APPLICATIONS LINEAIRES

PLAN

I : Applications linéaires

1- Définition et exemples

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On appelle **application linéaire** ou **morphisme d'espaces vectoriels** une application f de E dans F telle que :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

En prenant $\lambda = 0$, on remarque que $f(0_E) = 0_F$.
Si $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme linéaire**.

EXEMPLES :

❑ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to ax$

où a est un paramètre fixé est une application linéaire.

❑ Plus généralement, on peut considérer les applications de la forme :

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}$$

ce qu'on note également :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice définissant l'application } f} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Cet exemple est caractéristique de toutes les applications linéaires en dimension finie, comme nous le verrons bientôt.

❑ Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, \dots, e_n)$, alors une forme linéaire (application linéaire de E dans $\mathbb{K}$) s'écrit :

$f(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n)$ de la forme $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, $a_i \in \mathbb{K}$.

❑ f : E $\to$ E définie par $f(x) = x$. Il s'agit de Id_E, l'**application identique** (ou **identité**) de E.

❑ Soit I : $C^0([a, b]) \to \mathbb{R}$

$$f \to \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{I}(f)$$

Alors I est linéaire.

❑ $C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$

$y \to ay'' + by' + cy = \Phi(y)$

Φ est linéaire.

❑ $\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente$\} \to \mathbb{R}$

$$u \to \lim_{n\to+\infty} u_n$$

❑ $\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique$\} \to \mathbb{R}$

$u \to \mathrm{R}(u)$ = la raison de la suite u

On peut vérifier que $\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique$\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites. En effet, u arithmétique de raison $r \Rightarrow \lambda u$ est arithmétique de raison λr. u et v

arithmétiques de raison r et $s \Rightarrow u + v$ arithmétique de raison $r + s$. Ces observations prouvent par ailleurs que R est linéaire.

❑ Soient $(e_1, ..., e_p)$ une base d'un espace vectoriel E, et $(v_1, ..., v_p)$ une famille de vecteurs d'un autre espace vectoriel F. Alors il existe une et une seule application linéaire u de E dans F telle $u(e_i) = v_i$. Elle est définie par $u(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_p e_p) = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$.

❑ Existe-t-il une application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ telle que : $\forall i, f(V_i) = W_i$ avec

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, W_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, W_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} ?$$

On vérifiera que $V_4 = 2V_1 + V_2 - V_3$, mais que $W_4 \neq 2W_1 + W_2 - W_3$. f ne peut donc pas exister.

Si f est bijective, on parle d'**isomorphisme**.
Si E = F, on parle d'**endomorphisme**.
Si E = F et f bijective, on parle d'**automorphisme**.

On note L(E,F) l'ensemble des applications linéaires de E dans F. On note L(E) l'ensemble des endomorphismes de E. On note E* l'ensemble des formes linéaires de E (on l'appelle **espace dual** de E). Il s'agit d'espaces vectoriels. L'élément nul de L(E,F) est l'application identiquement nulle.

On peut composer les applications linéaires entre elles. Soit f élément de L(E,F) et g élément de L(F,G). On montrera aisément que $g \circ f$ est élément de L(E,G). En particulier, si E = F = G, il s'agit d'une loi interne. L'application $f \circ f$ est notée f^2, et de même, $f^n = f \circ ... \circ f$ n fois. On vérifiera également les règles :

$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$
$(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$
$(\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g) = \lambda(f \circ g)$

où seule la linéarité de f est utilisée.

On prendra garde que $f \circ g = 0$ n'implique pas que $f = 0$ ou $g = 0$. On peut très bien avoir f et g non nulles alors que leur composée l'est. Considérer par exemple dans $\mathbf{R}^2$ les applications $f(x, y) = (x, 0)$ et $g(x, y) = (0, y)$.

On prendra garde également qu'en général $f \circ g \neq g \circ f$. Ainsi, la formule du binôme de Newton ne s'applique pas en général, mais seulement lorsque f et g commutent. En général, on a seulement :

$(f + g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2$

Considérons l'ensemble des automorphismes de E. Cet ensemble est non vide (il contient Id), et est stable par $\circ$. Tout élément admet un inverse qui est lui–même linéaire. En effet :

$f^{-1}(y + y') = f^{-1}(f(x) + f(x'))$ si $y = f(x)$ et $y' = f(x')$
$= f^{-1}(f(x + x'))$ par linéarité de f
$= x + x'$
$= f^{-1}(y) + f^{-1}(y')$

On montre de même que $f^{-1}(\lambda y) = \lambda f^{-1}(y)$.
On note GL(E) l'ensemble des automorphismes de E, appelé **groupe linéaire** de E. Il s'agit d'un groupe avec la composée des applications.

2- Image

PROPOSITION

Soit f linéaire de E dans F. Alors $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F. Ce sous-espace vectoriel s'appelle **image** *de f, noté* Im(f)

Démonstration :

❑ Montrons la stabilité de Im(f) par le produit par un scalaire, la stabilité par la somme se montrant de même. Soit y élément de Im(f), et λ un scalaire quelconque. Il existe x élément de E tel que :

$$y = f(x)$$
$$\Rightarrow \quad \lambda y = \lambda f(x)$$
$$\Rightarrow \quad \lambda y = f(\lambda x)$$

donc λy appartient à Im(f).

Il est clair que f est surjective si et seulement si Im(f) = F.

Si E est de dimension finie, de base $(e_1, ..., e_n)$, alors Im(f) est engendré par $(f(e_1), ..., f(e_n))$. En effet, les éléments de Im(f) sont de la forme $y = f(x)$, $x \in$ E, donc :

$$\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_n,\ y = f(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n)$$
$$\Rightarrow \quad \exists\ \lambda_1, ..., \lambda_n,\ y = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$$

On prendra garde que système générateur ne signifie pas base. Les $(f(e_1), ..., f(e_n))$ peuvent être liés.

3- Noyau

PROPOSITION

Soit f linéaire de E dans F. Alors $f^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel de E. Ce sous-espace vectoriel s'appelle **noyau** *de f, noté* Ker(f).

Démonstration :

❑ Ker(f) est non vide car $f(0_E) = 0_F$, de sorte que 0_E appartient à Ker(f).

❑ Ker(f) est stable pour la somme. En effet :

$$x \in \text{Ker}(f) \text{ et } x' \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0_F = f(x')$$
$$\Rightarrow f(x) + f(x') = 0_F$$
$$\Rightarrow f(x + x') = 0_F$$
$$\Rightarrow x + x' \in \text{Ker}(f)$$

On montre de même la stabilité par le produit par un scalaire..

L'intérêt du noyau résulte de la propriété suivante :

PROPOSITION

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors f est injective si et seulement si Ker(f) = $\{0_E\}$.

Démonstration :

❑ Supposons f injective. Et soit x élément de Ker(f). Alors :

$$f(x) = 0_F = f(0_E) \Rightarrow x = 0_E$$

Donc $\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$

❑ Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$, et soit x et x' quelconques tels que $f(x) = f(x')$. Alors :

$$\begin{array}{ll} & f(x) - f(x') = 0_F \\ \Rightarrow & f(x - x') = 0_F \\ \Rightarrow & x - x' \in \mathrm{Ker}(f) \\ \Rightarrow & x - x' = 0_E \\ \Rightarrow & x = x' \end{array}$$

donc f est injective.

EXEMPLE 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+t \\ t+x \end{pmatrix}$$

Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. f est–elle injective ? surjective ?

$\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que $\left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+t=0 \\ t+x=0 \end{array}\right.$, soit $x = -y = z = -t$. Il s'agit de la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. f n'est pas injective.

$\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+t \\ t+x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un système générateur de $\mathrm{Im}(f)$ est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Les trois derniers vecteurs forment un système libre, mais les quatre vecteurs sont liés par la relation $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. $\mathrm{Im}(f)$ est donc de dimension 3. Il s'agit d'un hyperplan. Son équation est :

$$\begin{array}{ll} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \\ \Leftrightarrow & \exists\, \alpha, \beta, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha, \beta, \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y - x \\ \gamma = z - y + x \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x - y + z - t = 0$$

EXEMPLE 2 :
Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E et f l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans E définie par :

$$f\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ ... \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p$$

Im(f) est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x_1, ..., x_p)$. f est surjective si et seulement si $(x_1, ..., x_p)$ est un système générateur de E.

Ker(f) est l'ensemble des $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ ... \\ \lambda_p \end{pmatrix}$ donnant une combinaison linéaire nulle de $(x_1, ..., x_p)$. f est injective si et seulement si $(x_1, ..., x_p)$ est un système libre.
f est bijective si et seulement si $(x_1, ..., x_p)$ est une base de E.

PROPOSITION
Soit f linéaire de E *dans* F *et b élément de* F. *Alors l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = b$ ou bien est vide ou bien est de la forme $\{x_0 + z, z \in \text{Ker}(f)\}$, où x_0 est une solution particulière de l'équation*

L'ensemble $\{x_0 + y, y \in \text{Ker}(f)\}$ se note également $x_0 + \text{Ker}(f)$ et s'appelle **sous-espace affine** de direction Ker(f) passant par x_0.

Démonstration :
❑ Si l'ensemble des solutions est non vide, soit x_0 une solution particulière. Soit z élément de Ker(f). Alors $f(x_0 + z) = f(x_0) + f(z) = b$ donc $x_0 + z$ est bien solution. Réciproquement, soit y une solution vérifiant $f(y) = b$. Posons $z = y - x_0$. On a bien $y = x_0 + z$ et il n'est pas difficile de vérifier que $f(z) = 0$.

EXEMPLE 1 :
❑ $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ avec l'un des a_i non nul est l'équation d'un **hyperplan vectoriel** H_0 de $\mathbb{R}^n$, sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$. C'est le noyau de l'application $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \to \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$.

❑ $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$ est l'équation d'un **hyperplan affine** H_b . Il est obtenu à partir de H_0 en ajoutant aux éléments de H_0 une solution particulière $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ ... \\ x_{n0} \end{pmatrix}$ de l'équation complète. Géométriquement, $\boldsymbol{x}$ peut être vu comme un vecteur de translation déplaçant les éléments de H_0 jusqu'à H_b.

EXEMPLE 2 :

Cette propriété est également couramment utilisée dans la résolution des équations différentielles linéaires de la forme $f(y) = c$, où f est une expression linéaire en y faisant intervenir y' et y'' (par exemple $y'' + 2y' + 3y$), et où la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre. Cette solution générale de l'équation sans second membre n'est autre que l'élément général du noyau de f.

Pour conclure, on peut montrer qu'un ensemble H est un espace vectoriel

- ❑ en utilisant la définition (mais pratiquement, celle-ci est réservée aux exemples fondamentaux, $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, et $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.
- ❑ en montrant que H est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E (stabilité pour la somme et le produit)
- ❑ en montrant que H est un sous-espace vectoriel engendré par une partie M
- ❑ en montrant que H est l'image d'une application linéaire
- ❑ en montrant que H est le noyau d'une application linéaire.

Prenons par exemple pour H l'ensemble des suites arithmétiques. On peut montrer que H est un espace vectoriel :

- ❑ en montrant que H est stable pour la somme et le produit.
- ❑ en remarquant que H est engendré par la suite constante (1) et la suite $(n)_{n\in\mathbf{N}}$. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique, alors $\exists$ a et b tel que, $\forall$ n, $u_n = a + bn$.
- ❑ en remarquant que H est l'image de $\mathbf{R}^2$ par l'application $(a, b) \rightarrow (a + bn)_{n\in\mathbf{N}}$.
- ❑ en remarquant que H est le noyau de l'application de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ définie par :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \rightarrow (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

II : Cas de la dimension finie

1- Matrice associée à une application linéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie p et F un espace vectoriel de dimension finie n. On choisit une base $(e_j)_{j=1..p}$ de E et une base $(\varepsilon_i)_{i=1..n}$ de F. Dans cette base, un vecteur x de E s'écrit $\sum_{j=1}^{p} x_j\, e_j$. Son image $f(x)$ s'écrit $\sum_{i=1}^{n} y_i\, \varepsilon_i$. f est définie si l'on connaît les images des e_j puisque :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j\, f(e_j)$$

Posons $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \varepsilon_i$. On a alors :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j\, \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{p} \ (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j)\, \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\, \varepsilon_i$$

de sorte que $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j$, ce qu'on note de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1p}\,x_p \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2p}\,x_p \\ \dots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \dots\ a_{np}\,x_p \end{pmatrix}$$

Matrice définissant l'application f
dans les bases (e_j) et (ε_i).

abrégé en Y = AX.
La $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée des composantes de l'image de e_j
a_{ij} se situe à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$$

La matrice associée à une application linéaire dépend de la base choisie.

L'image étant engendrée par les $f(e_i)$, on voit que Im(f) est engendré par les vecteurs dont les composantes sont les colonnes de la matrice.

Le calcul matriciel correspond exactement aux opérations sur les applications linéaires. En effet :

❑ Soient f et g deux applications linéaires de matrices A et B, x un vecteur de E dont les composantes dans la base $(e_1, \dots, e_p)$ sont $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$. Nous venons de voir que l'image $f(x)$ a pour composantes AX dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. De même $g(x)$ a pour composantes BX. Donc $f(x) + g(x)$ a pour composantes AX + BX. Or AX + BX a pour i-ème coefficient :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j + \sum_{i=1}^{p} b_{ij}\, x_j = \sum_{j=1}^{p} (a_{ij} + b_{ij}) x_j$$

Si on pose A + B la matrice de terme général $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, on a alors AX + BX = (A + B)X pour tout X de $\mathbf{R}^p$, et la matrice de $f + g$ est A + B.

❑ De même $\lambda f(x)$ a pour composantes $\lambda(AX)$ dont le i-ème coefficient est :

$$\lambda\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \lambda a_{ij}\, x_j$$

Si on pose λA la matrice de terme général $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$, on a alors $\lambda(AX) = (\lambda A)X$ pour tout X de $\mathbf{R}^p$, et la matrice de λf est λA.

❑ Enfin, soit $f : E \to F$ de matrice A dans une base $(e_i)_{1\le i\le p}$ de E et $(\varepsilon_i)_{1\le i\le n}$ de F, $g : F \to G$ de matrice B dans la base $(\varepsilon_i)_{1\le i\le n}$ de F et une base $(\eta_i)_{1\le i\le m}$ de G. $(g \circ f)(x)$ a pour composantes B(AX) dans la base $(\eta_i)_{1\le i\le m}$, dont le i-ème coefficient est :

$$\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\,(AX)_k = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, x_j\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj}\, x_j = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\, a_{kj}\right) x_j$$

Si on pose BA la matrice de terme général $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}\, a_{kj}$, on a alors B(AX) = (BA)X pour tout X de $\mathbf{R}^p$ et la matrice de $g \circ f$ dans les bases $(e_i)_{1\le i\le p}$ de E et $(\eta_i)_{1\le i\le m}$ de G est BA.

t AB.

❑ f bijective $\Leftrightarrow \exists\, g,\ g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id} \Leftrightarrow \exists\, \mathrm{B},\ \mathrm{BA} = \mathrm{AB} = \mathrm{I}_p \Leftrightarrow$ A inversible. De plus la matrice de $f^{-1} = g$ est $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$.

On pourra donc, en dimension finie, selon les cas, choisir de raisonner sur les applications linéaires ou sur les matrices, mais celles-ci dépendent de la base utilisée.
Voir L1/MATRICES.PDF.

EXEMPLE :

❑ Soit $f : \mathrm{E}_2 \to \mathrm{F}_3$ et $g : \mathrm{F}_3 \to \mathrm{G}_4$

$$\begin{array}{ll} e_1 \to 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 & \varepsilon_1 \to \eta_1 + \eta_2 \\ e_2 \to \varepsilon_1 - \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \to \eta_3 - \eta_4 \\ & \varepsilon_3 \to \eta_1 - 2\eta_2 + 4\eta_4 \end{array}$$

La matrice de f est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

La matrice de g est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

La matrice de $g \circ f$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

Ainsi, $(g \circ f)(e_1) = 2\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3 - \eta_4$

$(g \circ f)(e_2) = 3\eta_2 - 4\eta_4$

❑ Soit $f : \mathbf{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$ endomorphisme dont la matrice A dans la base canonique est constituée d'un triangle de Pascal :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \binom{n}{2} \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'image de X^j par f est :

$$f(\mathrm{X}^j) = 1 + \binom{j}{1}\mathrm{X} + \binom{j}{2}\mathrm{X}^2 + \dots + \binom{j}{j-1}\mathrm{X}^{j-1} + \mathrm{X}^j = (\mathrm{X}+1)^j$$

Par conséquent, l'image d'un polynôme P quelconque par f est : $f(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$. Il suffit pour le voir de décomposer P comme combinaison linéaire des X^j et d'utiliser la linéarité de f. f est une application bijective dont la réciproque vérifie $f^{-1}(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$. On a donc en particulier :

$$f^{-1}(\mathrm{X}^j) = (\mathrm{X}-1)^j = (-1)^j + (-1)^{j-1}\binom{j}{1}\mathrm{X} + (-1)^{j-2}\binom{j}{2}\mathrm{X}^2 - \dots - \binom{j}{j-1}\mathrm{X}^{j-1} + \mathrm{X}^j$$

de sorte que la matrice A^{-1} de f^{-1} est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \ldots & 1 & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \ldots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \ldots & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a ainsi pu inverser la matrice A sans calculs excessifs.

2- Isomorphisme

PROPOSITION

Soit f un isomorphisme de E *dans* F, i.e. *une application linéaire bijective. Alors l'image d'une base de* E *par f est une base de* F*. En particulier* dim(E) = dim(F).
Réciproquement, si f transforme une base de E *en une base de* F*, f est un isomorphisme.*

Démonstration :

❑ Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.
$(e_1, ..., e_n)$ est donc un système libre de E. Montrons que le système $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est libre dans F. Pour cela, considérons une combinaison linéaire nulle :

$\lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n) = 0$
$\Rightarrow \quad f(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) = 0$
$\Rightarrow \quad \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$ car f est injective
$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ car la famille $(e_1, ..., e_n)$ est libre.

Donc la famille $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est libre.

❑ Montrons que le système $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est générateur de F. Comme f est surjective, pour tout y de F, il existe x dans E tel que $y = f(x)$.

$\exists\, x \in E, y = f(x)$
$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n, y = f(x)$ et $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$ car la famille $(e_1, ..., e_n)$ est génératrice de E
$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n, y = f(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n)$
$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n, y = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$

Donc la famille $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est génératrice de F.

Réciproquement, si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E et $(f(e_1), ..., f(e_n))$ une base de F, alors f est un isomorphisme. En effet :

❑ f est injective :

Soit x élément de Ker(f), de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. On a donc :

$f(x) = 0$

$\Rightarrow \quad f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = 0$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$

$\Rightarrow \quad \forall\, i,\ \lambda_i = 0$ car les $f(e_i)$ forment un système libre.

$\Rightarrow \quad x = 0$

❑ f est surjective :

Soit y élément de F de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$. Alors $y = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i)$.

On dit que deux sous-espaces vectoriels sont **isomorphes** si et seulement si il existe un isomorphisme du premier sur le second.

PROPOSITION

Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Démonstration :

❑ La proposition précédente montre que deux espaces vectoriels E et F isomorphes de dimension finie ont même dimension puisqu'un isomorphisme transforme une base du premier en une base du second. Réciproquement, soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension, $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base de F. Définissons f par :

$$\forall\, i,\ f(e_i) = \varepsilon_i.$$

On étend f tout entier à E par linéarité sur les combinaisons linéaires. f transformant une base de E en une base de F est un isomorphisme.

3- Supplémentaire

Tous les supplémentaires d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie ayant même dimension sont tous isomorphes entre eux. Si F admet pour supplémentaire G, le **projecteur** sur F parallèlement à G est l'application définie par :

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in G}{x_G} & \rightarrow & x_F = p(x) \end{array}$$

Il est facile de vérifier que :

p est linéaire

$\mathrm{Im}(p) = F$

$\mathrm{Ker}(p) = G$

$p \circ p = p$

Inversement, soit p linéaire telle que $p \circ p = p$. Posons $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$. Montrons que F et G sont supplémentaires et que p est le projecteur sur F parallèlement à G. En effet :

❑ Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit x élément de $F \cap G$. Alors :

$$\left[\begin{array}{l} x \in F \Rightarrow \exists\, z \in E,\ x = p(z) \\ x \in G \Rightarrow p(x) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow\ 0 = p(x) = (p \circ p)(z) = p(z) = x$$

donc $x = 0$

❑ Montrons que $E = F + G$. En effet, pour tout x de E, $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x)$ élément de F et $(x - p(x))$ élément de G comme on le vérifie en lui appliquant p.

La décomposition précédente prouve enfin que p est le projecteur sur F parallèlement à G. Il y a cependant deux cas dégénérés :

$F = E$ et $G = \{0\}$. Dans ce cas, $p = \mathrm{Id}$.

$F = \{0\}$ et $G = E$. Dans ce cas, $p = 0$

La **symétrie** par rapport à F parallèlement à G est définie par :

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in G}{x_G} & \rightarrow & x_F - x_G = s(x) \end{array}$$

On vérifiera que :

s est linéaire.

$\mathrm{Im}(s) = E$

$\mathrm{Ker}(s) = \{0\}$

$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(s + \mathrm{Id})$

$G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(s - \mathrm{Id})$

$s \circ s = \mathrm{Id}$

Inversement, si s est un endomorphisme tel que $s \circ s = \mathrm{Id}$, alors, posant $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$, on a s symétrie par rapport à F parallèlement à G, avec comme cas dégénéré, $s = \mathrm{Id}$ et $s = -\mathrm{Id}$. La démonstration est comparable à celle utilisée pour les projecteurs.

4- Le théorème du rang

PROPOSITION

Soit u une application linéaire de E *dans* F. *Alors u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de* $\mathrm{Ker}(u)$ *sur* $\mathrm{Im}(u)$.

Démonstration :

❑ Soit E' un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E et considérons la restriction de u à E'.

Montrons que $u : E' \rightarrow \mathrm{Im}(u)$ est un isomorphisme.

Cette restriction est injective. En effet :

$x \in \mathrm{Ker}\, u|_{E'} \Rightarrow x \in E'$ et $u(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(u) \cap E' = \{0\} \Rightarrow x = 0$

Elle est également surjective. En effet :

$y \in \mathrm{Im}(u) \Rightarrow \exists\, x \in E,\ y = u(x)$

or x peut s'écrire $v + w$ avec v dans $\mathrm{Ker}\, u$ et w dans E', de sorte que $y = u(w)$ et y appartient à $\mathrm{Im}(u|_{E'})$.

Cette proposition ne signifie nullement que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont en somme directe. Par contre, il y a une relation importante sur les dimensions de ces deux sous-espaces vectoriels.

THEOREME DU RANG

Soit u une application linéaire de E, *espace vectoriel de dimension finie, dans* F. *Alors :*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u))$$

Démonstration 1 :

❑ En utilisant la proposition précédente, on a $E = E' \oplus \mathrm{Ker}(u)$ avec E' isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$. On a donc :

$\dim(E) = \dim(E') + \dim(\mathrm{Ker}(u))$

$= \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$

Démonstration 2 :

❑ On peut aussi donner une démonstration directe. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, complétée en $(e_1, ..., e_n)$ base de E. Alors $(u(e_1), ..., u(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}(u)$. Comme $u(e_1) = ... = u(e_p) = 0$, un système générateur de $\mathrm{Im}(f)$ est en fait $(u(e_{p+1}), ..., u(e_n))$. Il suffit de montrer que ce système est libre pour pouvoir conclure que :

$$\dim(\mathrm{Im}(u)) = n - p = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u))$$

Soit une combinaison linéaire $\lambda_{p+1}u(e_{p+1}) + ... + \lambda_n u(e_n) = 0$. On a donc :

$u(\lambda_{p+1}e_{p+1} + ... + \lambda_n e_n) = 0$

donc $\lambda_{p+1}e_{p+1} + ... + \lambda_n e_n \in \mathrm{Ker}(u)$

donc $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_p, \lambda_{p+1}e_{p+1} + ... + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_p e_p$

donc $\forall\ i, \lambda_i = 0$ puisque le système $(e_1, ..., e_n)$ est libre

Donc $(u(e_{p+1}), ..., u(e_n))$ est libre

$\dim(\mathrm{Im}(u))$ s'appelle **rang** de u, noté $\mathrm{rg}(u)$. C'est le rang d'un système de vecteurs engendrant $\mathrm{Im}(u)$, par exemple $(u(e_1), ..., u(e_n))$ si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E. C'est également le nombre de colonnes indépendantes de la matrice de u puisque ces colonnes donnent les composantes d'un système générateur de $\mathrm{Im}(u)$. Dans le chapitre MATRICES.PDF sur le calcul matriciel, nous avons défini le rang comme le nombre de lignes non nulles d'une matrice échelonnée équivalente en ligne à la matrice initiale. Nous verrons plus loin qu'il s'agit bien du même nombre.

COROLLAIRE

Soit f linéaire de E *dans* F. *Il y a équivalence entre* :

i) *f est un isomorphisme.*

ii) $\dim(E) = \dim(F)$ *et f injective.*

iii) $\dim(E) = \dim(F)$ *et f surjective.*

Démonstration :

❑ Montrons par exemple ii) ⇒ i). On a :

$\dim(F) = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ car f est injective

donc $\mathrm{Im}(f) = F$ donc f surjective.

On montre de même iii) ⇒ i). Les réciproques sont évidentes.

Ainsi, pour un endomorphisme en dimension finie, il y a équivalence entre f bijective, f injective, f surjective. On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION :

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, *il y a équivalence entre :*

i) A *est inversible*

ii) $\exists$ B, $AB = I_n$

iii) $\exists$ B, $BA = I_n$

iv) $\mathrm{rg}(A) = n$

Démonstration :

❑ Il est clair que i) entraîne les trois autres. Réciproquement, soit f endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, associé à A dans une base donnée et g associée à B.

❑ ii) $\Rightarrow \exists\, g \in L(E), f \circ g = \mathrm{Id} \Rightarrow f$ surjective (un antécédent de y par f est $g(y)$)
$\Rightarrow f$ bijective $\Rightarrow$ A inversible

❑ iii) $\Rightarrow \exists\, g \in L(E), g \circ f = \mathrm{Id} \Rightarrow f$ injective (car $f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = x = 0$)
$\Rightarrow f$ bijective $\Rightarrow$ A inversible.

❑ iv) $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = E \Rightarrow f$ surjective $\Rightarrow f$ bijective $\Rightarrow$ A inversible.

EXEMPLE :
❑ Soit $x_1, ..., x_n$ n réels distincts et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quelconque. Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que :

$$\forall\, i,\ P(x_i) = f(x_i)$$

On réfléchira à une démonstration directe avant de consulter la suite. On verra que la question est loin d'être évidente.
Considérons l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\Phi : P \to \begin{pmatrix} P(x_1) \\ ... \\ P(x_n) \end{pmatrix}$$

On vérifie trivialement qu'il s'agit d'une application linéaire. Les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension n. De plus, Φ est injective. En effet, soit P tel que $\Phi(P) = 0$. Alors P, polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ s'annule en n points distincts. P est donc nul.
On en conclut que Φ est un isomorphisme, et donc que Φ est surjective. Considérons le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ ... \\ f(x_n) \end{pmatrix}$. Il existe un et un seul antécédent P par Φ, et donc un et un seul polynôme P tel que : $\forall\, i$, $P(x_i) = f(x_i)$. P s'appelle **polynôme interpolateur de Lagrange**, coïncidant avec f aux points $x_1, ..., x_n$.
La démonstration précédente prouve l'existence de P mais n'en donne pas d'expression explicite. La voici :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \frac{(X - x_1)(X - x_2)(X - x_{i-1})(X - x_{i+1})...(X - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

En effet, le polynôme $\frac{(X - x_1)(X - x_2)(X - x_{i-1})(X - x_{i+1})...(X - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$ s'annule en $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ et son dénominateur a pour but de lui faire prendre la valeur 1 en x_i. Notons-le $L_i(X)$. On a donc :

$$\begin{aligned} L_i(x_k) &= 0 \quad \text{si } i \neq k \\ &= 1 \quad \text{si } i = k \end{aligned}$$

Voir aussi le chapitre L1/POLYNOME.PDF.

Il n'est pas alors difficile de vérifier que, si on pose $P(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, L_i(X)$ et si on calcule $P(x_k)$, alors tous les termes de la somme sont nuls, sauf le k-ème qui vaut justement $f(x_k)$.
Ces polynômes servent à approximer les fonctions, en particulier dans le calcul intégral. Soient des points $a < a_0 < a_1 < ... < a_n < b$ et P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. On a :

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\, L_i$$

donc $\displaystyle\int_a^b P(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, P(a_i)$ où $\alpha_i = \displaystyle\int_a^b L_i(t)\, dt$

Si on se fixe les valeurs de a_i, on peut calculer une fois pour toutes les valeurs α_i. On peut alors utiliser l'expression $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, P(a_i)$ pour calculer, non seulement l'intégrale d'un polynôme de degré n (calcul exact dans ce cas), mais aussi une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction f au moyen de la formule $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, f(a_i)$. Cela est intéressant dans le cas où le calcul d'une primitive est difficile ou impossible, ou bien dans le cas où f n'est connue qu'en un nombre fini de points (résultant d'une mesure d'un échantillonage par exemple). On peut aussi choisir les a_i pour tenter de minimiser l'erreur commise. (Voir l'annexe I de L1/INTEGRAL.PDF).

5- Retour sur les systèmes linéaires

Dans le chapitre sur le calcul matriciel L1/MATRICES.PDF, nous avons étudié l'existence et l'unicité des solutions à un système AX = B selon le rang r de A, et son nombre n de lignes et p de colonnes. Les résultats énoncés alors peuvent se réinterpréter plus clairement au moyen des applications linéaires. A est vue comme la matrice d'une application linéaire f d'un espace vectoriel E de dimension p dans un espace vectoriel F de dimension n, des bases de chaque espace étant choisie. B est la colonne des composantes d'un vecteur donné b de F. X est la colonne des composantes d'un vecteur à trouver x de E. Posons $r = \text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

Le système AX = B est équivalent à l'équation $f(x) = b$. On voit que l'existence des solutions est lié au fait que b appartient à l'image ou non. En particulier, si $r = n$ (rang égal au nombre d'équations), alors $\text{Im}(f)$ et F ont même dimension, donc sont égaux, donc f est surjective et il y a toujours une solution.

L'unicité de la solution, si elle existe, est liée à l'injectivité de f, donc à son noyau. La dimension du noyau est, d'après le théorème du rang, égal à $p - r$. En particulier, si $p = r$ (rang égal au nombre d'inconnues), il y a unicité de la solution, si elle existe.

Le cas $r = n = p$ (autant d'inconnues que d'équations, ce nombre étant égal au rang) permet de conclure à l'existence et à l'unicité de la solution. On dit que le système est **de Cramer**. On voit qu'il ne suffit pas d'avoir $n = p$ pour conclure ainsi. Le rang du système joue un rôle essentiel. $r = n = p$ signifie qu'on dispose d'une matrice des coefficients carrée inversible, donc que f est bijective.

Dans le cas général d'un système de rang r homogène (dont les seconds membres sont nuls), l'ensemble des solutions est $\text{Ker}(f)$, sous-espace vectoriel de dimension $p - r$. Dans la pratique, la méthode de Gauss conduit à $n - r$ équations du type 0 = 0. On les élimine du système.

6- Formes linéaires et hyperplans

Une forme linéaire sur un espace vectoriel E de corps de base $\mathbb{K}$ est un élément de L(E,$\mathbb{K}$). On la note le plus souvent avec une lettre grecque.

PROPOSITION

Soit H *un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel* E*, de dimension finie ou non. Il y a équivalence entre :*

(i) H *admet un supplémentaire de dimension* 1

(ii) H *est le noyau d'un forme linéaire non nulle* φ

H *s'appelle un* **hyperplan**. *Les formes linéaires* φ *dont* H *est le noyau sont définies à une constante multiplicative près.*

Démonstration :

❑ (ii) ⇒ (i) : Soit u est un vecteur n'appartenant pas à H = Ker(φ) (et donc tel que $\varphi(u) \neq 0$). Notons D la droite engendrée par u et montrons que E = D ⊕ H.

Pour tout x de E : $x = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u + (x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u)$ avec $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u \in$ D et $x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u \in$ H. En effet :

$$\varphi(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}\varphi(u) \qquad \text{par linéarité de } \varphi$$
$$= 0$$

donc $x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u \in \text{Ker}(\varphi) = \text{H}$. Donc $x \in$ D + H.

Par ailleurs, la somme est directe, car si $x \in \text{D} \cap \text{H}$, alors $\exists\ \lambda$, $x = \lambda u$ et $\varphi(x) = 0$ donc $\varphi(\lambda u) = 0 = \lambda\varphi(u)$. Comme $\varphi(u) \neq 0$, on a $\lambda = 0$ et donc $x = 0$.

❑ (i) ⇒ (ii) : Réciproquement, un sous-espace vectoriel H admettant comme supplémentaire une droite D de vecteur directeur n est le noyau d'un forme linéaire. En effet, si $x = x_H + \lambda n$ est la décomposition de x, il suffit de définir $\varphi(x) = \lambda$. On vérifiera que φ est linéaire. Par ailleurs :

$$x \in \text{H} \Leftrightarrow x = x_H \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(\varphi)$$

Donc H = Ker(φ).

On généralise ainsi l'équation $ax + by + cz = 0$ d'un plan en dimension 3.

Si $\varphi(x) = 0$ est une équation de H, toute autre équation de H est proportionnelle à celle-ci. En effet, soit ψ est une autre forme linéaire, nulle sur H, et soit u un vecteur n'appartenant pas à H et D la droite vectorielle engendrée par u. La décomposition donnée plus haut

$$x = \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u}_{\text{élément de D}} + \underbrace{(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u)}_{\text{élément de H}}$$

permet de conclure que :

$$\psi(x) = \varphi(x)\frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = \text{Cte} \times \varphi(x)$$

Plusieurs remarques :

En dimension finie, le theorème du rang permet de dire que $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \dim E - 1$, puisque $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbf{K}$ et donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$.

Si u est choisi de façon que $\varphi(u) = 1$, alors la décomposition se simplifie en :

$$x = \varphi(x)\, u + (x - \varphi(x)\, u)$$

La décomposition ci-dessus généralise le cas d'un espace euclidien (E, < , >) (voir L1/ESPEUCL.PDF). Si n est unitaire et orthogonal à l'hyperplan H, on peut prendre comme forme linéaire φ :

$$\varphi(x) = \langle x,n \rangle$$

et $x = \langle x,n \rangle n + (x - \langle x,n \rangle n)$

avec $\langle x,n \rangle n$ orthogonal à H et $x - \langle x,n \rangle n$ élément de H.

De même que la décomposition $x = \langle x,n \rangle n + x - \langle x,n \rangle n$ permet de trouver facilement l'expression de la projection orthogonale sur une droite de vecteur directeur unitaire n (à savoir $\langle x,n \rangle\, n$), de même la décomposition $x = \varphi(x)u + (x - \varphi(x)u)$ permet de trouver rapidement l'expression de la projection parallèlement à l'hyperplan d'équation $\varphi(x) = 0$, sur la droite de vecteur directeur u tel que $\varphi(u) = 1$, à savoir $\varphi(x)u$.

EXEMPLES :

❑ Expression de la projection sur la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ parallèlement au plan d'équation $2x + y - z = 0$. Cette expression vaut $\dfrac{2x + y - z}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a pris ici $\varphi(x, y, z) = 2x + y - z$ et $u = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ de façon que $\varphi(u) = 1$.

❑ Ce qui précède s'applique à des espaces vectoriels de dimension infinie. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$ et H le sous-espace vectoriel des fonctions s'annulant en 0. H est un hyperplan. En effet, soit $\varphi : E \to \mathbf{R}$ définie pour f dans E par $\varphi(f) = f(0)$. φ est une forme linéaire, et $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Soit u une fonction de E n'appartenant pas à H, par exemple la fonction constante égale à 1. Alors u endendre une droite D supplémentaire de H. Toute fonction f se décompose sous la forme :

$$f = \frac{\varphi(f)}{\varphi(u)}\, u + \left(f - \frac{\varphi(f)}{\varphi(u)}\, u\right) = f(0) + (f - f(0))$$

somme d'une fonction constante et d'une fonction élément de H.

III : Changement de bases

1- Matrice de passage

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un espace vectoriel E. On considère une nouvelle base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. Cette nouvelle base est en général définie en donnant les composantes des ε_i dans la base initiale $(e_1, ..., e_n)$.

DEFINITION

On appelle **matrice de changement de base** *de l'ancienne base à la nouvelle ou* **matrice de passage** *la matrice dont la colonne j est constituée des composantes de* ε_j *dans l'ancienne base* $(e_1, ..., e_n)$.

Cette matrice étant de rang n est donc inversible.

EXEMPLE :

❑ Si $\varepsilon_1 = 3e_1 + e_2$ et $\varepsilon_2 = -e_1 + 2e_2$, alors la matrice de passage de la base e à la base ε est :

$$P_{e\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2- Expression d'un vecteur

Soit (e_i) et (ε_i) deux bases ; soit $P_{e\varepsilon}$ la matrice de changement de base de (e_i) à (ε_i). On considère un vecteur v dont les composantes dans la base initiale (e) forment un vecteur colonne $(V)_e$, et l'on souhaite connaître les composantes de v dans la nouvelle base (ε). On a :

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x_j' \varepsilon_j$$

avec $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ où a_{ij} est le terme général de $P_{e\varepsilon}$.

donc $\quad v = \sum_{j=1}^{n} x_j' \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$

donc $\quad v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' e_i$

Par unicité des coefficients, on en déduit que :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j'$$

Matriciellement, cela se traduit par : $(V)_e = P_{e\varepsilon}(V)_\varepsilon$

Pour connaître $(V)_\varepsilon$, il faudra donc résoudre un système ou inverser la matrice $P_{e\varepsilon}$

<u>Autre démonstration</u> :

❑ Considérons l'application Id de E muni de la base (ε_i) dans E muni de la base (e_i). La matrice de cette application linéaire Id est la matrice $P_{e\varepsilon}$ précédemment définie. En effet, sa $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée des composantes dans la base d'arrivée (e_i) des vecteurs de la base de départ (ε_j). La relation Y = AX donnant les composantes de l'image d'un vecteur à partir des composantes de ce vecteur et de la matrice de l'application linéaire donnera dans le cas présent :

$$(V)_e = P_{e\varepsilon}(V)_\varepsilon$$

❑ **Inverse de $P_{e\varepsilon}$** :

De $(V)_e = P_{e\varepsilon}(V)_\varepsilon$, on tire $(V)_\varepsilon = P_{e\varepsilon}^{-1}(V)_e$. Mais par ailleurs, en reprenant la formule initiale en inversant les rôles de e et ε, on a aussi :

$(V)_\varepsilon = P_{\varepsilon e}(V)_e$

Ces formules étant vraies pour tout V, on en déduit que :

$P_{e\varepsilon}^{-1} = P_{\varepsilon e}$

❑ **Produit de matrices de passage** :

Si l'on dispose de trois bases *e*,*e*',*e*'', on a

$(V)_e = P_{ee'}(V)_{e'}$

$(V)_{e'} = P_{e'e''}(V)_{e''}$

$\Rightarrow \quad (V)_e = P_{ee'}P_{e'e''}(V)_{e''}$

or, par ailleurs, on a :

$(V)_e = P_{ee''}(V)_{e''}$

ces relations étant vraies pour tout vecteur V, on en déduit que :

$P_{ee'}P_{e'e''} = P_{ee''}$

3- Applications linéaires

Soit E muni de deux bases *e* et *e*', et F muni de deux bases ε et ε'. *e* et ε sont considérées comme les anciennes bases, *e*' et ε' comme les nouvelles. Soit P la matrice de passage de *e* à *e*', et Q la matrice de passage de ε à ε'. Soit *f* une application linéaire de E dans F, de matrice M dans les anciennes bases. Si dim(E) = *p* et dim(F) = *n*, alors :

$M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

$P \in GL_p(\mathbb{K})$

$Q \in GL_n(\mathbb{K})$

On souhaite déterminer l'expression de la matrice de *f* dans les nouvelles bases. Notons $w = f(v)$. On a :

$(W)_\varepsilon = M(V)_e$	par définition de la matrice d'une application linéaire
$(W)_\varepsilon = Q(W)_{\varepsilon'}$	changement de base dans F
$(V)_e = P(V)_{e'}$	changement de base dans E

donc $\quad (W)_{\varepsilon'} = Q^{-1}MP(V)_{e'}$

Ainsi, la matrice de *f* dans la nouvelle base est $M' = Q^{-1}MP$. (On vérifiera sur la taille des matrices la possibilité d'effectuer un tel produit). On a également $M = QM'P^{-1}$. Les matrices M et M' sont dites **équivalentes**. On définit ainsi une relation entre M et M', qui est une relation d'équivalence. En effet :

(i) M est équivalente à M.

(ii) Si M est équivalente à M', alors M' est équivalente à M.

(iii) Si M est équivalente à M', et M' à M'', alors M est équivalente à M''.

Pour (i), prendre $Q = I_n$ et $P = I_p$.

Pour (ii), si M est équivalente à M', il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $\exists\, Q \in GL_n(\mathbb{K})$, $M' = Q^{-1}MP$. Mais la relation $M = QM'P^{-1}$ montre que M est équivalente à M', de la forme $Q'^{-1}MP'$ avec $P' = P^{-1}$ et $Q' = Q^{-1}$.

Pour (iii), Si M est équivalente à M', il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $\exists\, Q \in GL_n(\mathbb{K})$, $M' = Q^{-1}MP$. Si M' est équivalente à M'', il existe $P' \in GL_p(\mathbb{K})$, $\exists\, Q' \in GL_n(\mathbb{K})$, $M'' = Q'^{-1}M'P'$. On a alors :

$M'' = Q'^{-1}Q^{-1}MPP' = (QQ')^{-1}M(PP')$

donc M est équivalente à M'' au moyen des matrices PP' et QQ'.

Deux matrices équivalentes représentent la même application linéaire dans des bases différentes de l'espace de départ et celui d'arrivée.

Dans le cas d'un endomorphisme où l'on effectue le même changement de base P dans le même espace de départ et d'arrivée, la formule se réduit à $M' = P^{-1}MP$. Les matrices M et M' sont dites **semblables**. Il s'agit aussi d'une relation d'équivalence, la démonstration étant comparable à la précédente. Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes de l'espace.

Il est facile de caractériser deux matrices équivalentes :

PROPOSITION

Soient M *et* M' *deux matrices éléments de* $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$. *Il y a équivalence entre* :

(i) M *et* M' *sont équivalentes.*

(ii) M *et* M' *ont même rang*.

Montrons d'abord le résultat préliminaire suivant :

LEMME

Soit M *un élément de* $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$, *de rang* r. *Alors* M *est équivalente à la matrice par blocs*

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_1 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix}$$

où I_r *est la matrice identité* $r \times r$, O_1 *la matrice nulle à* r *lignes et* $p - r$ *colonnes*, O_2 *la matrice nulle à* $n - r$ *lignes et* r *colonnes*, O_3 *la matrice nulle à* $n - r$ *lignes et* $p - r$ *colonnes*.

<u>Démonstration du lemme</u> :

❑ On considère que M est associée à une application linéaire f d'un espace vectoriel E de dimension p dans un espace vectoriel F de dimension n dans des bases données (on peut prendre par exemple $E = \mathbf{K}^p$ et $F = \mathbf{K}^n$ munis des bases canoniques). On construit alors une base $(e_1', ..., e_p')$ de E et $(\varepsilon_1', \varepsilon_2', ... \varepsilon_n')$ de F dans lesquelles la matrice de f est donnée par la matrice J_r, à savoir :

$$f(e_1') = \varepsilon_1',\ f(e_2') = \varepsilon_2',\ ...,\ f(e_r') = \varepsilon_r',\ f(e_{r+1}') = 0,\ ...,\ f(e_p') = 0$$

On remarque que, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = p - r$. On choisit donc $e_{r+1}', ..., e_p'$ base de Ker(f), que l'on complète en $e_1', ..., e_r', e_{r+1}', ..., e_p'$ base de E. On pose $\varepsilon_1' = f(e_1'), ..., \varepsilon_r' = f(e_r')$. Dans la démonstration du théorème du rang, nous avons montré que cette famille constitue une base de Im(f). On la complète en $\varepsilon_1', ..., \varepsilon_r', \varepsilon_{r+1}', ..., \varepsilon_n'$ base de F. La matrice de f dans la nouvelle base est alorsJ_r.

EXEMPLE :

❑ Considérons l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^4$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ -1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Un élément $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ appartient à Ker(f) si et seulement si $\begin{cases} x + y + z + 3t = 0 \\ 2x + 4y + 4t = 0 \\ -x - 5y + 3z + t = 0 \\ x + 3y + 4z + t = 0 \end{cases}$. On vérifiera que les solutions de ce système sont les éléments de la droite engendrée par $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On prend donc $e_4' = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On constate que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base (e_1', e_2', e_3', e_4') de $\mathbf{R}^4$ (espace vectoriel de départ). On prend ensuite $\varepsilon_1' = f(e_1') = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2' = f(e_2') = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\varepsilon_3' = f(e_3') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, qu'on complète en une base de $\mathbf{R}^4$ (espace vectoriel d'arrivée) par le vecteur $\varepsilon_4' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, posant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ -1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_3$.

Démonstration de la proposition :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii) : Si M et M' sont équivalentes, elles représentent la même application linéaire f dans des bases différentes. Donc elles ont même rang, à savoir celui de f égal à $\dim(\mathrm{Im}(f))$

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i) : Si M et M' ont même rang, elles sont toutes deux équivalentes à J_r donc équivalentes entre elles, puisque l'équivalence des matrices est une relation d'équivalence.

Cela signifie que ce qui caractérise une application linéaire, c'est son rang. On peut classifier les applications linéaires au moyen de leur rang. Par exemple, il existe trois types d'applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension 3 dans un espace vectoriel de dimension 2, à savoir, les applications dont la matrice est, dans des bases bien choisies :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par contre, la classification des endomorphismes semblables est beaucoup plus compliquée, du fait de la forte contrainte imposée par le fait que le changement de base est le même dans l'espace de départ et celui d'arrivée. Cette question est partiellement étudiée en deuxième année dans le chapitre L2/DIAGONAL.PDF.

PROPOSITION

Pour toute matrice, $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A^T)$*, où* A^T *désigne la transposée de la matrice* A.

Concrètement, ce résultat exprime le fait que le rang d'une matrice peut se calculer aussi bien sur les lignes que sur les colonnes.

Démonstration :
❑ C'est une conséquence du lemme. Soit A de rang r. Alors A est équivalente à J_r définie plus haut. Donc il existe P, élément de $GL_p(\mathbb{K})$ et Q élément de $GL_n(\mathbb{K})$ tels que :

$$A = QJ_rP^{-1}$$

donc $A^T = (QJ_rP^{-1})^T = P^{-1T}\, J_r^T\, Q^T$

donc A^T est équivalente à J_r^T, et il est clair que $rg(J_r^T) = r$.

4- Trace

On appelle **trace** d'une matrice carrée la somme de ses éléments diagonaux :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$. On dispose également de la propriété suivante :

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

En effet :

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$$

alors que :

$$Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}$$

Il suffit d'intervertir les notations $i \leftrightarrow j$ pour obtenir la même expression. On en déduit en particulier que :

$$Tr(P^{-1}MP) = Tr(MPP^{-1}) = Tr(M)$$

Or si M représente la matrice d'un endomorphisme u dans une base donnée et si P représente la matrice de passage de cette base à une autre base, $P^{-1}MP$ représente la matrice de u dans la nouvelle base. Les deux matrices, bien que différentes, ont la même trace. Elles ont d'ailleurs aussi le même rang et le même déterminant. Cette trace est appelée **trace de l'endomorphisme** u. Elle ne dépend pas de la base choisie pour la calculer.

EXEMPLE :
❑ La trace d'un projecteur p est égale à son rang. En effet, si on prend une base de l'espace formée d'une base de Im(p) et d'une base de Ker(p), la matrice de p dans cette base est, par blocs, $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

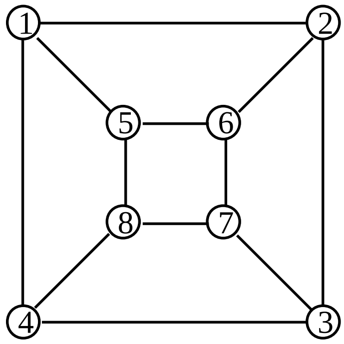
❑ La trace d'une rotation d'angle θ en dimension 3 est égale à 1 + 2cos(θ). En effet, il existe une base dans laquelle la rotation a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Annexe I : une application du théorème du rang en SII ou en physique

1- Cycles indépendants, nombre cyclomatique

En Sciences Industrielles, un mécanisme est modélisé par des solides indéformables S_1, S_2, ..., S_n ayant entre eux des liaisons, traduisant les mouvements possibles entre les pièces. Notons L_{ij} une liaison entre le solide S_i et le solide S_j. Il n'existe bien évidemment pas des liaisons entre tous les solides du mécanisme, de sorte que L_{ij} n'est pas nécessairement défini pour tout i et j. On pose par ailleurs $L_{ij} = L_{ji}$ lorsqu'une telle liaison existe.

Le mécanisme est symbolisé par un graphe de structure, ayant des sommets et des arêtes. Il y a autant de sommets que de solides (soit s ce nombre), et une arête relie le sommet S_i et S_j si et seulement si une liaison L_{ij} existe. Autrement dit, les arêtes représentent les liaisons entre solides. Il y a donc autant d'arêtes que de liaisons (soit a ce nombre). Voici un exemple fictif de graphe de structure, où les sommets (ou solides) sont numérotés de 1 à 8 :



Nous supposerons toujours un graphe de structure connexe, c'est-à-dire qu'on peut se rendre d'un sommet quelconque à un autre sommet en suivant un chemin du graphe (sinon, cela voudrait dire que l'on dispose de deux mécanismes disjoints !!).

De tels graphes de structures se trouvent également en électrocinétique, comme modélisation de circuits électrique, où les arêtes sont plutôt appelées branches du circuit et les sommets sont appelés noeuds.

Un cycle est un chemin fermé, i.e. commençant et finissant au même sommet. Nous supposerons en outre qu'un tel chemin ne passe pas deux fois par la même arête. Par ailleurs, nous ne définissons pas de sens de parcours privilégié d'un circuit : il peut se parcourir dans un sens ou dans l'autre.

En SII, un tel cycle est parfois appelé boucle de solides, et en électrocinétique, un cycle est appelé maille du circuit. Voici des exemples de cycles définis dans le graphe de structure précédent : 1-4-8-5-1 ou 1-4-8-7-3-2-1. On peut définir la notion de cycles indépendants, et de nombre cyclomatique. Mathématiquement, cette notion d'indépendance est rigoureusement identique à la notion de système de vecteurs indépendants dans un espace vectoriel. Précisons cela.

Le corps de base utilisé sera inhabituel. Il s'agit du corps constitué des deux éléments 0 et 1, avec comme règle de la somme $1 + 1 = 0$. Ce corps est noté $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On peut le voir aussi comme le corps des deux éléments {pair, impair} avec les règles d'opérations usuelles sur les nombres pairs et impairs. La caractéristique essentielle de ce corps est que :

$$\forall x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ x + x = 0$$

Considérons maintenant F espace vectoriel de dimension s (le nombre de sommets) sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dont une base sera notée (S_1, ..., S_s). Autrement dit, les sommets du graphe désignent les vecteurs d'une base de F. Un vecteur quelconque de F s'écrit $S_{i_1} + S_{i_2} + ... + S_{i_k}$ où les indices i_1, i_2, ..., i_k sont distincts (car s'il y a deux indices identiques, on a $S_i + S_i = (1 + 1) S_i = 0 S_i = 0$).

Considérons également E espace vectoriel de dimension a (le nombre d'arêtes) sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dont une base sont les vecteurs L_{ij}, désignant chacun une liaison. Un vecteur quelconque de E s'écrit $\sum L_{ij}$ où les indices sont également distincts.

Définissons enfin une application linéaire δ de E dans F, appelée **bord** en donnant les images des vecteurs de base de E. Si L_{ij} est une liaison entre S_i et S_j alors $\delta(L_{ij}) = S_i + S_j$. Par exemple, dans le graphe de structure dessiné ci-dessus :

$$\delta(L_{56}) = S_5 + S_6$$
$$\delta(L_{56} + L_{67} + L_{73}) = \delta(L_{56}) + \delta(L_{67}) + \delta(L_{73}) = S_5 + S_6 + S_6 + S_7 + S_7 + S_3$$
$$= S_5 + S_3 \quad \text{puisque } S_6 + S_6 = 0 = S_7 + S_7$$

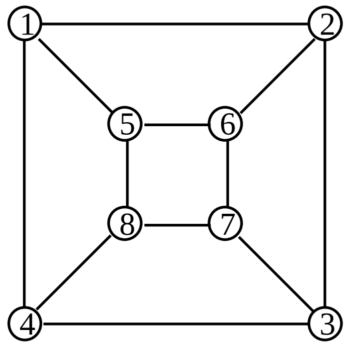
On comprend pourquoi δ s'appelle *bord*. On a calculé le bord (i.e. les extrémités) du chemin 5-6-7-3.

Quelle est l'image de δ ? Un sommet isolé ne peut être dans cette image, car $\delta(L_{ij})$ fait intervenir deux sommets et il en résulte que $\delta(\sum L_{ij})$ est combinaison linéaire d'un nombre pair de sommets (même après simplification). L'application δ ne peut être surjective. Montrons que son rang est $s - 1$ (un de moins que le nombre de sommets). Il suffit de montrer que, par exemple, le système libre ($S_1 + S_2$, $S_1 + S_3$, ..., $S_1 + S_s$) est constitué de vecteurs de $\mathrm{Im}(\delta)$. Or nous avons supposé le graphe connexe, ce qui signifie que, pour tout i, il existe un chemin allant de S_1 à S_i. Cela ne signifie rien d'autre que le bord de ce chemin est $S_1 + S_i$ qui est donc bien dans $\mathrm{Im}(\delta)$.

Quel est le noyau de δ ? Les éléments du noyau ne sont autres que les cycles. En effet, un chemin est dans le noyau si et seulement si son bord est nul, et donc si et seulement si le chemin commence et finit au même sommet : il s'agit bien des cycles. C'est le cas par exemple de $L_{14} + L_{48} + L_{85} + L_{51}$, dont l'image par δ est nul. Les cycles dits indépendants en SII ou en physique sont précisément ceux qui sont linéairement indépendants au sens mathématique du terme dans l'espace vectoriel E. Le nombre de cycles indépendants est la dimension de $\mathrm{Ker}(\delta)$. Or le théorème du rang nous donne la dimension de $\mathrm{Ker}(\delta)$. C'est $\mu = a - \mathrm{rg}(\delta) = a - (s - 1) = a - s + 1$. Ce nombre est dit **nombre cyclomatique** du graphe. C'est le nombre maximal de cycles indépendants.

Dans l'exemple précédent, $\mu = 12 - 8 + 1 = 5$. Il y a cinq cycles indépendants, par exemple :

$$C_1 = L_{15} + L_{58} + L_{84} + L_{41}$$
$$C_2 = L_{12} + L_{26} + L_{65} + L_{51}$$
$$C_3 = L_{26} + L_{67} + L_{73} + L_{32}$$
$$C_4 = L_{37} + L_{78} + L_{84} + L_{43}$$
$$C_5 = L_{14} + L_{43} + L_{32} + L_{21}$$

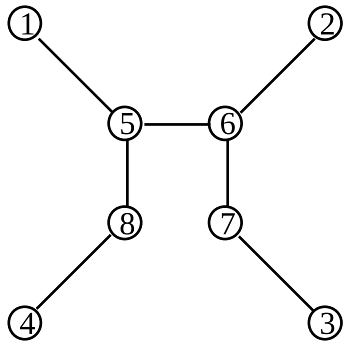


Tout autre cycle est combinaison linéaire de ces cycles, par exemple :

$L_{56} + L_{67} + L_{78} + L_{85} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$

$L_{15} + L_{56} + L_{67} + L_{73} + L_{32} + L_{21} = C_2 + C_3$

On peut montrer que le nombre cyclomatique s'interprête aussi comme le nombre minimal d'arêtes à supprimer pour qu'il n'y ait plus de cycles. Dans l'exemple précédent, où $\mu = 5$, il suffit d'enlever 5 arêtes bien choisies pour ne plus avoir de cycles, par exemple les arêtes L_{12}, L_{23}, L_{34}, L_{45} et L_{87}.



Le graphe final obtenu s'appelle un arbre.

2- Utilisation du nombre cyclomatique

En SII, le nombre cyclomatique intervient dans l'analyse géométrique ou cinématique du mécanisme. Chaque liaison fait intervenir un ou plusieurs paramètres géométriques (respectivement cinématique), par exemple l'angle formé entre deux solides dans le cas d'une liaison pivot, ou la distance entre deux solides dans le cas d'une liaison glissière (respectivement la vitesse angulaire ou la vitesse linéaire). Dans le cas d'un cycle (ou boucle de solides), il existe nécessairement une relation entre les différentes paramètres de chaque liaison pour pouvoir refermer la boucle. Il convient donc d'écrire toutes les relations entre paramètres afin d'éliminer les paramètres superflus. Pour cela, il est inutile d'établir une telle relation pour chaque cycle du graphe : il suffit de le faire pour les cycles indépendants. Le nombre cyclomatique indique combien il y a de tels cycles indépendants et donc combien il y a de relations à établir entre paramètres.

En électrocinétique, on dispose d'un circuit électrique constitué de *a* branches (ou arêtes) et de *s* noeuds (ou sommets), chaque branche étant constituée de générateurs et de résistances. Le problème est d'établir les valeurs de l'intensité du courant dans chaque branche, ou la différence de potentiel entre deux noeuds.

❑ La méthode brute consiste à dire que l'on dispose de $2a$ inconnues élémentaires, à savoir les a intensités dans chacune des branches et les a différences de potentiels aux bornes de chacune des branches. Pour résoudre le système, il convient donc d'établir $2a$ équations indépendantes qui sont :

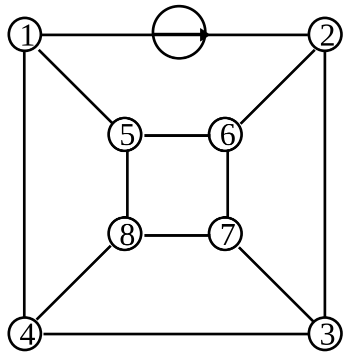
- Les a relations entre tensions et intensité dans chaque branche résultant de la loi d'Ohm (du type $U = RI - E$, avec U tension aux bornes de la branche, I intensité du courant dans la branche, E force électromotrice dans la branche)

- Les $s - 1$ relations résultant de la loi des noeuds $\sum_j I_{ij} = 0$ pour chaque noeud i du circuit sauf un, où I_{ij} désigne l'intensité du courant allant de i vers j. On notera qu'il n'y a que $s - 1$ équations car les s équations $\sum_j I_{ij} = 0$ écrites pour chaque sommet i sont liées entre elles. La somme de ces s équations est en effet nulle : $\sum_i \sum_j I_{ij} = \sum_{i<j} I_{ij} + I_{ji} = 0$ car $I_{ij} + I_{ji} = 0$. Il suffit donc d'écrire $s - 1$ lois des noeuds pour que la dernière soit automatiquement vérifiée.
- Il reste encore $a - s + 1$ équations à écrire. On reconnaît là le nombre cyclomatique. Les dernières relations consistent en la loi des mailles appliquée sur chaque cycle indépendant : $\sum U = 0$, où l'on fait la somme des tensions de chaque branche constituant la maille. La somme est nulle puisqu'on revient au point de départ. Toute autre loi des mailles appliquée à un autre cycle se déduira par combinaison linéaire de la loi des mailles appliquée aux cycles indépendants. Il est donc inutile de l'écrire.

❑ La méthode des tensions indépendantes consiste à partir des $s - 1$ tensions inconnues s'appliquant à chacune des branches particulières de l'arbre qu'on obtiendrait à partir du circuit initial si on enlevait $a - s + 1$ branches bien choisies. Ces $s - 1$ tensions sont appelées les tensions indépendantes du circuit. Les tensions s'appliquant sur les $a - s + 1$ autres branches s'en déduisent en appliquant la loi des mailles $\sum U = 0$ à chacune des $a - s + 1$ maille indépendante. Pour chaque branche on en déduit l'intensité du courant qui la parcourt, exprimée en fonction des tensions indépendantes. Il suffit d'écrire ensuite les $s - 1$ relations données par la loi des noeuds pour avoir à résoudre un système de $s - 1$ équations indépendantes (les lois des noeuds) à $s - 1$ inconnues (les tensions indépendantes).

❑ La méthode des intensités indépendantes consiste à attribuer à chacune des $a - s + 1$ mailles indépendantes une intensité fictive. Ces $a - s + 1$ intensités sont appelées intensités indépendantes. Le courant réel parcourant une branche est la somme algébrique des intensités indépendantes des mailles auxquelles appartient la branche. On en déduit l'expression de la tension appliquée aux bornes de chaque branche en fonction des intensités indépentantes. La loi des noeuds est automatiquement vérifiée. Il suffit d'écrire ensuite la loi des mailles $\sum U = 0$ pour chaque maille indépendante pour avoir à résoudre un système de $a - s + 1$ équations (la loi des mailles) à $a - s + 1$ inconnues (les intensités indépendantes).

EXEMPLE :
❑ Considérons un circuit électrique en forme d'armature cubique, chaque arête du cube étant une branche de résistance R. On place dans l'une des branches un générateur de tension E. On demande l'intensité du courant dans chacune des branches.



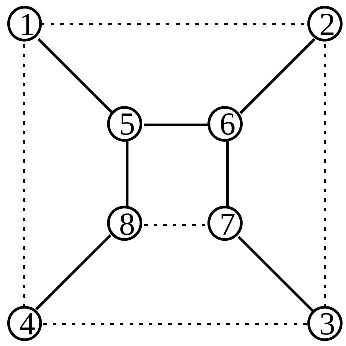
La première méthode de résolution donne le système suivant de 24 équations à 24 inconnues (on note I_{ij} l'intensité de courant du sommet *i* vers le sommet *j*, et U_{ij} la différence de potentiel entre le sommet *i* et le sommet *j*) :

$$\begin{cases} U_{12} = RI_{12} - E \\ U_{15} = RI_{15} \\ U_{14} = RI_{14} \\ U_{23} = RI_{23} \\ U_{26} = RI_{26} \\ U_{34} = RI_{34} \\ U_{37} = RI_{37} \\ U_{48} = RI_{48} \\ U_{56} = RI_{56} \\ U_{58} = RI_{58} \\ U_{67} = RI_{67} \\ U_{78} = RI_{78} \\ U_{12} + U_{26} - U_{56} - U_{15} = 0 \\ U_{23} + U_{37} - U_{67} - U_{26} = 0 \\ U_{34} + U_{48} - U_{78} - U_{37} = 0 \\ U_{15} + U_{58} - U_{48} - U_{14} = 0 \\ U_{12} + U_{23} + U_{34} - U_{14} = 0 \\ I_{12} + I_{15} + I_{14} = 0 \\ -I_{12} + I_{23} + I_{26} = 0 \\ -I_{23} + I_{34} + I_{37} = 0 \\ -I_{14} - I_{34} + I_{48} = 0 \\ -I_{15} + I_{56} + I_{58} = 0 \\ -I_{26} - I_{56} + I_{67} = 0 \\ -I_{37} - I_{67} + I_{78} = 0 \end{cases}$$

Les 12 premières équations expriment la loi d'Ohm, les 5 suivantes la loi des mailles, les 7 dernières la loi des noeuds. Les courageux trouveront que :

$I_{15} = I_{14} = -I_{23} = -I_{26} = -\dfrac{5E}{24R}$, $I_{67} = I_{37} = -I_{48} = -I_{58} = \dfrac{E}{24R}$, $I_{34} = -I_{56} = \dfrac{E}{6R}$, $I_{12} = \dfrac{5E}{12R}$, $I_{78} = \dfrac{E}{12R}$

La deuxième méthode consiste à prendre comme inconnues les tensions indépendantes U_{15}, U_{56}, U_{26}, U_{67}, U_{37}, U_{58} et U_{48}, correspondant à l'arbre :



Les sept équations à écrire résultent des sept lois des noeuds, exprimées en fonction des tensions indépendantes :

$I_{12} + I_{15} + I_{14} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E + U_{15} + U_{56} - U_{26} + 2U_{15} + U_{58} - U_{48} = 0$

$-I_{12} + I_{23} + I_{26} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -E - U_{15} - U_{56} + 3U_{26} + U_{67} - U_{37} = 0$

$-I_{23} + I_{34} + I_{37} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -U_{26} - 2U_{67} + 3U_{37} - U_{56} + U_{58} - U_{48} = 0$

$-I_{14} - I_{34} + I_{48} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -U_{15} - 2U_{58} + 3U_{48} - U_{37} + U_{67} + U_{56} = 0$

$-I_{15} + I_{56} + I_{58} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -U_{15} + U_{56} + U_{58} = 0$

$-I_{26} - I_{56} + I_{67} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -U_{26} - U_{56} + U_{67} = 0$

$-I_{37} - I_{67} + I_{78} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -U_{37} - 2U_{67} - U_{56} + U_{58} = 0$

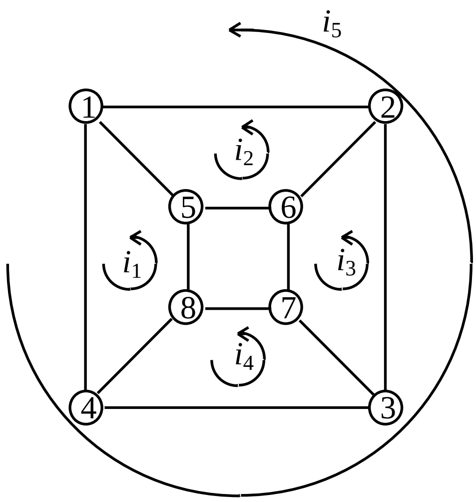
Le système conduit à la solution :

$$U_{15} = -U_{26} = -\frac{5E}{24},\ U_{58} = -U_{37} = U_{48} = -U_{67} = -\frac{E}{24},\ U_{56} = -\frac{E}{6}$$

à partir de laquelle on peut déduire les autres tensions, puis les intensités des courants.

La troisième méthode consiste à attribuer un courant de maille inconnu à chacune des cinq mailles indépendantes que nous avons notées C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 dans le a), à savoir :

$C_1 = L_{15} + L_{58} + L_{84} + L_{41}$
$C_2 = L_{12} + L_{26} + L_{65} + L_{51}$
$C_3 = L_{26} + L_{67} + L_{73} + L_{32}$
$C_4 = L_{37} + L_{78} + L_{84} + L_{43}$
$C_5 = L_{14} + L_{43} + L_{32} + L_{21}$



Notons ces cinq courants de maille i_1, i_2, i_3, i_4 et i_5, comptés positivement dans le sens trigonométrique. Le courant réel I_{12} par exemple est égal à $-i_2 - i_5$. Le courant I_{37} est égal à $i_4 - i_3$, etc... Les cinq équations à écrire sont les lois des mailles le long précisément des cinq cycles indépendants choisis, exprimés en fonction des courants de maille :

$U_{12} + U_{26} - U_{56} - U_{15} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4i_2 - i_5 - \dfrac{E}{R} + i_3 + i_1 = 0$

$U_{23} + U_{37} - U_{67} - U_{26} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4i_3 - i_5 + i_4 + i_2 = 0$

$U_{34} + U_{48} - U_{78} - U_{37} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4i_4 - i_5 + i_1 + i_3 = 0$

$U_{15} + U_{58} - U_{48} - U_{14} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4i_1 + i_2 + i_4 - i_5 = 0$

$U_{12} + U_{23} + U_{34} - U_{14} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -i_2 - 4i_5 - \dfrac{E}{R} - i_3 - i_4 - i_1 = 0$

Le système conduit à la solution :

$$i_1 = \frac{E}{24R},\ i_2 = -\frac{E}{6R},\ i_3 = \frac{E}{24R},\ i_4 = \frac{E}{12R},\ i_5 = -\frac{E}{4R}$$

On en déduit alors toutes les autres intensités, par exemple :

$$I_{12} = -i_2 - i_5 = \frac{5E}{12R}$$

$$I_{37} = i_4 - i_3 = \frac{E}{24R}$$

Annexe II : Composition des vitesses et des accélérations en cinématique

Les relations entre vitesse et accélération d'un point mobile relativement à deux repères différents résultent des formules de changement de base.

1- Dérivation relativement à une base

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 muni de deux bases orthonormées directes, (e_1, e_2, e_3) et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Ces deux bases sont susceptibles de varier au cours du temps l'une par rapport à l'autre. C'est le cas par exemple en astronomie lorsque l'une des bases est liée à la Terre et l'autre est centrée sur le Soleil et dirigé vers des étoiles lointaines. La matrice de changement de base $P_{e\varepsilon}$ (ou son inverse $P_{\varepsilon e}$) sera donc une matrice dépendant du temps t. Le caractère variable de la matrice de passage exprime seulement comment une base varie par rapport à l'autre.

Considérons maintenant la relation de changement de base $(U)_e = P_{e\varepsilon}(U)_\varepsilon$, où $(U)_e$ sont les composantes d'un vecteur ***u*** dans la base (e), et $(U)_\varepsilon$ sont les composantes de ***u*** dans la base (ε). Ces composantes dépendent elles aussi du temps. Dérivons la relation de changement de base. On obtient, en notant P pour abréger $P_{e\varepsilon}$:

$$\frac{d(U)_e}{dt} = P\,\frac{d(U)_\varepsilon}{dt} + \frac{dP}{dt}(U)_\varepsilon$$

❑ Interprétons cette égalité. Considérons $\dfrac{d(U)_e}{dt}$. Si $\boldsymbol{u} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ avec x_1, x_2, x_3 dépendant du temps, alors $(U)_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, et $\dfrac{d(U)_e}{dt} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$, en notant $x_i' = \dfrac{dx_i}{dt}$. Ces composantes représentent un vecteur dans la base (e), à savoir $x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3$. IL NE S'AGIT PAS DE LA DERIVEE DE ***u***, puisque la dérivée de ***u*** ferait intervenir les dérivées des vecteurs e_i. Or, on s'est contenté de dériver les composantes. Nous dirons qu'il s'agit de la **dérivée de *u* par rapport à la base** (e). Elle correspond à la dérivée de $\boldsymbol{u}$ pour un observateur lié à la base (e) et qui observe l'évolution de $\boldsymbol{u}$ dans cette base. Pour un tel observateur, les e_i sont fixes et seules les composantes de $\boldsymbol{u}$ varient. Nous noterons cette dérivée $\boldsymbol{u}'|_{(e)}$.

❑ De même, $\dfrac{\mathrm{d(U)}_\varepsilon}{\mathrm{d}t}$ représente, dans la base (ε) les composantes de la dérivée de $\boldsymbol{u}$ par rapport à la base (ε), notée $\boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)}$. Il s'agit de la dérivée de $\boldsymbol{u}$ pour un autre observateur, lié à la base (ε) et pour qui les ε_i sont fixes.

Quant à $\mathrm{P}\,\dfrac{\mathrm{d(U)}_\varepsilon}{\mathrm{d}t}$, en vertu de la formule de changement de base, ce sont les composantes, dans la base (e) cette fois-ci, du même vecteur $\boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)}$. L'observateur lié à (ε) observe un vecteur, mesure ses composantes, et transmet ces informations à l'observateur lié à (e). Celui-ci est alors en mesure d'exprimer $\boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)}$ dans sa propre base au moyen de $\mathrm{P}\,\dfrac{\mathrm{d(U)}_\varepsilon}{\mathrm{d}t}$. Il observe que le vecteur qu'il obtient n'est pas égal à $\boldsymbol{u}'|_{(e)}$.

❑ Reste la dernière partie, $\dfrac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}t}\,(\mathrm{U})_\varepsilon = \dfrac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{P}^{-1}\,(\mathrm{U})_e$ donnant la différence entre $\boldsymbol{u}'|_{(e)}$ et $\boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)}$. Dans la base (e), il s'agit des composantes de l'image de $\boldsymbol{u}$ par une application linéaire Φ de matrice $\dfrac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{P}^{-1}$.

La relation trouvée s'écrit donc :

$$\boldsymbol{u}'|_{(e)} = \boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)} + \Phi(\boldsymbol{u})$$

❑ Etudions de plus près l'endomorphisme Φ. P, matrice de changement de base d'une base orthonormée directe à une autre, est une matrice de rotation, et vérifie :

$\mathrm{P} \times \mathrm{P}^\mathrm{T} = \mathrm{I}_3$ (voir le chapitre *Espaces euclidiens* dans le fichier ESPEUCL.PDF)

où P^T est la matrice transposée de P. En dérivant cette relation, on obtient :

$$\mathrm{P}' \times \mathrm{P}^\mathrm{T} + \mathrm{P} \times \mathrm{P}'^\mathrm{T} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{P}' \times \mathrm{P}^\mathrm{T} = -\,\mathrm{P} \times \mathrm{P}'^\mathrm{T} = -\,(\mathrm{P}' \times \mathrm{P}^\mathrm{T})^\mathrm{T}$$

Ainsi, $\mathrm{P}' \times \mathrm{P}^\mathrm{T}$ (ou $\mathrm{P}'\mathrm{P}^{-1}$), matrice de Φ dans la base (e), est antisymétrique, donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. Si on note $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base (e), on vérifiera que $\Phi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}$. Ainsi :

$$\boldsymbol{u}'|_{(e)} = \boldsymbol{u}'|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ s'appelle **vecteur instantané de rotation** de la base (ε) par rapport à la base (e). Il dépend lui aussi du temps. Par contre, puisque $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} = 0$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\Big|_{(e)} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\Big|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\Big|_{(\varepsilon)}$$

ce que nous abrègerons en $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}$, étant entendu que cette dérivée sera calculée relativement à l'une ou l'autre base et pas à une troisième.

2- Composition des vitesses

Les considérations qui précèdent sont largement utilisées en cinématique. Soit (O, e_1, e_2, e_3) et (O', ε_1, ε_2, ε_3) deux repères affines orthonormés directs d'un espace affine de dimension 3, tous deux dépendants du temps. Soit M un point variable de cet espace. Un observateur lié à (O, e_1, e_2, e_3) verra se déplacer le point M dans son référentiel, avec une vitesse $\boldsymbol{V}|_{(e)} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)}$. Un observateur lié à (O', ε_1, ε_2, ε_3) verra se déplacer le même point M dans son référentiel avec une vitesse $\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{O'M}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)}$. On cherche la relation entre ces deux vitesses. On applique le résultat qui précède-dessus avec $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{OM}$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}|_{(e)} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{O'M}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM} \\
&= \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM}
\end{aligned}$$

Le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM}$ serait la vitesse dans le référentiel (O, e_1, e_2, e_3) d'un point coïncidant avec M à l'instant considéré, mais fixe dans (O', ε_1, ε_2, ε_3). On l'appelle **vitesse d'entraînement** de M à l'instant considéré. On peut l'écrire également sous la forme :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_{\text{entr.}} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OM} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M}
\end{aligned}$$

La formule de composition des vitesses s'écrit donc :

$$\boldsymbol{V}\,|_{(e)} = \boldsymbol{V}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{V}_{\text{entr.}}$$

3- Composition des accélérations

En dérivant la relation de compositions des vitesses, on fait apparaître les accélérations de M relativement à chaque repère, à savoir $\boldsymbol{a}|_{(e)} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}|_{(e)}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)}$ et $\boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)}$.On obtient :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}|_{(e)} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}\,|_{(e)}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{V}_{\text{entr.}})\,|_{(e)} \\
&= \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_{\text{entr.}}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)}} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)}}{\mathrm{d}t}\,|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M}\Big)\,|_{(e)} \\
&= \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\,|_{(e)} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{O'M}}{\mathrm{d}t}\,|_{(e)}
\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{d^2\boldsymbol{OO'}}{dt^2}|_{(e)} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \wedge \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \left(\frac{d\boldsymbol{O'M}}{dt}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M}\right)$$

$$= \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + 2\,\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)} + \frac{d^2\boldsymbol{OO'}}{dt^2}|_{(e)} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \wedge \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M})$$

Si on considère un point fixe dans le référentiel (O', ε_1, ε_2, ε_3), coïncidant avec M à l'instant considéré, sa vitesse et son accélération dans ce référentiel seraient nulles, de sorte que son accélération dans le référentiel (O, e_1, e_2, e_3) serait égale au vecteur suivant, appelé **accélération d'entraînement** :

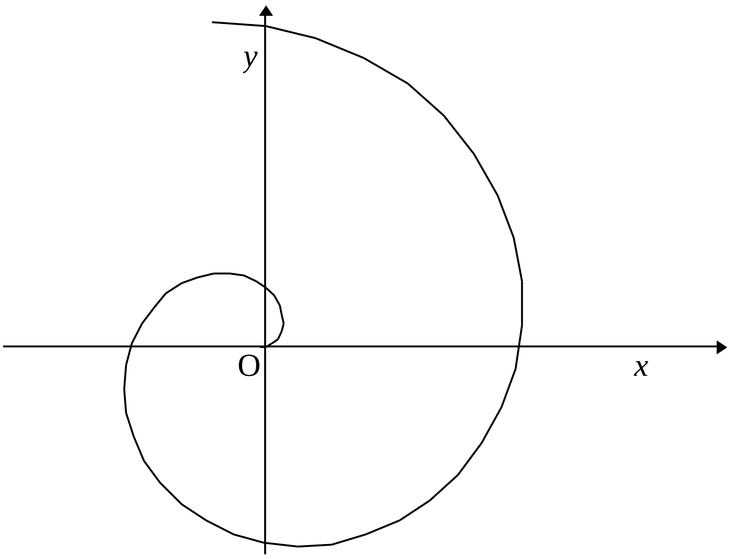
$$\boldsymbol{a}_{\text{entr.}} = \frac{d^2\boldsymbol{OO'}}{dt^2}|_{(e)} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}|_{(e)} \wedge \boldsymbol{O'M} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{O'M})$$

Il reste enfin un terme supplémentaire, à savoir $2\,\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}|_{(\varepsilon)}$, qualifié d'**accélération de Coriolis** $\boldsymbol{a}_{\text{Cor.}}$.
La formule de composition des accélérations s'écrit donc :

$$\boldsymbol{a}|_{(e)} = \boldsymbol{a}|_{(\varepsilon)} + \boldsymbol{a}_{\text{entr.}} + \boldsymbol{a}_{\text{Cor.}}$$

EXEMPLE :

❑ Considérons une spirale d'Archimède d'équation polaire $\begin{cases} \rho = Vt \\ \theta = \omega t \end{cases}$, soit $\rho = \dfrac{V}{\omega}\,\theta$.



Il s'agit de la trajectoire dans le repère O*xy* d'un point M se déplaçant à vitesse constante V sur une droite passant par O, qui elle-même tourne à vitesse constante ω autour de O. Dans un repère lié à la droite, on voit ce point s'éloigner à la vitesse constante V de O, et donc avec une accélération nulle. Dans le repère O*xy* au contraire, ses composantes sont $\begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Vt\cos(\omega t) \\ Vt\sin(\omega t) \end{pmatrix}$ et on le voit avec une vitesse $\begin{pmatrix} V\cos(\omega t) - V\omega t\sin(\omega t) \\ V\sin(\omega t) + V\omega t\cos(\omega t) \end{pmatrix}$. Cette vitesse peut se décomposer en la somme

de $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} V\cos(\omega t) \\ V\sin(\omega t) \end{pmatrix}$, vitesse du point relativement à un repère lié à la droite,

et de $\begin{pmatrix} -V\omega t\sin(\omega t) \\ V\omega t\cos(\omega t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{OM}$, vitesse d'entraînement

(on rajoute une troisième direction orthogonale au plan et portant $\boldsymbol{\omega}$ pour effectuer le produit vectoriel).
Quant à l'accélération de M dans O*xy*, elle vaut :

$$\begin{pmatrix} -2\omega V\sin(\omega t) - V\omega^2 t\cos(\omega t) \\ 2\omega V\cos(\omega t) - V\omega^2 t\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega V\sin(\omega t) \\ 2\omega V\cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -V\omega^2 t\cos(\omega t) \\ -V\omega^2 t\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}}_{\text{accélération de Coriolis}} - \underbrace{\omega^2\,\boldsymbol{OM}}_{\text{accélération d'entraînement centripète}}$$

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) On considère les applications suivantes :

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^4$ $\qquad g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^6$ $\qquad h : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^4$

$$x \to \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \\ -x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + x_4 \\ -x_2 - x_3 \\ x_2 - x_4 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x_4 - x_5 - x_6 \\ -x_2 - x_3 + x_6 \\ -x_1 + x_3 + x_5 \\ x_1 + x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

a) Chercher les images et noyaux de ces applications et les comparer.

b) En déduire les valeurs de $g \circ f$ et de $h \circ g$.

Exo.2) Soit E un espace vectoriel de dimension 2, de base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. On note f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$
$$f(\boldsymbol{j}) = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$$

a) Démontrer que f est élément de GL(E) et déterminer $f^{-1}(\boldsymbol{i})$ et $f^{-1}(\boldsymbol{j})$.

b) Démontrer que $f \circ f = 4f + 5\mathrm{Id}_E$.

c) On note $p = \frac{1}{6}(-f + 5\mathrm{Id}_E)$ et $q = \frac{1}{6}(f + \mathrm{Id}_E)$. Démontrer que p et q sont des projecteurs. Donner leur direction de projection et les sous-espaces vectoriels sur lesquels s'effectuent ces projections.

d) Calculer $p \circ q$, $q \circ p$, $5q - p$.

e) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f^n = 5^n q + (-1)^n p$.

f) Démontrer que la formule précédente est encore valable si n est élément de $\mathbb{Z}$.

Exo.3) Les matrices suivantes sont-elles semblables : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exo.4) Soit f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A donnée dans la base canonique par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer Ker(f) et Im(f).

b) Calculer A^2 et A^3.

c) Trouver une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exo.5) Soit f endomorphisme de E tel que :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \lambda x.$$

Montrer que :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall\, x \in \mathrm{E},\ f(x) = \lambda x.$$

Exo.6) Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, non nécessairement de dim finie, et f un endomorphisme de E, de rang 1. On pose $g = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - f$.

a) On fixe $\boldsymbol{u}$ élément de $\mathrm{Im}(f) - \{0\}$. Montrer qu'il existe λ, élément de $\mathbf{K}$, tel que $f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$.

b) Montrer que $f \circ f = \lambda f$.

c) On suppose ici que $\lambda = 1$. Calculer $f \circ g$ et montrer que g n'est ni injective ni surjective.

d) On suppose ici que $\lambda \neq 1$. Montrer que g est bijective.

Exo.7) E, F et G désignent des espaces vectoriels de dimension finie.

a) Soit f et g deux applications linéaires de E dans F. Montrer que :

$$\left|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)\right| \leq \mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Donner un exemple où les inégalités sont strictes.

b) Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ des applications linéaires. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(\mathrm{F}) \leq r(g \circ f) \leq \mathrm{Min}(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$$

Exo.8) a) Soit $\Phi : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, telle que $\Phi(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} + 1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$

Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$.

b) Application. Prouver que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ tel que } \forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ 1^n + 2^n + \ldots + p^n = \mathrm{P}_n(p).$$

Exo.9) Soit E espace vectoriel de dimension $2n + 1$, de base $\mathrm{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq 2n+1}$ et u endomorphisme de E tel que :

$$u(e_1) = e_2$$
$$\forall\, i \in [\![2, 2n]\!],\ u(e_i) = e_{i-1} + e_{i+1}$$
$$u(e_{2n+1}) = e_{2n}.$$

a) Quelle est la matrice de u dans la base B ? Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$. On note B_1 une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

b) On pose pour $1 \leq i \leq n$, $f_i = e_{2i}$, et pour $1 \leq j \leq n$, $f_{n+j} = u(e_{2j})$. Montrer que $\mathrm{B}_2 = (f_1,\ldots,f_{2n})$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

c) $\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2$ est–elle une base de E ?

Exo.10) Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ linéaire. On considère les affirmations suivantes :

i) $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$

ii) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f)$

iii) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$

iv) $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

v) $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$

a) Montrer que i $\Leftrightarrow$ ii et iii $\Leftrightarrow$ iv.

b) Montrer que si dim(E) est finie, alors ii $\Leftrightarrow$ iii et iv $\Leftrightarrow$ v.

c) Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ (ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$)

$$P \to P'$$

Lesquelles des cinq affirmations sont vraies, lesquelles sont fausses ?

d) Mêmes questions avec $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (0, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

Exo.11) Soit E de dimension finie, et f et g deux endomorphismes de E. On suppose que $f \circ g = 0$ et que $f + g$ est inversible. Montrer que Im(g) = Ker(f). En déduire que rg(g) + rg(f) = dim(E).

Exo.12) Soient f et g deux endomorphismes de E de dimension finie tels que :

$f \circ g \circ f = f$

$g \circ f \circ g = g$

Montrer que E = Im(g) $\oplus$ Ker(f) et que rg(f) = rg(g) = rg($f \circ g$).

Exo.13) Soient u et v deux endomorphismes. Montrer que :

$$u \circ v = v \circ u \Rightarrow \left[\begin{array}{l} v(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u) \\ v(\mathrm{Ker}(u)) \subset \mathrm{Ker}(u) \end{array}\right.$$

Si de plus, E = Ker(u) + Ker(v), montrer que Im(u) $\subset$ Ker(v) et Im(v) $\subset$ Ker(u).

Exo.14) Soit D et P les deux applications de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans lui-même, définis par :

$$\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ D(f) = f' \qquad \text{et} \qquad P(f) : x \in \mathbb{R} \to \int_0^x f(t)\,dt$$

Montrer que :

D et P sont linéaires

$\forall r > 0$, $D^r \circ P^r = \mathrm{Id}$

D^r est surjective

P^r est injective

Déterminer $P^r \circ D^r$.

Exo.15) a) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un entier k positif ou nul tel que :

$$E \underset{\neq}{\supset} \mathrm{Im}(f) \underset{\neq}{\supset} \mathrm{Im}(f^2) \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1}) = \mathrm{Im}(f^{k+2}) = \text{etc.}$$

$$\{0\} \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Ker}(f) \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Ker}(f^2) \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^{k+2}) = \text{etc.}$$

Autrement dit, les k premières inclusions sont strictes, puis sont suivies d'égalité.

b) Dans les conditions précédentes, montrer que E = Ker(f^k) $\oplus$ Im(f^k).

c) Si E est de dimension infinie, donner un exemple où les images sont strictement décroissantes, et un exemple où les noyaux sont strictement croissants.

2- Solutions

Sol.1) a) Im(f) est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, de même que Ker($g$).

Im(g) est engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

qui vérifie $V_4 + V_2 = V_1 + V_3$. rg(g) = 3. On vérifiera qu'il est égal à Ker(h).

Im(h) est de dimension 3, engendré par $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $g \circ f = 0$ et $h \circ g = 0$

Sol.2) a) f a pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$). La matrice est de rang 2 donc est inversible :

$M^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, donc $f^{-1}(\boldsymbol{i}) = -\frac{3}{5}\boldsymbol{i} + \frac{2}{5}\boldsymbol{j}$, $f^{-1}(\boldsymbol{j}) = \frac{4}{5}\boldsymbol{i} - \frac{1}{5}\boldsymbol{j}$

b) Pas de difficulté autres que calculatoires

c) La matrice de p est $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et celle de q est $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que les carrés de ces matrices sont égales à elles-mêmes.

Ker(p) = Vect($\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$), Im($p$) = Vect($2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$).

Ker(q) = Vect($2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$) = Im($p$), Im($q$) = Vect($\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$) = Ker($p$)

d) $p \circ q = q \circ p = 0$, $5q - p = f$

e) $f^n = (5q - p)^n$ et on peut appliquer le binôme de Newton car p et q commutent.

f) Pour $n = -1$, la matrice de $5^{-1}q - p$ vaut $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ qui est bien celle de f^{-1}. Puis, pour n négatif quelconque :

$f^n = (f^{-1})^{|n|} = (5^{-1}q - p)^{|n|} = 5^{-|n|}q + (-1)^{|n|}p$ avec le binôme de Newton

$= 5^n q + (-1)^n p$

Sol.3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Cette matrice de f est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si il existe une base (ε_1, ε_2, ε_3) telle que la matrice de f dans cette nouvelle base soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, autrement dit si et seulement si $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, $f(\varepsilon_2) = 0$ et $f(\varepsilon_3) = 0$. On doit donc avoir ε_2 et ε_3 éléments de Ker(f), et ε_2 également élément de Im(f). Or Ker(f) a pour équation $x + y - z = 0$ et Im(f) est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (les trois colonnes de la matrice sont liées). On constate que ce vecteur vérifie l'équation de Ker(f). Etant élément de Ker(f) $\cap$ Im(f), c'est un bon candidat pour ε_2. On pose donc $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ker($f$) est un plan. On prend pour ε_3 un vecteur de ce plan, non colinéaire à ε_2, par exemple $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Enfin, on cherche ε_1 satisfaisant $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On vérifiera que les trois vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ sont linéairement indépendants. On a trouvé la base voulue et les deux matrices données dans l'énoncé sont semblables.

Sol.4) a) Ker(f) est la droite d'équations $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -2x + y - 3z = 0 \end{cases}$ (la troisième équation est l'opposée de la première). Elle est engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'image est le plan engendré par les deux premières colonnes de la matrice A, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (la troisième colonne est la différence des deux premières). Il s'agit d'un plan d'équation $x + z = 0$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = 0$.

c) On doit avoir $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3$, $f(\varepsilon_3) = 0$. ε_3 doit être élément du noyau. Prenons pas exemple $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On cherche ensuite ε_2 vérifiant $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, mais qui soit aussi élément de Im(f) (car on voudra aussi que $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$). On cherche ε_2 sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix}$ élément de Im(f), et la condition $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3$ donne $x + y = -1$. On prend par exemple $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On cherche ensuite ε_1 vérifiant $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, par exemple $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On vérifiera que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme bien une base.

Sol.5) On notera que, dans la proposition $\forall\, x \in E, \exists\, \lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$, λ dépend de x, alors que dans la proposition $\exists\, \lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\forall\, x \in E, f(x) = \lambda x$, λ n'en dépend pas. Dans le premier cas, on notera donc λ_x plutôt que λ pour souligner la dépendance de λ pour x.

Soit x non nul et y colinéaire à x et non nul. $\exists\, \mu$, $y = \mu x$ et l'on a :

$f(y) = f(\mu x) = \mu f(x)$ car f est linéaire

$= \mu\lambda_x x$

mais aussi :

$f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$

donc $\mu\lambda_x x = \lambda_y \mu x$

donc $\lambda_x = \lambda_y$ car μ et x sont non nuls.

Si y n'est pas colinéaire à x, on a :

$f(x + y) = f(x) + f(y)$ car f est linéaire

$= \lambda_x x + \lambda_y y$

mais aussi :

$f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$

donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$

donc $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y$ car x et y sont linéairement indépendants

donc $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$

Ainsi, deux éléments non nuls x et y partagent le même λ, qu'ils soient colinéaires ou non. Comme $f(0) = 0 = \lambda 0$, on peut aussi choisir $\lambda_0 = \lambda$.

Sol.6) a) u étant un élément non nul de Im(f) et Im(f) étant de dimension 1, u est une base de Im(f).
b) Soit x quelconque. $f(x)$ est élément de Im(f) donc est colinéaire à u :

$\exists\ \alpha,\ f(x) = \alpha u$

donc $f(f(x)) = \alpha f(u) = \lambda\alpha u = \lambda f(x)$

c) Si $\lambda = 1$, $f \circ f = f$ donc $f \circ g = 0$. Si g était surjective, on aurait $f = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse. On a également $f(u) = u$ donc $u \in \mathrm{Ker}(g)$, donc g n'est pas injective.
d) Si $\lambda \neq 1$, g est injective car $g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow x \in \mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}u$ donc $f(x) = \lambda x$. Donc $x = \lambda x$. Or $\lambda \neq 1$ donc $x = 0$.
g est surjective. Soit y élément de E. Cherchons x tel que :

$y = g(x) = x - f(x)$

Nécessairement, $f(y) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - \lambda f(x)$ donc on doit avoir $f(x) = \dfrac{1}{1-\lambda} f(y)$ et donc on doit avoir $x = y + \dfrac{1}{1-\lambda} f(y)$. Choisissons donc un tel x. Calculons $g(x)$:

$$g(x) = x - f(x) = y + \frac{1}{1-\lambda} f(y) - f\left(y + \frac{1}{1-\lambda} f(y)\right) = y + \frac{1}{1-\lambda} f(y) - f(y) - \frac{\lambda}{1-\lambda} f(y) = y$$

Sol.7) a) Montrons d'abord que $\mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ ou encore :

$\dim(\mathrm{Im}(f + g)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$

Il suffit de remarquer que :

$\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$

$\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Im}(f + g)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g))$

$\leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$

$\leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$

On a ensuite :

$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f + g - g) \leq \mathrm{rg}(f + g) + \mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(f + g) + \mathrm{rg}(g)$

donc $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g) \leq \mathrm{rg}(f + g)$

de même, on a $\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(f + g)$

donc $\left|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)\right| \leq \mathrm{rg}(f + g)$

On obtient des inégalités strictes avec par exemple $f = g$ non nulle.
b) Choisissons une base de F de la façon suivante :

$(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ est une base de $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$

On complète cette base en :

$(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p, e_1, ..., e_q)$ base de Im(f)

$(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p, \eta_1, ..., \eta_r)$ base de Ker(g)

On vérifiera que $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p, e_1, ..., e_q, \eta_1, ..., \eta_r)$ est libre, et on complète cette famille en une base de F. On a :

$\mathrm{rg}(f) = p + q$

$\mathrm{rg}(g) = \dim(F) - \dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(F) - p - r$ d'après le théorème du rang

$\mathrm{rg}(g \circ f) = q$

Pour la dernière égalité, on vérifiera que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Vect}(g(e_1), ..., g(e_q))$ et que cette famille est libre.

On demande donc de montrer que :

$(p + q) + (\dim(F) - p - r) - \dim(F) \leq q \leq \mathrm{Min}(p + q, \dim(F) - p - r)$

$\Leftrightarrow$ $q - r \leq q$ et $q \leq \dim(F) - p - r$

$\Leftrightarrow$ $r \geq 0$ et $p + q + r \leq \dim(F)$

ce qui est bien le cas.

Sol.8) a) Ker(Φ) est constitué des polynômes constants. Donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = n$.

Or $\deg(\Phi(P)) \leq n - 1$ donc $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbf{R}_{n-1}[X]$ et comme $\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = n = \dim(\mathbf{R}_{n-1}[X])$, on a $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbf{R}_{n-1}[X]$.

b) D'après le a) au rang $n + 1$, il existe P élément de $\mathbf{R}_{n+1}[X]$ tel que $P(X + 1) - P(X) = X^n$. En sommant pour X = 0 jusqu'à p, on obtient : $1^n + ... + p^n = P(p + 1) - P(0)$ polynôme de degré $n + 1$ en p.

Par exemple :

$$1 + 2 + ... + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + ... + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + ... + p^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$$

Sol.9) a) La matrice de u a tous ses coefficients nuls, sauf deux diagonales de 1 au-dessus et en dessous de la diagonale principale descendante.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_{2n+1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ ... \\ x_{2n-1} + x_{2n+1} = 0 \\ x_{2n} = 0 \end{array}\right. \quad \text{droite engendrée par } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \\ (-1)^n \end{pmatrix}$$

On peut dire aussi que u est de rang $2n$, donc son noyau est une droite et chercher un vecteur non nul élément de ce noyau.

b) Tous ces vecteurs sont dans Im(u). C'est évident pour f_{n+j}. Pour les f_i, on a :

$f_1 = e_2 = u(e_1)$

$f_2 = e_4 = u(e_3) - e_2$

...

$f_i = e_{2i} = u(e_{2i-1}) - e_{2i-2}$

et une récurrence permet de conclure à l'appartenance de tous les f_i à Im(u).

Ils sont au nombre de $2n$, qui est la dimension de Im(u) d'après le théorème du rang. Il suffit de montrer qu'ils forment un système libre, ce qui se voit facilement si on les classe dans l'ordre $u(e_2)$, e_2, $u(e_4)$, e_4, ..., $u(e_{2n})$, u_{2n}.
c) Si on rajoute v à la suite des vecteurs précédents, on vérifiera qu'on obtient une famille de rang $2n + 1$.

Sol.10) a) i) $\Rightarrow$ ii) : l'inclusion $\text{Im}(f \circ f) \subset \text{Im}(f)$ est triviale. Réciproquement :

$x \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists\, y \in E$, $x = f(y)$ et il suffit de décomposer y en utilisant i)

ii) $\Rightarrow$ i) : soit $x \in E$, alors $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ f)$ donc $\exists\, y$, $f(x) = (f \circ f)(y)$ donc $x - f(y) \in \text{Ker}(f)$

iii) $\Rightarrow$ iv) : $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) \Rightarrow \exists\, y$, $x = f(y)$ et $f(x) = 0 = (f \circ f)(y)$ donc $f(y) = 0$ et $x = 0$

iv) $\Rightarrow$ iii) : l'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f \circ f)$ est triviale. Réciproquement :

$x \in \text{Ker}(f \circ f) \Rightarrow f(x) \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \Rightarrow f(x) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(f)$

b) Utiliser le théorème du rang.
c) $\text{Ker}(f) = \mathbf{R}_0[X]$, $\text{Im}(f) = E$ donc i) et ii) sont vrais mais ni iii) ni iv)
d) $\text{Ker}(f) = \{0\}$, $\text{Im}(f) = \{(0, ...)\}$ donc i) et ii) sont faux, iii) et iv) sont vrais.

Sol.11) $f \circ g = 0 \Rightarrow \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$.
Par ailleurs :

$$(f + g)(\text{Ker}(f)) = g(\text{Ker}(f)) \subset \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$$

Comme $f + g$ est bijective, $(f + g)(\text{Ker}(f))$ a même dimension que Ker(f), et comme l'un est inclus dans l'autre, ils sont égaux. Donc les deux inclusions précédentes sont des égalités. On a donc bien $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)$.
D'après le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) \\ &= \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) \qquad \text{puisque } \text{Ker}(f) = \text{Im}(g) \\ &= \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \end{aligned}$$

Sol.12) Si $x \in \text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f)$, $\exists\, y$, $x = g(y)$ et $f(x) = 0$. Donc $f(g(y)) = 0$ et a fortiori :

$$x = g(y) = g(f(g(y))) = 0 \text{ donc } \text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}.$$

Par ailleurs, $x = g(f(x)) + (x - g(f(x)))$ avec $x - g(f(x)) \in \text{Ker}(f)$ donc $E = \text{Im}(g) + \text{Ker}(f)$
Le théorème du rang donne alors $\text{rg}(g) = \text{rg}(f)$. Mais on a aussi $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f \circ g)$ car $f \circ g \circ f = f$ et $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$.

Sol.13) La première partie est facile. Pour la deuxième, soit $u(x)$ élément de Im(u). Il existe y et z tels que $x = y + z$ avec y élément de Ker(u) et z élément de Ker(v). Donc :

$$u(x) = u(z) \in u(\text{Ker}(v)) \subset \text{Ker}(v).$$

Sol.14) La linéarité ne pose pas de difficultés. $D \circ P = \text{Id}$, donc $D^r \circ P^r$ également. D est surjective, donc D^r également. P est injective (car si $P(f) = 0$, alors $f = (D \circ P)(f) = 0$), donc P^r aussi.
Par récurrence sur r, on a :

$$(P^r \circ D^r)(f)(x) = f(x) - f(0) - xf'(0) - \frac{x^2}{2} f''(0) - ... - \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(0)$$

En effet, $(P \circ D)(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\, dt = f(x) - f(0)$.

Supposons maintenant la relation vérifiée pour toute fonction f au rang r. On a alors :

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}^{r+1}\circ \mathrm{D}^{r+1})(f)(x) &= (\mathrm{P}\circ(\mathrm{P}^r\circ \mathrm{D}^r))(f')(x)\\ &= \int_0^x f'(t)-f'(0)-tf''(0)-\frac{t^2}{2}f^{(3)}(0)-\ldots-\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}f^{(r)}(0)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[f(t)-f(0)-tf'(0)-\frac{t^2}{2}f''(0)-\ldots-\frac{t^r}{r!}f^{(r)}(0)\right]_0^x\\ &= f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{2}f''(0)-\ldots-\frac{x^r}{(r-1)!}f^{(r)}(0)\end{aligned}$$

$f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{D}^r) \Leftrightarrow f^{(r)} = 0 \Leftrightarrow f$ est une fonction polynomiale de degré $r-1$.

Sol.15) a) Il est trivial de montrer que, pour tout p, $\mathrm{Im}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(f^p)$. La suite des images est donc décroissante. E étant de dimension finie, la suite des dimensions des $\mathrm{Im}(f^p)$ ne peut être indéfiniment strictement décroissante. Soit k le premier entier pour lequel on a $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$. Il s'agit de montrer qu'à partir de ce rang, on a égalité des images. Il suffit de montrer que :

$$\forall p,\ \mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^{p+1}) \Rightarrow \mathrm{Im}(f^{p+1}) = \mathrm{Im}(f^{p+2})$$

ou même (puisque l'autre inclusion est vérifiée) :

$$\forall p,\ \mathrm{Im}(f^p) \subset \mathrm{Im}(f^{p+1}) \Rightarrow \mathrm{Im}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(f^{p+2})$$

Soit donc $y \in \mathrm{Im}(f^{p+1})$. $\exists\, x$, $y = f^{p+1}(x) = f(f^p(x))$. Comme $f^p(x) \in \mathrm{Im}(f^p)$ et que $\mathrm{Im}(f^p) \subset \mathrm{Im}(f^{p+1})$, $\exists\, x'$ tel que $f^p(x) = f^{p+1}(x')$. On a alors $y = f(f^{p+1}(x')) = f^{p+2}(x') \in \mathrm{Im}(f^{p+2})$.

De même, il est facile de montrer que $\mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f^{p+1})$. La suite des noyaux est donc croissante. Pour montrer qu'elle est d'abord strictement croissante puis stationnaire avec la même valeur de k que pour les images, on pourra raisonner sur les dimensions en utilisant le théorème du rang.

b) Montrons que $\mathrm{Ker}(f^k) \cap \mathrm{Im}(f^k) = \{0\}$. Soit $y \in \mathrm{Ker}(f^k) \cap \mathrm{Im}(f^k)$. On a alors :

$f^k(y) = 0$ et $\exists\, x,\ y = f^k(x)$

donc $f^{2k}(x) = 0$

donc $x \in \mathrm{Ker}(f^{2k})$

mais $\mathrm{Ker}(f^{2k}) = \mathrm{Ker}(f^k)$ d'après le (a)

donc $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$

donc $y = f^k(x) = 0$

Ainsi, la somme $\mathrm{Ker}(f^k) \oplus \mathrm{Im}(f^k)$ est bien directe.

On a ensuite :

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}(f^k) \oplus \mathrm{Im}(f^k)) &= \dim(\mathrm{Ker}(f^k)) + \dim(\mathrm{Im}(f^k))\\ &= \dim(\mathrm{E}) \qquad \text{d'après le théorème du rang appliqué à } f^k\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker}(f^k) \oplus \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{E}$.

c) Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ espace vectoriel des suites réelles. On considère l'endomorphisme :

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = f(0, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

On vérifiera que la suite des images est strictement décroissante (et celle des noyaux est constante).

Soie $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ espace vectoriel des polynômes. On considère l'endomorphisme :

$$f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$$

On vérifiera que la suite des noyaux est strictement croissante (et celle des images est constante).

◆