GEOMETRIE ELEMENTAIRE

PLAN

I : Géométrie du plan

1- Repérage dans le plan

Les éléments du plan ou de l'espace sont considérés dans ce chapitre comme des points. Pour repérer un point M du plan, deux procédés existent, les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.

a) Repère cartésien du plan :
Pour définir un repère cartésien du plan, on se donne un point O appelé origine et deux vecteurs $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ non colinéaires. Pour tout point M du plan, le vecteur $\boldsymbol{OM}$ se décompose d'une façon unique sous la forme :

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

x et y s'appellent **composantes** du vecteur $\boldsymbol{OM}$ ou **coordonnées** du point M. En général, la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ est orthonormée directe, auquel cas on dit que le repère est orthonormal direct.

Un changement de repère consiste simultanément à changer d'origine et de vecteurs de base. Soit Ω la nouvelle origine, de coordonnées (a, b) dans l'ancien repère, et $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ la nouvelle base, donnée par les composantes de $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ dans l'ancienne base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$:

$$\boldsymbol{I} = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$$

$\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{i} + \delta\boldsymbol{j}$

Le problème est de déterminer dans le nouveau repère $(\Omega, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ les coordonnées (X, Y) d'un point M dont on connaît les coordonnées (x,y) dans l'ancien repère $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Il suffit d'écrire que :

$$\boldsymbol{\Omega M} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{O\Omega}$$

$$\Leftrightarrow \quad X\boldsymbol{I} + Y\boldsymbol{J} = (x-a)\boldsymbol{i} + (y-b)\boldsymbol{j}$$

$$\Leftrightarrow \quad X(\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}) + Y(\gamma\boldsymbol{i} + \delta\boldsymbol{j}) = (x-a)\boldsymbol{i} + (y-b)\boldsymbol{j}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \alpha X + \gamma Y = x - a \\ \beta X + \delta Y = y - b \end{array}\right.$$

ce qui amène à résoudre un système.

Si $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ est orthonormé direct et si $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ s'obtient par une rotation d'angle θ par rapport à $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, alors :

$$\boldsymbol{I} = \cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{J} = -\sin(\theta)\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\boldsymbol{j}$$

Le système obtenu sera donc :

$$\left[\begin{array}{l} \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y = x - a \\ \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y = y - b \end{array}\right.$$

Pour obtenir X, il suffit de multiplier la première ligne par $\cos(\theta)$ et la deuxième ligne par $\sin(\theta)$. Pour obtenir Y, il suffit de multiplier la première ligne par $-\sin(\theta)$ et la deuxième par $\cos(\theta)$.

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} X = \cos(\theta)(x-a) + \sin(\theta)(y-b) \\ Y = -\sin(\theta)(x-a) + \cos(\theta)(y-b) \end{array}\right.$$

b) Coordonnées polaires :

Considérons un repère orthonormal direct $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ du plan. Ce repère permet une identification du plan P au plan complexe $\mathbb{C}$.

M de coordonnées $(x, y) \in P \leftrightarrow z = x + iy \in \mathbb{C}$

Les **coordonnées polaires** de M correspondent à la forme trigonométrique du complexe z, à savoir :

$$r = |z| = \| \boldsymbol{OM} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arg(z) = \text{angle}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{OM})$$

On a donc :

$$\left[\begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array}\right.$$

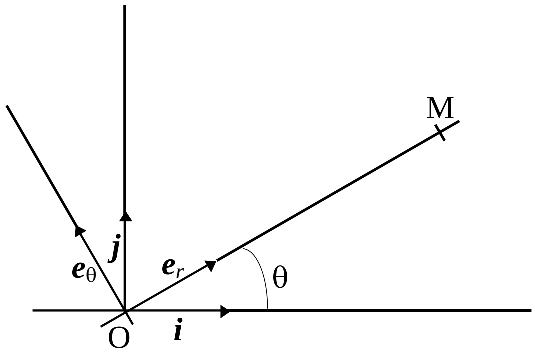
On s'autorise également parfois à poser $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ y compris quand $r < 0$. Dans ce cas, $\sqrt{x^2 + y^2} = |r|$.

Le repère polaire correspondant est donné par $(O, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ où :

$\boldsymbol{e}_r = \cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{j}$ $\quad$ $\boldsymbol{e}_r$ est de norme 1, colinéaire et de même sens que $\boldsymbol{OM}$

$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin(\theta)\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\boldsymbol{j}\boldsymbol{e}_\theta$ est de norme 1, directement orthogonal à $\boldsymbol{u}$

L'origine O prend souvent le nom de **pôle**.



$\boldsymbol{e}_r$ a pour affixe dans le plan complexe $e^{i\theta}$, et $\boldsymbol{e}_\theta$ a pour affixe $ie^{i\theta}$ (où i est le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, à ne pas confondre avec le vecteur $\boldsymbol{i}$!!).

<u>c) Droites en polaire</u> :

Considérons une demi-droite issue de l'origine O. Pour tout point M(x, y) de cette demi-droite, ***OM*** fait un angle constant avec $\boldsymbol{i}$. Son équation polaire est donc θ = Cte. Si on pose :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

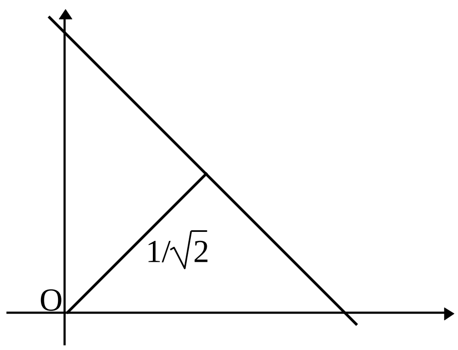
mais en autorisant r à prendre des valeurs négatives, alors M(x, y) décrit la droite entière.

Considérons maintenant une droite ne passant pas par O. Si elle est parallèle à l'axe Oy et passe par le point (x_0, 0), elle a évidemment pour équation $x = x_0$. En coordonnées polaire, on obtient $r\cos(\theta) = x_0$. Comme on ignore le signe de x_0, il est pratique de ne pas poser de condition sur le signe de r et de poser $r = \frac{x_0}{\cos(\theta)}$.

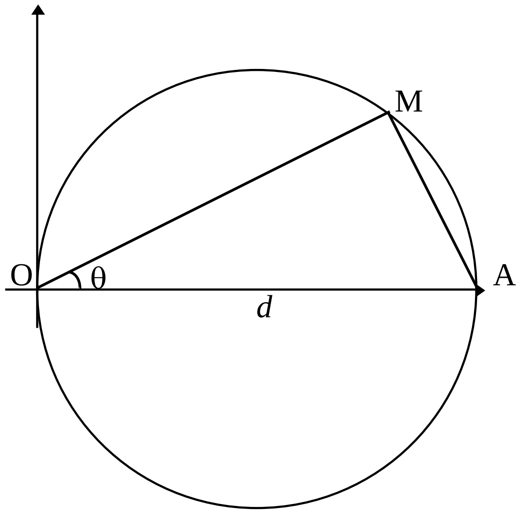
Si l'on fait tourner cette droite d'un angle φ autour de O, l'équation devient : $r\cos(\theta - \varphi) = x_0$. L'équation générale d'une droite sous forme polaire est donc $r\cos(\theta - \varphi) = d$ ou $r = \frac{d}{\cos(\theta - \varphi)}$. φ est la valeur de l'angle θ rendant r minimal, la distance de la droite à l'origine étant d.

EXEMPLE : $r = \frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)}$

Il s'agit d'une droite. En effet, $r = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}$. $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$.



d) Cercles en polaire passant par l'origine :
Considérons maintenant un cercle passant par O, dont le diamètre [OA], de longueur *d*, est inclus dans l'axe des abscisses :



Soit M un point quelconque du cercle et θ l'angle entre ***i*** et ***OM***. Le triangle OAM est rectangle en M, donc les coordonnées polaires de M vérifient :

$$r = \text{OM} = d\cos(\theta)$$

Il suffit que θ décrive l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour que le cercle soit décrit en entier.

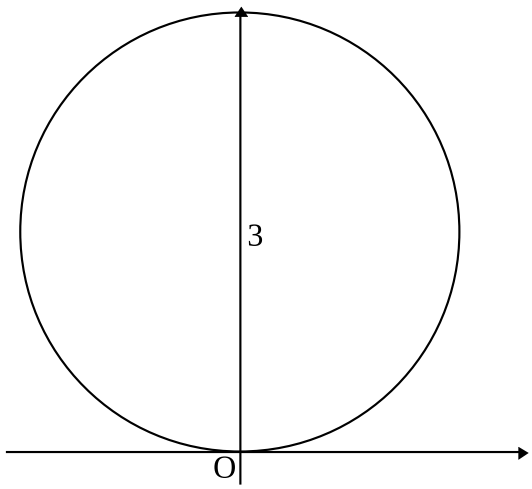
Si la figure précédente est tournée d'un angle φ, alors l'équation devient :

$$r = d\cos(\theta - \varphi)$$

où *d* est la longueur du diamètre, et φ l'angle que fait ce diamètre avec l'axe des abscisses.

EXEMPLE :

❑ $r = 3\sin(\theta)$. Il s'agit d'un cercle. En effet, $r = 3\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$. On a ici $d = 3$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$



2- Produit scalaire

❑ Le produit scalaire est étudié de manière plus approfondie dans le chapitre de *Géométrie Euclidienne* qu'on trouvera dans le fichier ESPEUCL.PDF. Le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ du plan est noté $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$ ou $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$. On l'introduit ici par une définition géométrique :

$<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, où $\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ désigne le cosinus de l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.

Si $\boldsymbol{u}$ ou $\boldsymbol{v}$ est nul, l'angle est non défini, mais dans ce cas, on pose $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = 0$.

Du fait que $\text{angle}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\, \text{angle}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ et que cos est une fonction paire, on a :

$<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}>$

On dit que le produit scalaire est **symétrique**.

❑ On peut interpréter la quantité $\| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ comme le produit de la norme de $\boldsymbol{u}$ par la norme du projeté orthogonal de $\boldsymbol{v}$ sur cette droite, ou le produit de la norme de $\boldsymbol{v}$ par la norme du projeté orthogonal de $\boldsymbol{u}$ sur cette droite.

❑ Donnons l'expression du produit scalaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ en fonction de leurs composantes dans une base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ orthonormée. Posons $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{i} + d\boldsymbol{j}$. Le vecteur directement orthogonal à $\boldsymbol{u}$ est $\boldsymbol{w} = -b\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j}$. Posons $\boldsymbol{U} = \dfrac{\boldsymbol{u}}{\| \boldsymbol{u} \|}$ et $\boldsymbol{W} = \dfrac{\boldsymbol{w}}{\| \boldsymbol{w} \|}$. $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W})$ forme une base orthonormée directe. On a alors, comme on le vérifie facilement :

$$\boldsymbol{v} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} (a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} (-b\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j}) = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}} \boldsymbol{U} + \frac{ad - bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} \boldsymbol{W}$$

La base $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W})$ étant orthonormée directe, on a aussi :

$$\boldsymbol{v} = \| \boldsymbol{v} \| (\cos(\theta)\, \boldsymbol{U} + \sin(\theta)\, \boldsymbol{W})$$

où θ est l'angle $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{v})$. $\boldsymbol{U}$ étant colinéaire et de même sens que $\boldsymbol{u}$, ce n'est autre que l'angle $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Il en résulte que $\dfrac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \| \boldsymbol{v} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, ce qui donne finalement :

$ac + bd = \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

Ainsi :

$$<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = ac + bd$$

❑ Sous cette forme, il est facile de vérifier que, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ et tout scalaire λ, on a :

$$\begin{cases} <\lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = \lambda<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> \\ <\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> + <\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}> \end{cases}$$

On dit que le produit scalaire est linéaire par rapport au premier vecteur.

De même :

$$\begin{cases} <\boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{v}> = \lambda<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> \\ <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'> = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> + <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}'> \end{cases}$$

On dit que le produit scalaire est linéaire par rapport au deuxième vecteur.

Le produit scalaire est **bilinéaire**.

❑ Si on se place dans $\mathbb{C}$, avec les complexes $u = a + ib$ et $v = c + id$, alors on vérifiera que :

$$ac + bd = \text{Re}(\overline{u}v)$$

Ainsi $\text{Re}(\overline{u}v)$ peut s'interpréter comme le produit scalaire des deux vecteurs d'affixe u et v.

3- Déterminant

❑ Avec les mêmes notations que précédemment :

$$\boldsymbol{v} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}(-b\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j}) = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}}\boldsymbol{U} + \frac{ad - bc}{\sqrt{a^2 + b^2}}\boldsymbol{W}$$

$$\boldsymbol{v} = \| \boldsymbol{v} \| (\cos(\theta)\, \boldsymbol{U} + \sin(\theta)\, \boldsymbol{W})$$

on voit apparaître une autre quantité, la composante selon $\boldsymbol{W}$, à savoir :

$$\frac{ad - bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \| \boldsymbol{v} \| \sin(\theta) = \| \boldsymbol{v} \| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

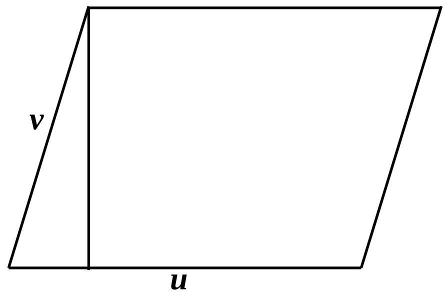
d'où :

$$ad - bc = \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

Cette quantité s'appelle **déterminant** des vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ (dans une base orthonormée directe) :

$$\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ad - bc = \| \boldsymbol{u} \| \| \boldsymbol{v} \| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

La valeur absolue du déterminant est l'aire du parallélogramme construit selon $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. En effet, si $\boldsymbol{u}$ sert de base du dit parallélogramme, alors $\| \boldsymbol{v} \| \left|\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\right|$ est la longueur de sa hauteur.



❑ L'expression $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ad - bc$ permet de vérifier que det est bilinéaire, mais le fait que le sinus soit une fonction impaire conduit à :

$$\det(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = -\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

Le déterminant est dit **antisymétrique** ou **alterné**.

❑ Si on se place dans $\mathbb{C}$, avec les complexes $u = a + ib$ et $v = c + id$, alors on vérifiera que :

$$ad - bc = \mathrm{Im}(\overline{u}v)$$

Ainsi $\mathrm{Im}(\overline{u}v)$ peut s'interpréter comme le déterminant des deux vecteurs d'affixe u et v.

Les déterminants sont étudiés en dimension quelconque dans le chapitre *Déterminants* qu'on trouvera dans le fichier L1/DETERMNT.PDF.

4- Droites

❑ Le déterminant permet de caractériser deux vecteurs colinéaires. En effet :

$\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires
⇔ angle$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ ou π ou $\boldsymbol{u} = 0$ ou $\boldsymbol{v} = 0$
⇔ $\sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ ou $\boldsymbol{u} = 0$ ou $\boldsymbol{v} = 0$
⇔ $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$

De même, trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{AC}$ sont colinéaires, donc si et seulement si $\det(\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}) = 0$.

❑ Il existe essentiellement deux méthodes algébriques pour caractériser une droite, l'équation cartésienne et la représentation paramétrique. On se donne un repère (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$) (en général orthonormal direct). La droite (D) peut être donnée par deux points A et B, ou un point A et un vecteur directeur $\boldsymbol{u}$, ou par un point et un vecteur normal (i.e. orthogonal à la droite) $\boldsymbol{n}$. Si la droite est donnée par deux points A et B, un vecteur directeur est $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB}$.

La représentation paramétrique de (D) est :

$$M \in (D) \Leftrightarrow \exists\, \lambda,\ \boldsymbol{AM} = \lambda \boldsymbol{u} \text{ ce qu'on note aussi } M = A + \lambda \boldsymbol{u}$$

On obtient alors directement :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \end{cases}$$

où a et b sont les composantes de $\boldsymbol{u}$, x et y les coordonnées de M et x_A et y_A les coordonnées de A.

L'élimination de λ conduit à l'équation cartésienne de (D). Mais il est plus simple d'écrire que :

$$M \in (D) \Leftrightarrow \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{AM}) = 0 \Leftrightarrow a(y - y_A) - b(x - x_A) = 0$$
$$\Leftrightarrow -bx + ay = c \text{ avec } c = -bx_A + ay_A$$

Si la droite est donnée par A et un vecteur normal $\boldsymbol{n} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$, alors :

$$M \in (D) \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{AM}, \boldsymbol{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$
$$\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \text{ avec } c = -(ax_A + by_A)$$

Si l'on choisit un vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$, on peut écrire $\boldsymbol{n} = \cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{j}$. L'équation est de la forme suivante dite normale :

$$x\cos(\theta) + y\sin(\theta) + c = 0$$

❑ La notion d'angle défini à π près est parfaitement adaptée aux droites. En effet, l'angle de deux vecteurs non nuls $(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ est l'angle de la rotation qui transforme $\dfrac{\boldsymbol{U}}{\|\boldsymbol{U}\|}$ en $\dfrac{\boldsymbol{V}}{\|\boldsymbol{V}\|}$. La mesure de cet angle est définie à 2π prés. Les angles vérifient la relation de Chasles :

$$(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{W})$$

Celle-ci résulte en effet de la loi de composition des rotations. On a aussi $(\boldsymbol{U}, -\boldsymbol{U}) \equiv \pi \bmod 2\pi$. Il en est de même pour les demi-droites. Une demi-droite vectorielle (D) est engendrée par un vecteur $\boldsymbol{U}$ de telle façon que :

$$(D) = \{\lambda \boldsymbol{U} \mid \lambda > 0\}$$

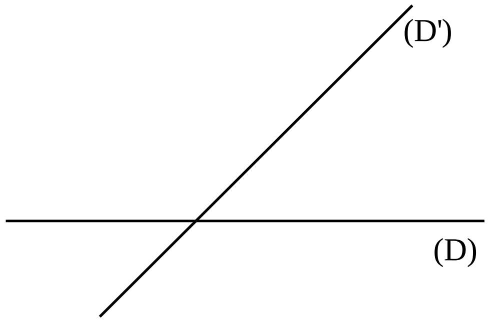
Il en est de même d'une demi-droite affine d'origine le point A et de vecteur directeur $\boldsymbol{U}$, qu'on peut définir comme $\{A + \lambda \boldsymbol{U} \mid \lambda > 0\}$. On peut donc définir l'angle de deux demi-droites comme étant l'angle de leurs deux vecteurs générateurs. Cet angle est défini à 2π près.

Par contre, une droite vectorielle ou affine possède des vecteurs directeurs pouvant prendre deux directions. Il n'existe en effet aucun moyen de privilégier un vecteur directeur d'une droite plutôt que son opposé. Soit deux droites sécantes de vecteurs directeurs $\pm \boldsymbol{U}$ et $\pm \boldsymbol{V}$. On peut choisir comme angle de ces deux droites les angles $(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$, $(-\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$, $(\boldsymbol{U},-\boldsymbol{V})$ ou $(-\boldsymbol{U},-\boldsymbol{V})$. Or on a :

$$(-\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = (-\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) + (\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + \pi$$
$$(\boldsymbol{U},-\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{V},-\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) + \pi$$
$$(-\boldsymbol{U},-\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$$

N'ayant aucun moyen canonique de choisir une orientation particulière pour les droites, nous choisirons donc n'importe lequel de ces angles, mais celui-ci ne sera défini qu'à un multiple de π

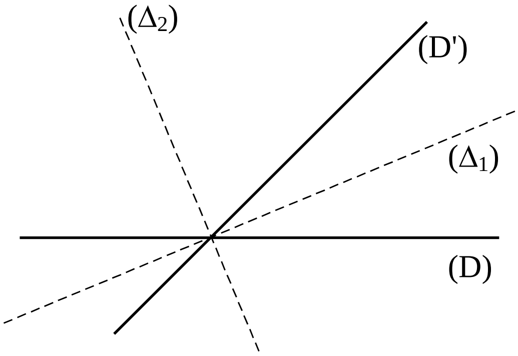
près au lieu de 2π. Ci-dessous, angle((D),(D')) $= \frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$, au choix. De même, angle((D'),(D)) $= -\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$.



On appelle **bissectrice** des deux droites sécantes (D) et (D') une droite (Δ) telle que :

$$\text{angle}((D),(\Delta)) = \frac{1}{2}\,\text{angle}((D),(D'))$$

Puisque angle((D),(D')) est défini à π près, angle((D),(Δ)) est défini à $\frac{\pi}{2}$ près. Autrement dit, il existe deux bissectrices à un angle de droites, les deux bissectrices étant perpendiculaires :



5- Cercles

❑ Dans un repère orthonormé, l'équation du cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

de la forme :

$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$$

Inversement, cette équation est un cercle (ou éventuellement l'ensemble vide).

$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + \frac{c}{2})^2 + (y + \frac{d}{2})^2 = \frac{c^2 + d^2}{4} - e$$

Son centre a pour coordonnées $(-\frac{c}{2}, -\frac{d}{2})$ et son rayon $\sqrt{\frac{c^2 + d^2}{4} - e}$ (si la quantité sous le radical est positive ou nulle, sinon aucun point ne vérifie l'équation).

❑ Géométriquement, il est évident qu'une droite coupe un cercle en deux points distincts, ou bien est tangente au cercle, ou bien ne le coupe pas. Cela peut se vérifier par le calcul en prenant, pour simplifier le centre du cercle comme origine du repère et l'axe des abscisses parallèle à la droite. Les points communs vérifient alors :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2 \\ y = d \end{cases}$$

Il y a deux solutions distinctes si $|d| < \mathrm{R}^2$, une solution unique si $d = \mathrm{R}$ ou si $d = -\mathrm{R}$, pas de solution si $|d| > \mathrm{R}$.

Le cas de l'intersection de deux cercles se ramène immédiatement au précédent, puisque la différence des équations de deux cercles donnent l'équation d'une droite (ou une constante). Les deux cercles peuvent donc avoir une intersection vide, ou bien être confondus (cas où la constante est nulle), ou bien se couper en deux points, ou bien être tangents en un même point.

II : Géométrie de l'espace

1- Repérage dans l'espace

Pour repérer un point M de l'espace, un repère étant choisi, trois procédés existent, les coordonnées cartésiennes, les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

a) Repère cartésien de l'espace :

Pour définir un repère cartésien de l'espace, on se donne un point O appelé origine et des vecteurs $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ non coplanaires. Pour tout point M de l'espace, le vecteur $\boldsymbol{OM}$ se décompose d'une façon unique sous la forme :

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

x, y et z s'appellent **composantes** du vecteur $\boldsymbol{OM}$ ou **coordonnées** du point M. En général, la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ est orthonormée directe auquel cas, on dit que le repère est orthonormal direct.

Un changement de repère s'opère comme dans le plan. On se donne une nouvelle origine Ω, de coordonnées (a, b, c) dans l'ancien repère, et une nouvelle base $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$, par les composantes de $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{K}$ dans l'ancienne base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$:

$$\boldsymbol{I} = \alpha\boldsymbol{i} + \alpha'\boldsymbol{j} + \alpha''\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{J} = \beta\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \beta''\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{K} = \gamma\boldsymbol{i} + \gamma'\boldsymbol{j} + \gamma''\boldsymbol{k}$$

Le problème est de déterminer dans le nouveau repère $(\Omega, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ les coordonnées (X, Y, Z) d'un point M dont on connaît les coordonnées (x,y,z) dans l'ancien repère $(\mathrm{O}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Il suffit d'écrire que :

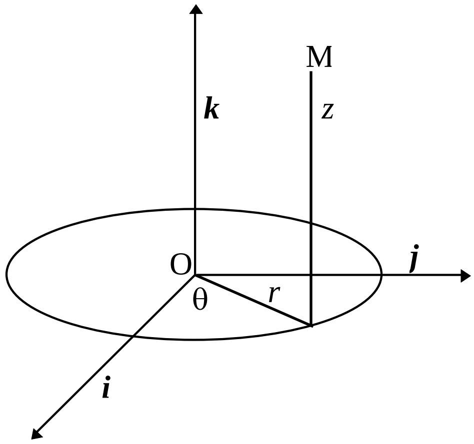
$$\boldsymbol{\Omega M} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{O\Omega}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{X}\boldsymbol{I} + \mathrm{Y}\boldsymbol{J} + \mathrm{Z}\boldsymbol{K} = (x - a)\boldsymbol{i} + (y - b)\boldsymbol{j} + (z - c)\boldsymbol{k}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{X}(\alpha\boldsymbol{i} + \alpha'\boldsymbol{j} + \alpha''\boldsymbol{k}) + \mathrm{Y}(\beta\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \beta''\boldsymbol{k}) + \mathrm{Z}(\gamma\boldsymbol{i} + \gamma'\boldsymbol{j} + \gamma''\boldsymbol{k}) = (x-a)\boldsymbol{i} + (y-b)\boldsymbol{j} + (z-c)\boldsymbol{k}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha\mathrm{X} + \beta\mathrm{Y} + \gamma\mathrm{Z} = x - a\mathrm{L}_1 \\ \alpha'\mathrm{X} + \beta'\mathrm{Y} + \gamma'\mathrm{Z} = y - b\mathrm{L}_2 \\ \alpha''\mathrm{X} + \beta''\mathrm{Y} + \gamma''\mathrm{Z} = y - b\mathrm{L}_3 \end{cases}$$

et il suffit ☹ de résoudre le système. Heureusement, si les repères sont orthonormés, il suffit de calculer $\alpha\mathrm{L}_1 + \alpha'\mathrm{L}_2 + \alpha''\mathrm{L}_3$ pour obtenir X car, dans ce cas, $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, alors que $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0$.

b) Coordonnées cylindiques :

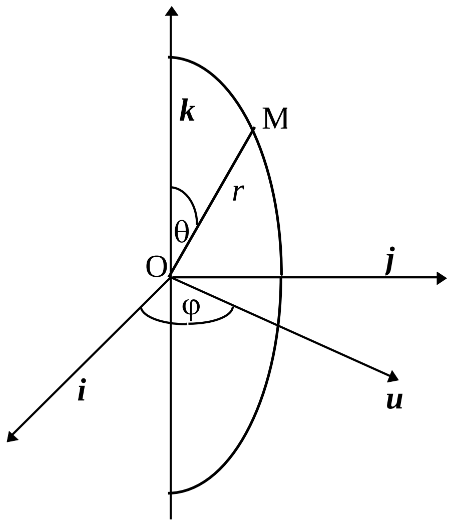
Considérons un repère orthonormal direct (O, ***i***, ***j***, ***k***) de l'espace. Les coordonnées cylindriques s'obtiennent en prenant les coordonnées polaires dans le plan (O, ***i***, ***j***). Elles sont particulièrement adaptées pour repérer un point d'un cylindre d'axe O*z*, d'où leur nom. Les relations entre les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et les coordonnées cartésiennes (x, y, z) sont :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$



c) Coordonnées sphériques :

Considérons un repère orthonormal direct (O, ***i***, ***j***, ***k***) de l'espace. Les coordonnées sphériques de M s'obtiennent en prenant les coordonnées polaires dans le plan (O, ***OM***, ***k***). Si M appartient à l'axe (O, ***k***), ces coordonnées ne sont pas bien définies. Plus précisément, soit ***u*** le vecteur du plan (O, ***i***, ***j***) contenu dans le plan (O, ***OM***, ***k***), tel que ***OM*** ait une composante positive selon ***u***. On pose φ l'angle entre ***i*** et ***u*** et l'on prend les coordonnées polaires de M dans le plan (O, ***k***, ***u***), ***k*** servant d'origine pour les angles.



Les relations entre les coordonnées cylindriques (r, φ, θ) et les coordonnées cartésiennes (x, y, z) sont :

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

Ces coordonnées sont particulièrement adaptées pour repérer un point d'une sphère. θ s'appelle la colatitude. (Sur Terre, φ est la longitude et $\frac{\pi}{2} - \theta$ la latitude).

2- Produit scalaire

❑ Le produit scalaire est défini comme dans le plan :

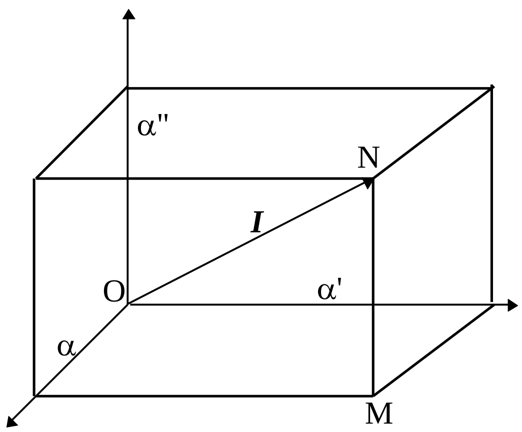
$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{v} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

où $\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ désigne le cosinus de l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans le plan $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Mais il n'existe aucun moyen canonique d'orienter un plan dans l'espace, c'est à dire de définir un sens trigonométrique dans ce plan (il faudrait pour cela dire où est le "dessus" et le "dessous" du plan). De sorte que le signe de l'angle restera indéterminé, et que les angles ne seront pas orientés. La relation de Chasles n'est donc pas respectée. Cela ne pose pas de problème spécifique pour le produit scalaire, puisque seul le cosinus de l'angle intervient et que le cosinus est pair. Le signe attribué à la mesure de l'angle n'a donc pas d'importance. Si $\boldsymbol{u}$ ou $\boldsymbol{v}$ est nul, l'angle est non défini, mais dans ce cas, on pose $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$. Comme dans le plan, le produit scalaire est symétrique.

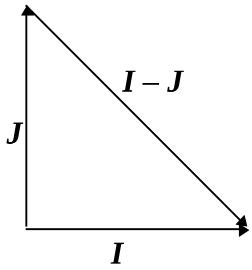
❑ Donnons l'expression du produit scalaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans une base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ orthonormée. Soit $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$ une base orthonormée du plan contenant $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, écrivons que :

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{X}\boldsymbol{I} + \mathrm{Y}\boldsymbol{J}$$
$$\boldsymbol{v} = \mathrm{X}'\boldsymbol{I} + \mathrm{Y}'\boldsymbol{J}$$
$$\boldsymbol{I} = \alpha\boldsymbol{i} + \alpha'\boldsymbol{j} + \alpha''\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{J} = \beta\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \beta''\boldsymbol{k}$$

On notera que $\| \boldsymbol{I} \| = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2}$ en appliquant deux fois le théorème de Pythagore :



On a en effet $\mathrm{OM} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2}$ puis $\| \boldsymbol{I} \| = \sqrt{\mathrm{OM}^2 + \alpha''^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2}$.
Ainsi, $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$ car $\boldsymbol{I}$ unitaire. De même, $\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$ en supposant $\boldsymbol{J}$ unitaire.
Enfin, en appliquant une dernière fois le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$, on a :



$\| \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J} \|^2 = \| \boldsymbol{I} \|^2 + \| \boldsymbol{J} \|^2$

soit : $(\alpha - \beta)^2 + (\alpha' - \beta')^2 + (\alpha'' - \beta'')^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha'' + \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2$

ce qui après simplification donne $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$

Exprimons maintenant $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$:

$\boldsymbol{u} = X(\alpha\boldsymbol{i} + \alpha'\boldsymbol{j} + \alpha''\boldsymbol{k}) + Y(\beta\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \beta''\boldsymbol{k})$

$\boldsymbol{v} = X'(\alpha\boldsymbol{i} + \alpha'\boldsymbol{j} + \alpha''\boldsymbol{k}) + Y'(\beta\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \beta''\boldsymbol{k})$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ avec $x = \alpha X + \beta Y$, $y = \alpha' X + \beta' Y$ et $z = \alpha'' X + \beta'' Y$

$\boldsymbol{v} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$ avec $x' = \alpha X' + \beta Y'$, $y' = \alpha' X' + \beta' Y'$ et $z' = \alpha'' X' + \beta'' Y'$

On sait déjà que $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = XX' + YY'$ (expression du produit scalaire dans un plan). On vérifie alors que cette quantité est identique à $xx' + yy' + zz'$ en utilisant le fait que $\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$, $\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$ et enfin $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$.

Ainsi, $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = xx' + yy' + zz'$, permettant de vérifier que le produit est bilinéaire.

❑ La distance de deux points A et B de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormé, est donnée par $\| \boldsymbol{AB} \| = \sqrt{<\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AB}>}$. On obtient donc :

$\mathrm{AB} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$

3- Droites et plans

a) Plans :

Le cas le plus simple est celui d'un plan donné par un point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et un vecteur $\boldsymbol{n}$ normal (i.e. orthogonal) au plan, de composantes (a, b, c). Dans ce cas, un point M de coordonnées (x, y, z) appartient au plan si et seulement si $<\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{n}> = 0$, ce qui donne directement une équation du plan :

$$(x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0$$

ou encore :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

On remarque que les coefficients (a, b, c) de l'équation sont les composantes du vecteur normal $\boldsymbol{n}$. La constante d est ajustée de façon à ce que A vérifie l'équation.

On se donne maintenant trois points non alignés, ou de manière équivalente un point A et deux vecteurs $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ non colinéaires. Alors :

$$M \in (P) \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \exists\, \beta, \boldsymbol{AM} = \alpha\boldsymbol{U} + \beta\boldsymbol{V}$$

En utilisant des coordonnées, on obtient une représentation paramétrique du plan sous la forme d'un système de trois équations aux deux inconnues α et β. Cette représentation est cependant peu pratique, car pour savoir si un point appartient à (P), on est contraint de résoudre un système. On peut donc résoudre le système une fois pour toute dans le cas général. En éliminant α et β, on obtient une condition sur les coordonnées x, y et z de M pour qu'il y ait une solution. Cette condition est une équation du plan.

EXEMPLE :

❑ On se donne A(1, 1, 1), B(2, 3, 4) et C(2, 0, 1). Nous prendrons $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AB}$ de composantes (1, 2, 3) et $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{AC} = (1, -1, 0)$. M($x$, y, z) appartient au plan si et seulement si :

$$\exists\, \alpha, \exists\, \beta, \boldsymbol{AM} = \alpha\boldsymbol{U} + \beta\boldsymbol{V}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha, \exists\, \beta, \left[\begin{array}{l} x - 1 = \alpha + \beta \\ y - 1 = 2\alpha - \beta \\ z - 1 = 3\alpha \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha, \exists\, \beta \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{z-1}{3} \\ \beta = x - \dfrac{z}{3} - \dfrac{2}{3} \\ x + y - z - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y - z - 1 = 0$$

Une façon plus rapide de trouver l'équation du plan consiste également à poser :

$$\det(\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = 0$$

où det est le déterminant des trois vecteurs (voir L1/DETERMNT.PDF), puisque cette condition signifie que ($\boldsymbol{AM}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$) sont coplanaires, et donc que M appartient au plan affine passant par A de direction le plan vectoriel engendré par $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$.

EXEMPLE :

❑ En reprenant l'exemple précédent :

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(y-1) - 3(z-1) + 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 1 = 0$$

Quant au plan vectoriel direction du plan affine (i.e. le plan vectoriel constitué des vecteurs joignant deux points quelconque du plan affine (P)), son équation est obtenue en supprimant les termes constants : $x + y - z = 0$.

En effet, si $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan affine (P), alors tout vecteur du plan vectoriel direction peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{MN}$ avec M et N points de (P). Il suffit d'écrire l'équation de (P) pour ces deux points, puis de retrancher membre à membre pour voir que $\boldsymbol{MN}$ vérifie la même relation sans terme constant :

$$\left[\begin{array}{l} ax_M + by_M + cz_M + d = 0 \\ ax_N + by_N + cz_N + d = 0 \end{array}\right. \Rightarrow a(x_N - x_M) + b(y_N - y_M) + c(z_N - z_M) = 0$$

Une troisième méthode consiste à déterminer un vecteur normal à (P). Il suffit pour cela de calculer $\boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{V}$ où $\wedge$ désigne le produit vectoriel des deux vecteurs (voir L1/DETERMNT.PDF) ce qui donne dans l'exemple précédent : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On retrouve donc l'équation $x + y - z = 0$ pour le plan vectoriel. Pour avoir l'équation du plan affine, il suffit alors d'ajuster la constante pour que A vérifie l'équation du plan affine, soit $x + y - z = 1$.

b) Droites :

❑ Il existe essentiellement deux méthodes algébriques pour caractériser une droite, le système de deux équations cartésiennes et la représentation paramétrique. On se donne un repère (O, ***i***, ***j***, ***k***) (en général orthonormal direct). La droite (D) peut être donnée par deux points A et B, ou un point A et un vecteur directeur ***u***. Si la droite est donnée par deux points A et B, un vecteur directeur est ***u*** = ***AB***.

La représentation paramétrique de (D) est, comme dans le plan :

$$M \in (D) \Leftrightarrow \exists \lambda, \boldsymbol{AM} = \lambda \boldsymbol{u} \text{ ce qu'on note aussi } M = A + \lambda \boldsymbol{u}$$

On obtient alors directement :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \\ z = z_A + \lambda c \end{cases}$$

où a, b et c sont les composantes de ***u***, x, y et z les coordonnées de M et x_A, y_A et z_A les coordonnées de A.

L'élimination de λ conduit à un système de deux équations, qui correspond à deux plans s'intersectant selon la droite (D).

EXEMPLE :

❑ Soit A de coordonnées (1, 1, –1) et ***u*** le vecteur de composantes (1, 2, –3). Une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur ***u*** est :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$$

L'élimination de λ conduit à (par exemple) :

$$\begin{cases} \lambda = x - 1 \\ y = 1 + 2(x-1) \\ z = -1 - 3(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 1 \\ 2x - y - 1 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à (D) si et seulement si il existe λ tel que le système précédent soit vérifié. Puisque la première équation $\lambda = x - 1$ se borne à donner la valeur de λ qu'il convient de prendre, M appartient à (D) si et seulement si $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0 \end{cases}$. Les deux équations sont deux équations de deux plans affines d'intersection (D).

On notera que, si deux points B et C de coordonnées respectives (x_B, y_B, z_B) et (x_C, y_C, z_C) vérifient ces deux équations, alors le vecteur ***BC*** a pour composantes $x = x_C - x_B$, $y = y_C - y_B$ et $z = z_C - z_B$. Or :

$$\begin{cases} 2x_B - y_B - 1 = 0 \\ 3x_B + z_B - 2 = 0 \\ 2x_C - y_C - 1 = 0 \\ 3x_C + z_C - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x_C - x_B) - (y_B - y_C) = 0 \\ 3(x_B - x_C) + (z_B - z_C) = 0 \end{cases}$$ en retranchant membre à membre les équations

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, les équations vérifiées par les vecteurs de la droite vectorielle direction de la droite affine (D) s'obtiennent à partir des équations de (D) en supprimant les constantes.

On peut tester son résultat final de la façon suivante. D'abord, A appartient aux deux plans puisque (1, 1, –1) vérifie les deux équations $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3x + z - 2 = 0 \end{cases}$. Ensuite ***u*** est bien vecteur directeur de l'intersection de ces deux plans puisque (1, 2, –3) vérifie le système $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$.

Inversement, si on se donne une droite par un système de deux équations $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$, ces deux équations ne doivent pas être celles de deux plans parallèles. Les équations sans constante ne doivent donc pas représenter les mêmes plans vectoriels. Pour cela, il faut et il suffit que ces deux équations $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$ ne soient pas proportionnelles. Il est par ailleurs extrêmement rapide de trouver un vecteur directeur de la droite. Il suffit de prendre :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

En effet, le vecteur de composantes (a, b, c) est orthogonal au premier plan, et le vecteur de composantes (a', b', c') est orthogonal au deuxième. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs, étant orthogonal à chacun d'eux, appartient à chacun des deux plans vectoriels. Il appartient donc à la droite vectorielle direction de la droite affine cherchée.

4- Sphères

Dans un repère orthonormé, l'équation de la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \mathrm{R}^2$$

de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 + dx + ey + fz + g = 0$$

Pour retrouver le centre et le rayon, on procède comme pour une équation de cercle dans le plan.

L'intersection d'une sphère est d'une droite donne deux points distincts, ou un point double (cas de la droite tangente à la sphère) ou l'ensemble vide, correspondant aux différents cas de l'équation du second degré. En effet, si la droite est mise sous forme paramétrique de paramètre λ, l'intersection de la sphère et de la droite conduit à une équation du second degré en λ.

L'intersection d'une sphère et d'un plan donne un cercle, ou un point ou l'ensemble vide. Considérer par exemple un repère pour lequel l'équation du plan est $z = 0$.

Comme le cas de deux cercles dans le plan, celui de l'intersection de deux sphères se ramène au cas précédent : la différence des équations de deux sphères donnent l'équation d'un plan (ou une constante). Les deux sphères peuvent donc avoir une intersection vide, ou bien être confondus (cas où la constante est nulle), ou bien se couper en un cercle, ou bien être tangents en un même point.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Pour tout m, on considère le cercle C_m d'équation :

$$x^2 - 2(m - 1)x + y^2 + 2(m + 3)y - 16 = -2(m - 1)^2 - 2(m + 3)^2$$

a) Déterminer les m pour lesquels ce cercle est non vide et montrer que l'ensemble des centres Ω_m correspondants est un segment [AB].

b) Pour tout m tel que $\Omega_m \in$ [AB], on considère le diamètre de C_m perpendiculaire à (AB). Montrer que, lorsque m varie, les extrémités de ce diamètre décrivent un cercle fixe indépendant de m.

Le lecteur est invité à obtenir une représentation graphique de cette famille de cercles sur ordinateur ou calculatrice graphique.

Exo.2) Quatre boules de pétanque constituent un tétraèdre régulier. Les boules sont tangentes les unes aux autres et ont pour diamètre 1. Quel est le diamètre maximal d'un cochonnet coincé entre les quatre boules ?

Exo.3) Soient quatre plans dont on donne les équations :

$(P_1) : x + y + z = 5$

$(P_2) : x + y - z = 4$

$(P_3) : x - y + z = 6$

$(P_4) : -x + y + z = -1$

Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, soit M_i l'intersection des plans (P_j), $j \neq i$. Donner l'équation de la sphère passant par les quatre points M_i.

Exo.4) On considère les trois plans d'équation :

$z - 2y = 5$

$2x - 3z = 0$

$3y - x = 0$

Montrer qu'ils délimitent un prisme (cylindre à base triangulaire). Quelle est l'aire de la section de ce prisme ?

Exo.5) Dans le plan, on donne quatre points distincts O, A, B et C tels que O, A et B appartiennent à une droite orthogonale à (OC). Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites passant par O symétriques l'une de l'autre par rapport à (OC) et distinctes de (OC). Soient M l'intersection de $\mathcal{D}$ et (BC), et M' l'intersection de $\mathcal{D}'$ et (AC) (lorsqu'elles existent). Montrer que (MM') passe par un point fixe lorsque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ varient.

Exo.6) Déterminer un cercle tangent aux trois droites du plan d'équations respectives :

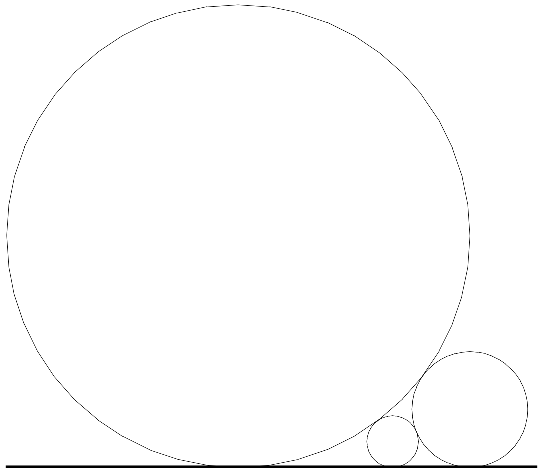
$y = 2x + 1$

$y = 2x + 7$

$y = -\dfrac{x}{2}$

Exo.7) Un cycliste monte une côte de pente θ. La pente étant raide, il monte cette côte en zigzaguant. Quel angle α doit-il faire avec l'axe de la route pour monter suivant une pente φ ? Application numérique : $\tan(\theta) = 8\%$, $\tan(\varphi) = 5\%$.

Exo.8) Dans la figure suivante, le grand cercle a pour rayon $\dfrac{1}{a^2}$ et le moyen cercle a pour rayon $\dfrac{1}{b^2}$. Montrer que le petit cercle a pour rayon $\dfrac{1}{(a+b)^2}$, les trois cercles étant tangents entre eux et à la droite.



Exo.9) Dans l'espace de dimension 3, on considère les ensembles suivants donnés chacun par un système d'équations :

$$(C_1)\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

et

$$(C_2)\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) Quelle est la nature géométrique de (C_1) et (C_2) ?

b) Donner l'équation de la sphère contenant (C_1) et (C_2).

Exo.10) Quelle distance à vol d'oiseau sépare deux points M et M_0 situés sur Terre, l'un à la latitude λ, longitude θ, l'autre à la latitude λ_0, longitude θ_0 ? La Terre est assimilée à une sphère de rayon R = 6380 km. Application numérique :
Paris-Roissy = 2°35' E, 49°02' N ; New York-JFKennedy = 73°50'W, 40°38'N

2- Solutions

Sol.1) a) L'équation équivaut à :

$$(x - (m-1))^2 + (y + m + 3)^2 = -(m-1)(2m+6)$$

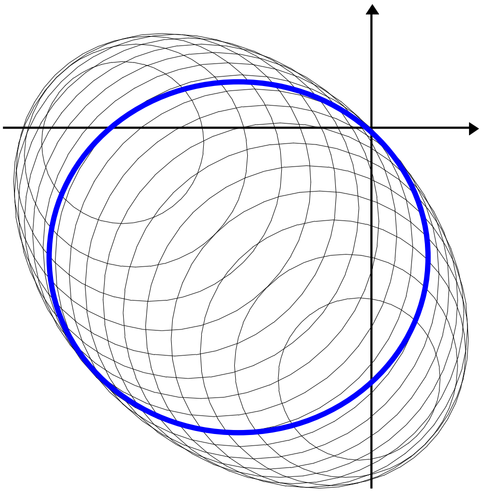
Le cercle est non vide si et seulement si $m \in [-3, 1]$. son rayon est $R_m = \sqrt{(1-m)(2m+6)}$ et son centre Ω_m a pour coordonnées $(m-1, -m-3)$. Il décrit le segment de droite limité par les points $(-4, 0)$ et $(0, -4)$.

b) Le vecteur normal à (AB) est $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Les extrémités du diamètre indiqué sont $\Omega_m \pm R_m\boldsymbol{n}$. Posons $m = -1 + 2\cos(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$ de façon à décrire l'intervalle $[-3, 1]$. On a alors

$R_m = \sqrt{2(1 - \cos(\theta)) \times 4(1 + \cos(\theta))} = 2\sqrt{2}\sin(\theta)$. Les extrémités du diamètre sont $\Omega_m \pm 2\sin(\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou encore $\Omega_m + 2\sin(\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en faisant varier θ dans $[0, 2\pi]$, ce qui donne :

$$\Omega_m + 2\sin(\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2\cos(\theta) + 2\sin(\theta) \\ -2 - 2\cos(\theta) + 2\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Il s'agit du cercle de centre $(-2, -2)$ et de rayon $2\sqrt{2}$ (en bleu dans la figure ci-dessous).



En 1896, dans une variante de cet exercice, le jeune Albert Einstein a dû résoudre la question de savoir quelle était la nature de la courbe qui enveloppait l'ensemble de tous les cercles, lors de son examen du *Maturitätsprüfung* (équivalent du baccalauréat). Voir L2/CONIQUE.PDF.

Sol.2) Les centres des boules forment un tétraèdre régulier de côté 1. La hauteur d'une face du tétraèdre fait $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le centre de gravité de la face se trouve au deux tiers de la hauteur à partir du sommet, soit $\frac{\sqrt{3}}{3}$. La hauteur du tétraèdre fait donc $\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et le centre du tétraèdre se trouve au trois quarts de cette hauteur à partir du sommet, soit $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Le rayon du cochonnet est $\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{2}$ et son diamètre $\frac{\sqrt{6}}{2} - 1$.

Sol.3) On trouvera :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On cherche ensuite $\Omega = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et R tels que, pour tout i, $\Omega M_i = R$. On trouvera $\Omega = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $R = \sqrt{3}$.

Sol.4) L'intersection des plans deux à deux donne trois droites parallèles, de direction $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un plan perpendiculaire à ces droites a par exemple pour équation $3x + y + 2z = 0$. L'intersection de ce plan avec les trois droites donnent trois points A = (0, 0, 0), $B = \frac{5}{7}(-3, -1, 5)$, $C = \frac{5}{28}(3, -13, 2)$. L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2} \| \boldsymbol{AB} \wedge \boldsymbol{AC} \| = \frac{5 \times 5}{7 \times 28 \times 2} \left\| \begin{pmatrix} 63 \\ 21 \\ 42 \end{pmatrix} \right\| = \frac{75\sqrt{14}}{56}$

Sol.5) Prenons un repère d'origine O, tel que (OC) soit l'axe des abscisses et (AB) l'axe des ordonnées. Prenons $\boldsymbol{OC}$ comme vecteur de base de l'axe des abscisses, et un vecteur quelconque directeur de (AB) comme vecteur de base de (AB). Soient a et b les réels tels que, dans ce repère les coordonnées des points soient :

$A = (0, a)$
$B = (0, b)$
$C = (1, 0)$

Soit t la pente de $\mathcal{D}$. La pente de $\mathcal{D}'$ est $-t$. Les équations respectives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

$y = tx$ et $y = -tx$.

(BC) a pour équation $x + \frac{y}{b} = 1$

(AC) a pour équation $x + \frac{y}{a} = 1$

M vérifie les équations de $\mathcal{D}$ et (BC) d'où $M = \left(\frac{b}{b+t}, \frac{bt}{b+t}\right)$

M' vérifie les équations de $\mathcal{D}'$ et (BC) d'où $M' = \left(\frac{a}{a-t}, -\frac{at}{a-t}\right)$

Le vecteur $\boldsymbol{MM}'$ a pour composantes $\left(\frac{a}{a-t} - \frac{b}{b+t}, -\frac{at}{a-t} - \frac{bt}{b+t}\right)$

(MM') a pour équation :

$$x\left(\frac{at}{a-t} + \frac{bt}{b+t}\right) + y\left(\frac{a}{a-t} - \frac{b}{b+t}\right) = \frac{2abt}{(b+t)(a-t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\,(2ab + (a-b)t) + y\,(a+b) = 2ab$$

Le point fixe est $I = \left(0, \frac{2ab}{a+b}\right)$, seul point rendant l'égalité précédente valide pour tout t.

On peut visualiser cette propriété sous Geogebra. Effectuer les constructions suivantes et déplacer le point D. Constater que le point I est fixe :

```
O = (0,0)
C = (5,0)
B = (0,5)
```

```
OB = Droite(O,B)
A = Point(OB)             # point A libre sur (OB)
P = Droite(C,OB)          # (P) parallèle à (OB) passant par C
D = Point(P)              # point D libre sur (P)
D'= symétrie(D,C)         # D' symétrique de D par rapport à C
OD = Droite(O,D)
OD' = Droite(O,D')
BC = Droite(B,C)
AC = Droite(A,C)
M = Intersection(BC,OD)
M' = Intersection(AC,OD')
MM'= Droite(M,M')
I = Intersection(OB,MM')
```

Contrairement aux apparences, cet exercice ne constitue pas un exercice de géométrie euclidienne, ni même de géométrie affine, mais est un exercice de géométrie dite projective. Voir L3/GEOMPROJ.PDF pour en savoir plus.

Sol.6) Les deux premières droites étant parallèles, le centre est nécessairement sur la droite équidistante de ces deux droites, à savoir la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 4$, le rayon R étant égal à la distance entre cette droite et les deux autres. Pour déterminer celle-ci, utilisons $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur orthogonal aux trois droites parallèles. Soit M = (0, 4) un point de (Δ). La droite passant par M de vecteur directeur $\boldsymbol{n}$ a pour représentation paramétrique $\left[\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = 4 + \lambda \end{array}\right.$. Le point N de la droite d'équation $y = 2x + 1$ tel que (MN) soit dirigé par $\boldsymbol{n}$ vérifie $4 + \lambda = -4\lambda + 1$, soit $\lambda = -\frac{3}{5}$. Donc N = $(\frac{6}{5}, \frac{17}{5})$, $\boldsymbol{MN} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ et R = MN = $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Soit Ω = $(x, 2x + 4)$ un point quelconque de (Δ). Il suffit de chercher x pour que la distance à la dernière droite soit égale à $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, ce qui donne l'équation :

$$\frac{\left|y + \frac{x}{2}\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \text{avec } y = 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left|\frac{5x}{2} + 4\right|}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{5x}{2} + 4\right| = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5x}{2} + 4 = \pm\frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow \qquad x = -1$ ou $x = -\dfrac{11}{5}$

Il y a donc deux cercles possibles, tous deux de rayon $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Leur centre est $(-1, 2)$ ou $(-\dfrac{11}{5}, -\dfrac{2}{5})$

Sol.7) Si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur unitaire dans le sens de la plus grande pente, $\boldsymbol{j}$ un vecteur unitaire horizontal dans le même plan vertical que $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{i}$ unitaire horizontal, orthogonal à $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{k}$ unitaire orthogonal à $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$, et $\boldsymbol{v}$ le vecteur que veut suivre le cycliste, on a :

$$\boldsymbol{u} = \cos(\theta)\, \boldsymbol{i} + \sin(\theta)\, \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v} = \cos(\alpha)\, \boldsymbol{u} + \sin(\alpha)\, \boldsymbol{i}$$

et on veut que $\langle \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{k} \rangle = \sin(\varphi)$ donc α est tel que $\sin(\varphi) = \cos(\alpha)\sin(\theta)$

L'application numérique donne 51°.

Sol.8) Soit r le rayon du petit cercle, x la distance entre l'abscisse du grand cercle et du petit cercle, y la distance entre l'abscisse du petit cercle et du moyen cercle, l'axe des abscisses étant la droite tangente commune. On a, d'après le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles dont l'hypothénuse a pour extrémités les centres des cercles :

$$(r + \frac{1}{a^2})^2 = x^2 + (\frac{1}{a^2} - r)^2 \qquad \text{donc } x^2 = \frac{4r}{a^2}$$

$$(r + \frac{1}{b^2})^2 = y^2 + (\frac{1}{b^2} - r)^2 \qquad \text{donc } y^2 = \frac{4r}{b^2}$$

$$(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})^2 = (\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2})^2 + (x + y)^2 \qquad \text{donc } x + y = \frac{2}{ab}$$

donc $\quad \dfrac{2}{ab} = 2\sqrt{r}\,(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b})$

donc $\quad r = \dfrac{1}{(a + b)^2}$

Ces cercles, font partie d'une famille de cercles, dits **cercles de Ford**, en liaison avec une suite de rationnels, dite **suite de Farey**. On pourra consulter John H. Conway & Richard K. Guy, *The book of numbers*, Springer-Verlag, (1999), p.152-154, isbn 0-387-97993-X.

Sol.9) a) (C_1) est le cercle de centre $(0, 1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ dans le plan $z = 0$. (C_2) est le cercle de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ dans le plan $y = 0$.

b) Le centre de la sphère doit être sur l'axe perpendiculaire à chacun des deux cercles et passant par leur centre. Le premier axe a pour représentation paramétrique $(0, 1, \lambda)$ et le second $(0, \mu, 1)$. Le centre de la sphère est donc $(0, 1, 1)$. Son rayon est $\sqrt{3}$ en appliquant le théorème de Pythagore sur un triangle rectangle formé du centre de la sphère, du centre d'un cercle et d'un point de ce cercle. L'équation de la sphère est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 1$$

Pour $z = 0$ (respectivement $y = 0$), on retrouve bien (C_1) et (C_2).

Sol.10) O étant le centre de la Terre, en prenant les deux vecteurs $\boldsymbol{OM}$ et $\boldsymbol{OM}_0$ en coordonnées sphériques, on peut calculer l'angle formé par ses deux vecteurs en effectuant leur produit scalaire. Son cosinus vaut :

$\cos(\Phi) = \cos(\lambda)\cos(\lambda_0)\cos(\theta - \theta_0) + \sin(\lambda)\sin(\lambda_0)$, et $D = R\Phi$. On trouve 5847 km.

◆