# CALCUL DIFFERENTIEL 1

## *PLAN*



## *I : Limites et continuité*

### 1- Fonctions à valeurs réelles

Dans ce chapitre, on considère des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ :

$$f : x = (x_1, ..., x_n) \to f(x_1, ..., x_n)$$

Nous aurons besoin des notions suivantes.

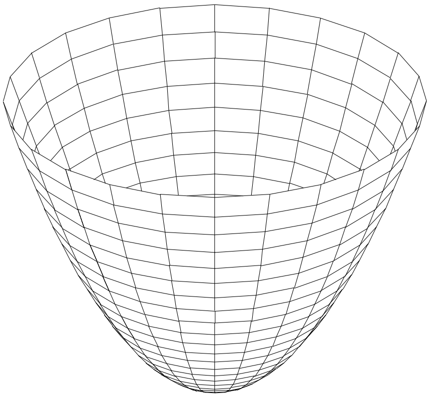
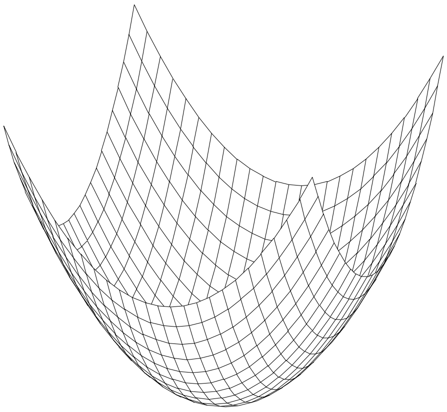
- La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ est remplacée dans $\mathbb{R}^n$ par la notion de norme. La norme usuelle est la **norme euclidienne** définie par $\| (x_1, ..., x_n) \| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. Mais dans le chapitre L2/EVNORME.PDF, on introduit d'autres normes possibles. On montre dans ce chapitre qu'en dimension finie, on peut utiliser n'importe quelle norme pour définir les notions de limites, de continuité, de dérivation. Parfois, il est plus facile dans certains calculs de prendre la norme $\| (x_1, ..., x_n) \| = |x_1| + ... + |x_n|$.
- Un intervalle $]x - r, x + r[$ centré en $x$ dans $\mathbb{R}$ est remplacé dans $\mathbb{R}^n$ par la notion de boule. La **boule** de centre $x$ élément de $\mathbb{R}^n$ et de rayon $r$ est l'ensemble $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \| x - y \| < r\}$. Un **voisinage** de $x$ est une partie qui contient une boule $B(x, r)$. Intuitivement, si on considère un voisinage de $x$, on peut se déplacer à petite distance de $x$ tout en restant dans ce voisinage.

- Un intervalle ouvert $]a, b[$ ou $]-\infty, b[$ ou $]a, +\infty[$ ou même $]-\infty, \infty[$ est remplacé dans $\mathbb{R}^n$ par la notion d'ouvert. U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x$ élément de U, il existe une boule B($x$, R) incluse dans U. Intuitivement, si on considère un élément $x$ quelconque de U, on peut se déplacer à petite distance autour de $x$ tout en restant dans U. Cette notion est essentielle pour définir ce qu'est la limite d'une fonction.

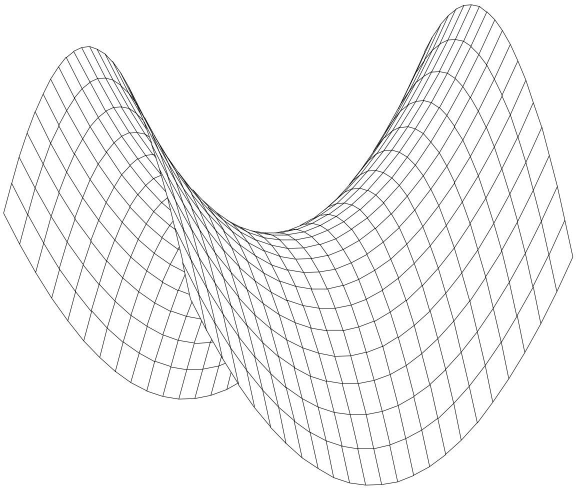
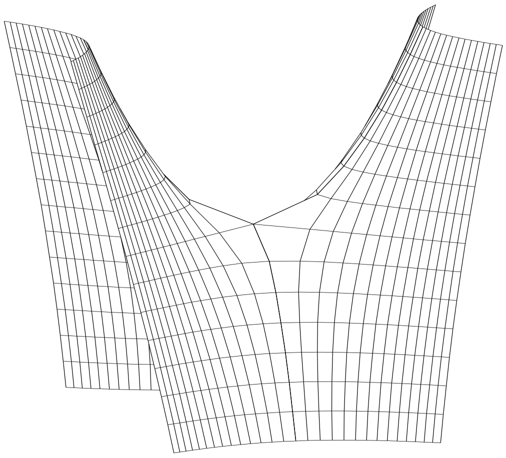
*EXEMPLES* :

❑ La fonction $(x, y) \to \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ est définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. D'une manière générale, si une fonction $f$ de plusieurs variables n'est pas définie sur $\mathbb{R}^n$ tout entier, on la définira sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

❑ Dans le cas où $n = 2$, une fonction $f$ à valeurs réelles peut donner lieu à une représentation graphique dans $\mathbb{R}^3$ de la surface $z = f(x, y)$. Voici deux représentations de la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ :

❑ Deux représentations de la surface d'équation $z = x^2 - y^2$ :

Les fonctions $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ peuvent également être représentées dans le plan par des **lignes de niveaux** $f(x, y) = \text{Cte}$. Les fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ sont représentées par des **surfaces de niveau** d'équation $f(x, y, z) = \text{Cte}$.
L'utilisation des lignes ou surfaces de niveau dans divers domaines est très fréquente. Citons, entre autres :

isobares : lignes de même pression
isobathes : lignes de même profondeur
isoclines : lignes de même inclinaison magnétique
isogones : lignes de même déclinaison magnétique
isohyètes : lignes de même précipitation moyenne
isohypses : ligne de même altitude
isothermes : lignes de même température

**2- Limites et continuité**

Ces notions figurent également dans le chapitre L2/EVNORME.PDF.

**DEFINITION**

*Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et* $x_0$ *un élément de* U. *On dit que $f$* **tend vers la limite** *$l$ quand $x$ tend vers $x_0$ si* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, \| x - x_0 \| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

*$f$ est* **continue** *en $x_0$* si $l = f(x_0)$.

On voit qu'on a calqué la définition de la limite ou de la continuité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en remplaçant la valeur absolue par une norme.

Il convient de noter qu'il ne suffit pas de raisonner sur les des applications partielles définies ainsi :

$x_i \to f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$

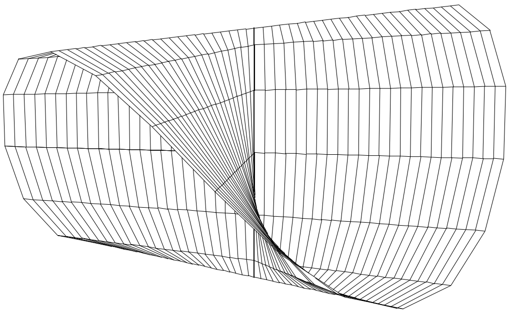
pour conclure à la continuité ou à l'existence d'une limite de $f$ en un point donné.

*EXEMPLE* :

❑ Soit $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$. On note que $f(x, 0) = 0$ et que $f(x, x) = 1$ de sorte que, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il n'existe aucun $l$ permettant de vérifier :

$$\exists \alpha > 0, \forall a, \| a \| < \alpha \Rightarrow |f(a) - l| < \frac{1}{2}$$

puisqu'on doit avoir en même temps $|0 - l| < \dfrac{1}{2}$ et $|1 - l| < \dfrac{1}{2}$.



La fonction n'admet donc pas de limite en (0, 0). Cependant, les deux applications partielles $x \to f(x, 0)$ et $y \to f(0, y)$ admettent une limite en 0 puisqu'elles sont identiquement nulles.

Comment alors, procéder pour déterminer une limite ? Pratiquement, on se ramène au voisinage de 0 en effectuant un changement de variable $x = x_0 + h$. S'il existe une fonction $g$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\lim\limits_{r\to 0} g(r) = 0$ et $\forall\ h,\ \left|f(x_0 + h)\right| \leq g(\| h \|)$ , alors on peut conclure que $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = 0$. En effet :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0, \| h \| < \alpha \Rightarrow\ g(\| h \|) < \varepsilon\ \Rightarrow \left|f(x_0 + h)\right| < \varepsilon$$

On peut utiliser une norme quelconque, en raison de l'équivalence des normes en dimension finie (voir le chapitre L2/EVNORME.PDF sur cette question).

*EXEMPLE* :

❑ $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Si on note $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \| (x, y) \|$ , on a $\left|f(x, y)\right| \leq r$. La fonction admet donc une limite nulle en (0, 0). (On a ici $g(r) = r$)

En ce qui concerne la continuité, on utilise les trois résultats suivants :

- Les fonctions composantes $(x_1, ..., x_i, ..., x_n) \to x_i$ sont continues (utiliser directement la définition ou bien utiliser le fait qu'elles sont linéaires en dimension finie, et toute application linéaire en dimension finie est continue, résultat montré dans L2/EVNORME.PDF).
- La somme, produit, quotient, composée de fonctions continues est continue.

*EXEMPLE* :

❑ La fonction $(x, y, z) \to \dfrac{x^2 - 3y}{e^z + 3xyz}$ est continue sur son ensemble de définition.

**3- Fonctions à valeurs vectorielles**

Considérons cette fois une fonction $f$ d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ :

$$x = (x_1, ..., x_n) \to f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ f_2(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ f_p(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

Prenons dans $\mathbf{R}^p$ la norme $\| (y_1, ..., y_p) \| = \left|y_1\right| + ... + \left|y_p\right|$. Il est équivalent de dire que $f$ admet une limite ou que chacune de ses composantes $f_i$ en admet une. Si $f(x)$ admet une limite $l = \begin{pmatrix} l_1 \\ ... \\ l_p \end{pmatrix}$ quand $x$ tend vers $a$, alors les inégalités :

$$\left|f_i(x) - l_i\right| \leq \| f(x) - l \|$$

montre que chaque composante $f_i$ admet pour limite $l_i$ quand $x$ tend vers $a$.

Réciproquement, si chaque composante $f_i(x)$ admet pour limite $l_i$ quand $x$ tend vers $a$, alors la formule :

$$\| f(x) - l \| = \sum_{i=1}^{p} \left| f_i(x) - l_i \right|$$

montre que $f$ admet pour limite $l$. Il en est de même pour la continuité.

Cette constatation est importante, car elle signifie que, pour étudier une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, il suffit d'étudier $p$ fonctions de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. La multiplicité des composantes ne porte que sur l'espace de départ.

## II : Dérivation

### 1- Dérivées partielles

Les fonctions qui suivent sont supposées définies sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$. Soit $f$ une fonction définie de U dans $\mathbf{R}$, et soit $a = (a_1, ..., a_n)$ un point de cet ouvert. On appelle dérivées partielles de $f$ en $a$ les dérivées des applications partielles suivantes, si elles existent :

$x_1 \to f(x_1, a_2, ..., a_n)$ dont la dérivée en $a_1$ est notée $\partial_1 f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)$

...

$x_i \to f(a_1, ..., x_i, ..., a_n)$ dont la dérivée en $a_i$ est notée $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

...

$x_n \to f(a_1, ..., a_{n-1}, x_n)$ dont la dérivée en $a_{n-1}$ est notée $\partial_n f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)$

On dérive donc $f$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ composante en considérant les autres composantes comme constantes. Si $f$ est continue sur U ainsi que chaque dérivée partielle, on dit que $f$ est de **classe $C^1$** sur U.

*EXEMPLE* :

❑ $f(x, y) = 2x^3y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2y^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x^3y$

L'intérêt des dérivées partielles est qu'elles permettent un développement limité de $f$ d'une fonction $C^1$ au voisinage de chaque point. Ainsi, avec l'exemple ci–dessus :

$$f(x + h, y + k) = 2(x + h)^3(y + k)^2 = 2(x^3 + 3x^2h + 3xk + h^3)(y^2 + 2yk + k^2)$$

$$= 2x^3y^2 + 6x^2y^2h + 4x^3yk + o(\| (h, k) \|)$$

où $o(\| (h, k) \|)$ est une fonction de la forme $\| (h, k) \| \, \varepsilon(h, k)$ avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$

$$= f(x, y) + \underbrace{h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}_{\text{partie linéaire en } (h,\, k) \text{ de la variation de f}} + o(\| (h, k) \|)$$

**PROPOSITION** :

*Soit $f$ de classe $C^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$. Alors, pour tout élément $a$ de U, et tout vecteur $h$ tel que $a + h$ appartienne à U, on a :*

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(\| h \|)$$

*Cette expression s'appelle développement limité de f à l'ordre* 1.

<u>Démonstration</u> :

❑ On fera la démonstration dans le cas $n = 2$ pour simplifier les notations. On applique deux fois le théorème des accroissements finis pour les fonctions respectives $x \to f(x, a_2 + h_2)$, et $y \to f(a_1, y)$ :

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)$$

$$= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2) \qquad \text{avec } 0 \le \theta_1 \le 1 \text{ et } 0 \le \theta_2 \le 1$$

$$= h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + o(1)\right) + h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + o(1)\right) \qquad \text{par continuité de } \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

où o(1) désigne des fonctions de $(h_1, h_2)$ qui tendent vers 0 lorsque $(h_1, h_2)$ tend vers (0, 0). On trouve bien l'expression annoncée, car, en prenant la norme euclidienne par exemple :

$$\| h_i\, o(1) \| \le \| h \| \, \| o(1) \| = o(\| h \|)$$

L'application linéaire $h = (h_1, ..., h_n) \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, h_i$ s'appelle **différentielle** de $f$ en $a$, notée d$f(a)$ ou d$f_a$. Par ailleurs, les applications $h = (h_1, ..., h_n) \to h_i$ sont notées d$x_i$, de sorte que :

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i$$

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, \mathrm{d}x_i$$

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i$$

La notion de différentielle et de fonction différentiable est approfondie dans le chapitre L2/CALCDIF2.PDF.

*EXEMPLES* :

❑ Considérons une boîte en forme de parallélépipède, de dimensions 10 cm × 8 cm × 6 cm. Sa paroi a pour épaisseur 2 mm. Quel est le volume approximatif de matière utilisée pour fabriquer cette boîte ?

Sa surface latérale est de 2 × (10 × 8 + 10 × 6 + 8 × 6) = 376 $\text{cm}^2$. Le volume approximatif de matière utilisée est de 376 × 0,2 = 75,2 $\text{cm}^3$.

Le calcul ainsi fait est en fait un calcul de différentielle. Le volume extérieur de la boîte est $V(x, y, z = xyz)$ avec $x = 10$ cm, $y = 8$ cm et $z = 6$ cm. Si $h$ est l'épaisseur des parois, son volume intérieur est $V(x - 2h, y - 2h, z - 2h)$. Or on a :

$$V(x - 2h, y - 2h, z - 2h) = V(x, y, z) - 2h \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) - 2h \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) - 2h \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) + o(h)$$

donc, au premier ordre :

$$V(x, y, z) - V(x - 2h, y - 2h, z - 2h) = 2h \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z)\right)$$

$$= 2h\,(yz + xz + xy)$$
correspondant au produit de l'aire de la surface latérale la boîte par son épaisseur, comme nous l'avons fait précédemment.

❑ $f(x, y) = x^y \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \ln(x) \times x^y$

En $a = (1, 2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = 2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$

$\mathrm{d}f(1,2) = 2\mathrm{d}x$

ainsi $1{,}02^{1.99} = 1{,}04019...$

alors que le calcul du développement limité au premier ordre donne :

$1 + 2 \times 0{,}02 = 1{,}04.$

En $a = (2, 2)$, on a $\mathrm{d}f(2,2) = 4\,\mathrm{d}x + 4\ln(2)\,\mathrm{d}y$

ainsi $1{,}98^{2{,}01} = 3{,}94727...$

alors que le calcul du développement limité au premier ordre donne :

$4 - 4 \times 0{,}02 + 4\ln(2) \times 0{,}01 = 3{,}9477...$

❑ Si $f$ n'est pas $C^1$, on ne peut pas conclure sur l'existence du développement limité, même si les dérivées partielles existent. Il n'est même pas certain que $f$ soit continue. Par exemple, pour la fonction $f : (x, y) \to \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, on a, pour tout $x$, $f(x, 0) = 0$, donc $f$ admet une dérivée partielle nulle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0, 0)$, et de même pour $y$. Pourtant, $f$ est discontinue en 0, comme nous l'avons vu plus haut.

En physique, on note souvent de la même façon les fonctions et les valeurs qu'elles prennent. Par exemple $E(x, y, z)$ est moins la valeur prise en $(x, y, z)$ par une fonction E que cette énergie elle-même, et le physicien abrège généralement $E(x, y, z)$ en E. Alors que le mathématicien considère $\mathrm{d}x$ comme la fonction qui à $(h_1, h_2, h_3)$ associe la variation $h_1$ de $x$, $\mathrm{d}x$ est considéré par le physicien comme la variation de $x$ elle-même. De même, le mathématicien considère $\mathrm{d}f$ comme l'application qui, à une variation de position $h$, associe la partie linéaire de la variation de $f$, alors que le physicien considère $\mathrm{d}f$ comme cette variation elle-même, d'autant plus que $h$ peut être choisi suffisamment petit pour rendre l'erreur $o(\| h \|)$ indécelable par les instruments de mesure.

**2- Gradient**

Dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne (voir le chapitre L2/ESPEUCL.PDF), on peut voir la quantité $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ h_i$ comme le produit scalaire du vecteur $h = (h_1, ..., h_n)$ par le vecteur de composantes $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Ce dernier vecteur s'appelle le **gradient** de $f$ en $a$, noté $\mathbf{grad}(f)(a)$ ou $\nabla f(a)$ (en physique). On a donc :

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \langle h, \mathbf{grad}(f)(a)\rangle$$

ou encore :

$$f(a + h) = f(a) + \langle h, \mathbf{grad}(f)(a)\rangle + o(\| h \|)$$

On remarquera que, pour un déplacement $h$ de longueur donnée, la variation $df(a)(h)$ de $f$ (au premier ordre en $h$) est maximale lorsque $h$ est colinéaire à $\boldsymbol{grad}(f)$, nulle si elle est orthogonale à $\boldsymbol{grad}(f)$. Cela s'interprète géométriquement par le fait que les surfaces de niveaux $f(x_1, ..., x_n) = \text{Cte}$ sont orthogonales au gradient. La direction du gradient indique la direction suivant laquelle $f$ varie le plus vite, la norme du gradient mesurant l'intensité de cette variation. Par exemple, si $f$ est l'altitude en un point de latitude et longitude $(x, y)$, $\boldsymbol{grad}(f)$ est le vecteur orienté dans la direction de la ligne de plus grande pente, de norme égale à la pente locale. Au contraire, si on se déplace orthogonalement au gradient, $f$ ne varie pas. On suit une ligne de niveau.

Cette interprétation est utilisée :

❑ en mécanique : $f = -\boldsymbol{grad}(\mathrm{E})$ où E est l'énergie potentielle. $f$ indique dans quel sens l'énergie potentielle décroît le plus vite. $f$ est la force dérivant de l'énergie potentielle E.

Par exemple, la théorie Newtonienne de la gravitation considère que la Terre est soumise à une force centrale dirigée vers le Soleil de la forme $f = \dfrac{\mathrm{C}}{r^2}\,\boldsymbol{u}$ où $\boldsymbol{u}$ est un vecteur unitaire dirigé du Soleil vers la Terre, $(\mathrm{C} < 0)$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, distance du Soleil placé à l'origine au point considéré. Soit $\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{C}}{r}$. On a :

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x} = -\frac{\mathrm{C}}{r^2} \times \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\mathrm{C}x}{r^3}$$

de même pour les autres dérivées. D'où $f = -\boldsymbol{grad}(\mathrm{E})$.

Autre exemple, au voisinage d'un point à la surface de la Terre, si $\mathrm{E} = mgz$, où $z$ est l'altitude, $g$ l'attraction de la pesanteur et $m$ la masse d'un objet, alors $f = -mg\boldsymbol{k}$ est le poids de cet objet. E est l'énergie potentielle de pesanteur.

Dans le cas de la Terre dans son ensemble, il est défini en chaque point un champ $\boldsymbol{g}$ de pesanteur dérivant d'un potentiel. La surface de niveau, perpendiculaire à tout point à ce champ $\boldsymbol{g}$ de pesanteur, et correspondant au niveau moyen 0 de la mer, est appelé *géoïde*. On peut l'approximer par un ellipsoïde, dont le géoïde peut cependant différer en certains lieux par plusieurs centaines de mètres d'altitude. L'*International Association of Geodesy* a défini le *Geodetic Reference System* IAG GRS 1980 en convenant des longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde, à savoir :

$a$ = 6 378 137 $m$ à l'équateur

$b$ = 6 356 752,3141 $m$ aux pôles

Ces longueurs diffèrent de modèles d'ellipsoïdes précédemment définis, par exemple celui de Hayford en 1909 pour lequel :

$a$ = 6 378 388 $m$

$b$ = 6 356 911,9461 $m$

et celui de Clarke en 1880, pour lequel :

$a$ = 6 378 249,2 $m$

$b$ = 6 356 515,0 $m$

Le système géodésique français NTF (*Nouvelle Triangulation Française*) utilisait encore récemment l'ellipsoïde de Clarke, mais le décret n°2000-1276 du 26 décembre 2000 définit un nouveau réseau, le RGF93 (*Réseau Géographique Français* de 1993), basé sur l'ellipsoïde IAG GRS 1980. Cet ellipsoïde est en effet utilisé au niveau mondial par le WGS84 (*World Geodesic System* de 1984) sur lequel est basé le positionnement GPS. Quant à l'Europe, elle utilisait encore l'ellipsoïde de Hayford pour sa base de données ED50 (*Europe Datum* de 1950) avant de s'aligner elle aussi sur le nouvel ellipsoïde dans le cadre de l'ETRS89 (*Europe Terrestrial Reference System* de 1989). L'utilisation d'un même ellipsoïde au niveau français, européen ou mondial est une nécessité afin d'éviter les différences de positionnement selon les systèmes utilisés. L'IGN (*http://www.ign.fr*) donne l'exemple suivant du positionnement d'un même point :

| | | | |
|---|---|---|---|
| NTF | Ellipsoïde de Clarke | 7°44´14.0" | 48°36´00.0" |
| ED50 | Ellipsoïde de Hayford | 7°44´16.4" | 48°36´03.0" |
| WGS84 | Ellipsoïde IAG GRS 1980 | 7°44´12.2" | 48°35´59.9" |

Le décalage pourrait atteindre plusieurs centaines de mètres si on prenait les mêmes coordonnées dans les trois systèmes.

❑ en électricité : $\boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{grad}(V)$ où V est le potentiel électrique. ***E*** indique dans quelle direction le potentiel décroît le plus vite. ***E*** est le champ électrique. Cet exemple est très ressemblant au précédent, car une particule de charge $q$ placée dans un champ électrique ***E*** est soumise à une force $q\boldsymbol{E}$, qui dérive donc de l'énergie potentielle $q$V.
En électrostatique, dans un conducteur chargé en équilibre, celui-ci se trouve à un potentiel constant. Le champ est nul à l'intérieur du conducteur, et le champ extérieur est orthogonal à la surface, qui est une surface de niveau ayant le même potentiel en chacun de ses points.

L'intérêt du potentiel est que sa connaissance suffit pour reconstituer le champ de vecteurs, et que les calculs éventuels sur des quantités scalaires sont plus faciles que les calculs sur des quantités vectorielles.

Donnons un dernier exemple : on considère la Terre comme un fluide en équilibre hydrostatique de masse volumique constante (hypothèses très réductrices !!). Dans ce cas :

$$\boldsymbol{grad}(P) = \mu\boldsymbol{g}$$

où P est la pression, μ la masse volumique et ***g*** l'accélération de la pesanteur au point considéré. L'accélération de la pesanteur indique dans quel sens augmente la pression. Elle est orthogonale aux surfaces isobares et la variation de pression est d'autant plus importante que μ est grand. Ainsi, au voisinage de la surface terrestre, on a, en fonction de la profondeur $z$ :

$$\frac{dP}{dz} = \mu g \Rightarrow P = P_0 + \mu g z \text{ (avec } z \text{ orienté vers le bas)}$$

Plus généralement, si R est le rayon de la Terre (considérée comme sphérique ici), $x$ la distance du point considéré au centre et $g_0$ l'accélération à la surface de la Terre, on a $g = \frac{g_0 x}{R}$. En effet, l'accélération gravitionnelle vaut à la surface $g_0 = \frac{GM}{R^2}$ (avec G constante universelle de gravitation, M masse de la Terre), soit $\frac{4}{3}\pi R^3\mu \times \frac{G}{R^2}$ ou encore $\frac{4\pi\mu GR}{3}$ alors qu'à la distance $x$, on a $g = \frac{4\pi\mu Gx}{3}$.
d'où :

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\mu g_0 x}{R} \Rightarrow P = P_0 - \mu g_0 \frac{x^2}{2R} + \mu g_0 \frac{R}{2}$$

Au centre de la Terre, $x = 0$ et $P = P_0 + \mu g_0 \frac{R}{2}$.

Application numérique : R = 6370 km, M = 6 $10^{24}$ kg, G = 6,67 $10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$

P vaut environ 174 $10^9$ Pa. La valeur trouvée dans ce modèle extrêmement simplifié est en fait deux fois plus petite que la valeur actuellement estimée dans des modèles plus élaborés, mais l'ordre de grandeur est bon.

Si on pose $x = \mathrm{R} - z$, on obtient : $\mathrm{P}_0 + \mu g_0(z - \dfrac{z^2}{2\mathrm{R}})$ soit un écart par rapport à $\mathrm{P}_0 + \mu g z$ trouvé plus haut égal à $- \mu g_0 \dfrac{z^2}{2\mathrm{R}}$.

**3- Dérivées de fonctions composées**

a) Considérons d'abord le cas suivant, permettant d'alléger les notations :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathbf{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

$$t \to \varphi(t) \ \to f(\varphi(t)) = g(t)$$

On suppose que $f$ est $\mathrm{C}^1$, de même que $\varphi$. On notera $\varphi_1$ et $\varphi_2$ les deux composantes de $\varphi$. Alors $g$ est $\mathrm{C}^1$ et :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t))\ \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t))\ \varphi_2'(t)$$

En effet :

$$\begin{aligned}
g(t+h) &= f(\varphi_1(t+h), \varphi_2(t+h)) \\
&= f(\varphi_1(t) + \underbrace{h\varphi_1'(t) + \mathrm{o}(h)}_{\mathrm{H}_1}, \varphi_2(t) + \underbrace{h\varphi_2'(t) + \mathrm{o}(h)}_{\mathrm{H}_2}) \\
&= f(x_1 + \mathrm{H}_1, x_2 + \mathrm{H}_2) \text{ en posant } x_1 = \varphi_1(t) \text{ et } x_2 = \varphi_2(t) \\
&= f(x_1, x_2) + \mathrm{H}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \mathrm{H}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \mathrm{o}(\|(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)\|) \\
&= g(t) + h(\varphi_1'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2) + \varphi_2'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, x_2)) + \mathrm{o}(h)
\end{aligned}$$

car $\| (\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2) \| = |h| \mathrm{O}(1)$ où $\mathrm{O}(1)$ est borné. Donc $\mathrm{o}(\|(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)\|) = \mathrm{o}(h)$

Donc $g$ est dérivable en $t$ de dérivée l'expression annoncée. On notera que, si la courbe $t \to \varphi(t)$ est incluse dans une ligne de niveau de $f$, alors $g = f \circ \varphi$ est constante, de sorte que la quantité $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t))\ \varphi_1'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t))\ \varphi_2'(t)$ est nulle. Cela signifie que le gradient de $f$ de composantes $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ en $\varphi(t) = (x_1, x_2)$ est orthogonal à la tangente à la ligne de niveau, dont la tangente au point $(x_1, x_2)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix}$. Ce fait a déjà été signalé.

b) Le résultat précédent, ainsi que sa démonstration, se généralise (avec $n$ indices au lieu de 2) sous la forme suivante :

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}^n \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "g"] & \varphi(t) \arrow[r] & f(\varphi(t)) = g(t) \end{tikzcd}$$

On a alors :

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))\ \varphi_i'(t)$$

On peut aussi écrire cette dérivée sous la forme $g'(t) = \langle \mathbf{grad}(f)(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle$

c) Considérons ensuite le cas :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^p \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathbf{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

$$x \to y = \varphi(x) \to f(y) = f \circ \varphi(x) = g(x)$$

$$g(x) = g(x_1, \ldots, x_p) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

**PROPOSITION**

*Si $f$ et $\varphi$ sont $C^1$, alors il en est de même de $g$, et, pour tout $i$ variant de 1 à $p$ :*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(x))\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x)$$

<u>Démonstration</u> :

❑ En effet, $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ est la dérivée de l'application partielle en $x_i$, et l'on applique le résultat du b) sur la fonction partielle $x_1 \to g(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

On abrège parfois la règle de dérivation des fonctions composées sous la forme :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

avec la convention suivante : étant donné que $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ et les $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$ sont des fonctions de $x$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial y_k}$ est fonction de $y$, le terme $\dfrac{\partial f}{\partial y_k}$ ne peut être compris que comme la composée $x \to y = \varphi(x) \to \dfrac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(x))$.

Les notations utilisées en physique sont peut-être plus faciles pour comprendre et mémoriser les formules. Le physicien en effet, ne donne pas de nom aux fonctions mais traite directement avec le nom des variables.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_p \end{pmatrix} \to y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \to z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i}$$

Cette formule est la généralisation de la dérivation des fonctions composées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que le physicien écrit sous la forme $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (*Règle de la chaîne* ou *chain rule* en anglais).

*EXEMPLE* 1 :

❑ Passage en polaire pour $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$(r, \theta) \to (x, y) \to f(x, y) = g(r, \theta)$$

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\sin(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(\theta) \end{array}\right.$$

Ce système permet d'en déduire inversement que, en dehors de l'origine :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\sin(\theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\sin(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\cos(\theta) \end{array}\right.$$

On obtient ainsi l'expression du gradient en polaire :

$$\textbf{\textit{grad}}(f) = \frac{\partial g}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

où $\boldsymbol{e_r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

En physique, les fonctions $f$ et $g$ sont généralement notées de la même façon, la différence des variables étant précisées par l'utilisation d'unités différentes (ex, mètres et mètres pour $(x, y)$ ; mètres et radians pour $(r, \theta)$). Ceci apparaît également dans la situation suivante : une quantité (par exemple l'énergie interne U d'un gaz à une température T, à la pression P, occupant un volume V) peut s'exprimer comme fonction de diverses variables, (T, P) ou (T, V). Dans ce cas, les physiciens sont *obligés* de noter $(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{T}})_{\mathrm{P}}$ et $(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{T}})_{\mathrm{V}}$ les dérivées partielles de U par rapport à T respectivement lorsque les variables sont (T, P) et (T, V). Le problème ne se pose pas en Mathématique, car le mathématicien aurait noté de manière différente les fonctionnelles U = $f$(T, P) et U = $g$(T, V). Il écrirait alors simplement $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{T}}$ ou $\frac{\partial g}{\partial \mathrm{T}}$ sans ambiguïté.

*EXEMPLE* 2 :

❑ $\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R}^4 \xrightarrow{g} \mathrm{G}$

$$t \to \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ t \end{pmatrix} \to g(x, y, z, t)$$

La fonction composée est la fonction $t \to g(x(t), y(t), z(t), t)$. Sa dérivée est $\frac{\partial g}{\partial x} x' + \frac{\partial g}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial z} z' + \frac{\partial g}{\partial t}$.

Ce cas se présente en physique lorsque l'on considère une particule se déplaçant dans un champ scalaire $\mathrm{E}(x, y, z, t)$, où $t$ est le temps. Cela signifie qu'en chaque point de l'espace est définie une fonction E dépendant éventuellement du temps. On souhaite connaître les variations de E que subit la particule, non seulement du fait que E dépend de $t$, mais aussi du fait que la particule se déplace. (On parle alors de dérivée particulaire). Le physicien aura tendance à noter $\mathrm{E}(t)$ la fonction de la seule variable $t$, composée de E et $f$. On a alors :

$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x} x' + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y} y' + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial z} z' + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + \langle \boldsymbol{v}, \nabla \mathrm{E} \rangle$, où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse de la particule, $\nabla \mathrm{E}$ est l'opérateur qui à E associe le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial z} \end{pmatrix}$, autrement dit le gradient, et où $\langle \, , \, \rangle$ est le produit scalaire. $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t}$ désigne la dérivée de la fonction composée, alors que $\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}$ est la dérivée partielle par rapport à $t$ de la fonction initiale. Il est important de distinguer les deux notations.

Le cas d'un champ vectoriel $\boldsymbol{E}$ est identique. Il suffit de raisonner composante par composante. On notera ici :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \langle \boldsymbol{v}, \nabla \rangle \boldsymbol{E}$$

où $\langle \boldsymbol{v}, \nabla \rangle$ est l'opérateur qui, au champ de composantes $\begin{pmatrix} \mathrm{E}_x \\ \mathrm{E}_y \\ \mathrm{E}_z \end{pmatrix}$ associe le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{v}, \nabla \mathrm{E}_x \rangle \\ \langle \boldsymbol{v}, \nabla \mathrm{E}_y \rangle \\ \langle \boldsymbol{v}, \nabla \mathrm{E}_z \rangle \end{pmatrix}$. Un cas important se présente en cinématique des fluides : en tout point du fluide règne un champ des vitesses $\boldsymbol{V}$ de ce fluide, dépendant éventuellement du temps. A l'instant $t$, une particule se trouvant en $(x, y, z)$ possède la vitesse $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}(x, y, z, t)$. Son accélération est, d'après la formule précédente :

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \langle \boldsymbol{V}, \nabla \rangle \boldsymbol{V}$$

qui a pour composantes :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z}) \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On pourra vérifier que cette expression est égale à :

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{grad}(V^2) + \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{V}) \wedge \boldsymbol{V}$$

qui est l'autre expression possible de l'accélération de la particule, avec :

$$\frac{1}{2}\,\boldsymbol{grad}(V^2) = \begin{pmatrix} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ V_x \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial y} \\ V_x \frac{\partial V_x}{\partial z} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial z} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

***Rot*** est un opérateur différentiel appelé **rotationnel**, dont les composantes figurent dans le facteur de gauche ci-après :

$$\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{V}) \wedge \boldsymbol{V} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{V})} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x})V_z - (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})V_y \\ (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})V_x - (\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z})V_z \\ (\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z})V_y - (\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x})V_x \end{pmatrix}$$

Terminons par une propriété :

**PROPOSITION**

*Soit f une fonction* $C^1$ *définie sur un ouvert convexe* U *de* $\mathbb{R}^n$, *à valeurs réelles. Alors f est constante si et seulement si son gradient est identiquement nul.*

U est dit **convexe** si : $\forall a \in U, \forall b \in U, \forall t \in [0, 1], ta + (1 - t)b \in U$. L'ensemble des $ta + (1 - t)b$ lorsque $t$ décrit [0, 1] est noté $[a, b]$. Des exemples de convexes sont donnés par un demi-plan, un disque, etc...

<u>Démonstration</u> :

❑ Si $f$ est constante, toutes ses dérivées partielles sont nulles, donc son gradient est nul.

❑ Réciproquement, si toutes les dérivées partielles sont nulles et si $a$ et $b$ appartiennent à U, alors la fonction $g = t \to f(ta + (1 - t)b)$ a pour dérivée $\langle a - b, \mathbf{grad}(f)(ta + (1 - t)b)\rangle$ (appliquer la règle de dérivation des fonctions composées) donc cette dérivée est nulle puisque le gradient est identiquement nul. $g$ est donc constante, donc $f(a) = g(1) = g(0) = f(b)$, ce qui prouve que la valeur de $f$ ne dépend pas du point choisi.

## 4- Extremum

Si $f$ est définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que $f$ admet un extremum local (maximum ou minimum) en $a = (a_1, ..., a_n)$ élément de U, s'il existe un voisinage de $a$ dans lequel $f$ admet un extremum. Dans ce cas, pour tout $i$, la fonction partielle $x_i \to f(a_1, ..., x_i, ..., a_n)$ admet un extremum en $a_i$ sur un intervalle centré en $a_i$. Par conséquent, pour tout $i$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, ce qu'on peut résumer en énonçant que $\textbf{\textit{grad}}(f)(a) = 0$. Un tel point est dit **point critique**.

Ce n'est qu'une condition nécessaire. Elle n'est pas suffisante (elle est fausse déjà pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exemple : $x^3$ en 0). Etudions de plus près ce qui se passe en dimension $n = 2$. Pour simplifier les notations, on suppose que $a = 0$ et que $f$ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de (0, 0) sous la forme :

$$f(x, y) = f(0, 0) + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + o(r^2)$$

où $r^2 = x^2 + y^2$. Il n'y a pas de termes linéaires car $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ sont supposés être nuls.

- **Cas 1** : la quantité $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ est strictement positive pour tout $(x, y)$ non nul. Cette condition se produit si et seulement si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ et $\alpha > 0$, si et seulement si $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ peut s'écrire comme somme de deux carrés. En effet, dans ce cas, le trinôme considéré comme fonction de $x$ n'admet pas de racine sauf si $x = y = 0$.
  Si on pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, cette expression s'écrit :
  $$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = r^2(\alpha\cos^2(\theta) + \beta\cos(\theta)\sin(\theta) + \gamma\sin^2(\theta))$$
  Lorsque $\theta$ décrit $[0, 2\pi]$, la fonction $\theta \to \alpha\cos^2(\theta) + \beta\cos(\theta)\sin(\theta) + \gamma\sin^2(\theta)$ est continue, strictement positive, donc admet un minimum strictement positif $m$. On a donc :
  $$f(x, y) \geq f(0,0) + r^2 m + o(r^2) = f(0, 0) + r^2(m + o(1)) \geq f(0, 0) \text{ pour } r \text{ assez petit}$$
  Donc $f$ admet un minimum local en (0, 0).
  De même si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ et $\alpha < 0$, si et seulement si $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ s'écrit comme l'opposé d'une somme de deux carrés, $f$ admet un maximum local en (0, 0).
- **Cas 2** : l'expression $(x, y) \to \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ change de signe, ce qui se produit si et seulement si son discriminant est strictement positif, si et seulement si elle peut s'écrire comme différence de deux carrés. Dans ce cas, il n'y a pas d'extremum car si $(x_1, y_1)$ est tel que $\alpha x_1^2 + \beta x_1 y_1 + \gamma y_1^2 > 0$, alors pour $t$ assez petit :
  $$f(tx_1, ty_1) = f(0, 0) + t^2(\alpha x_1^2 + \beta x_1 y_1 + \gamma y_1^2) + o(t^2) > f(0, 0)$$
  et si $(x_2, y_2)$ est tel que $\alpha x_2^2 + \beta x_2 y_2 + \gamma y_2^2 < 0$, alors pour $t$ assez petit :
  $$f(tx_2, ty_2) = f(0, 0) + t^2(\alpha x_2^2 + \beta x_2 y_2 + \gamma y_2^2) + o(t^2) < f(0, 0)$$
- **Cas 3** : l'expression est de signe constant mais sans être dans le cas 1. Cette condition se produit si et seulement si le discriminant $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, si et seulement si l'expression est un carré parfait ou l'opposé d'un carré parfait. Dans ce cas, on ne peut rien conclure.

*EXEMPLES* :

Au voisinage de (0, 0) :

- ❑ Si $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + o(r^2) = (x + \frac{3y}{2})^2 - \frac{5y^2}{4} + o(r^2)$, il n'y a pas d'extremum.
- ❑ Si $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 + o(r^2) = (x + \frac{3y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} + o(r^2)$, il y a minimum local en (0,0)
- ❑ Si $f(x, y) = -x^2 - 3xy - 3y^2 + o(r^2) = -(x + \frac{3y}{2})^2 - \frac{3y^2}{4} + o(r^2)$, il y a maximum local en (0,0)

❑ Si $f(x, y) = y^2 + o(r^2)$, on ne peut rien dire. Considérons par exemple :

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2) = y^2 + o(r^2)$$

Il est faux de dire que, si $y \neq 0$, alors $f(x, y) \sim y^2 \geq 0$, que pour $y = 0$, $f(x, 0) = 3x^4 \geq 0$ et d'en conclure que $f$ admet un minimum en (0, 0). En effet, la première équivalence locale est incorrecte : pour $y \neq 0$, $y^2 + o(r^2) = y^2(1 + o(\frac{r^2}{y^2}))$, mais on ne peut absolument pas conclure que $o(\frac{r^2}{y^2})$ tend vers 0 quand $y$ tend vers 0. D'ailleurs, pour tout $t \neq 0$ :

$$f(t, 2t^2) = t^2 \times (-t^2) < 0$$

et $f$ prend des valeurs négatives dans tout voisinage de (0, 0). Il n'y a pas d'extremum.

**5- Dérivées successives**

Les dérivées partielles premières sont de nouvelles fonctions de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. On peut évidemment itérer le procédé de dérivation, définir des dérivées partielles secondes, et parler de fonctions de **classe C²**, lorsque ces dérivées secondes existent et sont continues, et plus généralement de fonctions de **classe $C^k$** pour des fonctions dont les $k$ premières dérivées partielles existent et sont continues.

On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ ou $\partial_i^2 f$ la dérivée seconde obtenue en dérivant deux fois de suite par rapport à $x_i$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ou $\partial_i \partial_j f$ la dérivée seconde obtenue en dérivant d'abord par rapport à $x_j$ puis à $x_i$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ou $\partial_j \partial_i f$ la dérivée seconde obtenue en dérivant d'abord par rapport à $x_i$ puis à $x_j$. Ces deux dernières dérivées peuvent être différentes. Cependant, la plupart du temps, elles sont égales.

**THEOREME DE SCHWARZ**

*Soit f de classe* $C^2$ *sur un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *Alors, pour tout* $(i, j)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Plus généralement, pour une fonction de classe $C^k$, l'ordre de dérivation des $k$ permières dérivées est sans importance.

Démonstration :

❑ Il suffit de démontrer le théorème de Schwarz dans le cas de deux variables. On prend donc ici $n = 2$. Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Nous voulons montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$. Nous considérons la fonction suivante :

$$\Delta(h_1, h_2) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2)$$

i) Considérons $\Phi_1(t) = f(t, x_2 + h_2) - f(t, x_2)$. On a :

$$\Delta(h_1, h_2) = \Phi_1(x_1 + h_1) - \Phi_1(x_1) = h_1 \Phi_1'(x_1 + \theta h_1) \text{ avec } 0 < \theta < 1$$

en appliquant le théorème des accroissements finis à $\Phi_1$ :

$$\Rightarrow \quad \Delta(h_1, h_2) = h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta h_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta h_1, x_2)\right)$$

$$= h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + \theta h_1, x_2 + \theta' h_2) \text{ avec } 0 < \theta' < 1$$

en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $x_2 \to \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta h_1, x_2)$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\Delta(h_1, h_2)}{h_1h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(x_1, x_2)$, car $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}$ est continue.

ii) On peut également considérer $\Phi_2(t) = f(x_1 + h_1, t) - f(x_1, t)$. Par un raisonnement analogue à celui qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta(h_1, h_2) &= \Phi_2(x_2 + h_2) - \Phi_2(x_2) = h_2\Phi_2'(x_2 + \tau h_2) \text{ avec } 0 < \tau < 1 \\
&= h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \tau h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + \tau h_2)\right) \\
&= h_2h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1 + \tau' h_1, x_2 + \tau h_2) \text{ avec } 0 < \tau' < 1
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\Delta(h_1, h_2)}{h_1h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x_1, x_2)$

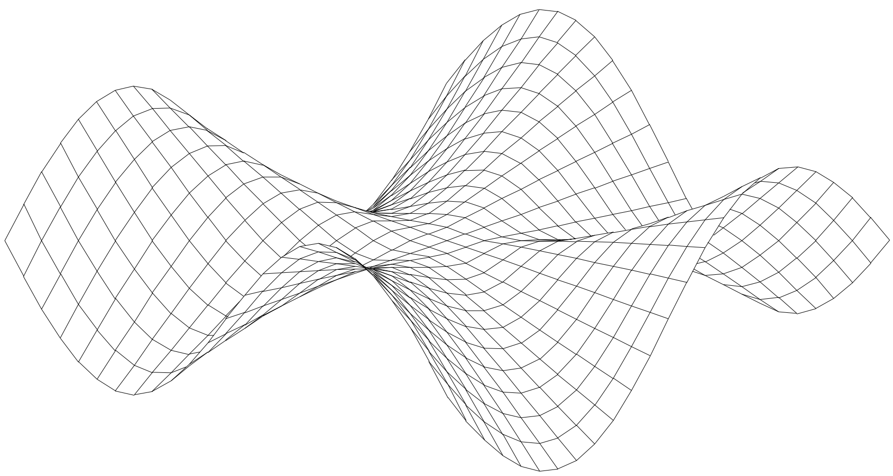
On en déduit donc l'égalité des deux dérivées partielles secondes.

*EXEMPLES* :

❑ Voici un contre–exemple, dans le cas d'une fonction non $C^2$. On considère la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = 0 \end{cases}$$

Ci-dessous, la représentation de la surface $z = f(x, y)$ :



$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} + \dfrac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \text{ en dehors de } (0, 0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \text{ dérivée en 0 de la fonction } x \to f(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$ pour tout $y$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0, 0) = -1$

De même :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - \dfrac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ en dehors de } (0, 0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$ pour tout $x$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$

On remarque donc que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

❑ Il n'est pas nécessaire que la fonction soit $C^2$ pour vérifier le théorème de Schwarz. On vérifiera que la fonction $(x, y) \to \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ donne un exemple qui satisfait en tout point (y compris en (0, 0)) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, mais dont les dérivées partielles secondes sont discontinues en 0.

## *III : Courbes et surfaces*

### 1- Tangente à une courbe du plan

Une courbe de $\mathbb{R}^2$ est le plus souvent donnée :

- par un paramétrage $t \to \varphi(t) \in \mathbb{R}^2$. Si $\varphi'(t)$ est un vecteur non nul, il s'agit du vecteur tangent en $\varphi(t)$ à la courbe. Physiquement, $\varphi(t)$ désigne la position d'un point mobile à l'instant $t$, $\varphi'(t)$ est son vecteur vitesse. Voir le chapitre L2/ARCPARAM.PDF pour une étude plus approfondie.

- par une équation $f(x, y) = 0$ (ou plus généralement = Cte). La courbe ainsi définie s'appelle **ligne de niveau** de la fonction $f$. Soit $m = (a, b)$ un point de la courbe. On a vu que le gradient $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(m) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(m) \end{pmatrix}$ est orthogonal à la tangente à la courbe en $m$. Si ce gradient est non nul, on dit que le point est **régulier**. L'équation de la tangente est alors :

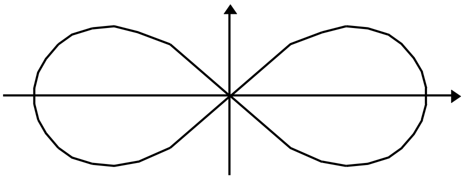
$$\frac{\partial f}{\partial x}(m)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(m)\,(y - b) = 0$$

*EXEMPLES* :

❑ Un paramétrage du cercle unité est donné par $t \to \varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. La tangente en $\varphi(t)$ au cercle est dirigée par le vecteur $\varphi'(t) = -\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, orthogonal au rayon.

❑ Le même cercle a pour équation $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. $\mathbf{grad}(f) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est colinéaire au rayon. La tangente est donc perpendiculaire au rayon. On obtient la même conclusion qu'en utilisant un paramétrage.

❑ Soit la courbe d'équation $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$.
En polaire, on obtient $r^2 = \cos(2\theta)$ :

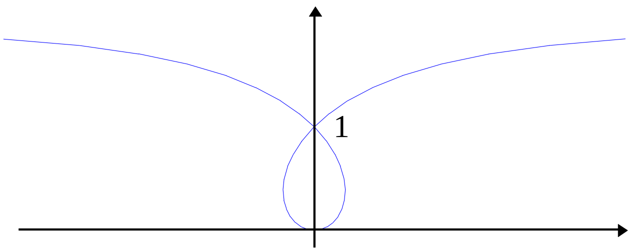


On constate qu'à l'origine, il y a deux tangentes. Ce point n'est pas régulier. De fait, le gradient de $f$ s'y annule.

❑ Un point d'une courbe paramétrée peut parfois être obtenu pour plusieurs valeurs du paramètre. On parle de **point multiple**. Dans ce cas, il peut y avoir plusieurs tangentes en ce point. Considérons par exemple la courbe $t \in ]-\pi, \pi[ \to \varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)\tan(\frac{t}{2}) \\ \sin(t)\tan(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}$, de dérivée :

$$\varphi'(t) = \tan(\frac{t}{2}) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{t}{2})) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

On obtient le même point (0, 1) en $t = \pm\frac{\pi}{2}$. En ce point, il y a deux tangentes $\begin{pmatrix} -1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ :




Cette courbe s'appelle **strophoïde droite** et on pourra vérifier qu'elle vérifie l'équation :

$$y^3 - 2y^2 + y + x^2y - 2x^2 = 0$$

Le gradient du membre de gauche $\begin{pmatrix} 2xy - 4x \\ 3y^2 - 4y + 1 + x^2 \end{pmatrix}$, donnant en principe une normale à la tangente, s'annule précisément en (0, 1).

❑ L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ admet pour tangente en $(x_0, y_0)$ la droite d'équation :

$$(x - x_0)\frac{x_0}{a^2} + (y - y_0)\frac{y_0}{b^2} = 0$$

En effet, le gradient de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$ en $(x_0, y_0)$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{a^2} \\ \dfrac{y_0}{b^2} \end{pmatrix}$.

On peut réécrire l'équation de la tangente sous la forme $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$ puisque $\dfrac{x_0^{\,2}}{a^2} + \dfrac{y_0^{\,2}}{b^2} = 1$.

L'équation de la tangente à une courbe de niveau peut se retrouver par le raisonnement suivant. Supposons qu'au voisinage de $(x_0, y_0)$, la relation $f(x, y) = 0$ permet de définir localement $y$ comme fonction de $x$, soit $y = \Phi(x)$, avec $\Phi$ dérivable. On a donc identiquement $f(x, \Phi(x)) = 0$ sur un intervalle centré en $x_0$. Cette relation permet de donner la valeur de $\Phi'(x)$ en fonction des dérivées partielles de $f$. On dérive par rapport à $x$ la fonction composée :

$$x \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \Phi(x) \end{pmatrix} \to f(x, y) = f(x, \Phi(x))$$

Cette fonction composée étant identiquement nulle, il en est de même de sa dérivée.

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \Phi(x)) + \Phi'(x)\, \frac{\partial f}{\partial y}(x, \Phi(x))$$

Donc : $\Phi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \Phi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \Phi(x))}$ et en particulier pour $x = x_0$ (et $y = \Phi(x_0) = y_0$) :

$$\Phi'(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

(On remarquera que $\Phi'$ s'annule là où $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ s'annule).

Le physicien notera plutôt cette relation sous la forme suivante :

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

Bien noter la présence du signe négatif dans le second membre.

**2- Surfaces**

Une surface dans $\mathbf{R}^3$ est le plus souvent donnée :

- par un paramétrage :

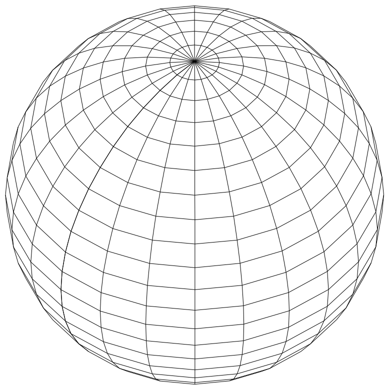
$$(u, v) \to \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = f(u, v)$$

où $f$ est de classe $C^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$.

Un exemple classique d'un tel paramétrage est donnée pour la sphère unité d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ par les coordonnées sphériques :

$$(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi[ \rightarrow \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où, pour la sphère terrestre, $\frac{\pi}{2} - \theta$ est la latitude et $\varphi$ est la longitude.



Dans ce cadre entrent également les surfaces d'équation $z = f(x, y)$, paramétrées par $(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$.

Pour définir un arc paramétré au sein de la surface, il suffit de se donner deux fonctions $t \rightarrow u(t)$, $t \rightarrow v(t)$, indiquant comment les deux paramètres repérant le point de l'arc varient en fonction du paramètre $t$.

Le vecteur tangent à cette courbe en un point considéré est donné par la dérivée de $t \rightarrow \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix}$, à savoir $u'(t) \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ où $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ (respectivement $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$) est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles de $x$, $y$ et $z$ par rapport à $u$ (respectivement $v$). En général, les deux vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ sont linéairement indépendants. Si c'est le cas, les vecteurs tangents en un point M donné à tous les arcs paramétrés passant par M = $f(u, v)$ sont donc tous éléments du plan vectoriel engendré par les deux vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ calculés en M. On définit le plan affine passant par M et de direction le plan vectoriel précédent :

$$\{f(u, v) + h \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + k \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \mid h \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{R}\}$$

comme étant le **plan tangent** en M à la surface. Il s'agit du plan approchant le mieux la surface au voisinage de $f(u, v)$. On reconnaît en effet dans l'expression $f(u, v) + h \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + k \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ le développement limité de $f(u + h, v + k)$ sans son reste en $o(\| (h, k) \|)$. Le vecteur normal à ce plan est obtenu en faisant le produit vectoriel de $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ par $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$.

- par une équation implicite $F(x, y, z) = 0$ (ou plus généralement = Cte). La surface s'appelle **surface de niveau** de la fonction F.

Une courbe incluse dans cette surface est donnée par un paramétrage $t \to \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ suffisamment bien choisi pour que, pour tout $t$, $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Si on dérive cette relation, on obtient :

$$x'(t)\,\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) + y'(t)\,\frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) + z'(t)\,\frac{\partial F}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

ce qui exprime que $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$, vecteur directeur de la tangente à la courbe si ce vecteur est non nul, est orthogonal à $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}$ au point considéré, c'est-à-dire au gradient. Ceci étant valide pour toute courbe incluse dans la surface, on retrouve le fait que, comme pour les courbes, le gradient est orthogonal aux surfaces de niveau.

Etablissons un lien entre les deux situations. Si on suppose que l'une des variables, $z$ par exemple, est, au moins localement, fonction des autres, alors on a, dans un voisinage du point considéré :

$F(x, y, z) = 0$

$\Leftrightarrow \quad z = f(x, y)$ pour une certaine fonction $f$

$\Rightarrow \quad \forall\, x, \forall\, y, F(x, y, f(x, y)) = 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \times \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \times \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ en dérivant par rapport à $x$ et par rapport à $y$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$

Il nous faut donc supposer que $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ est non nulle au point considéré, et nous admettrons que, pour $f$ de classe $C^1$, cette condition est également suffisante pour l'existence locale de $f$.

La surface est localement paramétrée par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$. Les vecteurs du plan tangent au point $(x, y, z)$ considéré sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$. Un vecteur normal au plan tangent est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore, au facteur $\frac{\partial F}{\partial z}$ près, $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}$, et l'on retrouve le fait que le gradient est normal à la surface.

Remarquons au passage que les physiciens noteront les relations $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ sous la forme suivante, en utilisant $x$, $y$ et $z$ comme notation des fonctions elle-mêmes :

$$F(x, y, z) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ et } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Si la relation $F(x, y, z) = 0$ permet de définir $z = \Phi_z(x, y)$, $y = \Phi_y(x, z)$ et $x = \Phi_x(y, z)$, on aura :

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial y}\frac{\partial \Phi_y}{\partial z}\frac{\partial \Phi_z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \times -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \times -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -1$$

relation que les physiciens noteront plutôt sous la forme :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Par exemple, en thermodynamique, on note T la température d'un gaz, P sa pression, V son volume. Ces trois quantités sont reliées par une relation du type $F(V, P, T) = 0$ (par exemple $PV - RT = 0$ dans la modélisation d'une mole de gaz parfait, R étant la constante des gaz parfaits). L'identité précédente s'écrit :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1$$

On définit les coefficients calorimétriques suivants :

$l = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ coefficient calorimétrique de dilatation

$h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ coefficient calorimétrique de compression

On a alors la nécessaire relation mathématique suivante :

$$l\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -T \times \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P} = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = h$$

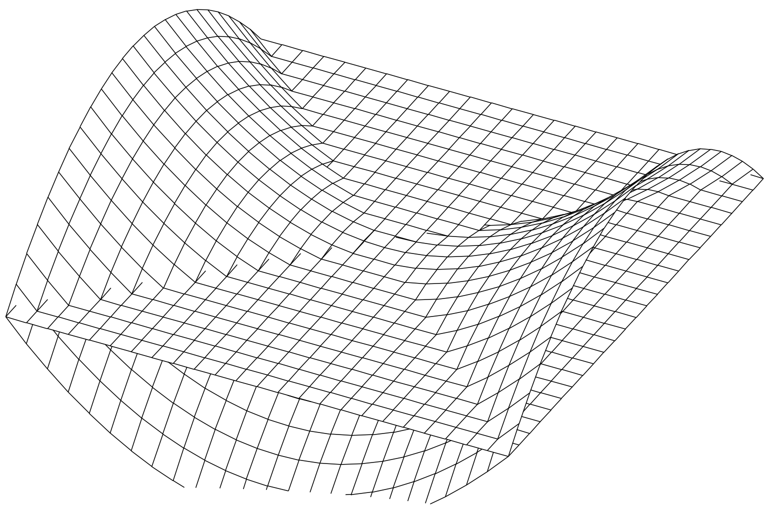
L'égalité $\frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ n'est rien d'autre que la formule de dérivation d'une réciproque $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ que le physicien note $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

*EXEMPLES* :

❑ Soit la surface $z = x^2 - y^2$. Donner l'équation du plan tangent au point (1, 2, –3).

- Si on considère le paramétrage $(x, y) \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$, alors le plan tangent passe par (1, 2, –3) et est dirigé par les deux vecteurs dérivés $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}$, calculés en ce point, à savoir $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.
  Un vecteur normal est donné par le produit vectoriel de ces deux vecteurs, ce qui donne $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- On peut aussi considérer la surface de niveau $z - x^2 + y^2 = 0$. Le gradient, orthogonal à cette surface est égal à $\begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$ qui vaut $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ au point considéré, comme ci-dessus.

Une équation du plan tangent est donc $-2x + 4y + z = 3$, la valeur 3 du second membre étant prise de façon que le point (1, 2, –3) appartienne au plan. Dans le cas présent, le plan tangent coupe la surface.



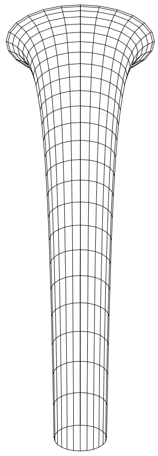
❑ La figure ci-dessous représente la surface délimitant la forme d'un filet d'eau s'écoulant d'un robinet. Déterminons un paramétrage de cette surface en supposant que :

le rayon de l'orifice circulaire du robinet est $r_0$

la vitesse de l'eau sortant du robinet est $v_0$

le débit de l'eau est constant lors de son écoulement

la loi reliant la vitesse $v$ des particules d'eau à leur hauteur $z$ est supposée être celle de la chute libre, dans un champ de pesanteur $g$ constant.



Le débit est $\pi r_0^2 v_0$ à la sortie du robinet, et $\pi r^2 v$ à une hauteur quelconque, $r$ étant le rayon du filet d'eau à cette hauteur. Le débit étant constant, on obtient une première équation $\pi r_0^2 v_0 = \pi r^2 v$.
Par ailleurs la conservation de l'énergie mécanique d'une particule d'eau (somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique) donne $z = \dfrac{v^2}{2g} - \dfrac{v_0^2}{2g}$ (où l'axe $z$ est orienté vers le bas, $z = 0$ correspondant à la sortie du robinet).

donc $\quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gz}$

donc $\quad r_0^2 v_0 = r^2 \sqrt{v_0^2 + 2gz}$

donc $\quad r = \dfrac{r_0}{(1 + \dfrac{2gz}{v_0^2})^{1/4}}$ $\qquad$ ou bien $\qquad z = \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{r_0^4 v_0^2}{r^4} - v_0^2\right)$

Un paramétrage de la surface en coordonnées cylindrique est $f : (r, \theta) \to \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{r_0^4 v_0^2}{r^4} - v_0^2\right) \end{pmatrix}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ donnera un vecteur tangent à la surface dans un plan $z$ = Cte, le long d'un parallèle. $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ donnera un vecteur tangent à la surface, orthogonal au précédent, le long d'un méridien.

**3- Courbes de l'espace**

Une courbe de $\mathbf{R}^3$ est le plus souvent donnée :

- par un paramétrage $t \to \varphi(t) \in \mathbf{R}^3$. Comme pour le plan, si $\varphi'(t)$ est non nul (point régulier), il s'agit du vecteur tangent en $\varphi(t)$ à la courbe.

- comme intersection de deux surfaces, par exemple $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$. Si $t \to (x(t), y(t), z(t))$ est une courbe tracée sur la première surface, alors, pour tout $t$ :
  $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$
  $\Rightarrow \quad \dfrac{\partial F}{\partial x} \times x'(t) + \dfrac{\partial F}{\partial y} \times y'(t) + \dfrac{\partial F}{\partial z} \times z'(t) = 0$ $\qquad$ en dérivant par rapport à $t$
  ce qui exprime que le vecteur tangent à la courbe est orthogonal au gradient de F, et donc est inclus dans le plan tangent à la surface F. Si la courbe est intersection de deux surfaces F et G, il en résulte que sa tangente est incluse dans chacun des deux plans tangents. La plupart du temps,

ces deux plans sont distincts et se coupent suivant une droite qui est donc la tangente à la courbe. ***grad***(F) est orthogonal au plan tangent à la surface de niveau définie par F, ***grad***(G) est orthogonal au plan tangent à la surface de niveau définie par G. ***grad***(F) $\wedge$ ***grad***(G) est donc contenu dans les deux plans tangents et, s'il est non nul, est donc un vecteur directeur de la courbe intersection des deux surfaces de niveau.

### *Annexe : Paramétrisation de la sphère*

❑ Nous avons vu qu'on pouvait paramétrer la sphère unité $S^2$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ au moyen des coordonnées sphériques :

$$f : (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi[ \to f(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ce paramétrage donne les deux vecteurs suivants, tangents à la sphère :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

et $$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \sin(\theta)\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mais aux pôles, on a $\theta = 0$ ou $\pi$, et $\varphi$ est quelconque, de sorte que le premier vecteur est indéfini, et le second est nul ou lui-même indéfini si on laisse de côté le facteur $\sin(\theta)$. Ils ne permettent donc pas de définir le plan tangent à la sphère en les deux pôles. Les deux pôles constituent une singularité du paramétrage.

❑ Il est possible de réduire ces deux singularités en une seule, en prenant un autre paramétrage. Soit $N = (0, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère. Pour tout couple de réels $(s, t)$, considérons le point $M = (s, t, 0)$ du plan équateur $z = 0$, la droite (NM) et l'intersection de cette droite avec $S^2$ autre que N. On obtient alors un paramétrage de $S^2 \setminus \{N\}$ en fonction de $(s, t)$. Cette opération géométrique s'appelle la **projection stéréographique** de pôle N. Plus précisément, un point quelconque de la droite (NM) s'écrit $(1 - \lambda)M + \lambda N$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc :

$$\begin{cases} x = (1-\lambda)s \\ y = (1-\lambda)t \\ z = \lambda \end{cases}$$

donc $$\begin{cases} x = (1-z)s \\ y = (1-z)t \end{cases}$$

Le point intersection de (MN) avec $S^2$ vérifie :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 = (1-z)^2(s^2 + t^2) + z^2$$

$$\Rightarrow \quad (s^2 + t^2 + 1)z^2 - 2(s^2 + t^2)z + s^2 + t^2 - 1 = 0$$

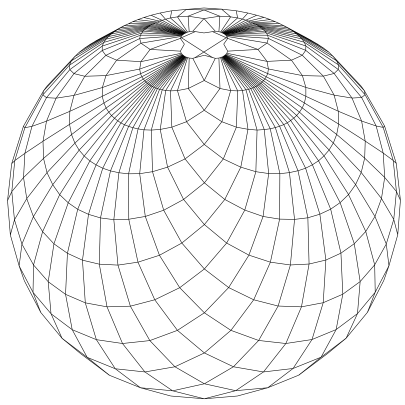
$$\Rightarrow \quad z = \frac{s^2 + t^2 \pm \sqrt{(s^2 + t^2)^2 - (s^2 + t^2 + 1)(s^2 + t^2 - 1)}}{s^2 + t^2 + 1} = \frac{s^2 + t^2 \pm 1}{s^2 + t^2 + 1}$$

Comme on cherche le point intersection autre que N, on prend $z = \dfrac{s^2 + t^2 - 1}{s^2 + t^2 + 1}$ et finalement :

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2s}{s^2 + t^2 + 1} \\ y = \dfrac{2t}{s^2 + t^2 + 1} \\ z = \dfrac{s^2 + t^2 - 1}{s^2 + t^2 + 1} \end{array}\right.$$

ou $$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\tan(u)}{\tan(u)^2 + \tan(v)^2 + 1} \\ y = \dfrac{2\tan(v)}{\tan(u)^2 + \tan(v)^2 + 1} \\ z = \dfrac{\tan(u)^2 + \tan(v)^2 - 1}{\tan(u)^2 + \tan(v)^2 + 1} \end{array}\right.$$ en posant $s = \tan(u)$ et $t = \tan(v)$

Le pôle nord N s'obtient en faisant tendre $s$ ou $t$ vers l'infini (respectivement $u$ ou $v$ vers $\pm \frac{\pi}{2}$). Le pôle sud (0, 0, –1) est obtenu pour $s = t = 0$ (respectivement $u = v = 0$).
Ce paramétrage inhabituel de la sphère posséde un seul point singulier, le pôle nord N, au lieu d'en avoir deux.



❑ Les deux vecteurs tangents à la sphère issus du paramétrage $(s, t)$ sont:

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, t) = \frac{2}{(1 + s^2 + t^2)^2}\begin{pmatrix} 1 - s^2 + t^2 \\ -2st \\ 2s \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = \frac{2}{(1 + s^2 + t^2)^2}\begin{pmatrix} -2st \\ 1 + s^2 - t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Un vecteur normal à la sphère au point de paramètre $(y, t)$ est :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \wedge \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) = \frac{4}{(1 + s^2 + t^2)^4}\begin{pmatrix} -2st \\ 1 + s^2 - t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 - s^2 + t^2 \\ -2st \\ 2s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4}{(1 + s^2 + t^2)^4}\begin{pmatrix} 2s + 2s^3 + 2st^2 \\ 2t + 2s^2t + 2t^3 \\ s^4 + t^4 + 2s^2t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4}{(1 + s^2 + t^2)^3} \begin{pmatrix} 2s \\ 2t \\ s^2 + t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien colinéaire au rayon $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ au point considéré. Le pôle sud ne constitue pas ici une singularité. Par contre, les deux vecteurs tangents tendent vers 0 quand le point $f(s, t)$ tend vers le pôle nord.

❑ On retrouve le paramétrage en sphérique habituel, au signe de $z$ près, en posant $s = r\cos(\varphi)$ et $t = r\sin(\varphi)$ :

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2r\cos(\varphi)}{r^2 + 1} \\ y = \dfrac{2r\sin(\varphi)}{r^2 + 1} \\ z = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \end{array}\right.$$

puis en posant $r = \tan(\dfrac{\theta}{2})$ : $\left[\begin{array}{l} x = \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = -\cos(\theta) \end{array}\right.$, mais ce faisant, le passage en polaire introduit une nouvelle singularité au pôle sud pour $r = 0$.

❑ Par ailleurs, compte tenu des relations $\lambda = z$, $s = \dfrac{x}{1 - \lambda} = \dfrac{x}{1 - z}$ et $t = \dfrac{y}{1 - \lambda} = \dfrac{y}{1 - z}$, on pourra vérifier que $\dfrac{\partial f}{\partial s}(s, t)$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} \dfrac{1 + z^2 + y^2 - x^2}{2} - z \\ -xy \\ x - xz \end{pmatrix}$, ou encore à $\begin{pmatrix} 1 - z - x^2 \\ -xy \\ x - xz \end{pmatrix}$, puisque $y^2 + z^2 = 1 - x^2$ pour tout point $(x, y, z)$ de la sphère.

Le champ de vecteur V : $(x, y, z) \in S^2 \to \begin{pmatrix} 1 - z - x^2 \\ -xy \\ x - xz \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs, tangent en tout point à la sphère. Cependant, il s'annule au pôle nord N, et c'est le seul point où il s'annule. Cet exemple illustre un théorème dû à Poincaré et Brouwer, qui énonce qu'il est impossible de définir un champ de vecteurs continu sur $S^2$ tangent à $S^2$ en chaque point sans qu'il s'annule en au moins un point. C'est le **théorème de la boule chevelue**. En chaque point de la sphère, on implante un cheveu de longueur non nulle. Peigner la sphère, c'est orienter les cheveux tangentiellement à celle-ci de façon continue. Comme un champ tangent possède au moins un vecteur nul, cela montre qu'il est impossible de peigner la sphère.

Le lecteur pourra vérifier enfin que, si W est le champ des vitesses de particules se déplaçant à vitesse unité dans le plan $z = 0$ et dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors V est le projeté stéréographique de W sur la sphère $S^2$ à partir du pôle nord. On obtiendra de même le champ tangent $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ comme projeté stéréographique d'un champ de vitesse uniforme de direction $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le plan $z = 0$.

## *Exercices*

### 1- Enoncés

**Exo.1)** Soit la fonction $f(x, y) = \left[ \begin{array}{ll} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{array} \right.$

a) $f$ est-elle continue ?
b) Admet-elle des dérivées partielles en (0, 0) ?
c) Est-celle $C^1$ ?

**Exo.2)** Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $C^1$. On suppose que, pour tout réel $t \geq 0$ et tout $x$ de $\mathbf{R}^n$, $f(tx) = tf(x)$. Montrer que $f$ est linéaire (utiliser un développement limité de $f$ en 0). En déduire qu'une norme n'est jamais de classe $C^1$ sur $\mathbf{R}^n$.

**Exo.3)** Soit $f$ la fonction de classe $C^{\mathbf{1}}$ de $n$ variables $x_{\mathbf{1}}, ..., x_{\boldsymbol{n}}$, définie par $f(x_1, ..., x_n) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} a_{\boldsymbol{ij}}\, x_{\boldsymbol{i}} x_{\boldsymbol{j}}$.

a) Calculer $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)$ et comparer à $f$.

b) vérifier avec $f(x) = x^2$ et $f(x, y) = xy$.

**Exo.4)** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, de classe $C^2$, et telle que $f(x, y) = -f(y, x)$.

a) Quelle relation vérifient $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ?

b) Quelles relations vérifient $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ?

c) Vérifier votre résultat avec la fonction $f : (x, y) \to x^3 - y^3 + x^2 y - y^2 x$.

**Exo.5)** Trouver les fonctions $f(x, y)$ de classe $C^{\mathbf{1}}$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$. On fera le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$ et on considèrera la fonction $g$ telle que $g(u, v) = f(x, y)$.

**Exo.6)** a) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable. On pose $g(x, y) = f(xy)$. Calculer $x \dfrac{\partial g}{\partial x} - y \dfrac{\partial g}{\partial y}$.

b) Inversement, soit $g$ telle que $x \dfrac{\partial g}{\partial x} - y \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$. On se place sur le domaine $\mathbf{R} \times ]0, +\infty[$. Déterminer $g$ en posant $u = xy$, $v = y$, $g(x, y) = h(u, v)$, et en cherchant quelle équation aux dérivées partielles vérifie $h$.

**Exo.7)** a) Soit F : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. On pose $f(x, y) = F\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$. Calculer $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) Inversement, soit $f$ telle que : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. On se place dans le domaine $\{(x, y), x > 0\}$. Faire un changement de variables en coordonnées polaires et en déduire une expression de $f$. Est-elle de la forme donnée en a) ?

**Exo.8)** a) Soit $(a, b) \neq (0, 0)$. Résoudre $h(x, y) = a\frac{\partial h}{\partial x} + b\frac{\partial h}{\partial y}$. On pourra effectuer le changement de variables $\left[\begin{array}{l} x = au - bv \\ y = bu + av \end{array}\right.$ dont on vérifiera qu'il est bijectif.

b) Si $b$ est non nul, la fonction $h(x, y) = \exp(\frac{y}{b})$ est-elle solution ?

**Exo.9)** Résoudre l'équation suivante, où $f$ est de classe $C^2$ : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On effectuera le changement de variables $u = x$, $v = x + y$.

**Exo.10)** Résoudre, pour $x > 0$, l'équation aux dérivées partielles $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $f$ étant de classe $C^2$. On pourra poser $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$.

**Exo.11)** Le **laplacien** d'une fonction $f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^2$ est défini par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Une fonction vérifiant $\Delta f = 0$ est dite **harmonique**. C'est le cas de la température d'un milieu en équilibre thermique ou du potentiel électrique dans le vide. On pose $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

a) Quelles sont les fonctions harmoniques pour $n = 1$ ?

b) Vérifier que, pour $n = 2$, $\ln(r)$ est harmonique dans le plan privé de l'origine.

c) Pour $n > 2$, quelle valeur donner à $s$ pour que $r^s$ soit harmonique ? Pour $n = 3$, cela correspond-il à des connaissances que vous avez en physique ?

d) Réciproquement, pour $n \geq 2$, déterminer toutes les fonctions harmoniques en dehors de l'origine qui s'expriment comme fonction de $r$.

e) Dans le plan, donner une expression du laplacien en coordonnées polaires.

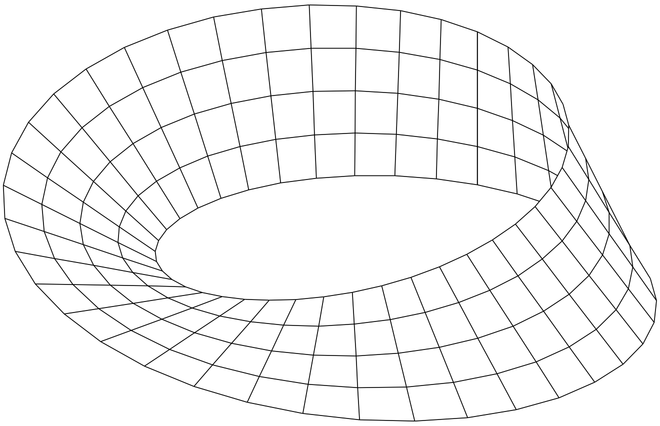
**Exo.12)** Etudier les extrema locaux de la fonction $f(x, y) = \frac{xy}{(1 + x)(1 + y)(x + y)}$.

**Exo.13)** On considère la famille de courbes $xy = k$, $k \in \mathbb{R}$.

a) En représenter un certain nombre dans le plan.

b) Quelle est la famille de courbes orthogonales en chaque point à cette première famille ?

**Exo.14)** Le ruban de Möbius



Il s'agit d'une surface engendrée par une droite qui tourne d'un demi-tour pendant que son origine décrit un cercle. Soit M(θ) un point décrivant le cercle de centre O de rayon 1 dans le plan O*xy*. Le cercle est paramétré par l'angle θ entre O*x* et *OM*. Soit K le vecteur unitaire dirigeant l'axe O*z*. Soit T le vecteur unitaire tangent au cercle en M(θ), dirigé dans le sens des θ croissant. Soit $R_\theta$ la rotation d'axe T et d'angle θ/2. Le ruban de Möbius est paramétré par $f : (\theta, t) \to M(\theta) + t\,R_\theta(K)$.

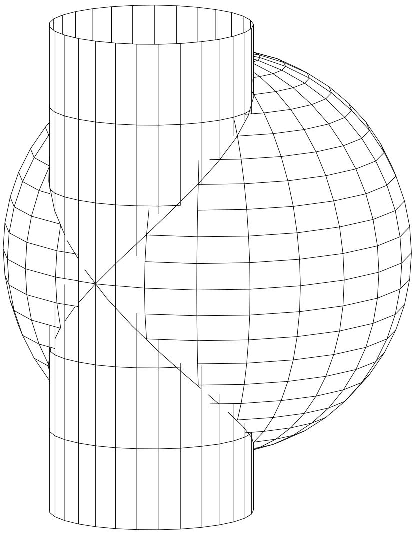
a) Donner une expression explicite de ce paramétrage.

b) Soit Π(θ) le plan tangent au ruban de Möbius au point M(θ). Déterminer une équation de ce plan.

c) Vérifier que, pour tout θ, la droite $\Delta(\theta) = \{M(\theta) + t\,R_\theta(K),\ t \in \mathbb{R}\}$ est incluse dans Π(θ).

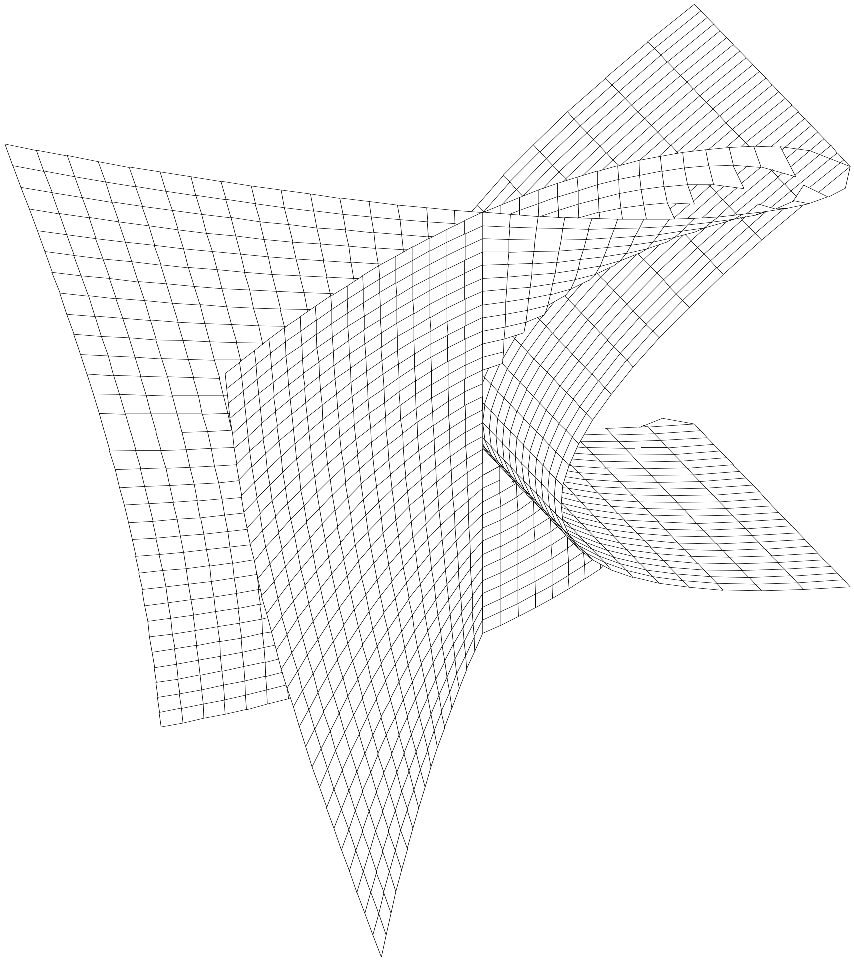
d) Montrer que, en tout point de Δ(θ), le plan tangent Π(θ) traverse le ruban de Möbius.

**Exo.15)** Par deux méthodes différentes, donner un vecteur directeur de la tangente en un point quelconque de la courbe intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du cylindre $x^2 + y^2 - x = 0$. Dans chacune des deux méthodes, il devra apparaître le cas particulier du point (1, 0, 0).

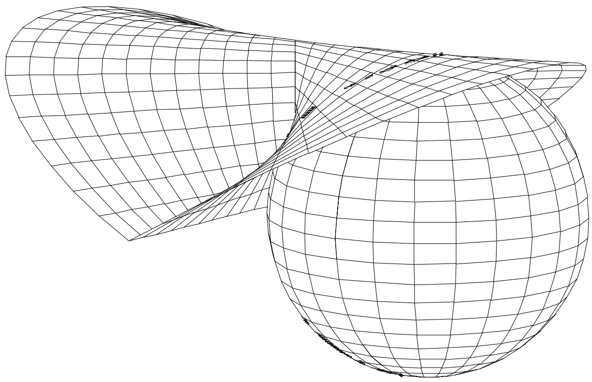


**Exo.16)** Il est possible de définir une courbe (C) comme intersection de deux surfaces ($S_1$) et ($S_2$), telles que les plans tangents aux deux surfaces soient les mêmes en tout point de (C). On ne peut donc pas dans ce cas définir la tangente en un point de (C) à partir des plans tangents à ($S_1$) et ($S_2$). Voici deux exemples.

a) Soit la courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ (C) $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ z = t \end{cases}$, et les deux surfaces ($S_1$) d'équation $y = z^2$ et ($S_2$) $x^2 - 2xyz + y^3 = 0$. Montrer que (C) est l'ensemble des points communs à ($S_1$) et ($S_2$) et que ces deux surfaces sont tangentes entre elles en tout point de (C), sauf (0, 0, 0).



b) Soit la courbe (C) paramétrée par $t \to (\sin(t)\cos(t), \sin(t)^2, \sin(t))$. Soit ($S_1$) la sphère de rayon 1 et de centre $\Omega = (0, 1, 0)$ et ($S_2$) la surface de représentation paramétrique $(u, v) \to (u\cos(v), u\sin(v), \sin(v))$. Vérifier que (C) est l'ensemble des points communs à ($S_1$) et ($S_2$) et que ces deux surfaces sont tangentes entre elles en tout point de (C).



**2- Solutions**

**Sol.1)** a) En dehors de (0, 0), $f$ est continue comme fonction obtenue par addition, produit, quotient des composantes $x$ et $y$.

Voyons ce qu'il en est en (0, 0). En majorant $|x|$ et $|y|$ par $\sqrt{x^2+y^2}$ au numérateur de $f$, on voit que $|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ de limite nulle en (0, 0) donc $f$ est continue en (0, 0).

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$ et de même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Donc $f$ admet des dérivées partielles nulles en (0, 0).

En dehors de (0, 0), $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y^2(x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en (0, 0), car par exemple $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 2x) = \dfrac{12}{25}$ ne peuvent avoir une limite compatible quand $x$ tend vers 0. Donc $f$ n'est pas $C^1$.

On aurait pu de même vérifier que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est discontinue en (0, 0).

**Sol.2)** On remarque que $f(0) = 0$ en prenant $t = 0$. On utilise ensuite un développement limité de $f$ en 0 :

$$f(x) = <\boldsymbol{grad}(f)(0), x> + o(\| x \|)$$

donc, pour $x$ donné et $t$ strictement positif, au voisinage de $t = 0$ :

$$f(tx) = t<\boldsymbol{grad}(f)(0), x> + o(t)$$
$$tf(x) = t<\boldsymbol{grad}(f)(0), x> + o(t)$$
$$f(x) = <\boldsymbol{grad}(f)(0), x> + o(1)$$

donc en faisant tendre $t$ vers 0, $f(x) = <\boldsymbol{grad}(f), x>$, qui est bien linéaire.

Comme une norme vérifie l'hypothèse, mais n'est pas linéaire, elle n'est pas de classe $C^1$ sur $\mathbf{R}^n$.

On pourra vérifier par exemple que :

$(x, y) \to \sqrt{x^2+y^2}$ est $C^1$ sur $\mathbf{R}^2$ privé de l'origine.

$(x, y) \to |x| + |y|$ est $C^1$ sur $\mathbf{R}^2$ privé des deux axes

$(x, y) \to \mathrm{Max}(|x|, |y|)$ est $C^1$ sur $\mathbf{R}^2$ privé des deux diagonales $x = \pm y$.

**Sol.3)** a) L'erreur à ne pas commettre est d'écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) = f(x_1, ..., x_n)$$

❑ Il vaut mieux utiliser un troisième indice $k$ pour ne pas mélanger l'indice de la somme demandée avec ceux définissant $f$ :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{1\le i\le n, 1\le j\le n} a_{ij}\, x_i x_j\right)$$

on doit considérer les cas $i = k$ et $j \neq k$, $i \neq k$ et $j = k$, $i = j = k$, les autres termes ayant une dérivée nulle par rapport à $k$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j\neq k} a_{kj}\, x_k x_j\right) + \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i\neq k} a_{ik}\, x_i x_k\right) + \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial}{\partial x_k} a_{kk}\, x_k^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j\neq k} a_{kj}\, x_j + \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i\neq k} a_{ik}\, x_i + \sum_{k=1}^{n} 2a_{kk}\, x_k^2$$

$$= \sum_{j\neq k} a_{kj}\, x_k x_j + \sum_{i\neq k} a_{ik}\, x_i x_k + \sum_{k=1}^{n} 2a_{kk}\, x_k^2$$

$$= 2\sum_{i\neq j} a_{ij}\, x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} 2a_{kk}\, x_k^2$$

$$= 2f(x_1, ..., x_n)$$

❑ On peut aussi procéder comme suit. En notant A la matrice de terme général $a_{ij}$ et X la colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $f(X) = X^{\mathsf{T}}AX$, où $X^{\mathsf{T}}$ est la ligne transposée de la colonne X. Pour $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ ... \\ h_n \end{pmatrix}$, on a :

$$f(X + H) = (X + H)^{\mathsf{T}}A(X + H) = X^{\mathsf{T}}AX + H^{\mathsf{T}}AX + X^{\mathsf{T}}AH + H^{\mathsf{T}}AH$$
$$= f(X) + H^{\mathsf{T}}AX + X^{\mathsf{T}}AH + o(\| H \|)$$

On compare l'égalité précédente avec le développement limité de $f$ au voisinage de X :

$$f(x_1 + h_1, ..., x_n + h_n) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) + o(\| H \|)$$

ce qui montre que, pour tout X et tout H :

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = H^{\mathsf{T}}AX + X^{\mathsf{T}}AH$$

En remplaçant les $h_i$ par $x_i$, et donc H par X, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = X^{\mathsf{T}}AX + X^{\mathsf{T}}AX = 2X^{\mathsf{T}}AX = 2f(x_1, ..., x_n)$$

b) On trouve bien $2f$ dans chaque cas.

❑ Voici une troisième démonstration. La fonction $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le n} a_{ij}\, x_i x_j$ est dite **homogène** de degré 2 car, pour tout réel $\lambda$ et tous réels $(x_1, ..., x_n)$, on a :

$$f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^2 f(x_1, ..., x_n)$$

Plus généralement, une fonction est dite homogène de degré $p$ si :

$$f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, ..., x_n)$$

Si on dérive cette égalité par rapport à $\lambda$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = p\lambda^{p-1} f(x_1, ..., x_n)$$

et pour $\lambda = 1$ :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = pf(x_1, ..., x_n)$$

généralisant le résultat de l'exercice.

**Sol.4)** a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y, x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(y, x)$

Si on a du mal à comprendre pourquoi, il est utile de noter $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ pour désigner les dérivées partielles de $f$ par rapport à sa première et seconde variable. On utiliser ensuite la dérivation des fonctions composées : $(x, y) \to (u, v) = (y, x) \to f(u, v) = f(y, x)$. On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y, x) = \partial_1 f(u, v) \frac{\partial u}{\partial y} + \partial_2 f(u, v) \frac{\partial v}{\partial y} = \partial_1 f(y, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

On notera bien que $\dfrac{\partial}{\partial y} f(y, x)$ désigne la dérivée en $(x, y)$ par rapport à $y$ de la fonction $(x, y) \to f(y, x)$. Cette quantité est différente de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(y, x)$ qui calcule la dérivée en $(y, x)$ par rapport à $y$ de la fonction $(x, y) \to f(x, y)$. D'ailleurs, le calcul effectué montre que le résultat final est la dérivée en $(y, x)$ par rapport à $x$ de $(x, y) \to f(x, y)$.

donc, puisque $f(x, y) = -f(y, x)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} f(y, x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(y, x)$, ou encore, en changeant $(x, y)$ en $(y, x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(y, x) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

b) Si on a compris le a), on pourra dériver les égalités $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(y, x)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}(y, x) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ pour en déduire que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y, x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(y, x)$$

c) Pour $f(x, y) = x^3 - y^3 + x^2 y - y^2 x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2 \qquad \text{donc } \frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = 3y^2 + 2xy - x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2 + x^2 - 2xy = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 2y$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6y - 2x$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y, x) = -6x - 2y = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x - 2y$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(y, x) = 2y - 2x = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$

**Sol.5)** Si $g(u, v) = g(x + y, x - y) = f(x, y) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$, alors $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x})$ donc on est amené à résoudre $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2}$ soit $g = \frac{u}{2} + \varphi(v)$, avec $\varphi$ une fonction de classe $C^1$ quelconque et donc :

$$f(x, y) = \frac{x+y}{2} + \varphi(x - y)$$

**Sol.6)** a) $\frac{\partial g}{\partial x} = y f'(xy)$. $\frac{\partial g}{\partial y} = x f'(xy)$, donc la différence $x\frac{\partial g}{\partial x} - y\frac{\partial g}{\partial y}$ est nulle.

b) $g(x, y) = h(u, v) = h(xy, y)$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial v} = y\frac{\partial h}{\partial u}$

et $\quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial v} = x\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v}$.

Donc $x\frac{\partial g}{\partial x} - y\frac{\partial g}{\partial y} = y\frac{\partial h}{\partial v} = 0$ donc $\frac{\partial h}{\partial v} = 0$, donc $h$ ne dépend que de $u$. Donc il existe une fonction $f$ telle que $h(u, v) = f(u)$, et on retrouve $g(x, y) = f(xy)$.

**Sol.7)** a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) F'\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)} F'\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$

et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) F'\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{2yx^2}{(x^2 + y^2)} F'\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$

donc $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)} F'\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) - y\frac{2yx^2}{(x^2 + y^2)} F'\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = 0$

b) Posons $f(x, y) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = g(r, \theta)$. On a vu dans le cours que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\sin(\theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\sin(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\cos(\theta) \end{cases}$$

donc $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = r\frac{\partial g}{\partial r}$, donc l'équation devient : $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$ donc $g$ est une fonction $\varphi$ uniquement de $\theta$. Donc :

$$f(x, y) = \varphi(\theta) = \varphi(\arctan(\frac{y}{x})) = \psi(\frac{y}{x}).$$

La forme initiale donnée dans l'énoncé est aussi une fonction de $\theta$, à savoir $F(\cos(2\theta))$. Cependant, il s'agit d'une fonction paire de $\theta$, qui ne permet pas de couvrir toutes les solutions possibles de l'équation. Par exemple, $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ est aussi solution de l'équation mais pas de la forme initiale.

**Sol.8)** a) L'application $(u, v) \to (au - bv, bu + av)$ est bijective car linéaire et de déterminant $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$ non nul. On peut aussi explicitement calculer sa réciproque :

$$(x, y) \to \left(\frac{ax + by}{a^2 + b^2}, \frac{ay - bx}{a^2 + b^2}\right)$$

On a, en notant $h(x, y) = h(au - bv, bu + av) = f(u, v)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = a\frac{\partial h}{\partial x} + b\frac{\partial h}{\partial y}$$

donc l'équation $h = a\dfrac{\partial h}{\partial x} + b\dfrac{\partial h}{\partial y}$ devient $f = \dfrac{\partial f}{\partial u}$. Pour tout $v$ fixé, les solutions en $u$ de cette équation sont de la forme $\lambda e^u$, où $\lambda$ ne dépend pas de $u$. Si on change de valeur de $v$, on change a priori la valeur de $\lambda$. Autrement dit, $\lambda$ est une fonction de $v$. Notons-la $g(v)$. On obtient :

$$f = g(v)e^u$$

donc $h = g\left(\dfrac{ay - bx}{a^2 + b^2}\right) \exp\left(\dfrac{ax + by}{a^2 + b^2}\right) = \psi(ay - bx) \exp\left(\dfrac{ax + by}{a^2 + b^2}\right)$

en renommant plus simplement la fonction $g\left(\dfrac{ay - bx}{a^2 + b^2}\right)$.

b) Il est facile de vérifier que la fonction $\exp\left(\dfrac{y}{b}\right)$ est solution. Elle figure parmi les solutions précédentes puisqu'on peut l'écrire ainsi :

$$\exp\left(\frac{y}{b}\right) = \exp\left(\frac{ax + by}{a^2 + b^2}\right) \exp\left(\frac{y}{b} - \frac{ax + by}{a^2 + b^2}\right) = \exp\left(\frac{ax + by}{a^2 + b^2}\right) \exp\left(\frac{a(ay - bx)}{b(a^2 + b^2)}\right)$$

avec $\exp\left(\dfrac{a(ay - bx)}{b(a^2 + b^2)}\right)$ qui est bien une fonction de $ay - bx$.

**Sol.9)** Si on pose $f(x, y) = f(u, v - u) = g(u, v)$, $f$ est une fonction composée de $g$ :

$$\underbrace{(x, y) \to (u, v) = (x, x + y) \xrightarrow{g} g(u, v) = g(x, x + y) = f(x, y)}_{f}$$

Donc $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$

Observons bien comment on calcule les dérivées de $f$ par rapport à $x$ et $y$ en fonction des dérivées de $g$ par rapport à $u$ et $v$, ce calcul pouvant être symbolisé par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{v} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial v} \end{cases}$$

les dérivations partielles à gauche s'appliquant sur la fonction composée $f$, celles de droite à la fonction simple $g$.

Or les deux égalités $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial v}$ décrivent elles aussi une situation de composition de fonction. Par exemple, pour la première égalité, on a :

$$\begin{tikzcd} (x, y) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\frac{\partial f}{\partial x}"'] & (u, v) = (x, x + y) \arrow[r, "\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}"] & \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right)(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{tikzcd}$$

Par conséquent, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ se calculera à partir des dérivées partielles de $\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$ exactement comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ s'est calculé à partir des dérivées partielles de $g$. De sorte que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

où l'on a utilisé le théorème de Schwarz pour écrire que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}$, la fonction $(u, v) \to g(u, v) = f(u, v - u)$ étant $C^2$, comme $f$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

On peut aussi calculer :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

L'équation devient $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$ donc $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \varphi(v)$ avec $\varphi$ fonction $C^1$ quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis, en introduisant une autre fonction arbitraire $\psi$ :

$$g(u, v) = u\varphi(v) + \psi(v) = x\varphi(x + y) + \psi(x + y) = f(x, y)$$

Si on le souhaite, on peut vérifier que l'expression finale est bien solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi(x + y) + x\varphi'(x + y) + \psi'(x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\varphi'(x + y) + \psi'(x + y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\varphi'(x + y) + x\varphi''(x + y) + \psi''(x + y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\varphi''(x + y) + \psi''(x + y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \varphi'(x + y) + x\varphi''(x + y) + \psi''(x + y)$$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ donne bien 0.

Observons enfin que l'équation aux dérivées partielles à résoudre est symétrique en $x$ et $y$ alors que l'expression finale de $f$ semble ne pas l'être. En fait, $f$ n'est pas nécessairement une fonction symétrique de $x$ et $y$, mais l'ensemble des solutions $f$ l'est : si $f(x, y)$ est une solution, $f(y, x)$ en est une autre. $x$ et $y$ jouent des rôles symétriques dans l'expression de ces solutions. On peut ainsi écrire :

$$f(x, y) = (x + y)\varphi(x + y) - y\varphi(x + y) + \psi(x + y)$$
$$= y\Phi(x + y) + \Psi(x + y) \qquad \text{en posant } \Phi(t) = -\varphi(t) \text{ et } \Psi(t) = t\varphi(t) + \psi(t)$$

et $\quad f(y, x) = x\Phi(x + y) + \Psi(x + y) \qquad$ qui est bien solution

Ou encore :

$$f(x, y) = \frac{(x - y)\varphi(x + y)}{2} + \frac{(x + y)\varphi(x + y)}{2} + \psi(x + y)$$
$$= \frac{(y - x)(-\varphi(x + y))}{2} - \frac{(x + y)(-\varphi(x + y))}{2} + \psi(x + y)$$

**Sol.10)** Posons
$$\begin{tikzcd}(x, y) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f"'] & (u, v) \arrow[r, "F"] & F(u, v) = F(x, \frac{y}{x}) = f(x, y)\end{tikzcd}$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{y}{x^2} \qquad \text{sachant que } u = x \text{ et } v = \frac{y}{x}$$
$$= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial F}{\partial v}$$

On vérifiera de même que :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial v}\frac{1}{x} = \frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial v}$$

On peut ensuite calculer les dérivées secondes de $f$ comme on l'a fait dans l'exercice précédent, mais en utilisant ici le fait que, symboliquement :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial u} - \dfrac{v}{u}\dfrac{\partial}{\partial v} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial}{\partial v} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{v}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial F}{\partial v}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2v}{u^2}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{2v}{u}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{v^2}{u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{v}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial v}\right)$$
$$= -\frac{1}{u^2}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{v}{u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

qu'on peut aussi calculer avec $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial F}{\partial v}\right)$, obtenant le même résultat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial v}\right) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

L'équation obtient :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = u^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2v}{u^2}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{2v}{u}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{v^2}{u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)$$

$$+ 2u^2v\left(-\frac{1}{u^2}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} - \frac{v}{u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)$$

$$+ u^2v^2\left(\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)$$

$$= u^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2v\frac{\partial F}{\partial v} - 2uv\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + v^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - 2v\frac{\partial F}{\partial v} + 2uv\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} - 2v^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + v^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$$= u^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$$

On aurait pu aussi calculer les dérivées secondes de $f$ en gardant les expressions $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{y}{x^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial v}$, sachant que $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$ doivent être vues aussi comme fonctions composées par $(x, y) \to (u, v)$, et dériver directement par rapport à $x$ ou $y$ en dérivant ces fonctions composées, et en n'oubliant pas de dériver aussi le facteur $\frac{y}{x^2}$, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{y}{x^2} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{y}{x^3}$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\frac{y}{x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{2y}{x^3}$$

qui est bien égal à $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{2v}{u^2}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{2v}{u}\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \frac{v^2}{u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$.

On vérifiera de même que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\frac{1}{x} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{y}{x^3} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{1}{x^2}$$

ce qui donne :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \quad \text{comme précédemment}$$

Comme $x$ (ou $u$) ne s'annule pas, l'équation aux dérivées partielles se simplifie en $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$. Donc, pour chaque valeur de $v$ fixée, il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que $F = \lambda u + \mu$. $\lambda$ et $\mu$ dépendent du $v$ choisi, donc il existe deux fonctions $\varphi$ et $\psi$ telles que :

$$F = u\varphi(v) + \psi(v), \text{ ou bien } f(x, y) = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Comme dans l'exercice précédent, l'équation initiale est symétrique en $(x, y)$ alors que l'expression de la solution finale semble ne pas l'être. Cependant, pour $y > 0$ par exemple :

$$x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right) = y\,\frac{x}{y}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

qui est de la forme $y\,\Phi\left(\frac{x}{y}\right) + \Psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

**Sol.11)** a) Les fonctions harmoniques d'une seule variable sont les fonctions dont la dérivée seconde est identiquement nulle. Ce sont les fonctions affines $x \to ax + b$

b) $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\ln(r) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r}{\partial x_1} = = \dfrac{1}{r}\dfrac{x_1}{r} = x_1 \times \dfrac{1}{r^2}$

puis $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}}\ln(r) = = \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{2x_1}{r^3}\dfrac{\partial r}{\partial x_1} = \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{2x_1}{r^3}\dfrac{x_1}{r} = \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{2x_1^{\,2}}{r^4} = \dfrac{x_2^{\,2} - x_1^{\,2}}{r^4}$

De même, $\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}}\ln(r) = \dfrac{x_1^{\,2} - x_2^{\,2}}{r^4}$, donc $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}}\ln(r) + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}}\ln(r) = 0$, et $\ln(r)$ est bien harmonique.

c) $\dfrac{\partial}{\partial x_i} r^s = sr^{s-1}\dfrac{x_i}{r} = x_i \times sr^{s-2}$

puis $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^{\,2}} r^s = sr^{s-2} + s(s-2)r^{s-3}\dfrac{x_i^{\,2}}{r}$

donc $\Delta(r^s) = s(n+s-2)r^{s-2}$

Donc il faut prendre $s = 2 - n$ pour que $r^s$ soit harmonique. Par exemple, pour $n = 3$, $\dfrac{1}{r}$ est harmonique. Ce terme intervient dans l'expression du potentiel électrique créé par une charge dans le vide, ou du potentiel gravitationnel créé par une masse ponctuelle. Ces deux potentiels ont un laplacien nul.

d) Posons $f = \varphi(r) = \varphi(\sqrt{x_1^{\,2} + \dots + x_n^{\,2}})$. On a :

$$\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \varphi'(r)\dfrac{x_i}{r}$$

$$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}} = \varphi''(r)\dfrac{x_i^{\,2}}{r^2} + \dfrac{\varphi'(r)}{r} - \varphi'(r)\dfrac{x_i^{\,2}}{r^3}$$

donc $\Delta f = \varphi''(r) + (n-1)\dfrac{\varphi'(r)}{r}$

$f$ est harmonique si et seulement si $\Delta f = 0$ si et seulement si $\varphi''(r) + (n-1)\dfrac{\varphi'(r)}{r} = 0$.

Pour $n = 2$, l'équation différentielle s'écrit $\varphi''(r) + \dfrac{\varphi'(r)}{r} = 0$. On obtient (revoir au besoin le chapitre L1/EQUADIFF.PDF) :

$\varphi'(r) = \dfrac{\lambda}{r}$ avec $\lambda$ constante

puis $\varphi(r) = \lambda\ln(r) + \mu$ avec $\lambda$ et $\mu$ constantes

Pour $n \geq 3$, les solutions de $\varphi''(r) + (n-1)\dfrac{\varphi'(r)}{r} = 0$ vérifient :

$\varphi'(r) = \dfrac{\alpha}{r^{n-1}}$ avec $\alpha$ constante

puis $\varphi(r) = -\dfrac{\alpha}{(n-2)r^{n-2}} + \mu = \dfrac{\lambda}{r^{n-2}} + \mu$ avec $\lambda$ et $\mu$ constantes

Ainsi, les fonctions $\ln(r)$ et $\dfrac{1}{r^{n-2}}$ sont bien représentatives des fonctions harmoniques en dimension $n = 2$ et $n \geq 3$ respectivement, à une constante multiplicative et une constante additive près.

e) Posons :

$x = r\cos(\theta)$

$y = r\sin(\theta)$

$f(x, y) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \mathrm{F}(r, \theta)$.

On a vu dans le cours que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos(\theta)\dfrac{\partial F}{\partial r} - \dfrac{\sin(\theta)}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin(\theta)\dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{\cos(\theta)}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ étant la fonction $\cos(\theta)\dfrac{\partial F}{\partial r} - \dfrac{\sin(\theta)}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$, composée (au moins localement) par $(x, y) \to (r, \theta)$, on peut appliquer la même règle de calcul formel pour calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial x})$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}(\cos(\theta)\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}) - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\cos(\theta)\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}) \\ &= \cos(\theta)(\cos(\theta)\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\sin(\theta)}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r}) \\ &\qquad - \frac{\sin(\theta)}{r}(-\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial r} + \cos(\theta)\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r} - \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}) \\ &= \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r} + \frac{\sin^2(\theta)}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}(\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}) + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}) \\ &= \sin(\theta)(\sin(\theta)\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r}) \\ &\qquad + \frac{\cos(\theta)}{r}(\cos(\theta)\frac{\partial F}{\partial r} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}) \\ &= \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

donc $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$

**Sol.12)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a pour numérateur $y(y - x^2)$. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ a pour numérateur $x(x - y^2)$. En un extremum local, ces deux dérivées partielles s'annulent, ce qui donne comme solutions possibles :

$x = y = 0$ ce qui est exclu car (0, 0) n'appartient pas au domaine de définition de $f$,
$y = x - y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$ idem
$y - x^2 = x = 0 \Rightarrow x = y = 0$ idem
$y - x^2 = x - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = y^4$ et $x = y^2 \Leftrightarrow y = x = 1$ en excluant encore le point (0, 0).

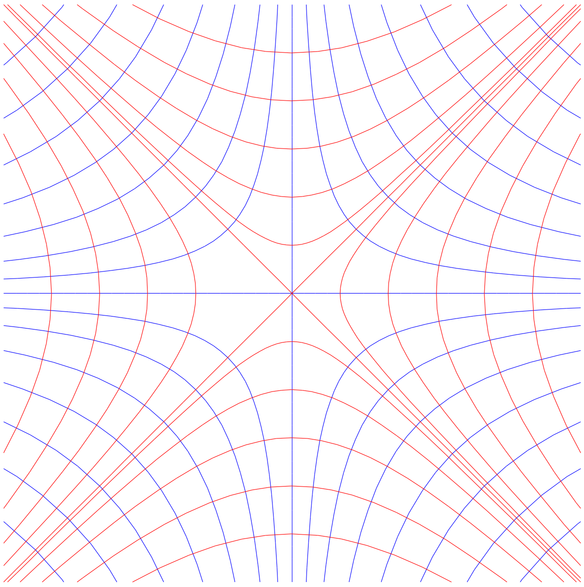
Un développement limité au voisinage du point (1, 1) donne :

$$f(1 + h, 1 + k) = \frac{1}{8} - \frac{1}{32}(h^2 - hk + k^2) + o(\| (h, k) \|^2)$$

Le discriminant de $h^2 - hk + k^2$ est strictement négatif et $-\dfrac{1}{32} < 0$, donc donc $f$ admet un maximum local. Nous sommes dans le cas 1) du paragraphe du cours traitant des extrema.

**Sol.13)** a) Les courbes sont les hyperboles équilatères d'axes O$x$ et O$y$, (ainsi que la réunion des deux axes pour $k = 0$). Elles sont représentées en bleu dans le graphique qui suit.

b) Le gradient de la famille de fonctions $(x, y) \to xy - k$ vaut en chaque point $(y, x)$. Ce sont en tout point des vecteurs orthogonaux aux hyperboles précédentes, donc des vecteurs tangents à la famille de courbes que l'on cherche. Donc les équations des courbes cherchées doivent vérifier $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ (ou bien $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ si on ne peut exprimer $y$ en fonction de $x$), soit $x^2 - y^2 = \text{Cte}$. Il s'agit des hyperboles équilatères d'axes les deux diagonales $y = \pm x$ (y compris la réunion de ces deux axes pour Cte = 0). Elles sont représentées en rouge ci-dessous.



**Sol.14)** a) On a $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$. Posons $\mathbf{I} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$. $\mathbf{T}$ est invariant par $R_\theta$, et dans le plan $(\mathbf{K}, \mathbf{I})$, ces deux vecteurs tournent d'un angle $\frac{\theta}{2}$. On a donc :

$$R_\theta(\mathbf{K}) = \cos(\frac{\theta}{2})\mathbf{K} + \sin(\frac{\theta}{2})\mathbf{I} + \ = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2})\cos(\theta) \\ \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\theta) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

donc le paramétrage du ruban de Möbius est :

$$\left[\begin{array}{l} x = \cos(\theta) + t\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) + t\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\theta) \\ z = t\cos(\frac{\theta}{2}) \end{array}\right.$$

b) Cherchons le plan tangent. Pour tout $(\theta, t)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, t) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) + \frac{t}{2}\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\theta) - t\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\theta) \\ \cos(\theta) + \frac{t}{2}\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\theta) + t\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\theta) \\ -\frac{t}{2}\sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, t) = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2})\cos(\theta) \\ \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\theta) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

Le plan tangent en M(θ) s'obtient pour $t = 0$. Un vecteur normal à ce plan est donné par :

$$\mathbf{N}(\theta) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, 0) \wedge \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, 0) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2})\cos(\theta) \\ \cos(\frac{\theta}{2})\sin(\theta) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \qquad \text{(qui est non nul)}$$

Une équation de Π(θ) est donc :

$$\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\theta)x + \cos(\frac{\theta}{2})\sin(\theta)y - \sin(\frac{\theta}{2})z = \cos(\frac{\theta}{2})$$

le second membre étant déterminé de façon que M(θ) satisfasse cette équation.

c) On constate également que le vecteur directeur $R_\theta(\mathbf{K}) = \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2})\cos(\theta) \\ \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\theta) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$ de la droite Δ(θ) est orthogonal à **N**(θ), donc $R_\theta(\mathbf{K})$ est inclus dans la direction vectorielle de Π(θ) et tout point de la forme $M(\theta) + t\, R_\theta(\mathbf{K})$ satisfait l'équation de Π(θ). Donc Δ(θ) est incluse dans Π(θ).

d) Considérons maintenant un tel point $M(\theta) + t\, R_\theta(\mathbf{K})$ de Δ(θ), et soit $(x, y, z)$ un point du ruban de Möbius, voisin de $M(\theta) + t\, R_\varphi(\mathbf{K})$, de la forme $M(\varphi) + t\, R_\varphi(\mathbf{K})$, avec $\varphi = \theta + h$. Cherchons la position de ce point par rapport à Π(θ) en fonction de $h$. On a :

$$\left[\begin{array}{l} x = \cos(\varphi) + t\sin(\frac{\varphi}{2})\cos(\varphi) \\ y = \sin(\varphi) + t\sin(\frac{\varphi}{2})\sin(\varphi) \\ z = t\cos(\frac{\varphi}{2}) \end{array}\right.$$

donc, en reportant dans l'équation de Π(θ) :

$$\begin{aligned} &\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\theta)x + \cos(\frac{\theta}{2})\sin(\theta)y - \sin(\frac{\theta}{2})z - \cos(\frac{\theta}{2}) \\ &\quad = \cos(\frac{\theta}{2})\cos(\theta - \varphi)(1 + t\sin(\frac{\varphi}{2})) - t\cos(\frac{\varphi}{2})\sin(\frac{\theta}{2}) - \cos(\frac{\theta}{2}) \\ &\quad = \cos(\frac{\theta}{2})(\cos(\theta - \varphi) - 1) + t(\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\theta - \varphi)\sin(\frac{\varphi}{2}) - \cos(\frac{\varphi}{2})\sin(\frac{\theta}{2})) \end{aligned}$$

On effectue un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $h = 0$ et on obtient :

$$\begin{aligned} &\cos(\frac{\theta}{2})o(h) + t(\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\varphi}{2})(1 + o(h)) - \cos(\frac{\varphi}{2})\sin(\frac{\theta}{2})) \\ &\quad = o(h) + t(\sin(\frac{\varphi - \theta}{2}) + \cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\varphi}{2})o(h)) \end{aligned}$$

$$= t\sin(\frac{h}{2}) + o(h)$$

$$\sim \frac{th}{2} \quad \text{pour } t \neq 0$$

Cette quantité change de signe selon $h$. Pour $t$ non nul fixé, quand $h$ ou $\varphi = \theta + h$ varie, le point $M(\varphi) + t\,R_\varphi(\mathbf{K})$ parcourt un "parallèle" de la bande de Möbius et traverse le plan $\Pi(\theta)$ en $M(\theta) + t\,R_\theta(\mathbf{K})$.

Considérons maintenant le cas $t = 0$, pour lequel on se situe en $M(\theta)$. Prenons deux réels $h_0 > 0$ et $t_0 > 0$ et soit V le voisinage de $M(\theta)$ correspondant à des paramètres $(\varphi, t)$ variant dans $]\theta - h_0, \theta + h_0[ \times ]-t_0, t_0[$. Dans ce voisinage, chaque parallèle de la bande de Mobius défini par une valeur de $t$ non nulle possède des points situés de part et d'autre de $\Pi(\theta)$, d'après le cas précédent. Donc tout voisinage de $M(\theta)$ possède des points éléments du ruban de Möbius situés de part et d'autre de $\Pi(\theta)$. Donc $\Pi(\theta)$ traverse également le ruban de Möbius en $M(\theta)$.

**Sol.15)** a) En un point $(x, y, z)$ commun à la sphère et au cylindre, le plan tangent à la sphère a pour normale $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et le plan tangent au cylindre a pour normale $\begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$ (gradient de $x^2 + y^2 - x$). Le produit vectoriel de ces deux vecteurs appartient aux deux plans tangents donc à la tangente à la courbe. On obtient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2zy \\ (2x-1)z \\ y \end{pmatrix}$$

Cette méthode donne un vecteur directeur de la tangente à la courbe sauf lorsque les deux plans tangents sont confondus. Cela se produit lorsque le produit vectoriel est nul. $(x, y, z)$ vérifie alors :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \\ -2zy = 0 \\ (2x-1)z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - x = 0 \\ (2x-1)z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (1, 0, 0)$$

La méthode précédente ne permet pas de déterminer de tangente à la courbe en ce point. De fait, sur le dessin, le point (1, 0, 0) est un point singulier admettant deux tangentes.

b) On peut aussi donner un paramétrage de la courbe, par exemple en passant en sphérique. Un point de la sphère a pour coordonnées sphériques $(x, y, z) = (\cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\theta))$ et il vérifie l'équation du cylindre si et seulement si :

$$\cos^2(\varphi)\sin^2(\theta) + \sin^2(\varphi)\sin^2(\theta) - \cos(\varphi)\sin(\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2(\theta) - \cos(\varphi)\sin(\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\theta) = 0 \text{ ou } \sin(\theta) = \cos(\varphi)$$

Le cas sin(θ) = 0 correspond aux deux pôles de la sphère et on peut convenir qu'en ces deux points, on prend $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$ de façon que la seconde condition sin(θ) = cos(φ) y soit aussi vérifiée. Celle-ci s'écrit aussi $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\varphi)$, donc $\varphi = \pm(\frac{\pi}{2} - \theta)$ ou $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \varphi$, donc :

$$\cos(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} \pm \varphi) = \pm\sin(\varphi)$$

Un point de la courbe vérifie donc $(x, y, z) = (\cos^2(\varphi), \cos(\varphi)\sin(\varphi), \pm\sin(\varphi))$, et comme le changement de variables $\varphi \to \varphi + \pi$ change le signe de $z$, on peut supposer que :

$$(x, y, z) = (\cos^2(\varphi), \cos(\varphi)\sin(\varphi), \sin(\varphi))$$

La tangente a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \\ \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$. On peut vérifier que :

$$\begin{pmatrix} -2zy \\ (2x-1)z \\ y \end{pmatrix} = \sin(\varphi)\begin{pmatrix} -2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \\ \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

On retrouve le vecteur tangent calculé en a), avec cependant ici le point (1, 0, 0) qui correspond à $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$, avec ses deux tangentes de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \\ \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$.

**Sol.16)** a) $(C) \subset (S_1) \cap (S_2)$ est facile à vérifier.
Inversement, si on pose $z = t$, $(S_1)$ fournit $y = t^2$ et $(S_2)$ donne $(x - t^3)^2 = 0$ d'où $x = t^3$ racine double.
Les plans tangents en un point de $(S_1)$ et de $(S_2)$ se trouvent en considérant les gradients de $y - z^2$ et de $x^2 - 2xyz + y^3$, respectivement $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2x - 2yz \\ -2xz + 3y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$. En tout point de (C), ces deux vecteurs valent respectivement $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ t^4 \\ -2t^5 \end{pmatrix} = t^4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2t \end{pmatrix}$. Ils sont colinéaires, ce qui signifient que les plans tangents à $(S_1)$ et $(S_2)$ sont confondus. Il faut exclure le point (0, 0, 0) car en ce point, le second gradient $\begin{pmatrix} 2x - 2yz \\ -2xz + 3y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$ est nul et ne permet pas de définir de plan tangent à $(S_2)$.
b) Les points de (C) vérifient l'équation $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$ de $(S_1)$ et vérifient également la représentation paramétrique de la surface $(S_2)$ en prenant $u = \sin(t)$ et $v = t$. Donc (C) est inclus dans $(S_1) \cap (S_2)$.
Réciproquement, un point de $(S_1) \cap (S_2)$ est de la forme $(u\cos(v), u\sin(v), \sin(v))$ avec :

$$u^2\cos^2(v) + (u\sin(v) - 1)^2 + \sin^2(v) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad u^2\cos^2(v) + u^2\sin^2(v) - 2u\sin(v) + \sin^2(v) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad u^2 - 2u\sin(v) + \sin^2(v) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (u - \sin(v))^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad u = \sin(v)$$

Le point a donc pour coordonnées $(\sin(v)\cos(v), \sin^2(v), \sin(v))$ et est élément de (C). On a donc bien $(C) = (S_1) \cap (S_2)$.

Au point $M(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), \sin(v))$ de $(S_2)$, le plan tangent à $(S_2)$ est engendré par les vecteurs $\frac{\partial M}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial M}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}$. Le vecteur normal en $M(u, v)$ au plan tangent est le produit vectoriel des deux, à savoir $\begin{pmatrix} \sin(v)\cos(v) \\ -\cos(v)^2 \\ u \end{pmatrix}$. Il permet de définir le plan tangent à $(S_2)$ sauf s'il est nul, ce qui se produit si $u = 0$ et $\cos(v) = 0$, ce qui correspond aux points $(0, 0, \pm 1)$.

En un point M de la courbe (C), ce vecteur normal est $\begin{pmatrix} \sin(t)\cos(t) \\ -\cos(t)^2 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, qui est non nul et égal à $\boldsymbol{\Omega M}$, rayon de la sphère $(S_1)$ et vecteur normal au plan tangent en M à la sphère. Les deux plans sont donc confondus et les deux surfaces sont tangentes suivant ce même plan.

A noter que, de même qu'une courbe paramétrée peut posséder des points multiples, la surface $(S_2)$ s'auto-intersecte (deux fois). En effet :

- Le même point $(u\cos(v), u\sin(v), \sin(v))$ de $(S_2)$ de cote $z = 0$ peut s'obtenir pour les valeurs des paramètres $(u, 0)$ et $(-u, \pi)$, donnant deux plans tangents de vecteurs normaux $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \pm u \end{pmatrix}$. Les deux plans tangent se confondent en un seul pour $u = 0$ et $v = 0$ ou $\pi$, correspondant au point $(0, 0, 0)$ de $(S_2)$. Dans la figure, seule la partie de $(S_2)$ dans le demi-espace $z > 0$ a été représenté.
- Le même point $(u\cos(v), u\sin(v), \sin(v))$ de l'axe Oz autre que $(0, 0, \pm 1)$ s'obtient pour les valeurs des paramètres $(0, v)$ et $(0, \pi - v)$, donnant deux plans tangents de vecteurs normaux $\begin{pmatrix} \pm \sin(v)\cos(v) \\ -\cos(v)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

◆