CALCUL MATRICIEL

PLAN

I : Résolution de systèmes

1- Méthode du pivot de Gauss-Jordan

On appelle **système linéaire** à n équations et p inconnues x_1, ..., x_p un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad ... \\ a_{n1}x_2 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

En ce qui concerne les coefficients a_{ij}, la convention universelle adoptée est telle que l'indice de gauche i est le numéro de ligne, l'indice j de droite est le numéro de colonne correspondant à l'inconnue x_j.

On procède à la résolution d'un tel système par un algorithme appelé **méthode du pivot de Gauss-Jordan**. Cette méthode consiste à effectuer des opérations sur les lignes de façon à obtenir un système échelonné facile à résoudre, tout en garantissant que le système final est équivalent au système initial, de sorte que toute solution du premier système est solution du second et inversement.

Si tous les a_{i1} sont nuls, alors x_1 n'intervient pas et on passe à la deuxième colonne. Si l'un des a_{i1} est non nul, on permute la i-ème ligne et la première de façon à se ramener au cas $a_{11} \neq 0$. On remplace ensuite, pour $2 \leq k \leq n$, la ligne L_k par $L_k' = a_{11}L_k - a_{k1}L_1$, ce qui a pour effet d'annuler le coefficient de x_1 dans les lignes 2 à n. On obtient un nouveau système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad a_{22}'\, x_2 + \ldots + a_{2p}'\, x_p = b_2' \\ \quad \ldots \\ \qquad a_{n2}'\, x_2 + \ldots + a_{np}'\, x_p = b_n' \end{cases}$$

Ce système est équivalent au précédent. En effet, connaissant les L_k' et L_1, il est possible de reconstituer les $L_k = \dfrac{L_k' + a_{k1}L_1}{a_{11}}$. On remarquera pour cela qu'il est essentiel que a_{11} soit non nul. On itère le procédé sur les $n - 1$ dernières lignes.

Nous symboliserons le calcul $L_k' = a_{11}L_k - a_{k1}L_1$ par $L_k \leftarrow a_{11}L_k - a_{k1}L_1$, analogue à une opération d'affectation de variables en informatique, ceci afin de pouvoir indiquer les calculs effectués sans avoir besoin d'introduire de nouvelles notations pour les nouvelles lignes.

Un système (ou une matrice) est **échelonné** si sa matrice des coefficients vérifie les propriétés suivantes :

- Si une ligne est nulle, toutes les lignes qui suivent sont nulles
- Si la ligne i est non nulle, son premier coefficient a_{ij} non nul s'appelle son pivot et se trouve à une colonne j de rang strictement supérieur à celui du pivot de la ligne précédente.

Ainsi, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée. Les inconnues en facteur d'un pivot sont appelées **inconnues principales**, les autres sont appelées **inconnues secondaires** ou paramètres. Avec la matrice précédente, les inconnues principales sont x_1, x_3, x_4 ; les inconnues secondaires sont x_2 et x_5.

EXEMPLE :

❑ $\begin{cases} 2x + 4y - z + t = 2 \\ x - 2y + 3z - t = 1 \\ x + y + \dfrac{z}{2} + \dfrac{t}{2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y - z + t = 2 \\ \quad 8y - 7z + 3t = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \quad 2y - 2z = 2 \quad L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 4y - z + t = 2 \\ \quad 8y - 7z + 3t = 0 \\ \quad y - z = 1 \qquad L_3 \leftarrow L_3/2 \end{cases}$$

Dans la dernière équation, on peut exprimer y en fonction de z et reporter dans l'équation précédente, mais pour des raisons didactiques, nous préférons appliquer la méthode de Gauss-Jordan de façon systématique jusqu'au bout.

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 4y - z + t = 2 \\ \quad 8y - 7z + 3t = 0 \\ \qquad z + 3t = -8 \qquad L_3 \leftarrow L_2 - 8L_3 \end{cases}$$

Le système final obtenu est échelonné. Les coefficients non nuls 2, 8, 1 en début de chaque équation sont les pivots. Les inconnues x, y, z devant ces pivots sont les inconnues principales. L'inconnue t est inconnue secondaire ou paramètre. Sous cette forme finale, on termine la résolution en exprimant de bas en haut les inconnues principales en fonction des paramètres, et en reportant dans les équations qui précèdent :

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 4y - z + t = 2 \\ \quad 8y - 7z + 3t = 0 \\ \qquad z = -8 - 3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 4y - z + t = 2 \\ \quad y = -7 - 3t \\ \quad z = -8 - 3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 11 + 4t \\ y = -7 - 3t \\ z = -8 - 3t \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solution.

Les **opérations élémentaires** effectuées sur les lignes sont de trois types :

(i)	$L_i \leftrightarrow L_j$	permuter deux lignes
(ii)	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	multiplier par une constante non nulle λ
(iii)	$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	ajouter à une ligne un multiple d'une autre

Ces opérations garantissent de conserver un système équivalent. C'est évident pour (i). Pour (ii), on retrouve la valeur initiale de la ligne en effectuant $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$. Il est donc essentiel que λ soit non nul. Pour (iii), on retrouve la valeur initiale de L_i en effectuant $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$. α peut être nul, mais dans ce cas, aucune transformation n'est effectuée. Il est possible de combiner en même temps plusieurs de ces opérations afin de gagner du temps, ce qu'on a fait plus haut en effectuant $L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_1$., à condition que $a_{11} \neq 0$. Plus généralement, on peut affecter à L_i une combinaison linéaire de toutes les lignes $L_i \leftarrow \sum_{k=1}^{p} \lambda_k L_k$ à condition que λ_i soit non nul, afin de garantir l'équivalence des systèmes.

2- Notation matricielle

On écrit le système initial sous la forme AX = B où A est le tableau constitué des coefficients a_{ij}, X la colonne des inconnues, élément de $\mathbf{K}^p$, et B la colonne constituée des termes du second membre, élément de $\mathbf{K}^n$:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ A s'appelle **matrice** à n lignes et p colonnes.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

La notation AX désigne un véritable produit, celui d'une matrice par une colonne. Pour pouvoir effectuer ce produit, il est nécessaire que le nombre de termes dans la colonne X soit égal au nombre de colonnes de A. Si Y = AX, Y est une colonne ayant un nombre de termes égal au nombre de lignes de A, et, pour tout i :

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j$$

Ce produit caractérise A dans le sens où si deux matrices A et B vérifient AX = BX pour toute colonne X de $\mathbf{K}^p$, alors A = B. Il suffit en effet d'appliquer A et B sur le j-ème vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ de la base canonique de $\mathbf{K}^p$ (où le 1 occupe la j-ème place) pour voir que A et B ont même colonne j. Ainsi :

$$(\forall\, X \in \mathbf{K}^p,\ AX = BX) \Rightarrow A = B$$

3- Rang d'un système

On appelle **rang** r du système le nombre d'inconnues principales (ou de pivots non nuls) une fois obtenu un système échelonné. On observera que la méthode du pivot applique sur les lignes du système la même méthode que celle utilisée pour calculer le rang d'un système de vecteurs (voir L1/ESPVECT.PDF). Ainsi, le rang du système n'est autre que le rang des lignes de la matrice des coefficients $A = (a_{ij})$. Dans le chapitre L1/LINEF.PDF, on montre que ce rang est également celui des colonnes de la matrice A. On appelle **rang de la matrice** A cette quantité r, et on note $r = \mathrm{rg}(A)$.

Plusieurs cas se présentent, en fonction des valeurs r, n, p :

❑ Si $r = n = p$: autant d'inconnues que d'équations, le nombre d'inconnues étant égal au rang. On dit qu'on a un **système de Cramer**. Après échelonnement, on obtient un système triangulaire sans paramètres. Il y a alors une solution et une seule :

EXEMPLE : $r = n = p = 3$

$$\left[\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 5 \\ y - 2z = 2 \\ z = 3 \end{array}\right.$$

Cela signifie que l'application X $\rightarrow$ AX est bijective, où A est la matrice des coefficients du système et X la colonne des inconnues.

❑ Si $r = n < p$: plus d'inconnues que d'équations, le nombre d'équations étant égal au rang. On obtient après échelonnement un système échelonné ayant $p - r$ paramètres. Il y a une infinité de solutions, quel que soit le second membre :

EXEMPLE : $r = n = 3 < p = 4$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = 5 \\ \quad y - 2z - t = 2 \\ \qquad z + 3t = 3 \end{cases}$$

On résout le système en prenant t quelconque, et on en déduit z, puis y, puis x en fonction de t. Concrètement, le fait que le rang soit égal au nombre d'équations signifie que les équations sont indépendantes entre elles.

Cela signifie que l'application X $\rightarrow$ AX est surjective.

❑ Si $r = p < n$: plus d'équations que d'inconnues, le nombre d'inconnues étant égal au rang. Après échelonnement, on obtient un système échelonné sans paramètre, mais dont les $n - r$ dernières équations ont leur membre de gauche nul. Si les membres de droite sont également nuls, alors ces équations sont inutiles et on se ramène au système de Cramer. Mais si l'un des membres de droite est non nul, cela signifie une incompatibilité entre les équations initiales et il n'y a pas de solution.

EXEMPLE : $r = p = 2 < n = 3$

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ \quad y = 2 \\ \quad 0 = 0 \end{cases} \text{ provenant par exemple de } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 12 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \qquad \text{solution unique}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ \quad y = 2 \\ \quad 0 = 1 \end{cases} \text{ provenant par exemple de } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 12 \\ x + 3y = 8 \end{cases} \qquad \text{pas de solution}$$

Cela signifie que l'application X $\rightarrow$ AX est injective. Dans le cas d'un second membre B nul, la seule solution est la solution nulle.

❑ Si $r < p$ et $r < n$, il y a $p - r$ paramètres, mais comme ci-dessus, $n - r$ équations ont leur membre de gauche nul. Ou bien il n'y a pas de solution si les équations sont incompatibles, ou bien il y en a une infinité.

EXEMPLE : $r = 2 < p = n = 3$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \\ 4x + 7y + z = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 3 & L_1 \leftarrow L_2 \\ \quad 5y + 3z = 5 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ \quad 5y + 3z = 5 & L_3 \leftarrow 4L_2 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ \quad 5y + 3z = 5 \\ \qquad 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4z}{5} \\ y = -\dfrac{3z}{5} + 1 \end{cases} \quad \text{L'ensemble des solutions est une droite affine}$$

Mais :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \\ 4x + 7y + z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 3y + z = 3 & L_1 \leftarrow L_2 \\ \quad 5y + 3z = 5 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ \quad 5y + 3z = 13 & L_3 \leftarrow 4L_2 - L_3 \end{cases}$$

L_2 et L_3 sont incompatibles (5 = 13). Il n'y a pas de solution.

II : Opérations sur les matrices

1- Somme de matrices

On note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On souhaite définir une addition sur cet ensemble de façon que cette addition satisfasse la relation :

$$(A + B)X = AX + BX$$

où X est un élément quelconque de $\mathbb{K}^p$. Si A = (a_{ij}) et B = (b_{ij}), le i-ème coefficient de AX est $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j$, celui de BX est $\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\, x_j$, donc celui de (A + B)X est $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j + \sum_{j=1}^{p} b_{ij}\, x_j = \sum_{j=1}^{p} (a_{ij} + b_{ij})\, x_j$.

A + B est donc la matrice dont le terme (i, j) est $a_{ij} + b_{ij}$:

DEFINITION

Soient A *et* B *deux matrices de* $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. *Alors* A + B *est une matrice de* $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *dont le terme général est* :

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

On vérifie facilement que :

$A + B = B + A$

$(A + B) + C = A + (B + C)$

$A + O = O + A = A$ où O désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls (matrice dite nulle)

$A + (-A) = (-A) + A = O$ où A désigne la matrice de terme général $-a_{ij}$

Autrement dit, $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +)$ forme un groupe commutatif.

2- Produit par un scalaire

On souhaite définir un produit par un scalaire λ élément de $\mathbb{K}$ de façon que :

$$\lambda(AX) = (\lambda A)X$$

où X est un élément quelconque de $\mathbb{K}^p$. Si A = (a_{ij}), le i-ème coefficient de AX est $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j$, celui de

$\lambda(AX) = (\lambda A)X$ est $\lambda \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda a_{ij}\, x_j$, donc le terme général de λA est λa_{ij} :

DEFINITION

Soit A *une deux matrice de* $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et* λ *un élément de* $\mathbb{K}$. *Alors* λA *est la matrice de* $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *dont le terme général est* :

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

On vérifie facilement que :

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$
$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$
$$1A = A$$

$(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +, .)$ est donc un espace vectoriel. Sa dimension est np. Une base est en effet constituée des matrices E_{ij} ayant tous leurs termes nuls sauf un seul qui vaut 1 et qui occupe la position (i, j). Si A est une matrice de terme général a_{ij}, on a simplement :

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$$

3- Produit de matrices

On souhaite définir un produit de matrice de façon que :

$$(AB)X = A(BX)$$

où X est un élément quelconque de $\mathbb{K}^q$. B doit donc disposer de q colonnes, donc est élément de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ pour un certain p. Dans ce cas BX possède p lignes. Pour effectuer le produit A(BX), A doit donc posséder p colonnes, donc est élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ pour un certain n. A(BX) sera alors élément de $\mathbb{K}^n$. Cela signifie que AB doit appartenir à $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$.

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, le k-ème coefficient de Y = BX est $y_k = \sum_{j=1}^{q} b_{kj}\, x_j$, et le i-ème élément de

A(BX) = AY est $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, y_k$. Or :

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, y_k = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \sum_{j=1}^{q} b_{kj}\, x_j = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{ik}\, b_{kj}\, x_j = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\, x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\right) x_j$$

donc le terme général (i, j) de AB est $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$

DEFINITION

Soit A *élément de* $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et* B *élément de* $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$. *Alors* AB *est un élément de* $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ *dont le terme général est* :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

Pour calculer le produit C = AB, on effectue le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B. La disposition usuelle de calcul est la suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1q} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{iq} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \dots & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & | & & \\ & & | & & \\ — & — & c_{ij} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut aussi dire qu'on multiplie successivement chaque colonne de B par la matrice A.

EXEMPLE :

❑ Calculons $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les propriétés du produit sont (en supposant les nombres de lignes et de colonnes entre matrices compatibles entre elles) :

A(B + B') = AB + AB'
(A + A')B = AB + A'B
(AB)C = A(BC) que l'on note ABC
A(λB) = λ(AB) = (λA)B que l'on note λAB

La seule propriété non évidente est l'associativité (AB)C = A(BC). Or, pour toute colonne X :

((AB)C)X = (AB)(CX)	par définition du produit de AB par C sur la colonne X
= A(B(CX))	par définition du produit A par B sur la colonne CX
= A((BC)X)	par définition du produit de B par C sur la colonne X
= (A(BC)X)	par définition du produit de A par BC sur la colonne X

Cette relation étant vérifiée pour toute colonne X (de dimension adéquate), on peut conclure que (AB)C = A(BC).

On notera que si A appartient à $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et n appartient à $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, alors MN existe et appartient à $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$, mais que, si q est différent de n, BA n'existe pas. Le produit n'est donc pas commutatif. Il ne l'est pas même si les matrices sont carrées de même taille.

EXEMPLE :

❑ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

mais $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

On prendra donc garde qu'en général AB ≠ BA.

En particulier, $(A + B)^2$ n'est pas égal à $A^2 + 2AB + B^2$, mais à $A^2 + AB + BA + B^2$. Ce défaut de commutativité du produit est source importante d'erreur chez les étudiants qui débutent l'étude des matrices.
Si A et B commutent, alors toute puissance de A commute avec B (par récurrence sur la puissance de A), toute puissance de A commute avec toute puissance de B, et si A est admet un inverse A^{-1} pour le produit, A^{-1} commute avec B (car $A^{-1}B = BA^{-1} \Leftrightarrow BA = AB$ en multipliant les deux membres à gauche et à droite par A).

Une autre propriété source d'erreur provient du fait que **AB peut être nul alors que ni A ni B n'est nul**.

EXEMPLE :

❑ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En particulier, **on ne peut rien conclure du fait que AB = 0 et certainement pas que l'une des deux matrices est nulle.**

Il résulte de la définition du produit de matrice qu'on peut assimiler une colonne X élément de $\mathbb{K}^p$ à une matrice à une colonne $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Le résultat AX est le même dans les deux cas.

III : Algèbre des matrices carrées

1- Définition

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. Dans ce cas, le produit des matrices est un produit interne à cet ensemble :

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,.)$ est un espace vectoriel. De plus, la relation $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ établit une compatibilité entre le produit interne des matrices $\times$ et le produit externe . par un scalaire. On dit que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times,.)$ est une **algèbre**.

2- Matrice identité

Cette matrice, notée I_n est associée à l'application identique : $X \in \mathbb{K}^n \to I_nX = X$. Elle vaut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

comme on peut le vérifier facilement en multipliant une colonne X par cette matrice. Son terme général est noté δ_{ij} (symbole de Kronecker).

Si A est élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$, alors :

$$I_nA = AI_p = A$$

En effet, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$:

$$(I_nA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\, a_{kj}$$

mais tous les δ_{ik} sont nuls sauf pour $k = i$, donc $(I_nA)_{ij} = a_{ij}$. Donc $I_nA = A$. On procède de même pour AI_p.

On aurait pu dire aussi que, pour toute colonne X élément de $\mathbf{K}^p$:

$(I_nA)X = I_n(AX)$ par définition du produit de I_n par A, appliqué sur la colonne X

$= AX$ par définition du I_n

donc $I_nA = A$.

3- Matrices particulières

a) Matrices scalaires :

Les matrices **scalaires** sont les matrices de la forme λI_n. Tous les termes sont nuls sauf sur la diagonale, où ils sont tous égaux entre eux. Ce sont les matrices associées aux **homothéties** $X \in \mathbf{K}^n \to \lambda X$.

b) Matrices diagonales :

Les matrices **diagonales** sont les matrices dont tous les termes sont nuls en dehors de la diagonale : $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Ceux de la diagonale sont quelconques, égaux ou non, nuls ou non

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

On pourra vérifier que, si A et B sont toutes deux diagonales, le produit AB est diagonal et que les termes de la diagonale sont les a_ib_i.

c) Matrices triangulaires :

On traitera des matrices **triangulaires supérieures, le cas des matrices triangulaires inférieures se** traitant de manière analogue. Elles sont de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et caractérisées par : $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Elles forment un sous-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (une base de ce sous-espace vectoriel est formée des matrices dont tous les coefficients sont nuls, sauf un seul qui vaut 1 et qui occupe l'une des $\dfrac{n(n+1)}{2}$ positions du triangle supérieur de la matrice), mais également un sous-anneau (ou une sous-algèbre). La seule chose non évidente est de vérifier la stabilité pour le produit de matrices. Soient donc deux matrices A et B triangulaires supérieures et soit $i > j$. Le terme (i,j) du produit est donné par $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$ qui est nul car $a_{ik} = 0$ pour $i > k$ et $b_{kj} = 0$ pour $k > j$. Comme $i > j$, pour chaque k, il existe l'un des deux termes a_{ik} ou b_{kj} qui est nul.

<u>d) Matrices nilpotentes</u> :

Une matrice M est dite **nilpotente** s'il existe un entier p tel que $M^p = 0$.

4- Matrices inversibles

On dit que A élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est **inversible** si et seulement si il existe M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $AM = MA = I_n$. On note alors $M = A^{-1}$. Le produit de matrices étant non commutatif, il est a priori indispensable de préciser qu'on a les deux relations $AM = I_n$ et $MA = I_n$. Cependant, nous allons montrer plus loin qu'il suffit d'une égalité pour avoir l'autre.

S'il existe, l'inverse est unique, car si $MA = NA = I_n$, en multipliant à droite par l'un des deux inverses (peu importe lequel), on obtient $M = N$.

Remarque préliminaire : effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice, et effectuer une opération élémentaire sur les colonnes revient à la multiplier à droite. On vérifiera en effet que :

- Multiplier la $j^{\text{ème}}$ ligne de A par λ est équivalent à multiplier A à gauche par la matrice :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} j \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & & \dots & & 0 \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(matrice de **dilatation**)

- Retrancher la ligne j à la ligne i est équivalent à multiplier A à gauche par la matrice :

$$\begin{array}{c} j \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ & & \dots & -1 & \dots & \\ & \dots & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(matrice de **transvection** $t_{ij}(-1)$)

- Permuter les colonnes i et j est équivalent à multiplier A à gauche par la matrice :

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc} & & i & & j & \\ & & \downarrow & & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ & \dots & 0 & \dots & 1 & \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(matrice de **transposition**)

Ainsi, toutes les opérations élémentaires sur les lignes de A sont équivalentes à des produits de matrices élémentaires à gauche de A. Effectuer plusieurs opérations élémentaires sur les lignes revient donc à multiplier A à gauche par des matrices élémentaires M_1, puis M_2, ..., puis M_k et donc à multiplier A à gauche par la matrice $M = M_k M_{k-1} \dots M_2 M_1$.

On vérifiera de même que les produits à droite par les mêmes matrices donne les opérations élémentaires sur les colonnes de A.

Réciproquement, multiplier A à gauche par une matrice B quelconque est équivalent à effectuer des opérations quelconques sur les lignes de A. En effet, si L_1, ..., L_n désignent les lignes de A, la i-ème ligne de BA est $b_{i1}L_1 + \dots + b_{in}L_n$. Multiplier à droite par B est équivalent à effectuer des opérations sur les colonnes. Si B n'est pas produit de matrices élémentaires, il est possible que le rang de la matrice A ne soit pas conservée.

Remarquons qu'une matrice M produit de matrices élémentaires est de rang n puisque les opérations élémentaires appliquées sur M en sens inverse vont mener de la matrice M à la matrice échelonnée I_n, ayant n pivots non nuls. Il en est de même si on raisonne sur les colonnes : le rang des colonnes d'une matrice N produit de matrices correspondant à des opérations élémentaires sur les colonnes est n.

PROPOSITION :

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *il y a équivalence entre :*

i) A *est inversible*

ii) $\mathrm{rg}(A) = n$

iii) *L'équation* $AX = 0$, $X \in \mathbb{K}^n$, *admet* 0 *comme seule solution.*

iv) $\forall B \in \mathbb{K}^n$, *l'équation* $AX = B$ *admet au plus une solution.*

v) $\forall B \in \mathbb{K}^n$, *l'équation* $AX = B$ *admet au moins une solution.*

vi) $\forall B \in \mathbb{K}^n$, *l'équation* $AX = B$ *admet une solution et une seule.*

Démonstration :

❑ i) $\Rightarrow$ iii)
car $AX = 0 \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}0 \Rightarrow I_nX = 0 \Rightarrow X = 0$

❑ iii) $\Rightarrow$ ii)
car si le rang était strictement inférieur à n, le système $AX = 0$ admettrait un nombre de paramètres égal à $n - \mathrm{rg}(A) > 0$ et il y aurait une infinité de solutions.

❑ ii) $\Rightarrow$ vi)
Si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors la résolution du système $AX = B$ conduit à un système échelonné ayant n équations, n inconnues et n pivots non nuls. C'est un système de Cramer qui admet une et une seule solution.

❑ vi) $\Rightarrow$ iv), v) est trivial.

❑ iv) $\Rightarrow$ iii)
Appliquer iv) en prenant $B = 0$

❑ v) $\Rightarrow$ ii)
Si v) est vraie, cela signifie que la résolution du système $AX = B$ conduit à un système échelonné avec n pivots non nuls et donc que $\mathrm{rg}(A) = n$. En effet, par l'absurde, si l'un des pivots est nul et si M est la matrice dont le produit à gauche de A conduit à ce système échelonné, on a $MAX = MB$ avec l'une des lignes de MA nulle. S'il s'agit de la ligne k, on a donc la k-ème ligne de la forme $0 = \sum_{j=1}^{n} m_{kj}\, b_j$. Mais si on prend $b_j = \overline{m_{kj}}$, on obtient $0 = \sum_{j=1}^{n} |m_{kj}|^2$ et donc, $\forall\, j$, $m_{kj} = 0$ et la k-ème ligne de M est nulle. Cela est impossible, car cela voudrait dire que le rang de M est strictement inférieur à n, or M est obtenu à partir d'opérations élémentaires sur les lignes donc est de rang n.

On a donc montré que
i) $\Rightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii) $\Leftrightarrow$ iv) $\Leftrightarrow$ v) $\Leftrightarrow$ vi)
L'équivalence entre iv), v) et vi) montre qu'en ce qui concerne l'application $X \to AX$ où A est une matrice carrée, il y a équivalence entre son injectivité, sa surjectivité et sa bijectivité.

Pour conclure, il suffit donc de montrer que ii) $\Rightarrow$ i) :
❑ Si $\mathrm{rg}(A) = n$, des opérations élémentaires sur les lignes (et donc des produits à gauche par des matrices élémentaires) permet de passer de A à une matrice échelonnée ayant n pivots non nuls. On obtient donc une matrice triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, les éléments diagonaux a_{ii} étant non nuls. Mais il n'est pas difficile, à partir de cette matrice triangulaire, de poursuivre des opérations élémentaires sur les lignes de façon à annuler le triangle supérieur, arrivant ainsi à la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Pour cela, commencer par annuler les coefficients de la dernière colonne en effectuant les opérations $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{in}}{a_{nn}} L_n$, $1 \leq i \leq n-1$, puis, avec l'avant-dernière ligne ainsi obtenue, annuler de même les coefficients l'avant-dernière colonne, et itérer sur les colonnes précédentes. Il suffit enfin d'effectuer sur la matrice diagonale obtenue les opérations $L_i \leftarrow \dfrac{1}{a_{ii}} L_i$ pour obtenir I_n. Comme opérer sur les lignes et équivalent à multiplier à gauche par une matrice, il existe une matrice M (égale au produit des matrices élémentaires correspondant à ces opérations élémentaires sur les lignes), telle que $MA = I_n$.

Procédons maintenant à des opérations élémentaires sur les colonnes sur la matrice A initiale, de façon à obtenir une matrice échelonnée selon les colonnes. Cela revient à multiplier à droite par une matrice, produit des matrices élémentaires correspondant chacune à une opération élémentaire sur les colonnes.
Si on parvient à une matrice échelonnée en colonne, triangulaire avec ses termes diagonaux non nuls, on pourra poursuivre les opérations élémentaires sur les colonnes pour parvenir à la matrice I_n (comme on l'a fait ci-dessus pour les lignes), ce qui signifie qu'il existe une matrice N telle que $AN = I_n$. Mais on a alors $MAN = (MA)N = I_nN = N = M(AN) = MI_n = M$, donc $M = N$ et A est bien inversible.
Dans le cas contraire, on obtiendrait une matrice échelonnée en colonne avec une colonne nulle. Autrement dit, il existerait une matrice N produit de matrices d'opérations élémentaires en colonnes, telle que AN possède une colonne nulle. Mais ceci est impossible. Si AN a une colonne nulle, il en est de même de M(AN) or $MAN = (MA)N = I_nN = N$, donc N possède une colonne nulle. Donc le rang de ses colonnes de N est strictement inférieur à n. Ceci est contradictoire avec le fait que N est produit de matrices d'opérations élémentaires en colonnes, puisque, pour une telle matrice le rang de ses colonnes vaut n.

Accessoirement, on a montré que, si le rang des lignes d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est n, il en est de même du rang de ses colonnes.

PROPOSITION
L'ensemble des matrices inversibles, muni du produit des matrices est un groupe appelé **groupe linéaire** *et est noté* $GL_n(\mathbf{K})$.

<u>Démonstration</u> :
❑ $GL_n(\mathbf{K})$ est non vide car il contient I_n.
Si A et B sont inversibles, il en est de même de leur produit et
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
En effet, $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$. Donc $\times$ est une loi interne à $GL_n(\mathbf{K})$.
Cette loi est associative puisqu'elle l'est déjà dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Le neutre est I_n.

L'inverse de A^{-1} est A, puisque $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

Le calcul de l'inverse d'une matrice se fait de la façon suivante :

❑ Pour la matrice 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, elle est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et son inverse vaut $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ comme on le vérifie en multipliant cet inverse par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ initiale.

❑ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$) alors $B = A^{-1}$.
Par exemple, une matrice A vérifiant la relation $A^3 + 3A^2 - A + I_n = 0$ est inversible puisque :

$$I = -A^3 - 3A^2 + A = A \times (-A^2 - 3A + I)$$

et $\quad A^{-1} = -A^2 - 3A + I$.

En effet, si $AB = I_n$, cela signifie que le rang des colonnes de A est n, puisque multiplier à droite par une matrice B est équivalent à effectuer des opérations sur les colonnes et qu'on obtient au final la matrice échelonnée I_n de rang n. Donc A est inversible. En multipliant l'égalité $AB = I_n$ à gauche par A^{-1}, on obtient $B = A^{-1}$. On voit donc qu'il suffit d'avoir une seule égalité $AB = I_n$ pour avoir l'autre $BA = I_n$.

❑ Méthode générale : on résout le système $AX = Y$ où X et Y sont des vecteurs colonnes à n lignes. A est inversible si et seulement si la solution du système est unique, et on aura $X = A^{-1}AX = A^{-1}Y$. L'expression de X en fonction de Y possède des coefficients qui sont précisément ceux de la matrice inverse.

EXEMPLE :

❑ Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{l} 10x + 9y + z = x' \\ 9x + 10y + 5z = y' \\ x + 5y + 9z = z' \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \quad 41y + 89z = 10z' - x' & 10L_3 - L_1 \to L_1 \\ \quad 35y + 76z = 9z' - y' & 9L_3 - L_2 \to L_2 \\ x + 5y + 9z = z' & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 5y + 9z = z' & L_3 \to L_1 \\ \quad 35y + 76z = 9z' - y' & \\ \qquad\quad z = 19z' - 41y' + 35x' & 41L_2 - 35L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 65x' + 76y' + 35z' \\ y = -76x' + 89y' - 41z' \\ z = 35x' - 41y' + 19z' \end{array}\right.$$

Donc la matrice inverse vaut $\begin{pmatrix} 65 & 76 & 35 \\ -76 & 89 & -41 \\ 35 & -41 & 19 \end{pmatrix}$

Nous donnons enfin une méthode utilisant les matrices élémentaires, correspondant aux opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A. Pour inverser une matrice, on choisit une fois pour toutes d'effectuer les mêmes opérations sur les lignes, ou (strictement) sur les colonnes, et ceci à la fois sur A et sur la matrice Identité. Cela revient à multiplier A et I_n par la même matrice M (à droite si on agit sur les colonnes, à gauche si on agit sur les lignes). Dans le cas d'opérations sur les colonnes, en cours de calcul, on dispose donc des matrices AM et $I_nM = M$. Si l'on parvient finalement à AM et I_nM avec $AM = I_n$, alors nécessairement $I_nM = M = A^{-1}$.

EXEMPLE 1 :

❑ Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ en effectuant des opérations sur les colonnes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow 2C_1 - C_2$
$C_3 \leftarrow C_1 + 2C_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow 4C_3 - 7C_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 12 & -10 \\ 0 & -8 & 7 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2/4$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -10 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$C_1 \leftarrow (C_1 - C_2 - C_3)/2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -10 \\ -5/2 & -2 & 7 \\ -3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice inverse vaut $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -10 \\ -5/2 & -2 & 7 \\ -3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

EXEMPLE 2 :

❑ Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ en effectuant des opérations sur les colonnes.

$$\begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow 10C_2 - 9C_1$
$C_3 \leftarrow 10C_3 - C_1$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & 41 \\ 1 & 41 & 89 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -9 & -1 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow -41C_2 + 19C_3$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & 0 \\ 1 & 41 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -9 & -350 \\ 0 & 10 & -410 \\ 0 & 0 & 190 \end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3/10$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & 0 \\ 1 & 41 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -9 & -35 \\ 0 & 10 & -41 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - 41C_3$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1444 & -35 \\ 0 & 1691 & -41 \\ 0 & -779 & 19 \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2/19$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -76 & -35 \\ 0 & 89 & -41 \\ 0 & -41 & 19 \end{pmatrix}$$

$C_1 \leftarrow (C_1 - 9C_2 - C_3)/10$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 65 & -76 & -35 \\ -76 & 89 & -41 \\ 35 & -41 & 19 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice inverse vaut $\begin{pmatrix} 65 & -76 & -35 \\ -76 & 89 & -41 \\ 35 & -41 & 19 \end{pmatrix}$

EXEMPLE 3 :

❑ Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en effectuant des opérations sur les colonnes.

On obtient directement la matrice I_n au moyen des opérations $C_i \leftarrow C_i - C_{i+1}$. En appliquant les mêmes règles sur I_n, on obtient A^{-1}, à savoir $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$

L'algorithme général est le suivant :

i) Obtenir une matrice triangulaire inférieure : Pour i variant de 1 à $n - 1$, placer en colonne i un vecteur parmi ceux occupant les colonnes i à n dont le $i^{\text{ème}}$ terme est non nul (ce qui est possible sinon, la matrice ne serait pas de rang n et ne serait pas inversible) et faire des combinaisons entre ce $i^{\text{ème}}$ vecteur et les vecteurs placés à sa droite de façon à annuler les termes situés en la ligne i et en colonne k, $k > i$. Ceci s'obtient par utilisation répétée des trois manipulations élémentaires. On remplit donc de 0 le triangle supérieur.

ii) D'une façon analogue, obtenir une matrice diagonale en remplissant de 0 le triangle inférieur, mais en procédant de gauche à droite, en commençant par remplir de 0 les lignes les plus basses.

iii) Obtenir la matrice identité, en divisant chaque colonne par le terme de la diagonale occupant cette colonne.

On peut également effectuer le calcul sur les lignes. Il est comparable à celui qui est mené dans la méthode de Gauss pour résoudre un système. En particulier, si le rang de la matrice est n, on arrivera de façon certaine à une matrice échelonnée triangulaire à diagonale non nulle, ce qui assure qu'on pourra terminer le calcul.

IV : Transposition

1- Définition

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{np}(\mathbf{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K}) \\ A &\longrightarrow A^{\mathsf{T}} \text{ appelée } \textbf{transposée} \text{ de } A. \end{aligned}$$

définie par : $(A^{\mathsf{T}})_{ij} = A_{ji}$, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le n$. On note aussi la transposée ${}^tA$.

EXEMPLES :

❑ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

❑ Soit A une matrice élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$. Alors $\text{rg}(A) = 1$ si et seulement si il existe une matrice colonne X non nulle de n éléments et une matrice ligne Y non nulle de p éléments telles que $A = XY$. En effet, dire que le rang de A est égal à 1, c'est dire que le rang des colonnes (ou des lignes) est égal à 1, donc il existe une colonne non nulle X telle que toutes les autres colonnes sont proportionnelles à celle-ci. Elles sont donc de la forme y_1X, y_2X, ..., y_pX. On prend Y la ligne égale à $(y_1\ y_2\ \dots\ y_p)$ et on vérifiera que $A = XY$. Réciproquement, si $A = XY$, on vérifiera que toutes les colonnes sont colinéaires à X. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1\ 5\ 2\ -3)$$

2- Propriétés

Il est aisé de vérifier :

i) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$

ii) $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$

iii) $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$ la transposée est donc linéaire

iv) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ pour A élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et B élément de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$

v) $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$ pour A élément de $GL_n(\mathbb{K})$

Pour la relation iv), on a en effet :

$$((AB)^{\mathrm{T}})_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{p} A_{jk}\, B_{ki} = \sum_{k=1}^{p} (A^{\mathrm{T}})_{kj}(B^{\mathrm{T}})_{ik} = \sum_{k=1}^{p} (B^{\mathrm{T}})_{ik}(A^{\mathrm{T}})_{kj} = (B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})_{ij}$$

En ce qui concerne v), on a :

A inversible

$\Leftrightarrow$ $AA^{-1} = I$

$\Leftrightarrow$ $(AA^{-1})^{\mathrm{T}} = I$

$\Leftrightarrow$ $(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = I$

ce qui prouve que A^{T} est inversible d'inverse $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

Dans le chapitre L1/LINEF.PDF portant sur les applications linéaires, on montre que A et sa transposée ont même rang.

3- Matrices symétriques et antisymétriques

Soit A une matrice carrée. On dit que A est **symétrique** si $A^{\mathrm{T}} = A$. On dit que A est **antisymétrique** si $A^{\mathrm{T}} = -A$. L'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons qu'ils sont supplémentaires :

❑ Si A est à la fois symétrique et antisymétrique, $A^{\mathrm{T}} = A = -A$ donc A est nulle. La somme est donc directe.

❑ Toute matrice carrée s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et antisymétrique :

$$M = \frac{M + M^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{M - M^{\mathrm{T}}}{2}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

La dimension du sous-espace des matrices symétriques est $\frac{n(n+1)}{2}$, une base étant $(E_{ij} + E_{ji})$, $i \leq j$.

La dimension du sous-espace des matrices antisymétriques est $\frac{n(n-1)}{2}$, une base étant $(E_{ij} - E_{ji})$, $i < j$.

Annexe : utilisation des matrices en physique

Les utilisations des matrices en physique sont innombrables. On en donne quelques exemples ci-dessous.

1- Matrice d'inertie

Soit M un point de masse m se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{V}$ par rapport à un référentiel et O un point de ce référentiel. On appelle moment cinétique de M par rapport à O le vecteur :

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{OM} \wedge m\boldsymbol{V}$$

L'intérêt du moment cinétique tient dans le fait que sa dérivée est égale aux moments des forces appliquées en M par rapport à O (y compris les forces d'inertie si le référentiel n'est pas galiléen), lorsque O est fixe dans le référentiel considéré.

Supposons que M effectue un mouvement de rotation autour d'un axe passant par O. La vitesse $\boldsymbol{V}$ est alors de la forme $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{OM}$, où $\boldsymbol{\omega}$ est un vecteur appelé **vecteur instantané de rotation** et $\wedge$ désigne le produit vectoriel (voir le chapitre L1/DETERMNT.PDF pour la définition du produit vectoriel). L'axe $(\mathrm{O},\boldsymbol{\omega})$ est l'axe de rotation. On a alors :

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}} = m\, \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{OM})$$

On introduit alors un opérateur, appelé opérateur d'inertie, qui, à tout vecteur $\boldsymbol{u}$, associe le vecteur $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = m\, \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OM})$, de sorte que $\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\omega})$. En utilisant la formule du double produit vectoriel, on obtient également :

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = m\, \mathrm{OM}^2\boldsymbol{u} - m <\boldsymbol{u},\boldsymbol{OM}> \boldsymbol{OM} = m\, (\boldsymbol{OM} \wedge \boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{OM}$$

En ce qui concerne un solide, on opère de même en sommant au moyen d'une intégrale triple sur tous les points du solide. L'opérateur d'inertie prend alors la forme :

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}) = \iiint_{\mathrm{V}} \boldsymbol{OM} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{OM})\, \mathrm{d}m$$

$$= \iiint_{\mathrm{V}} \mathrm{OM}^2\boldsymbol{u} - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{OM}> \boldsymbol{OM}\, \mathrm{d}m$$

$\boldsymbol{J}$ est clairement linéaire et est donc représenté par une matrice 3×3 dont on montre qu'elle est symétrique. La matrice de $\boldsymbol{J}$ s'écrit donc $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & -\mathrm{F} & -\mathrm{E} \\ -\mathrm{F} & \mathrm{B} & -\mathrm{D} \\ -\mathrm{E} & -\mathrm{D} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$ avec :

$$\mathrm{A} = <\boldsymbol{J}(\boldsymbol{i}),\boldsymbol{i}> = \iiint_{\mathrm{V}} \mathrm{OM}^2 - (\boldsymbol{i}.\boldsymbol{OM})^2\, \mathrm{d}m = \iiint_{\mathrm{V}} (y^2 + z^2)\, \mathrm{d}m,$$

moment d'inertie par rapport à l'axe $(\mathrm{O},\boldsymbol{i})$

$\mathrm{B} = \iiint_{\mathrm{V}} (x^2 + z^2)\, \mathrm{d}m$, moment d'inertie par rapport à l'axe $(\mathrm{O},\boldsymbol{j})$

$\mathrm{C} = \iiint_{\mathrm{V}} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}m$, moment d'inertie par rapport à l'axe $(\mathrm{O},\boldsymbol{k})$

$\mathrm{D} = -<\boldsymbol{J}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{j}> = \iiint_{\mathrm{V}} yz\, \mathrm{d}m$, quantité appelée produit d'inertie.

$$E = \iiint_V xz \, dm$$
$$F = \iiint_V xy \, dm$$
Etant symétrique, on montre qu'elle est diagonalisable dans un repère orthonormé dont les axes sont appelés **axes principaux d'inertie**. (cf le fichier L2/PREHILB.PDF traitant du chapitre *Espaces préhilbertiens* du cours de deuxième année pour plus de détails).

2- Réseaux de conducteurs électriques

On considère un réseau électrique formé de n mailles. On attribue à chaque maille un courant électrique fictif orienté dit courant de maille (ou courant de Maxwell). Il y a donc n courants de maille I_1, ..., I_n. Le courant réel observé dans un conducteur commun à plusieurs mailles est la somme algébrique des courants des mailles auxquelles il appartient. Si chaque maille dispose d'une force électromotrice E_1, ..., E_n, alors on dispose d'une relation matricielle :

$$(E) = (R)(I)$$

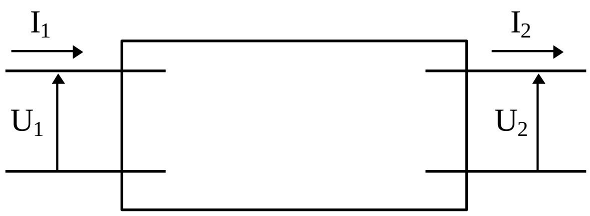
où R est une matrice $n \times n$. Dans le cas de mailles extérieures les unes aux autres, toutes orientées dans le même sens (par exemple le sens trigonométrique), on montre que :

- ❑ R_{ii} est la somme des résistances totales de la maille i
- ❑ R_{ij} est l'opposé de la somme des résistances communes aux mailles i et j.

En particulier, cette matrice est symétrique. Pour connaître les intensités connaissant les forces électromotrices, il suffit d'inverser la matrice R.

3- Quadripôles

On considère le système électrique suivant, appelé quadripôle :



Le cadre contient un réseau électrique purement passif. Dans ce cas, les courants I_1 et I_2 dépendent linéairement de U_1 et U_2. En effet, on peut les considérer comme les courants de mailles extérieures de sorte que l'on a :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = (R)^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ -U_2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

avec $(R)^{-1}$ inverse de la matrice (R) définie au paragraphe précédent. Le signe de U_2 provient de l'orientation positive choisie pour U_2 ici, en sens contraire du courant. $(R)^{-1}$ est symétrique. On obtient donc, en introduisant le signe de $-U_2$ dans la matrice :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

On en déduit une expression :

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

dont on peut vérifier, en l'exprimant à partir de a, b, c que le déterminant est égal à 1. La dernière matrice utilisée s'appelle **matrice de transfert**. Cette disposition permet le calcul aisé d'une suite de quadripôles en séries. Il apparaît alors un produit de matrices.

4- Electrostatique

On considère n conducteurs électriques de charges Q_1, Q_2, ..., Q_n. Ces conducteurs sont portés aux potentiels V_1, V_2, ..., V_n. L'expérience prouve que la dépendance des charges en fonction des potentiels est linéaire, et donc qu'il existe une matrice (C) telle que :

$$(Q) = (C)(V)$$

où (Q) est la matrice colonne de composantes Q_i et (V) la matrice colonne de composantes V_i.

Les éléments diagonaux valent C_{ii}, sont appelés capacité du conducteur i en présence des autres conducteurs, et sont positifs. Les éléments C_{ij}, pour i différent de j, s'appellent coefficient d'influence du conducteur i sur le conducteur j. Ils sont négatifs. Cette matrice est par ailleurs symétrique. Cette propriété repose sur le principe de conservation de l'énergie. En effet, on montre que, si l'on charge d'abord le conducteur j d'une charge Q_j, puis le conducteur i d'une charge Q_i, l'énergie nécessaire vaut $(C^{-1})_{ij}Q_{ii}^2 + (C^{-1})_{ij}Q_jQ_i + \frac{1}{2}(C^{-1})_{jj}Q_j^2$. Si l'on commence d'abord par le conducteur i puis par le conducteur j, l'énergie vaut $(C^{-1})_{ij}Q_{ii}^2 + (C^{-1})_{ji}Q_jQ_i + \frac{1}{2}(C^{-1})_{jj}Q_j^2$. On a donc $(C^{-1})_{ij} = (C^{-1})_{ji}$. La matrice C^{-1} et donc la matrice C est symétrique. Indiquons enfin que l'énergie électrostatique nécessaire pour charger les conducteurs i à la charge Q_i vaut :

$E = \frac{1}{2} Q^T C^{-1} Q$ où Q est la matrice colonne de composantes Q_i

$= \frac{1}{2} V^T C V$ où V est la matrice colonne de composantes V_i.

$= \frac{1}{2} Q^T V$

5- Inductance mutuelle

De même, considérons n circuits électriques parcourus par les courants I_i. Ils créent un champ magnétique $\boldsymbol{B}$ dont le flux à travers le circuit i est Φ_i. On a une relation du type :

$$(\Phi) = (L)(I)$$

où (Φ) est le vecteur colonne dont les composantes sont Φ_i et (I) le vecteur colonne dont les composantes sont I_i. (L) est une matrice carrée $n \times n$ de terme général L_{ij} avec :

- ❑ L_{ii} inductance propre du circuit i
- ❑ L_{ij} inductance mutuelle du circuit i sur le circuit j.

Cette matrice est elle aussi symétrique. L'énergie magnétostatique du système s'exprime sous la forme :

$$E = \frac{1}{2} \Phi^T I$$

$$= \frac{1}{2} I^T L I$$

$$= \frac{1}{2}\,\Phi^{\mathsf{T}}\,\mathrm{L}^{-1}\,\Phi$$

6- Polarisation

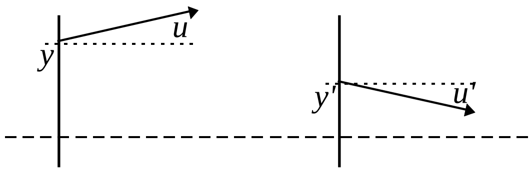
Considérons un corps diélectrique (non conducteur), plongé dans un champ électrique $\boldsymbol{E}$. Les atomes de ce corps subissent en général une polarisation. Il en résulte une polarisation globale par unité de volume mesurée par un vecteur $\boldsymbol{P}$ qui n'est pas toujours colinéaire à $\boldsymbol{E}$. Il existe une transformation linéaire M telle que :

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{M}\boldsymbol{E}$$

En considérant l'énergie nécessaire à une polarisation d'abord suivant l'axe des x, puis suivant l'axe des y, ou d'abord suivant l'axe des y puis suivant l'axe des x, on peut montrer là aussi que M est symétrique. Le fait qu'une matrice symétrique soit diagonalisable dans une base orthonormée signifie qu'il existe trois directions de polarisation privilégiées, pour lesquelles $\boldsymbol{P}$ est colinéaire à $\boldsymbol{E}$.
L'énergie de polarisation est $\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mathsf{T}}.\mathrm{M}.\boldsymbol{E}$

7- Optique matricielle

On définit en chaque point d'un axe optique le couple (y,u) où y est la distance du rayon à l'axe et u l'angle du rayon lumineux et de l'axe.



Entre deux points, on a en première approximation une transformation linéaire de (y,u) en (y',u') due à la présence d'appareils optiques tels qu'un système de lentielle. Cette approximation est obtenue en confondant u, $\sin(u)$ et $\tan(u)$ (autrement dit, on considère que la direction du rayon lumineux est très proche de celle de l'axe [approximation de Gauss]). La matrice de cette transformation est dite matrice de transfert. Par exemple, les matrices sont :

❑ milieu transparent de longueur L : u est invariant, mais y augmente de Lu

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❑ dioptre sphérique de rayon R, du milieu d'indice n au milieu d'indice n' : y est invariant, mais le rayon change de direction :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{(n-n')}{n'\mathrm{R}} & \dfrac{n}{n'} \end{pmatrix}$$

❑ dioptre plan, du milieu d'indice n au milieu d'indice n' : idem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{n'} \end{pmatrix}$$

obtenu comme cas particulier du dioptre shérique lorsque R tend vers l'infini.

❑ miroir sphérique de rayon R : idem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\mathrm{R}} & -1 \end{pmatrix}$$

obtenu comme cas particulier du dioptre shérique lorsque $n' = -n$.

❑ miroir plan : idem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

obtenu comme cas particulier du dioptre plan, lorsque $n' = -n$, ou du miroir sphérique lorsque R tend vers l'infini.

Disposer successivement plusieurs dioptres ou miroirs séparés les uns des autres revient à construire un système optique dont la matrice est le produit des matrices de ses éléments.

Deux plans sont conjugués lorsque $y = 0$ correspond à $y' = 0$ et ceci, quel que soit u. Cela signifie qu'un objet disposé sur l'axe dans le premier plan aura son image sur l'axe dans le second plan. On a alors nécessairement $a_{12} = 0$. Si la matrice est $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, on a $y' = ay$ de sorte que a est l'agrandissement transversal. Si $y = 0$, on a $u' = cu$ et c est l'agrandissement angulaire. Les plans conjugués sont dits principaux lorsque l'agrandissement vaut $a = 1$.

Le foyer objet est atteint lorsque $a_{22} = 0$, le foyer image, lorsque $a_{11} = 0$. Dans le premier cas, $y = 0 \Rightarrow u' = 0$, autrement dit les rayons issus d'un objet placé sur l'axe au foyer objet ressorte parallèle à l'axe. Dans le second cas, $u = 0 \Rightarrow y' = 0$, autrement dit des rayons incidents parallèles à l'axe se concentre sur l'axe au foyer image. La matrice entre les deux foyers vaut $\begin{pmatrix} 0 & -f \\ -\frac{1}{f'} & 0 \end{pmatrix}$.

8- Transformation de Lorentz

En relativité restreinte, on suppose qu'un repère O' se déplace à la vitesse V par rapport à O. Alors le quadrivecteur (x', y', z', ct') constitué de la position (x', y', z') de O' et du temps t' multiplié par la vitesse de la lumière c se déduit du quadrivecteur (x, y, z, ct) par une tranformation linéaire. En particulier, si les axes sont alignés, et si le déplacement se fait suivant Ox, on a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} & -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

où $\gamma = \frac{\mathrm{V}}{c}$, c vitesse de la lumière. De même, le quadrivecteur impulsion-energie $(\boldsymbol{P}, \frac{\mathrm{E}}{c})$ d'une masse ponctuelle m_0 se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{V}$ et d'énergie cinétique E se transforme avec le même opérateur, avec $\boldsymbol{P} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} m_0\boldsymbol{V}$ et $\frac{\mathrm{E}}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} m_0 c$

On transforme de même les quadrivecteurs densité de courant $(\boldsymbol{J}, c\rho)$ ou le quadrivecteur potentiel $(\boldsymbol{A}, \frac{\Phi}{c})$.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n-2 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases}$ en fonction du paramètre m

Exo.2) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$

Exo.3) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner A^n sous forme de combinaison linéaire de A et I_3.

Exo.4) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pour A élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $*A = JA^TJ$. Calculer $*(*A)$ et $*(AB)$.
Montrer que $\Gamma = \{A \mid *AA = I_3\}$ est un groupe multiplicatif.

Exo.5) Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonales $n \times n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

a) $[\ \forall D \in \mathcal{D},\ AD = DA\ ] \Rightarrow A \in \mathcal{D}$

b) $[\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\ ] \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_n$

Exo.6) Soit S une matrice $n \times n$ telle que $I_n + S$ soit inversible, et soit $A = (I_n - S)(I_n + S)^{-1}$. Pour G matrice carrée $n \times n$ quelconque, montrer l'équivalence entre :

i) $A^TGA = G$

ii) $S^TG + GS = 0$

Montrer également que I + A est inversible, et exprimer S en fonction de A.

Exo.7) Soit a élément de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et b élément de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$. On pose $A = ab - I_n$.

a) A quel ensemble appartient le produit ab ? Le produit ba ? Que valent ces matrices ?

b) Montrer que $A^2 + (2 - ba)A + (1 - ba)I_n = 0$, en assimilant ba à un réel.

c) Montrer que A est inversible si et seulement si $1 - ba \neq 0$. Calculer A^{-1} dans ce cas.

Exo.8) Inverser les matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Exprimer la matrice B en fonction de la matrice A.

Exo.9) Soit n entier strictement positif. On note ω le complexe $\exp(\frac{2i\pi}{n})$. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $(\mathrm{M})_{pq} = \omega^{(p-1)(q-1)}$. Calculer M^2 et $\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}$.

Exo.10) Soient A et B deux matrices nilpotentes telles que AB = BA.

a) Montrer que A + B est nilpotente.

b) Montrer que I + A est inversible, où I est la matrice unité de même taille que A.

c) Montrer que, si $\mathrm{A}^{p+1} = 0$, alors $(\mathrm{I} + \mathrm{A})^n = \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \mathrm{A}^k$, où $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$, que n soit un entier positif ou négatif.

d) Montrer que, si $\mathrm{A}^{p+1} = 0$ et $\mathrm{A}^p \neq 0$, les matrices $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, ..., \mathrm{A}^p)$ sont linéairement indépendantes.

e) Montrer que, si $\mathrm{A}^{p+1} = 0$, $\mathrm{A}^p \neq 0$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors $p < n$. (Autrement dit, $\mathrm{A}^n = 0$).

Exo.11) Soient a et b deux entiers de PGCD d. On effectue les divisions euclidiennes successives suivantes :

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1 & 0 \leq r_1 < q_1 \\ b = r_1q_2 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ ... & ... \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_nq_{n+1} & \text{avec } r_n = d \end{array}$$

On pose : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_2 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Montrer que $ax + by = d$.

Exo.12) Soient A et B deux matrices carrées éléments de $\mathcal{M}_\mathrm{N}(\mathbf{K})$, telles que $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{I_N}$.

a) Montrer que : $\forall\, n > 0,\ \mathrm{AB}^n - \mathrm{B}^n\mathrm{A} = n\mathrm{B}^{n-1}$

b) Montrer qu'il existe un entier m minimal pour lequel la famille $(\mathrm{I_N}, \mathrm{B}, \mathrm{B}^2, ..., \mathrm{B}^m)$ est liée. Conclure alors à une impossibilité.

c) Soit $u : \mathbf{R}[\mathrm{X}] \to \mathbf{R}[\mathrm{X}]$ défini par $u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$ et $v : \mathbf{R}[\mathrm{X}] \to \mathbf{R}[\mathrm{X}]$ défini par $v(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}$. Calculer $u \circ v - v \circ u$.

Exo.13) Soit A élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ et u et v deux éléments de $\mathbf{R}^n$. On note v^T la ligne transposée de la colonne v. Montrer que, si $1 + v^\mathrm{T}\mathrm{A}^{-1}u \neq 0$, alors $\mathrm{A} + uv^\mathrm{T}$ est inversible, son inverse étant $\mathrm{A}^{-1} - \frac{1}{1 + v^\mathrm{T}\mathrm{A}^{-1}u}\mathrm{A}^{-1}uv^\mathrm{T}\mathrm{A}^{-1}$.

Exemple : $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ et $u = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$

Exo.14) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de terme général a_{ij}. On suppose que : $\forall\ i, \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$.

Montrer que A est inversible.

2- Solutions

Sol.1) a) On utilise x comme pivot dans la troisième équation, en effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - mL_3$. On obtient le système équivant :

$$\begin{cases} (m-1)y = -m \\ (1-m)y - z = -m^2 \\ x + y + z = m + 1 \end{cases}$$

Donc :

Si $m = 1$, il n'y a pas de solution

Si $m \neq 1$, il y a une unique solution $(x, y, z) = (\dfrac{1 - 2m - m^2 + m^3}{1 - m}, \dfrac{m}{1 - m}, m + m^2)$

b) On exprime toutes les inconnues en fonction de x_1. On obtient successivement les relations suivantes :

$x_2 = -x_1$
$x_3 = 0$
$x_4 = x_1$
$x_5 = -x_1$
$x_6 = 0$

et par récurrence :

$x_{3k-2} = x_1$
$x_{3k-1} = -x_1$
$x_{3k} = 0$

etc. jusqu'à l'avant dernière ligne (qui se termine par la détermination de x_n). Quand on vérifie la dernière équation, on obtient alors :

si $n \equiv 0 \bmod 3$ ou $n \equiv 1 \bmod 3$, $x_1 = 0$, donc la seule solution est la solution nulle.

si $n \equiv 2 \bmod 3$, alors la dernière équation est vérifiée avec x_1 quelconque, et l'ensemble des solutions est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Sol.2) Par récurrence, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ où (F_n) est la suite de Fibonacci, définie par :

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad \forall\ n \geq 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Sol.3) Vérifier que $A^2 = 2I_3 - A$. Si on suppose qu'à un rang $n \geq 1$, il existe a_n et b_n tels que :

$A^n = a_n I_3 + b_n A$

alors $A^{n+1} = A^n A = (a_n I_3 + b_n A)A = a_n A + b_n A^2 = a_n A + b_n (2I_3 - A)$

$= 2b_n\, I_3 + (a_n - b_n)A$
$= a_{n+1}\, I_3 + b_{n+1}\, A$

avec $\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n - b_n \end{cases}$

donc, pour tout $n \geq 1$, $b_{n+1} = 2b_{n-1} - b_n$, avec $b_0 = 0$ (puisque $A^0 = I_3$) et $b_1 = 1$ (puisque $A^1 = A$). La récurrence linéaire double est associée à l'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ de solution $r = -2$ ou $r = 1$, ce qui signifie qu'il existe λ et μ tels que : $\forall\, n$, $b_n = \lambda(-2)^n + \mu 1^n = \lambda(-2)^n + \mu$ (voir le chapitre L1/SUITES.PDF). Les valeurs de b_0 et b_1 permette de déterminer $\lambda = -\frac{1}{3}$ et $\mu = \frac{1}{3}$. Donc :

$$\forall\, n,\ b_n = -\frac{(-2)^n}{3} + \frac{1}{3},\ a_n = 2b_{n-1} = \frac{(-2)^n}{3} + \frac{2}{3}$$

donc $\quad A^n = \left(\frac{(-2)^n}{3} + \frac{2}{3}\right) I_3 + \left(-\frac{(-2)^n}{3} + \frac{1}{3}\right) A$

Sol.4) Comme J est symétrique et que $J^2 = 1$, on a $*(*A) = A$. $*(AB) = *B*A$.
Γ est non vide. Il contient I_3. Si A et B appartiennent à Γ alors :

$$*(AB)AB = *B*AAB = *BB = I_3$$

Donc AB appartient à Γ.
Si A appartient à Γ, A est inversible d'inverse $*A$, et $*(*A)*A = A*A = I_3$ donc $*A$ appartient à Γ. Γ est un sous-groupe du groupe $GL(\mathbb{R}^3)$.

Sol.5) a) Pour tout i, j, si A a pour terme général a_{ij} et D pour terme diagonal général d_{ii}, le terme général (i, j) de AD = DA est $a_{ij}d_{jj} = d_{ii}a_{ij}$ donc en prenant $d_{ii} \neq d_{jj}$ on obtient $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Donc A est diagonale.
b) On sait déjà que A est diagonale d'après le a). On a alors $m_{ij}a_{jj} = a_{ii}m_{ij}$ pour toute matrice M donc en prenant m_{ij} non nul, on a $a_{ii} = a_{jj}$ pour tout i, j, donc A est scalaire.

Sol.6) Puisque $A^{\top} = (I_n + S)^{-1\top} (I_n - S)^{\top} = (I_n + S^{\top})^{-1} (I_n - S^{\top})$, on a :

$$\begin{aligned}
& A^{\top}GA = G \\
\Leftrightarrow\quad & (I_n + S^{\top})^{-1} (I_n - S^{\top})\, G\, (I_n - S)\, (I_n + S)^{-1} = G \\
\Leftrightarrow\quad & (I_n - S^{\top})\, G\, (I_n - S) = (I_n + S^{\top})\, G\, (I_n + S) \\
\Leftrightarrow\quad & G - S^{\top}G - GS + S^{\top}GS = G + S^{\top}G + GS + S^{\top}GS \\
\Leftrightarrow\quad & S^{\top}G + GS = 0
\end{aligned}$$

Donc i) $\Leftrightarrow$ ii).

Sol.7) a) $ab \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si a a pour coefficient général a_i et b a pour coefficient général b_i, alors ab est la matrice ayant pour terme général a_ib_j.

$ba \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Il a pour unique terme $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = c$.

b) $A^2 = (ab - I_n)(ab - I_n) = abab - 2ab + I_n = acb - 2ab + I_n = cab - 2ab + I_n$

donc
$$\begin{aligned}
A^2 + (2-c)A + (1-c)I_n &= cab - 2ab + I_n + (2-c)(ab - I_n) + (1-c)I_n \\
&= cab - 2ab + I_n + 2ab - 2I_n - cab + cI_n + I_n - cI_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dans la suite, nous assimelerons ba à c.

c) Si $1 - ba \neq 0$, alors $\dfrac{1}{ba-1}\,A^2 + \dfrac{2-ba}{ba-1}\,A = I_n = A\left(\dfrac{1}{ba-1}\,A + \dfrac{2-ba}{ba-1}\,I_n\right)$

donc A est inversible et son inverse est $\dfrac{1}{ba-1}\,A + \dfrac{2-ba}{ba-1}\,I_n$.

Si $1 - ba = 0$, alors $ba = 1$ donc $A^2 + A = 0 = A(A + I_n)$. Par l'absurde, si A était inversible, on aurait $0 = A + I_n$ donc $A = -I_n$ donc $ab = 0$. Mais ni a ni b ne sont nuls car sinon on aurait $ba = 0$. Donc : $\exists\, i, a_i \neq 0$ et $\exists\, j, b_j \neq 0$ donc $a_ib_j \neq 0$, mais a_ib_j est le terme (i, j) de ab. Donc $ab \neq 0$. Contradiction.

Sol.8) a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = A^{2^T}$

Sol.9) $(M^2)_{pq} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(p-1)(k-1)}\omega^{(k-1)(q-1)} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)(p+q-2)}$

$= n$ si $p = q = 1$ ou si $p + q = n + 2$ (deuxième diagonale montante)
$= 0$ sinon

$(M\overline{M})_{pq} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(p-1)(k-1)}\omega^{-(k-1)(q-1)} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)(p-q)} = n\delta_{pq}$ donc $M\overline{M} = nI_n$

Sol.10) a) Si $A^{p+1} = 0$ et $B^{q+1} = 0$, on montre que $(A + B)^{p+q+1} = 0$.
En effet :

$(A + B)^{p+q+1} = \sum_{k=0}^{p+q+1} \binom{p+q+1}{k} A^k\, B^{p+q+1-k}$ car A et B commutent,

et $A^k = 0$ si $k \geq p + 1$, $B^{p+q+1-k} = 0$ si $p + q + 1 - k \geq q + 1$ (i.e. $k \leq p$) ce qui recouvre tous les cas.
b) Si $A^{p+1} = 0$, on vérifiera que $(I + A)(I - A + A^2 - \dots + (-1)^pA^p) = I + (-1)^pA^{p+1} = I$, donc l'inverse de $I + A$ est $I - A + A^2 - \dots + (-1)^pA^p$. Pour penser à ce résultat, on peut s'inspirer du développement limité dans $\mathbf{R}$ suivant :

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^px^p + O(x^{p+1})$

c) Pour $n \geq 0$, c'est simplement le développement du binôme de Newton, en tenant compte que les A^k sont nuls si $k > p$.

Pour la puissance $(I + A)^{-1}$, on retrouve la formule du b), sachant que $\binom{-1}{k} = (-1)^k$. On peut ensuite procéder par récurrence. Supposons que $(I + A)^{-n} = \sum_{k=0}^{p} \binom{-n}{k} A^k$, alors :

$(I + A)^{-n-1} = \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{-n}{k} A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k A^k\right)$

et on développe le produit. Le coefficient de A^k dans ce développement est $\sum_{j=0}^{k} \binom{-n}{j}(-1)^{k-j}$. On doit montrer que que ce terme vaut $\binom{-n-1}{k}$. Or, d'une part :

$$\binom{-n-1}{k} = (-1)^k \frac{(n+1)(n+2)...(n+k)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k}{n}$$

et d'autre part :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{-n}{j}(-1)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+j-1}{n-1}(-1)^{k-j} = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{n-1}$$

$$= (-1)^k \binom{n+k}{n}$$

d'après la formule donnant la somme des termes d'une colonne du triangle de Pascal.

d) Supposons que $\lambda_0 I + \lambda_1 A + ... + \lambda_p A^p = 0$.

En multipliant par A^p, on obtient $\lambda_0 A^p = 0$ donc $\lambda_0 = 0$. Il reste $\lambda_1 A + ... + \lambda_p A^p = 0$.

En multipliant par A^{p-1}, on obtient $\lambda_1 A^p = 0$ donc $\lambda_1 = 0$. Il reste $\lambda_2 A^2 + ... + \lambda_p A^p = 0$.

Itérer le procédé.

e) Puisque $A^p \neq 0$, $\exists\, X \in \mathbf{K}^n$, $A^p X \neq 0$. On montrera alors, par une démarche analogue à celle du d), que $(X, AX, ..., A^p X)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbf{K}^n$, donc $p + 1 \leq n$.

Sol.11) Posons $r_0 = b$ et $r_{-1} = a$, de sorte que la relation $r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$ est vraie pour tout k variant de 1 à n.

Par récurrence décroissante sur k :

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k+1} \end{pmatrix}...\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est tel que } x_k r_{k-2} + y_k r_{k-1} = d$$

En effet, pour $k = n$, on a $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -q_n \end{pmatrix}$ sont tels que :

$$x_n r_{n-2} + y_n r_{n-1} = r_{n-2} - q_n r_{n-1} = r_n = d$$

donc la relation est vrai pour $k = n$. Si la relation $x_k r_{k-2} + y_k r_{k-1} = d$ est vraie à un rang k, alors :

$$\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix}...\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_k \\ x_k - q_{k-1} y_k \end{pmatrix}$$

donc $\quad x_{k-1}r_{k-3} + y_{k-1}r_{k-2} = y_k r_{k-3} + (x_k - q_{k-1} y_k) r_{k-2} = x_k r_{k-2} + y_k(r_{k-3} - q_{k-1} r_{k-2})$

or $\quad r_{k-3} = r_{k-2}q_{k-1} + r_{k-1}$

donc $\quad x_{k-1}r_{k-3} + y_{k-1}r_{k-2} = x_k r_{k-2} + y_k r_{k-1} = d$

et la relation est bien vérifiée au rang $k - 1$. Donc pour $k = 1$, on obtient :

$$x_1 r_{-1} + y_1 r_0 = d$$

mais $x_1 = x$, $y_1 = y$, $r_{-1} = a$, $r_0 = b$. Donc $ax + by = d$.

Ainsi, le produit de matrices donnent les coefficients x et y de l'identité de Bézout (cf le chapitre d'arithmétique dans L1/ARITHMTQ.PDF).

Sol.12) a) Par récurrence : si $AB^n - B^nA = nB^{n-1}$, alors $AB^n = B^nA + nB^{n-1}$

donc $\quad AB^{n+1} = B^nAB + nB^n$

donc $\quad AB^{n+1} = B^n(BA + I_N) + nB^n = B^{n+1}A + (n+1)B^n$

b) La famille $(I, B, B^2, ..., B^m)$ est nécessairement liée dès que son cardinal $m + 1$ dépasse la dimension N^2 de l'espace $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. Parmi toutes ces familles liées, on prend celle de cardinal minimal. Il existe donc des scalaires $\lambda_0, ..., \lambda_m$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{n=0}^{m} \lambda_n B^n = 0$$

Donc $\quad 0 = A\,(\sum_{n=0}^{m} \lambda_n B^n) - (\sum_{n=0}^{m} \lambda_n B^n)A = \sum_{n=0}^{m} \lambda_n (AB^n - B^nA)$

$$= \sum_{n=1}^{m} n\lambda_n B^{n-1}$$

On obtient une relation nulle entre les puissances de B, de cardinal strictement inférieur à m. D'après la minimalité de m, cela impose que les $n\lambda_n$, $1 \leq n \leq m$ soient tous nuls. Mais alors, en reportant dans $\sum_{n=0}^{m} \lambda_n B^n = 0$, on a $\lambda_0 I_N = 0$, donc $\lambda_0 = 0$, en contradiction avec le fait qu'au moins un des λ_i doit être non nul.

c) $(u \circ v - v \circ u)(P) = (XP)' - XP' = P$, donc $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}$. L'impossibilité trouvée en b) ne s'applique pas à des espaces vectoriels de dimension infinie.

Sol.13) $v^{\mathsf{T}}A^{-1}u$ est une matrice 1×1. Notons c son unique coefficient. Le sens à donner au dénominateur $1 + v^{\mathsf{T}}A^{-1}u$ est $1 + c$. On a alors :

$$\begin{aligned}(A + uv^{\mathsf{T}})(A^{-1} - \frac{1}{1+c} A^{-1}uv^{\mathsf{T}}A^{-1}) &= I_n - \frac{1}{1+c} uv^{\mathsf{T}}A^{-1} + uv^{\mathsf{T}}A^{-1} - \frac{1}{1+c}\ uv^{\mathsf{T}}A^{-1}uv^{\mathsf{T}}A^{-1} \\ &= I_n - \frac{1}{1+c} uv^{\mathsf{T}}A^{-1} + uv^{\mathsf{T}}A^{-1} - \frac{1}{1+c}\ ucv^{\mathsf{T}}A^{-1} \\ &= I_n + (-\frac{1}{1+c} + 1 - \frac{c}{1+c})\ uv^{\mathsf{T}}A^{-1} \\ &= I_n\end{aligned}$$

D'où le résultat. Pour $A = I_n$ et $u = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $A + uv^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2 & ... & 1 \\ ... & & ... & \\ 1 & 1 & ... & 2 \end{pmatrix}$ et son inverse vaut :

$$I_n - \frac{1}{1 + v^{\mathsf{T}}u} uv^{\mathsf{T}} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -1 & ... & -1 \\ -1 & n & ... & -1 \\ ... & & ... & \\ -1 & -1 & ... & n \end{pmatrix}.$$

Sol.14) Montrons que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des scalaires tels que : $\forall\ i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, a_{ij} = 0$. Soit p un indice tel que : $\forall\ i, |\lambda_i| \leq |\lambda_p|$, et supposons par l'absurde que $\lambda_p \neq 0$. On a :

$$\lambda_p a_{pp} = -\sum_{j\neq p} \lambda_j\, a_{ij}$$

donc $\quad |\lambda_p|\,|a_{pp}| \leq \sum_{j\neq p} |\lambda_j|\,|a_{ij}| \leq \sum_{j\neq p} |\lambda_p|\,|a_{ij}| = |\lambda_p| \sum_{j\neq p} |a_{ij}| < |\lambda_p|\,|a_{pp}|$

ce qui est absurde. Donc $\lambda_p = 0$, ainsi que tous les autres λ_j.
L'exercice montre que, si une matrice n'est pas trop éloignée d'une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls (dans le sens où la somme des valeurs absolues de tous les coefficients d'une ligne hors diagonale est plus petite que la valeur absolue du coefficient diagonal), alors la matrice est inversible. Par exemple : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible car suffisamment proche de $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

◆