6 = 0$ et $\boldsymbol{V}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'expression analytique de la projection sur (P) parallèlement à $\boldsymbol{V}$.

b) Quelle est l'image de la droite d'équation $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ par cette projection ?

Exo.5) a) Montrer que l'application affine suivante f, qui à M(x, y) associe M'(x', y'), est une affinité :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{1}{3} \\ y' = -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5y}{3} - \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

b) Même question pour M(x, y, z) $\to$ M'(x', y', z') avec $\begin{cases} x' = 3x + 4y + 2z - 4 \\ y' = -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' = 4x + 8y + 5z - 8 \end{cases}$

Exo.6) Soit f une application affine telle, pour toute droite (D), f(D) est une droite parallèle à (D). Quelle est la nature de f ?

Exo.7) Dans le plan affine E, soit f affine tel que : $\forall$ M, f^2(M) est milieu de [Mf(M)]. Quelle est la nature de f ?

Exo.8) Soient f et g deux applications affines bijectives d'un espace affine, associées aux deux automorphismes φ et ψ, et O un point de cet espace. Soit $a = \boldsymbol{Of(O)}$, $b = \boldsymbol{Og(O)}$ et M $= fgf^{-1}g^{-1}$(O). Exprimer $\boldsymbol{OM}$ en fonction de φ, ψ, a et b.

Exo.9) Soit (A,B,C) un triangle et (a,b,c) élément de $\mathbf{R}^3$ tel que $a + b + c \neq -1$. Soit f l'application qui à tout point M associe le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c) et (M, 1). Quelle est la nature de f ?

Exo.10) Soit (A) un espace affine de direction E, et G un sous-groupe du groupe affine. On pose L = $\{x \in E \mid t_x \in G\}$ où t_x désigne la translation de vecteur x.

a) Montrer que L est un sous-groupe de (E, +)

b) Montrer que, pour toute application affine f élément de G, associée à l'application linéaire φ, et tout élément x de L, on a $\varphi(x)$ élément de L.
(Voir L1/ENSEMBLE.PDF pour la définition d'un sous-groupe)

Exo.11) a) Soient $M_0, M_1, \ldots, M_n$ $n + 1$ points d'un espace affine de dimension n. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on notera $\begin{pmatrix} 1 \\ M_i \end{pmatrix}$ la colonne constituée du nombre 1 et des coordonnées de M_i dans un repère donné. Montrer que $M_0, M_1, \ldots, M_n$ sont affinement indépendants si et seulement si :

$$\det(\begin{pmatrix} 1 \\ M_0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ M_n \end{pmatrix}) \neq 0$$

b) Soient $M_0, M_1, \ldots, M_n$ $n + 1$ points affinement indépendants. Sur chaque droite (M_iM_{i+1}) on choisit un point P_i (avec la convention $M_{n+1} = M_0$). Soit λ_i les réels tels que $\boldsymbol{M_iP_i} = \lambda_i\ \boldsymbol{M_iM_{i+1}}$, $0 \leq i \leq n$. Montrer que les (P_i) sont dans le même hyperplan (sous-espace affine de dimension $n - 1$) si et seulement si $\prod_{i=0}^{n} (1 - \lambda_i) + (-1)^n \prod_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$.

Exo.12) Dans un espace affine de dimension 3, soient trois points A, B, C non alignés contenus dans un plan (P). Soit S un point extérieur à (P), A' un point de (SA) distinct de A et de S, (P') un plan passant par A', auquel (BC) est parallèle, et sécant à (P) suivant une droite (D) ne contenant pas A. Soit E l'intersection de (D) et (AB), et F l'intersection de (D) et (AC).

a) Si (A'E) est parallèle à (SB), montrer que (A'F) est parallèle à (SC).

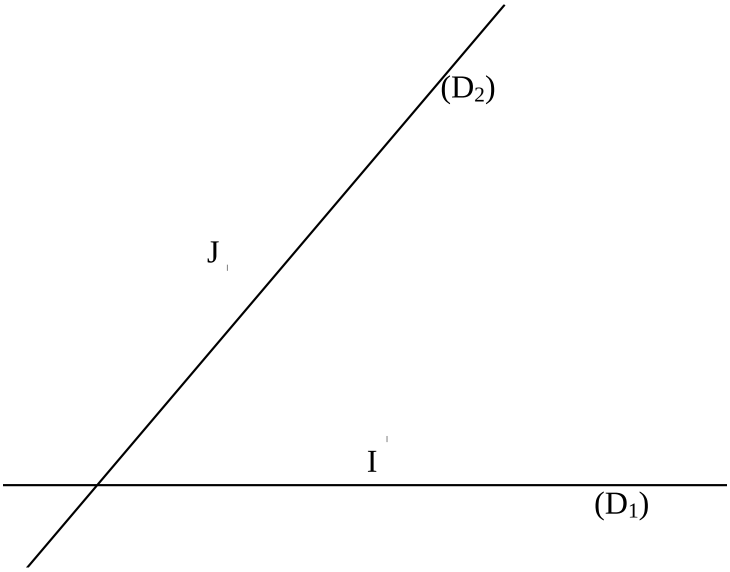
b) Dans le cas contraire, soit B' l'intersection de (A'E) et (BS) et C' l'intersection de (A'F) et (SC). Montrer que (BC), (D) et (B'C') sont parallèles.

Exo.13) Dans l'espace affine de dimension 3, soient (D) et (D') deux droites sécantes en O, et (Δ) une droite sécante en I au plan (D,D'), en dehors de (D) et (D'). Soient A et B deux points de (Δ), distincts entre eux et distincts de I. Un plan (P) variable, contenant (Δ), coupe (D) en M et (D') en M'.

a) Montrer que, si $M \neq M'$, (MM') passe par un point fixe.

b) Déterminer la nature de l'ensemble des intersections des droites (AM) et (BM').

Exo.14) Dans le plan affine, Soient deux droites sécantes (D_1) et (D_2), I et J deux points distincts. Construire un triangle ABC tels que : $A \in (D_1)$, $B \in (D_2)$, I est le milieu de [AC], J est le milieu de [BC].



Exo.15) Soit f une application affine d'un espace affine de dimension finie dans lui-même. Soit φ l'application linéaire associée à f. On pose :

$$\mathrm{Inv}(f) = \{M \mid f(M) = M\}.$$

On suppose $\mathrm{Inv}(f) \neq \emptyset$. Soit t une translation de vecteur $\boldsymbol{U}$ parallèlement à $\mathrm{Inv}(f)$.

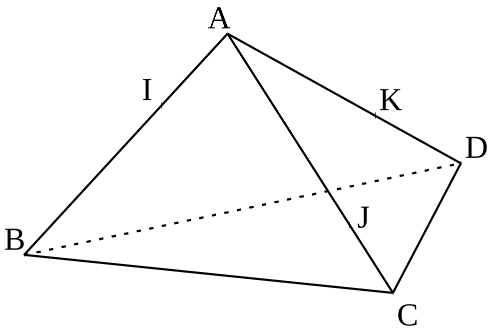
a) Montrer que $\varphi(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U}$.

b) Montrer que $f \circ t = t \circ f$.

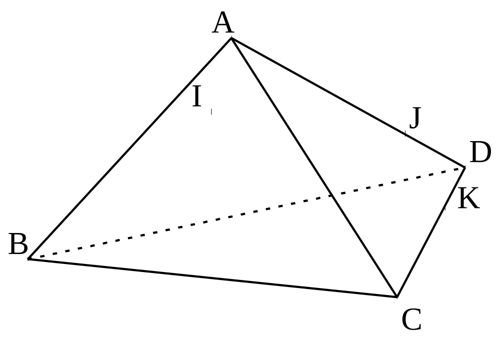
c) Dans le cas où $\mathrm{Inv}(f) = \emptyset$, montrer qu'il existe $\boldsymbol{U} \neq 0$, $\varphi(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U}$.

Exo.16) Pour chacune des figures suivantes représentant en perspective sur une surface plane une figure de l'espace, utiliser une règle et un crayon pour tracer l'intersection demandée :

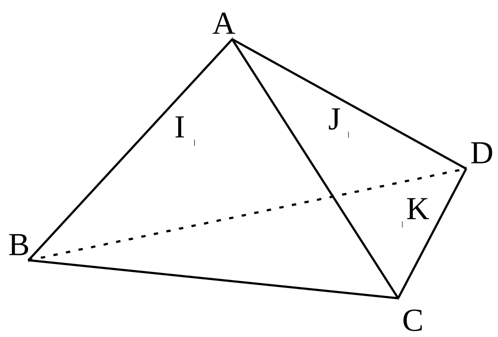
a) ABCD est un tétraèdre, I $\in$ (AB), J $\in$ (AC), K $\in$ (AD). On demande l'intersection des deux plans (IJK) et (BCD).



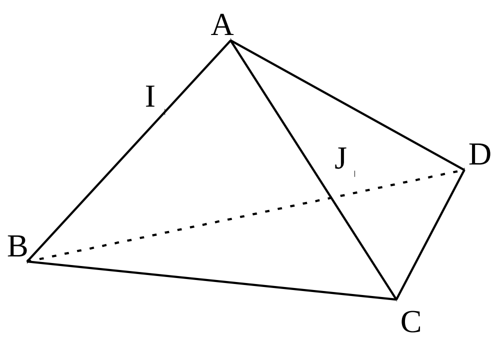
b) ABCD est un tétraèdre, I $\in$ (ABC), J $\in$ (AD), K $\in$ (CD). On demande l'intersection du plan (IJK) avec le plan (BCD).



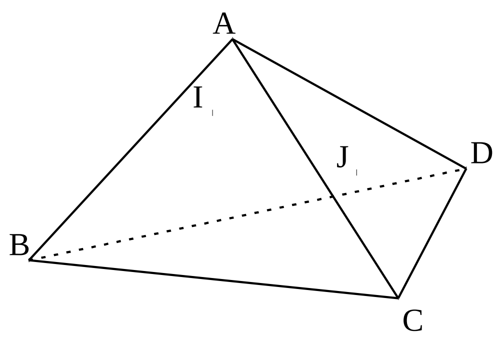
c) ABCD est un tétraèdre, I ∈ (ABC), J ∈ (ABD), K ∈ (ACD). On demande l'intersection du plan (IJK) avec le plan (BCD).



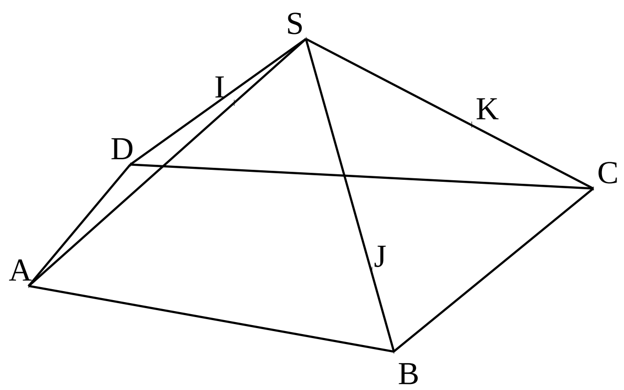
d) ABCD est un tétraèdre, I ∈ (AB), J ∈ (ACD). On demande l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD).



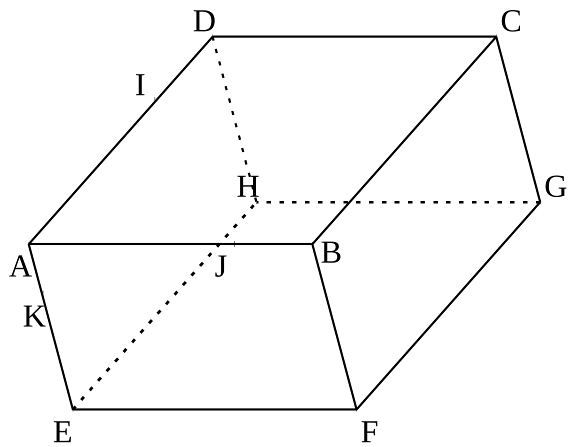
e) ABCD est un tétraèdre, I ∈ (ABC), J ∈ (ACD). On demande l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD).



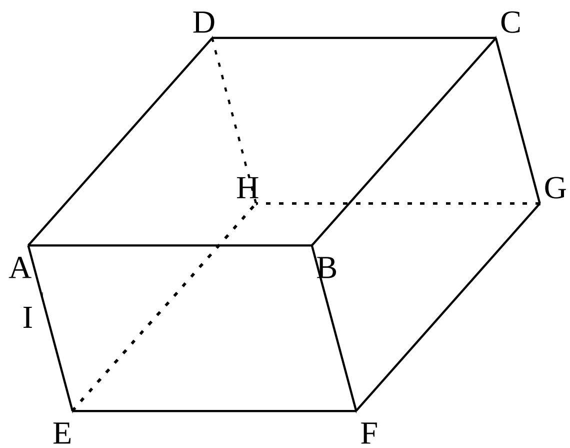
f) ABCD est un polygone plan, S un point hors de ce plan, I ∈ (SA), J ∈ (SB), K ∈ (SC). On demande de tracer les intersections du plan (IJK) avec les faces du polyèdre SABCD.



g) On se donne un parallélépipède ABCDEFGH, I $\in$ (AD), J $\in$ (AB), K $\in$ (AE). Tracer le point R intersection de la droite (CG) et du plan (IJK).



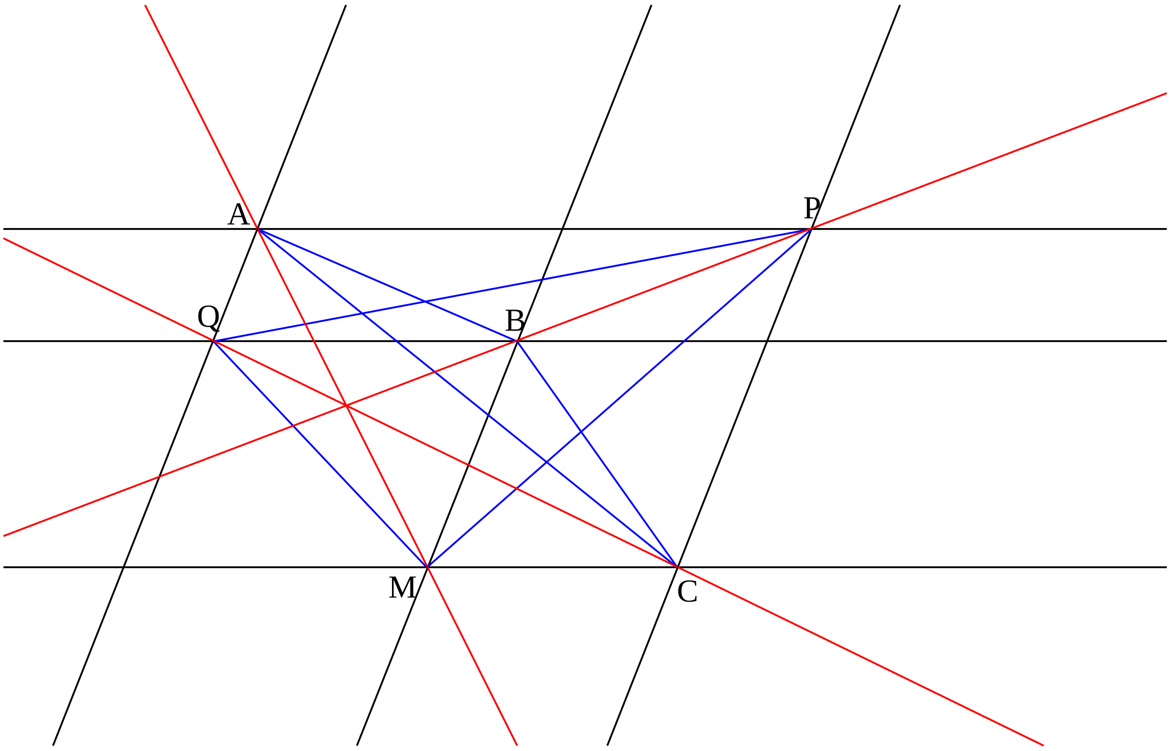
h) On se donne un parallélépipède ABCDEFGH, I $\in$ (AE). Tracer le point R intersection de la droite (IC) et du plan (BDG).



Exo.17) Soit P un polynôme à coefficients complexes, de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que les zéros de P' sont dans l'enveloppe convexe des zéros de P.

Exo.18) Dans le plan, déterminer un triangle ABC dont on connaît les milieux des côtés A', B', C'. Plus généralement, soit I_1, I_2 ..., I_n *n* points. Peut–on trouver un polygone à *n* côtés dont les milieux sont ces *n* points ?

Exo.19) Soient six points A, B, C, M, P, Q tels que (AP), (BQ), (CM) soient parallèles, et que (AQ), (BM) et (CP) soient parallèles. Montrer que (AM), (BP) et (CQ) sont concourantes.



2- Solutions

Sol.1) Il s'agit du point M lui-même. Prenons un repère tel que B = (0, 0), A = (0, 1) et C = (1, 0). Prenons comme unité de mesure d'aire la quantité det($\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{BA}$). Si M = (x, y) dans ce repère, alors :

$$a = \frac{1}{2}\det(\boldsymbol{MB}, \boldsymbol{MC}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -x & 1-x \\ -y & -y \end{vmatrix} = \frac{y}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}\det(\boldsymbol{MC}, \boldsymbol{MA}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1-x & -x \\ -y & 1-y \end{vmatrix} = \frac{1-x-y}{2}$$

$$c = \frac{1}{2}\det(\boldsymbol{MA}, \boldsymbol{MB}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -x & -x \\ 1-y & -y \end{vmatrix} = \frac{x}{2}$$

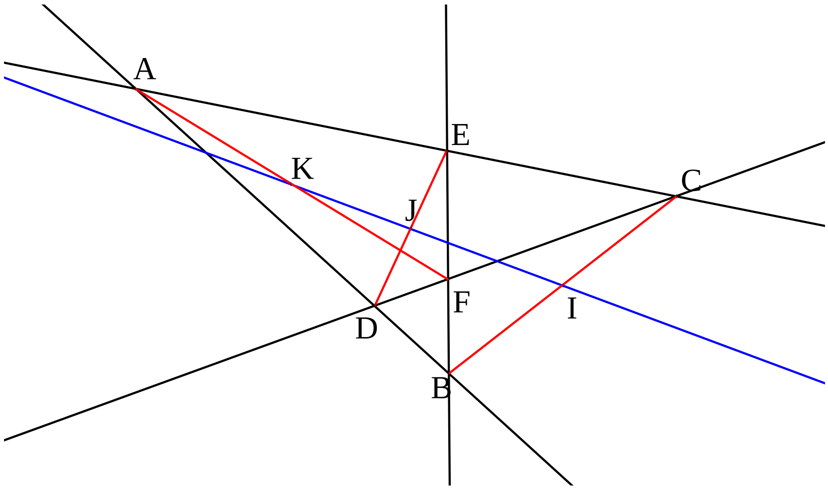
On a $a + b + c = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\det(\boldsymbol{BC}, \boldsymbol{BA})$, de sorte que le barycentre est :

$$y\mathrm{A} + (1-x-y)\mathrm{B} + x\mathrm{C} = (x, y) = \mathrm{M}$$

Sol.2) On invite le lecteur à tracer les figures au moyen d'un logiciel de géométrie, tel que Geogebra.

a) On peut travailler dans le repère (A, $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$). Dans celui-ci, A = (0, 0), B = (1, 0), C = (0, 1). Soient d et e tels que D a pour coordonnées (d, 0), E a pour coordonnées (0, e).
La droite (CD) a pour équation $x + dy = d$, (BE) a pour équation $y + ex = e$. F vérifie ces deux équations et a pour coordonnées $\left(\frac{d-de}{1-de}, \frac{e-de}{1-de}\right)$.

I, J, K ont pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{d}{2}, \frac{e}{2})$ $(\frac{1}{2}\frac{d-de}{1-de}, \frac{1}{2}\frac{e-de}{1-de})$ et l'on a $\boldsymbol{IJ} = \frac{1}{2}(d-1, e-1)$ alors que $\boldsymbol{IK} = \frac{1}{2(1-de)}(d-1, e-1)$. Les deux vecteurs sont colinéaires donc I, J, K sont alignés.



b) Prendre un repère (A, $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$). Dans ce repère :

A = $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

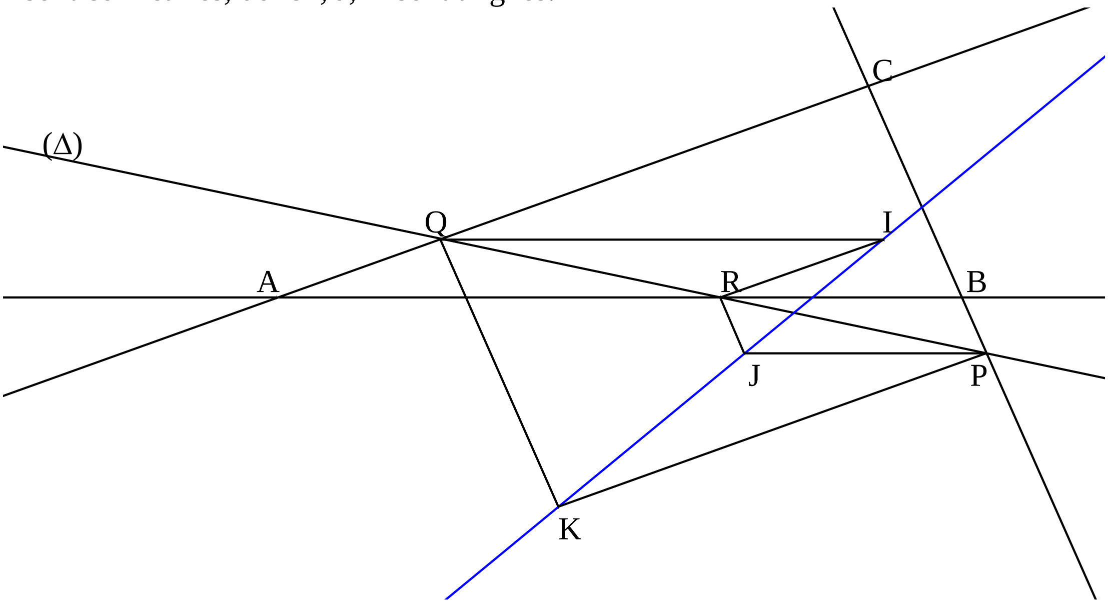
Soient x et y tels que :

R = $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$, Q = $\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$

d'où l'on tirera P = $\begin{pmatrix}\frac{x-xy}{x-y}\\ \frac{xy-y}{x-y}\end{pmatrix}$, I = $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, J = $\begin{pmatrix}x-1+\frac{x-xy}{x-y}\\ \frac{xy-y}{x-y}\end{pmatrix}$, K = $\begin{pmatrix}\frac{x-xy}{x-y}\\ y-1+\frac{xy-y}{x-y}\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{IJ} = \frac{y}{x-y}\begin{pmatrix}1-x\\y-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{JK} = \begin{pmatrix}1-x\\y-1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{IJ}$ et $\boldsymbol{JK}$ sont colinéaires, donc I, J, K sont alignés.



Cet exercice est une variante d'un théorème plus général de géométrie projective, le théorème de Pappus (voir L3/GEOMPROJ.PDF).

Sol.3) Etudions d'abord l'application linéaire φ associée : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7x-2y}{3} \\ \dfrac{-4x+5y}{3} \end{pmatrix}$ et montrons qu'il s'agit d'une affinité vectorielle. Les vecteurs invariants vérifient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7x-2y}{3} \\ \dfrac{-4x+5y}{3} \end{pmatrix}$ soit $2x = y$.

Ce sera la direction de la base de l'affinité. C'est parallèlement à cette droite que s'effectue la translation.

Pour trouver la droite parallèlement à laquelle on effectue une affinité de rapport λ, on cherche les vecteurs non nuls vérifiant :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{7x-2y}{3} \\ \dfrac{-4x+5y}{3} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

C'est équivalent au système $\begin{cases} (7-3\lambda)x - 2y = 0 \\ -4x + (5-3\lambda)y = 0 \end{cases}$. Pour avoir une solution non nulle, il est nécessaire et suffisant que le déterminant du système soit nul, ce qui donne l'équation :

$$(7-3\lambda)(5-3\lambda) - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 9\lambda^2 - 36\lambda + 27 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3$$

Le cas λ = 1 correspond à la base de l'affinité, déjà vue. Pour λ = 3, le système a pour solution la droite $x + y = 0$. C'est la direction de l'affinité. 3 sera le rapport de l'affinité.

Il reste donc à trouver a et b tels que l'équation de la base soit $y = 2x + a$, la translation étant de vecteur $b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, colinéaire à la base.

Soit M = (x, y) un point quelconque, N = (x'', y'') l'intersection de la base et de la direction. On doit avoir :

$$\begin{cases} y'' = 2x'' + a \\ x'' + y'' = x + y \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{x+y-a}{3} \\ y'' = \dfrac{2x+2y+a}{3} \end{cases}$$

L'image de M par l'affinité est P = (x''', y''') tel que $\boldsymbol{NP} = 3\boldsymbol{NM}$, ou encore P = 3M – 2N, ce qui donne :

$$\begin{cases} x''' = \dfrac{7x-2y+2a}{3} \\ y''' = \dfrac{-4x+5y-2a}{3} \end{cases}$$

On effectue enfin la translation de vecteur $b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et on doit trouver l'image M' = (x', y') donnée par l'énoncé :

$$\left[\begin{array}{l} x' = \dfrac{7x - 2y + 2a}{3} + b = \dfrac{7x - 2y + 1}{3} \\ y' = \dfrac{-4x + 5y - 2a}{3} + 2b = \dfrac{-4x + 5y + 8}{3} \end{array}\right.$$

On a donc nécessairement $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2a}{3} + b = \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2a}{3} + 2b = \dfrac{8}{3} \end{array}\right.$ donc $b = 1$ et $a = -1$.

Conclusion : la base de l'affinité a pour équation $y = 2x - 1$, la direction est la droite $x + y = 0$, le rapport de l'affinité est $\lambda = 3$, la translation se fait selon le vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Sol.4) a) Soit M = (x, y, z) un point quelconque. Son projeté est de la forme M + λ***V*** et doit vérifier l'équation de (P), ce qui donne $2(x + 3\lambda) - (y + 2\lambda) - 3(z + \lambda) + 6 = 0$, donc :

$$\lambda = -2x + y + 3z - 6$$

donc le projeté est $\begin{pmatrix} -5x + 3y + 9z - 18 \\ -4x + 3y + 6z - 12 \\ -2x + y + 4z - 6 \end{pmatrix}$

b) Il suffit de chercher l'image de deux points de la droite, par exemple (2, 0, 1) et (–3, 1, –2). Les images sont respectivement (– 19, – 14, – 6) et (– 18, – 9, – 7). L'image cherchée est donc la droite passant par (– 18, – 9, – 7) et de vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$. Ce vecteur est aussi l'image du vecteur directeur de la droite initiale $\begin{pmatrix}-5\\1\\-3\end{pmatrix}$ par l'application linéaire associée à la projection, de matrice $\begin{pmatrix} -5x + 3y + 9z \\ -4x + 3y + 6z \\ -2x + y + 4z \end{pmatrix}$.

Sol.5) a) On cherche d'abord les points invariants par f. Ils vérifient $x - y + 1 = 0$ et forment une droite affine (D). Ce sera la base de l'affinité. On montre ensuite que, pour tout M, ***MM'*** garde une direction fixe :

$$\boldsymbol{MM'} = \frac{x - y + 1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

de direction la droite G engendrée par $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Ce sera la direction de l'affinité. Cette direction n'est pas celle de (D). On projette M sur (D) parallèlement à G. Soit M"(x'', y'') ce projeté. Il vérifie $x'' - y'' + 1 = 0$ et $\exists\ \lambda$, $\begin{pmatrix}x'' - x\\y'' - y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ donc $x'' = x + \lambda$, $y'' = y - 2\lambda$, $x - y + 1 + 3\lambda = 0$, donc $\lambda = -\dfrac{x - y + 1}{3}$, $\boldsymbol{M''M} = \dfrac{x - y + 1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{M''M'} = 2\boldsymbol{M''M}$. Le rapport de l'affinité est 2.

b) En procédant comme ci-dessus, on trouvera qu'il s'agit de l'affinité de base le plan d'équation $x + 2y + z = 2$, de direction la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rapport 3.

Sol.6) Si Φ est l'application linéaire associée à f, cela signifie que, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, $\Phi(\boldsymbol{u})$ est colinéaire à $\boldsymbol{u}$: $\forall\ \boldsymbol{u}, \exists\ \lambda, \Phi(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$. En fait, λ ne dépend pas de $\boldsymbol{u}$ car si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux vecteurs linéairement indépendants, alors on doit avoir simultanément :

$\exists\ \lambda, \Phi(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$.

$\exists\ \mu, \Phi(\boldsymbol{v}) = \mu\boldsymbol{v}$.

$\exists\ \nu, \Phi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \nu(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$

Mais on a aussi $\Phi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \Phi(\boldsymbol{u}) + \Phi(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} = \nu\boldsymbol{u} + \nu\boldsymbol{v}$ donc $\lambda = \mu = \nu$.

Par ailleurs, si $\boldsymbol{v}$ est proportionnel à $\boldsymbol{u}$ non nul, alors :

$\exists\ \mu, \boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{u}$ et $\Phi(\boldsymbol{v}) = \Phi(\mu\boldsymbol{u}) = \mu\Phi(\boldsymbol{u}) = \mu\lambda\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{v}$

Ainsi Φ est une homothétie vectorielle de rapport λ, donc f est une translation ou une homothétie.

Sol.7) Montrons que f est une affinité, ou l'identité ou une homothétie. Soit φ l'application linéaire associée à f. Alors, d'après l'hypothèse, pour tout M et tout N de E :

$f^2(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{M} + \frac{1}{2}\,f(\mathrm{M})$ et $f^2(\mathrm{N}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{N} + \frac{1}{2}\,f(\mathrm{N})$

donc $\boldsymbol{f^2(M)f^2(N)} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{MN} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{f(M)f(N)}$

donc $\varphi^2(\boldsymbol{MN}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{MN} + \frac{1}{2}\,\varphi(\boldsymbol{MN})$

donc $\varphi^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Id} + \frac{1}{2}\,\varphi$

donc $\varphi^2 - \frac{1}{2}\,\varphi - \frac{1}{2}\,\mathrm{Id} = 0$

donc $(\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}) \circ (\varphi - \mathrm{Id}) = 0$

Cas.1) Si $\varphi - \mathrm{Id} = 0$, alors $\varphi = \mathrm{Id}$, f est une translation : $\exists\ \boldsymbol{u}, \forall\ \mathrm{M}, f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \boldsymbol{u}$. Mais alors $f^2(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + 2\boldsymbol{u}$ et la relation $f^2(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{M} + \frac{1}{2}\,f(\mathrm{M})$ devient $2\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{u}$ donc $\boldsymbol{u} = 0$ et $f = \mathrm{Id}$.

Cas.2) Si $\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id} = 0$, alors φ est une homothétie vectorielle de rapport $-\frac{1}{2}$ donc f est une homothétie affine de même rapport.

Cas.3) Si $\varphi - \mathrm{Id} \neq 0$ et $\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id} \neq 0$, alors ces deux endomorphismes sont non nuls, mais ne sont pas inversibles, car si, par exemple $\varphi - \mathrm{Id}$ était inversible, on aurait $\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id} = 0$, en composant à droite la relation $(\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}) \circ (\varphi - \mathrm{Id}) = 0$ par l'inverse de $\varphi - \mathrm{Id}$.

Il en résulte que $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id})$ ne sont ni égaux à E ni réduit à $\{0\}$. Ce sont donc deux droites vectorielles. Elles sont en outre supplémentaires car :

$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(\varphi + \frac{1}{2}\mathrm{Id})$

$\Rightarrow \quad \varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{u}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{u} = 0$

Montrons que f est une affinité parallèlement à $\mathrm{Ker}(\varphi + \frac{1}{2}\mathrm{Id})$ et de base une droite de direction $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$. Remarquons qu'il existe au moins un point O invariant par f. Prenons pour cela M quelconque et vérifions que $\frac{1}{3}\mathrm{M} + \frac{2}{3}f(\mathrm{M})$, barycentre de $(\mathrm{M}, \frac{1}{3})$ et de $(f(\mathrm{M}), \frac{2}{3})$ est invariant. On a :

$$f(\frac{1}{3}\mathrm{M} + \frac{2}{3}f(\mathrm{M})) = \frac{1}{3}f(\mathrm{M}) + \frac{2}{3}f^2(\mathrm{M}) = \frac{1}{3}f(\mathrm{M}) + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\mathrm{M} + \frac{1}{2}f(\mathrm{M})) = \frac{1}{3}\mathrm{M} + \frac{2}{3}f(\mathrm{M})$$

Il suffit alors de prendre pour O un quelconque de ces points $\frac{1}{3}\mathrm{M} + \frac{2}{3}f(\mathrm{M})$.

Vérifions que l'ensemble des points invariants est la droite $\mathrm{O} + \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$

M invariant

$\Leftrightarrow \quad f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f(O)f(M)} = \boldsymbol{OM}$

$\Leftrightarrow \quad \varphi(\boldsymbol{OM}) = \boldsymbol{OM}$

$\Leftrightarrow \quad (\varphi - \mathrm{Id})(\boldsymbol{OM}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{OM} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{M} \in \mathrm{O} + \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$

$\mathrm{O} + \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ est la base de notre affinité.

Vérifions ensuite que, pour tout M, $\mathrm{P} = \frac{1}{3}\mathrm{M} + \frac{2}{3}f(\mathrm{M})$ est le projeté de M sur la base parallèlement à $\mathrm{Ker}(\varphi + \frac{1}{2}\mathrm{Id})$. On a déjà vu que $\mathrm{P} = \frac{1}{3}\mathrm{M} + \frac{2}{3}f(\mathrm{M})$ est invariant, donc il appartient à la base. On a ensuite :

$$\boldsymbol{PM} = \mathrm{M} - \mathrm{P} = \mathrm{M} - (\frac{1}{3}\mathrm{M} + \frac{2}{3}f(\mathrm{M})) = \frac{2}{3}(\mathrm{M} - f(\mathrm{M}))$$

$$= \frac{2}{3}(\boldsymbol{OM} - \boldsymbol{f(O)f(M)}) \qquad \text{avec O invariant}$$

$$= \frac{2}{3}(\mathrm{Id} - \varphi)(\boldsymbol{OM})$$

et $\quad (\varphi + \frac{1}{2}\mathrm{Id})(\boldsymbol{PM}) = \frac{2}{3}(\varphi + \frac{1}{2}\mathrm{Id})(\mathrm{Id} - \varphi)(\boldsymbol{OM}) = 0$ car $(\varphi + \frac{1}{2}\mathrm{Id}) \circ (\varphi - \mathrm{Id}) = 0$.

On a ainsi montré que $\boldsymbol{PM}$ était élément de la direction $\mathrm{Ker}(\varphi + \frac{1}{2}\mathrm{Id})$.

Il reste à vérifier que : $\exists\, \lambda$, $\boldsymbol{Pf(M)} = \lambda\boldsymbol{PM}$

$$\boldsymbol{Pf(M)} = f(\mathrm{M}) - \mathrm{P} = f(\mathrm{M}) - (\frac{1}{3}\mathrm{M} + \frac{2}{3}f(\mathrm{M}))$$

$$= \frac{1}{3}(f(\mathrm{M}) - \mathrm{M})$$

alors que

$$\boldsymbol{PM} = (\mathrm{M} - (\frac{1}{3}\mathrm{M} + \frac{2}{3}f(\mathrm{M})) = \frac{2}{3}(\mathrm{M} - f(\mathrm{M}))$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{Pf(M)} = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{PM}$$

Le rapport de l'affinité est $-\dfrac{1}{2}$

Sol.8) $\boldsymbol{OM = Of(O)} + \boldsymbol{f(O)fgf^{-1}g^{-1}(O)}$

$$\begin{aligned}
&= a + \varphi(\boldsymbol{Ogf^{-1}g^{-1}(O)}) \\
&= a + \varphi(\boldsymbol{Og(O)} + \boldsymbol{g(O)gf^{-1}g^{-1}(O)}) \\
&= a + \varphi(b) + \varphi(\boldsymbol{g(O)gf^{-1}g^{-1}(O)}) \\
&= a + \varphi(b) + \varphi\psi(\boldsymbol{Of^{-1}g^{-1}(O)}) \\
&= a + \varphi(b) + \varphi\psi(\boldsymbol{f^{-1}f(O)f^{-1}g^{-1}(O)}) \\
&= a + \varphi(b) + \varphi\psi\varphi^{-1}(\boldsymbol{f(O)g^{-1}(O)}) \\
&= a + \varphi(b) + \varphi\psi\varphi^{-1}(-\,\boldsymbol{Of(O)} + \boldsymbol{Og^{-1}(O)}) \\
&= a + \varphi(b) - \varphi\psi\varphi^{-1}(a) + \varphi\psi\varphi^{-1}(\boldsymbol{Og^{-1}(O)}) \\
&= a + \varphi(b) - \varphi\psi\varphi^{-1}(a) + \varphi\psi\varphi^{-1}(\boldsymbol{g^{-1}g(O)g^{-1}(O)}) \\
&= a + \varphi(b) - \varphi\psi\varphi^{-1}(a) + \varphi\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}(\boldsymbol{g(O)O}) \\
&= a + \varphi(b) - \varphi\psi\varphi^{-1}(a) - \varphi\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}(b)
\end{aligned}$$

Sol.9) $f(\mathrm{M}) = \mathrm{G} = \dfrac{1}{a+b+c+1}(a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} + \mathrm{M})$.

Si $a + b + c = 0$, alors $\mathrm{G} = \mathrm{M} + a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C}$. f est la translation de vecteur $a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C}$

Sinon, soit $\Omega = \dfrac{a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C}}{a+b+c}$. On a :

$$\mathrm{G} = \frac{1}{a+b+c+1}((a+b+c)\Omega + \mathrm{M})$$

donc $\boldsymbol{\Omega G} = \dfrac{1}{a+b+c+1}((a+b+c)\Omega + \mathrm{M}) - \mathrm{G} = \dfrac{1}{a+b+c+1}\,\boldsymbol{\Omega M}$. f est l'homothétie de centre Ω de rapport $\dfrac{1}{a+b+c+1}$.

Sol.10) a) L est non vide car, puisque $\mathrm{Id} = t_0$ appartient à G, 0 appartient à L. Si x et y appartiennent à L, alors t_x et t_y appartiennent à G, donc $t_xt_y^{-1}$ aussi, mais $t_xt_y^{-1} = t_{x-y}$ donc $x - y \in \mathrm{L}$.

b) Il s'agit de montrer que $t_{\varphi(x)}$ est un élément de G. Or, pour tout M :

$$t_{\varphi(x)}(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \varphi(x) = f(f^{-1}(\mathrm{M}) + x) = (f \circ t_x \circ f^{-1})(\mathrm{M})$$

Comme f, t_x et f^{-1} sont tous éléments de G, $t_{\varphi(x)} = f \circ t_x \circ f^{-1}$ l'est aussi donc $\varphi(x) \in \mathrm{L}$.

Sol.11) a) On a :

$\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ sont affinement indépendants

$\Leftrightarrow$ $\det(\boldsymbol{M_0M_1}, \boldsymbol{M_0M_2}, \ldots, \boldsymbol{M_0M_n}) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\det(\mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_0, \mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_0, \ldots, \mathrm{M}_n - \mathrm{M}_0) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\det\left(\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{M}_0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_0\end{pmatrix}\right) \neq 0$ car ce dernier det est triangulaire par bloc avec un 1 en haut à gauche

$\Leftrightarrow$ $\det\left(\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{M}_0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}1\\ \mathrm{M}_n\end{pmatrix}\right) \neq 0$ en ajoutant la première colonne à toutes les autres.

b) Pour tout i, on a $P_i = (1 - \lambda_i)M_i + \lambda_i M_{i+1}$, et :

$(P_0, ..., P_n)$ appartiennent à un hyperplan

$\Leftrightarrow$ $(P_0, ..., P_n)$ ne sont pas affinement indépendants

$\Leftrightarrow$ $\det(\begin{pmatrix} 1 \\ P_0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 1 \\ P_n \end{pmatrix}) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\det(\begin{pmatrix} 1 \\ (1-\lambda_0)M_0 + \lambda_0 M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ (1-\lambda_1)M_1 + \lambda_1 M_2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 1 \\ (1-\lambda_n)M_n + \lambda_n M_0 \end{pmatrix}) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\det((1-\lambda_0)\begin{pmatrix} 1 \\ M_0 \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ M_1 \end{pmatrix}, (1-\lambda_1)\begin{pmatrix} 1 \\ M_1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ M_2 \end{pmatrix}, ..., (1-\lambda_n)\begin{pmatrix} 1 \\ M_n \end{pmatrix} + \lambda_n \begin{pmatrix} 1 \\ M_0 \end{pmatrix}) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(1-\lambda_0) \det(\begin{pmatrix} 1 \\ M_0 \end{pmatrix}, (1-\lambda_1)\begin{pmatrix} 1 \\ M_1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ M_2 \end{pmatrix}, ..., (1-\lambda_n)\begin{pmatrix} 1 \\ M_n \end{pmatrix} + \lambda_n \begin{pmatrix} 1 \\ M_0 \end{pmatrix})$

$+ \lambda_0 \det(\begin{pmatrix} 1 \\ M_1 \end{pmatrix}, (1-\lambda_1)\begin{pmatrix} 1 \\ M_1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ M_2 \end{pmatrix}, ..., (1-\lambda_n)\begin{pmatrix} 1 \\ M_n \end{pmatrix} + \lambda_n \begin{pmatrix} 1 \\ M_0 \end{pmatrix}) = 0$

en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne

$\Leftrightarrow$ $(1-\lambda_0)(1-\lambda_n)...(1-\lambda_1) \det(\begin{pmatrix} 1 \\ M_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ M_1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 1 \\ M_n \end{pmatrix})$

$+ \lambda_0\lambda_1...\lambda_n \det(\begin{pmatrix} 1 \\ M_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ M_2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 1 \\ M_0 \end{pmatrix}) = 0$

en utilisant la linéarité par rapport à chaque colonne, de droite à gauche pour le premier terme, et de gauche à droite pour le second, et le fait qu'un déterminant est nul s'il contient deux colonnes identiques

$\Leftrightarrow$ $((1-\lambda_0)(1-\lambda_n)...(1-\lambda_1) + (-1)^n \lambda_0\lambda_1...\lambda_n) \det(\begin{pmatrix} 1 \\ M_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ M_1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 1 \\ M_n \end{pmatrix}) = 0$

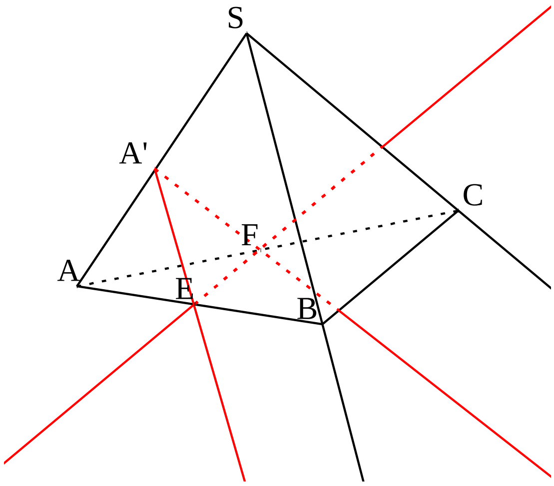
en utilisant le caractère alterné dans le second déterminant

$\Leftrightarrow$ $(1-\lambda_0)(1-\lambda_1)...(1-\lambda_n) + (-1)^n \lambda_0\lambda_1\lambda_2...\lambda_n = 0$

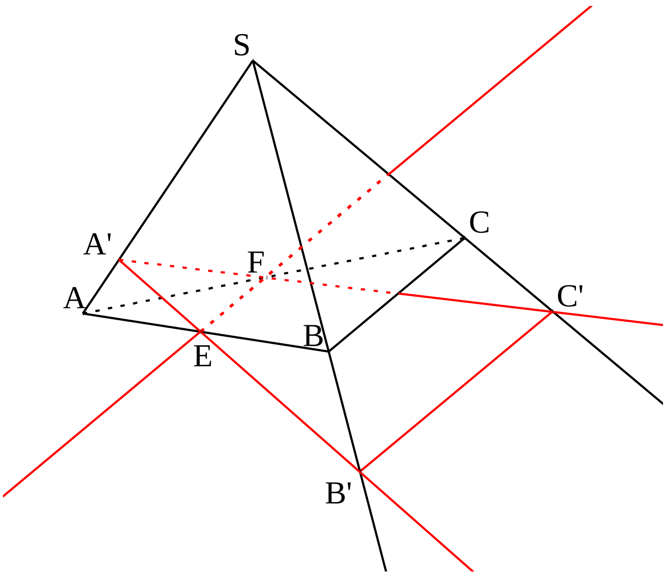
On pourra vérifier que, pour $n = 2$, la condition énoncée correspond exactement à celle du théorème de Ménélaus.

Sol.12) Dans la figure ci-dessous, (P') est en rouge. (P) et (P') sont bien distincts car A' appartient (P') $\cap$ (SA) et est distinct de A = (P) $\cap$ (SA). (P) $\cap$ (P') est une droite ; c'est la droite (D). (BC) est parallèle à (P) $\cap$ (P') = (D). On est donc certain que (D) coupe (AB) en un point E, sinon, dans le plan (P), on aurait (AB) parallèle (D) donc à (BC) et comme B est commun à (AB) et (BC), cela voudrait dire que (AB) = (BC) et donc que A, B et C sont alignés, contrairement à l'hypothèse. De même, (D) coupe (AC) en F. E et F sont distincts, car si on avait E = F, ce point commun serait élément de (AB) $\cap$ (AC) et serait donc égal à A, or il est supposé que A $\notin$ (D).

a)



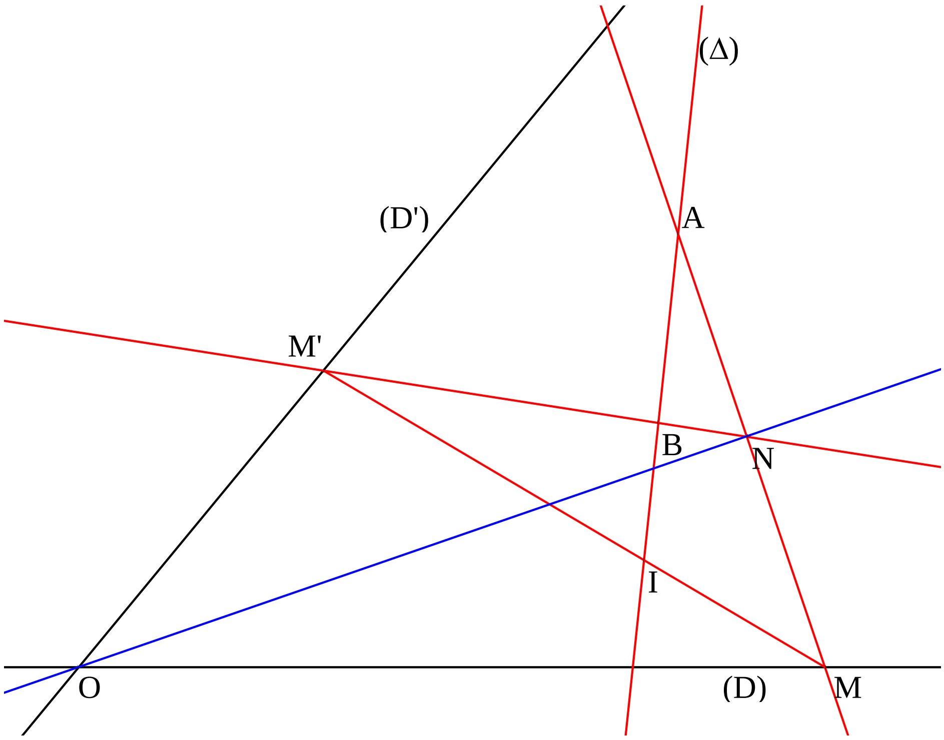
Si (A'E) est parallèle à (SB), le plan (SBC) est parallèle à (P'). En effet, la direction vectorielle de (P') est engendrée par les vecteurs indépendants ***A'E*** et ***EF***, et donc par les deux vecteurs ***SB*** et ***BC*** qui leur sont colinéaires. Donc la direction vectorielle de (P') est aussi celle du plan (SBC). Il en résulte que (A'F), incluse dans (P') et donc parallèle à (P'), est aussi parallèle à (SBC). Comme (A'F) est incluse dans (SAC) et donc parallèle à ce plan, (A'F) est parallèle à (SBC) ∩ (SAC) = (SC).
b)



(D) étant incluse dans (P'), E et F sont éléments de P', comme A', donc (A'E) et (A'F) sont incluses dans (P'), donc B' et C' sont éléments de (P'), donc (B'C') est inclus dans (P') et donc parallèle à (P'). B' et C' sont aussi éléments du plan (SBC) donc (B'C') = (P') ∩ (SBC). Or (BC) est parallèle à (P') et à (SBC) dans lequel il est contenu, donc (BC) est parallèle à (P') ∩ (SBC) donc est parallèle à (B'C'). Dans le préambule de la solution, on a déjà montré que (BC) // (D).
Cet exercice est un cas particulier d'un théorème plus général de géométrie projective, appelé théorème de Desargues (voir L3/GEOMPROJ.PDF).

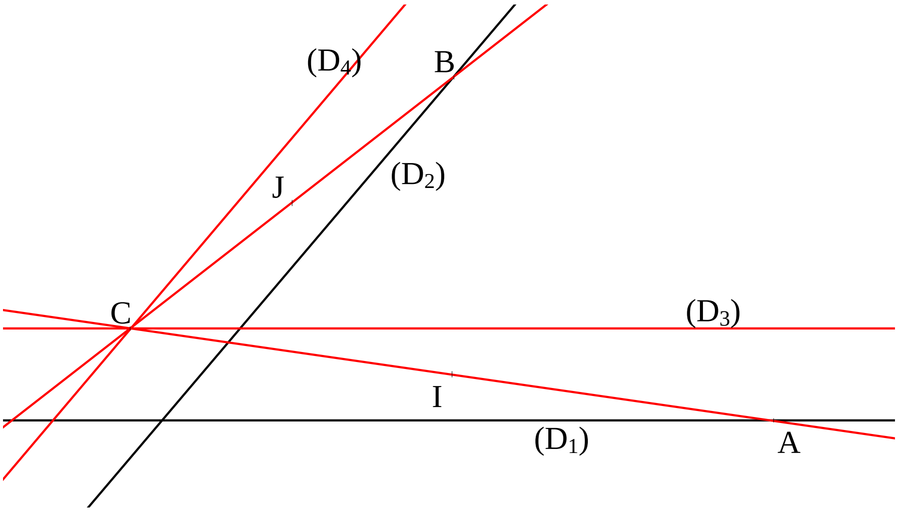
Sol.13) a) Dans la figure ci-dessous, on reprèsente en rouge les éléments qui sont dans le plan (P). M et M' appartiennent à (P) ainsi qu'au plan (D, D'), de même que I. Les deux plans ne sont pas parallèles car sinon, (Δ) serait parallèle au plan (D, D') et ne pourrait être une droite sécante à ce

plan. Donc (P) ∩ (D, D') est une droite qui contient M, M' et I. Donc, si M ≠ M', cette droite n'est autre que (MM'), et elle contient le point fixe I.
On ne peut avoir M = M' que lorsque le plan (P) est le plan (OAB).



b) Soit N l'intersection de (AM) et (BM'). N appartient à (AM) donc au plan (A, D) qui contient le point A et la droite (D). Il appartient aussi au plan (B, D'). Ces deux plans possèdent le point O, intersection de (D) et (D') en commun, et sont distincts, sinon A et B seraient éléments du plan (D, D') et la droite (Δ) ne serait pas sécantes à (D, D'). Donc (A, D) ∩ (B, D') est une droite (en bleu sur la figure) et N est élément de cette droite. N est différent de A, sinon A serait élément de (B, D') donc (Δ) = (AB) serait inclus dans (B, D') donc I appartiendrait à (D'). De même, N est différent de B.
Réciproquement, soit N un point quelconque de la droite (A, D) ∩ (B, D'). Soit M l'intersection de (AN) avec (D) et M' l'intersection de (BN) avec (D'). Deux cas particulier se rencontrent : celui où (AN) est parallèle à (D), ou (BN) parallèle à (D'). En dehors de ces deux cas, N est l'intersection de (AM) et (BM'). L'ensemble des intersections est donc la droite (A, D) ∩ (B, D') privée éventuellement d'au plus deux points.

Sol.14) Prendre (D_3) la droite symétrique de (D_1) par rapport à I, (D_4) la droite symétrique de (D_2) par rapport à J, C l'intersection de (D_2) et (D_4), A l'intersection de (CI) et (D_1), B l'intersection de (CJ) et (D_2).



Sol.15) a) $\boldsymbol{U}$ est supposé appartenir à la direction vectorielle de Inv(f), donc :

$\exists$ A $\in$ Inv(f), $\exists$ B $\in$ Inv(f), $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AB}$

donc $\varphi(\boldsymbol{U}) = \varphi(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{f(A)f(B)} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{U}$

b) Pour tout point M, on a :

$$(f \circ t)(M) = f(M + \boldsymbol{U}) = f(M) + \varphi(\boldsymbol{U}) = f(M) + \boldsymbol{U} = (t \circ f)(M)$$

c) Montrons plutôt la contraposée : si φ n'admet aucun vecteur invariant non nul, alors f admet au moins un point invariant. Résolvons donc l'équation f(M) = M. L'hypothèse se traduit par le fait que Ker(Id – φ) = {0}, et, φ étant un endomorphisme dans un espace vectoriel de dimension finie, Id – φ est bijective. Soit O un point quelconque. On a :

$f(M) = M$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Of(M)} = \boldsymbol{OM}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Of(O)} + \boldsymbol{f(O)f(M)} = \boldsymbol{OM}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Of(O)} + \varphi(\boldsymbol{OM}) = \boldsymbol{OM}$

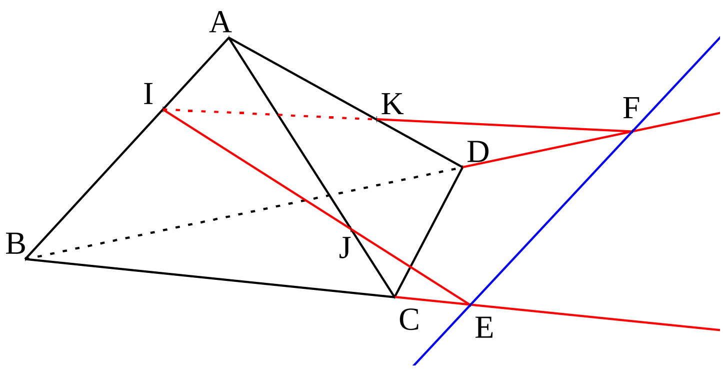
$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Of(O)} = (\mathrm{Id} - \varphi)(\boldsymbol{OM})$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{OM} = (\mathrm{Id} - \varphi)^{-1}(\boldsymbol{Of(O)})$

M existe donc (et de plus est unique).

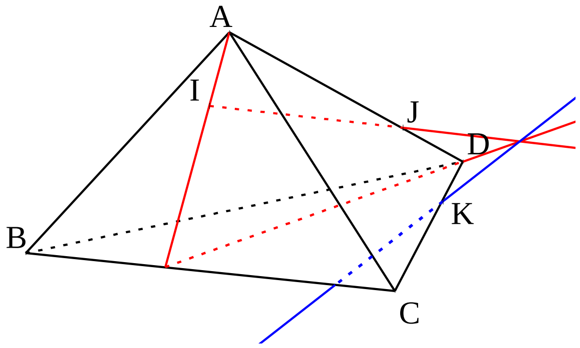
Sol.16) En rouge, on donne les constructions intermédiaires et en bleu, la construction finale demandée. Le lecteur doit comprendre dans quel ordre sont effectuées les constructions intermédiaires :

a)

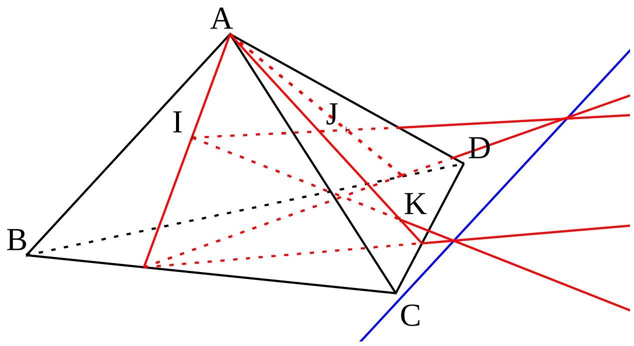


Si on complète la figure en traçant (JK) et (CD), on obtient le théorème de Desargues qui stipule que l'intersection de ces deux droites est alignée avec E et F. (Voir L3/GEOMPROJ.PDF).

b)

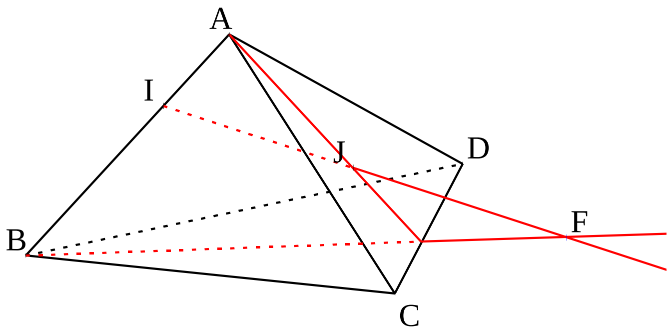


c)

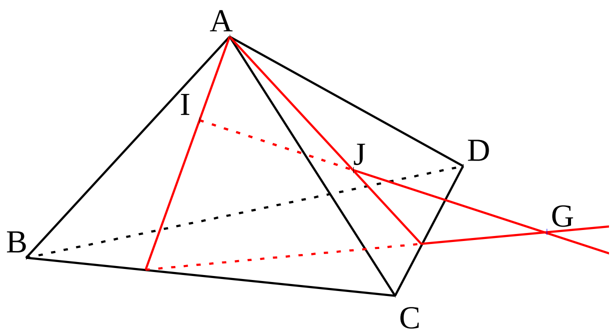


Si on efface les côtés du tétraèdre ABCD, on obtient une figure comparable à celle du a).

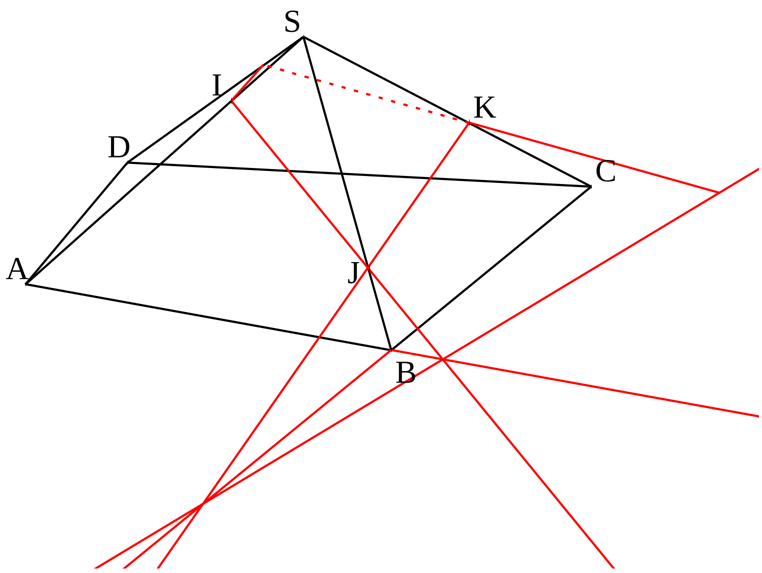
d)



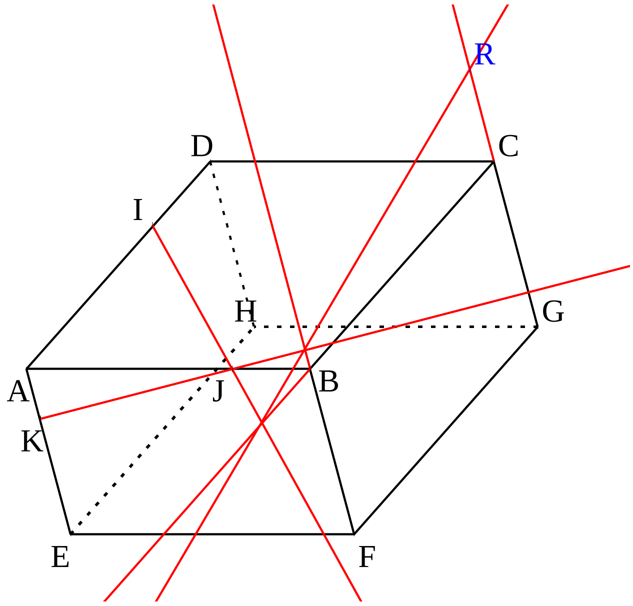
e)



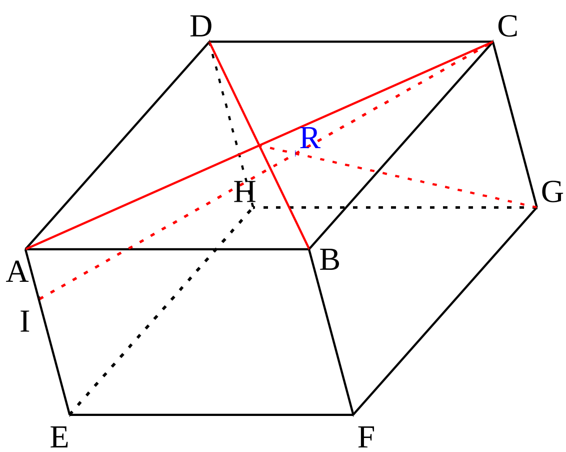
f)



g)



h)



Sol.17) Factorisons P sur $\mathbb{C}$:

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{k_i}$$

donc $$P' = \lambda \sum_{i=1}^{n} k_i \ (X - a_i)^{k_i - 1} \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} (X - a_j)^{k_j}$$

Soit z une racine complexe de P'. Si z est égal à l'un des a_i, z appartient à l'enveloppe convexe des a_i. Sinon on a :

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} k_i \ (z - a_i)^{k_i - 1} \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} (z - a_j)^{k_j} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{z - a_i} P(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{z - a_i} = 0 \qquad \text{puisqu'on a supposé } P(z) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{|z - a_i|^2} (\overline{z} - \overline{a}_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{|z - a_i|^2} (z - a_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{|z - a_i|^2} z = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{|z - a_i|^2} a_i$$

Posons α_i le quotient de $\frac{k_i}{|z - a_i|^2}$ par $\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{|z - a_i|^2}$. Les α_i sont positifs ou nuls, de somme 1, et l'on a :

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, a_i$$

donc z appartient à l'enveloppe convexe des a_i.
Ce résultat peut être vu comme une formulation du théorème de Rolle au cas complexe.

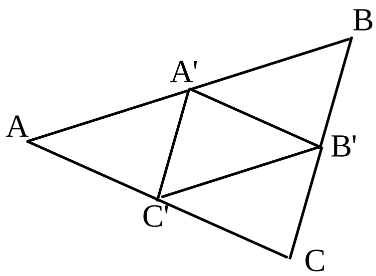
Sol.18) On traite directement le cas général.
Soit M_0 un sommet arbitraire. On définit $M_1 = 2I_1 - M_0$, $M_2 = 2I_2 - M_1$, ..., $M_k = 2I_k - M_{k-1}$, ..., $M_{n-1} = 2I_{n-1} - M_{n-2}$, $M_n = 2I_n - M_{n-1}$ de facon que I_k soit le milieu de $[M_{k-1}M_k]$ pour k variant de 1 à n. On souhaite que $M_n = M_0$. Or, par récurrence :

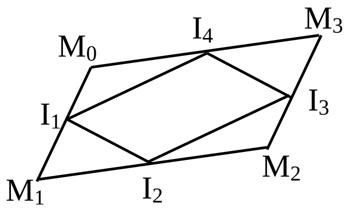
$$M_k = 2I_k - 2I_{k-1} + 2I_{k-2} - ... + 2(-1)^{k-1}I_1 + (-1)^k M_0$$

donc $M_n = 2I_n - 2I_{n-1} + 2I_{n-2} - ... + 2(-1)^{n-1}I_1 + (-1)^n M_0$

donc ou bien n est impair et alors on prend $M_0 = I_n - I_{n-1} + I_{n-2} - ... + I_1$ (dans le cas du triangle, on part de $A = M_0 = A' - B' + C'$)

ou bien n est pair et selon que $I_n - I_{n-1} + I_{n-2} + ... - I_1 = 0$ ou pas, M_0 est quelconque ou au contraire n'existe pas.





Sol.19) On peut prendre un repère tel que A = (0, 0), P = (1, 0), C = (1, 1), B = (a, b) et donc M = (a, 1) et Q = (0, b). Les équations des trois droites (AM), (BP) et (CQ) sont :

Eq(AM) : $x - ay = 0$

Eq(BP) : $bx - (a - 1)y = b$

Eq(CQ) : $(b - 1)x + y = b$

On remarque que Eq(CQ) = Eq(BP) – Eq(AM) donc les trois équations sont liées, et le point intersection de (AM) et (BP) appartient aussi à (CQ).

◆