LES NOMBRES COMPLEXES

PLAN

I : Définition des complexes

1- Historique

Les nombres complexes, tels que nous les utilisons aujourd'hui, datent du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Ils étaient cependant connus et utilisés depuis plusieurs siècles sous le nom de nombres imaginaires (terme qui est resté dans l'expression "partie imaginaire"). Ils sont apparus lorsque l'on a essayé de résoudre les équations du 3$^{\text{ème}}$ degré. Ces équations donnèrent lieu à de nombreux travaux de la part des algébristes arabes du Moyen-Age, en particulier Ibn Al-Haytham qui résout des équations de ce type par intersections de coniques, Omar Khayyam qui tente des résolutions par radicaux, Al-Tusi et Al-Kashi qui proposent des méthodes de résolution approchées. Cependant, le premier à avoir résolu algébriquement des équations du 3ème degré du type $x^3 + px = q$ ($p > 0$, $q > 0$) semble être Scipione Del Ferro (1465-1526), professeur à l'université de Bologne, vers 1500. Il ne publia pas sa découverte mais la transmit à son élève Antonio Maria Fior et à son gendre Annibale della Nave. En 1531, Tartaglia (1500-1557), soit à la lumière d'une indiscrétion, soit par sa propre invention, apprit également à résoudre les équations du 3ème degré. Croyant à une imposture, Fior lança en 1535 un défi public à Tartaglia. A la fin du temps imparti, Tartaglia avait résolu toutes les équations de Fior, alors que celui-ci ne put en résoudre une seule de Tartaglia. La supériorité de Tartaglia provient du fait que ce dernier savait résoudre les équations du type $x^3 + px^2 = q$, chose que Fior ne savait pas faire. En 1539, Tartaglia accepta de dévoiler son secret à Cardan (1501-1576). Ce dernier, à la suite d'une visite que lui fit della Nave en 1542, s'estima libéré du serment prêté à Tartaglia et publia la méthode de résolution en 1545 dans son ouvrage *Ars magna*, malgré la colère de Tartaglia. Un élève de Cardan, Ludovico Ferrari (1522–1565), parvint à résoudre les équations du 4ème degré. Signalons qu'on ne peut résoudre n'importe quelle équation algébrique par radicaux. C'est impossible pour la plupart des équations du 5ème degré, par exemple $x^5 + x - a = 0$, avec $a = 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11$ ... $x^5 + x - 6$ est résoluble, mais simplement parce qu'il se factorise en $(x^2 - x + 2)(x^3 + x^2 - x - 3)$.

Voici comment procède Cardan. Considérant l'identité :

$$(a + b)^3 = 3ab(a + b) + a^3 + b^3$$

Cardan explique en 1545 comment résoudre les équations du type :

$$x^3 = px + q$$

en posant $ab = \frac{p}{3}$ et $a^3 + b^3 = q$. Ayant trouvé a et b vérifiant ces deux dernières équations, une solution de l'équation initiale est alors donnée par $x = a + b$.

EXEMPLES :

❑ Résoudre $x^3 = 18x + 35$.

$$\left[\begin{array}{l} ab = 6 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^3b^3 = 6^3 = 216 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{array}\right.$$

Donc a^3 et b^3 sont racines de l'équation $X^2 - 35X + 216 = 0$, à savoir 8 et 27. Donc $a = 2$ et $b = 3$. Une solution de l'équation initiale est donc 5. Les autres solutions sont trouvées en factorisant :

$$x^3 - 18x - 35 = (x - 5)(x^2 + 5x + 7) \text{ etc...}$$

(Les équations du second degré à discriminant négatif sont considérées comme n'ayant pas de solution à l'époque).

❑ Résoudre $x^3 = -3x + 14$.

$$\left[\begin{array}{l} ab = -1 \\ a^3 + b^3 = 14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^3b^3 = -1 \\ a^3 + b^3 = 14 \end{array}\right.$$

Donc a^3 et b^3 sont racines de $X^2 - 14X - 1 = 0$, à savoir $7 \pm \sqrt{50}$. Donc a et b valent $\sqrt[3]{7 \pm \sqrt{50}}$ et une racine de l'équation initiale est $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$. Une valeur approchée numérique de cette expression donne 2, et de fait 2 est bien racine de $x^3 = -3x + 14$. On retrouve bien cette valeur de 2 à partir de $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$ en remarquant que $(1 \pm \sqrt{2})^3 = 7 \pm \sqrt{50}$, ou encore que $1 \pm \sqrt{2} = \sqrt[3]{7 \pm \sqrt{50}}$, de sorte que :

$$\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2$$

Dans cet exemple également, il n'y a pas d'autres racines réelles puisque :

$$x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2+2x+7)$$

et que le trinôme $x^2 + 2x + 7$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.

❑ Résoudre $x^3 = 15x + 4$.

$$\begin{cases} ab = 5 \\ a^3 + b^3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3b^3 = 5^3 = 125 \\ a^3 + b^3 = 4 \end{cases}$$

Donc a^3 et b^3 sont racines de l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$. Cette équation admet un discriminant négatif. Elle est donc réputée ne pas avoir de solution. Est-ce à dire que l'équation initiale n'admet pas non plus de solution ? Si. Toute équation du troisième degré admet au moins une solution (pourquoi ?). Ici, 4 est racine évidente. Bombelli (1526-1573) eut l'idée de penser que les parties "impossibles" ou imaginaires devaient s'éliminer pour redonner la racine réelle. Il écrivit donc :

$$a^3 = 2 + \sqrt{-121} = 2 + 11\sqrt{-1} \Rightarrow a = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

$$b^3 = 2 - \sqrt{-121} = 2 - 11\sqrt{-1} \Rightarrow b = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

et $\quad 4 = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$

De fait, on peut vérifier que :

$$(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 8 \pm 12\sqrt{-1} - 6 \pm (-\sqrt{-1}) = 2 \pm 11\sqrt{-1}$$

de sorte que la solution de Cardan vaut également $(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1})$, ce qui donne effectivement 4. Il y a en fait trois solutions à l'équation, car il existe, au sens moderne, trois racines cubiques complexes de a^3 et b^3. Les solutions sont :

$a = 2 + i$ et $b = 2 - i \qquad \Rightarrow a + b = 4$

$a = (2+i)j$ et $b = (2-i)j^2 \qquad \Rightarrow a + b = -2 - \sqrt{3}$

$a = (2+i)j^2$ et $b = (2-i)j \qquad \Rightarrow a + b = -2 + \sqrt{3}$

où $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ est racine cubique de 1. Les trois racines trouvées sont bien racines de :

$$x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2 + 4x + 1)$$

(Il est intéressant de noter que le seul cas qui donne trois racines réelles à l'équation cubique nécessite obligatoirement l'utilisation des nombres complexes pour être résolue).

Bombelli fut donc le premier à introduire une notation proche de notre notation moderne. Mais l'utilisation des nombres imaginaires a mis plusieurs siècles avant de s'imposer. Girard (1595-1632) déclare en 1629, dans son *Invention nouvelle en algèbre* :

> *On pourrait dire à quoi servent ces solutions qui sont impossibles*[1]*, je réponds pour trois choses, pour la certitude de la règle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité.*

[1] Il s'agit des nombres complexes

Mais ses vues avancées à l'époque n'ont guère eu d'influence.

Il faut attendre le XIXème siècle pour que les nombres imaginaires soient universellement adoptés. La représentation géométrique des nombres complexes par les points du plan joue un grand rôle dans cette acceptation, le support géométrique apportant une caution aux yeux de nombreux mathématiciens de l'époque.

En 1799, Wessel (1745-1818) qui est arpenteur, introduit un axe imaginaire perpendiculaire à l'axe réel. Il note ε pour $\sqrt{-1}$, et interprète les vecteurs du plan comme des nombres complexes.

Argand (1762-1822), quant à lui, interprète en 1806 les nombres négatifs comme ayant une direction opposé aux nombres positifs. A cette époque, on note encore $a : b :: c : d$ pour désigner le fait que la grandeur a est à la grandeur b ce que la grandeur c est à la grandeur d. Argand note donc que $1 : 1 :: -1 : -1$ et que $1 : -1 :: -1 : 1$, à savoir, 1 est à 1 ce que –1 est à –1, et 1 est à –1 ce que –1 est à 1. Il se demande alors quelle quantité x vérifiera $1 : x :: x : -1$, à savoir, 1 est à x ce que x est à –1. Il a l'idée de se placer dans le plan et de voir que la quantité x est celle qui est orthogonale à la droite définissant 1 et –1. x joue évidemment ici le rôle du complexe $\pm i$. Il propose d'abandonner le qualificatif d'imaginaire, et de qualifier x de *quantités médianes*.

Mais les mémoires de ces deux auteurs resteront confidentiels. Celui de Wessel, figurant dans les Mémoires de l'Académie des Sciences du Danemark, passera complètement inaperçu, et ne sera traduit en français qu'en 1897. Celui d'Argand aura plus de chance, puisqu'il fera l'objet d'articles dans les Annales de Gergonne en 1813-14. Les complexes prendront définitivement leur statut moderne grâce à l'influence de Gauss (1777-1855), dont le renom dépasse de loin celui des précédents personnages. Déjà en 1799, Gauss utilise implicitement le plan complexe dans sa thèse. En 1811, il écrit[2] :

> *De même qu'on peut se figurer le domaine entier de toutes les grandeurs réelles au moyen d'une ligne droite illimitée, de même on peut rendre perceptible le domaine entier de toutes les grandeurs, réelles et imaginaires, au moyen d'un plan illimité, où tout point, déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en quelque sorte la grandeur a + bi.*

Et en 1831[3] :

> *Si on a considéré jusqu'à présent ce sujet d'un point de vue erroné, et qu'on y a trouvé une mystérieuse obscurité, c'est en grande partie imputable à des appellations inappropriées. Si l'on avait qualifié +1, –1, i non pas d'unité positive, négative, et imaginaire (ou même impossible), mais plutôt d'unité directe, inverse, et latérale, le propos n'aurait presque pas été obscurci.*

ou encore[4] :

> *Aussi longtemps que les quantités imaginaires étaient basées sur la fiction, elles n'étaient pas pleinement acceptées en mathématiques, mais plutôt regardées comme quelque chose que l'on devait tolérer ; elles étaient loin d'avoir acquis le même statut que les quantités réelles. Il n'y a plus aucune justification à une telle discrimination, maintenant que la métaphysique des nombres imaginaires a été pleinement éclairée, et qu'il a été montré qu'ils avaient une signification aussi réelle que les nombres négatifs.*

C'est à partir de cette époque que Gauss emploie le terme "complexe" en lieu et place du terme "imaginaire". C'est également au cours du XIXème siècle que les nombres complexes commencent à être largement utilisés en physique.

---

[2] Gauss, Lettre à Bessel du 18 décembre 1811, Werke 8, p.90-92

[3] Gauss, Werke 2, p.177-178

[4] Gauss, Werke 10, p.404

2- Définition

L'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ est en bijection avec $\mathbb{R}^2$. Ses éléments sont notés $z = a + ib$, pour a et b réels. a est la partie réelle, b la partie imaginaire. i est un symbole n'ayant d'autre but que de distinguer la **partie réelle** $\text{Re}(z) = a$ de z de sa **partie imaginaire** $\text{Im}(z) = b$. Les règles de calculs sont les règles usuelles de la somme et du produit, avec la règle $i^2 = -1$. La notation i est due à Euler (1707-1783). Ces règles donnent à $\mathbb{C}$ une structure appelée *corps*, comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ (voir L1/ENSEMBLE.PDF). Dans un corps, il y a deux opérations, somme et produit, et tout élément non nul $z = a + ib$ possède un inverse :

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

comme on le vérifie facilement.

Depuis Gauss (1777-1855), on a adopté une représentation géométrique des complexes. Si on munit le plan d'un repère orthonormé, alors le complexe $z = a + ib$ peut se représenter :

- par le vecteur de composantes (a, b), **vecteur** dit d'**affixe** z.
- par le point de coordonnées (a, b), **point** dit **d'affixe** z.

3- Conjugaison

On définit une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$z = a + ib \rightarrow \overline{z} = a - ib, \text{ \textbf{conjugué} de } z.$$

Cette application correspond géométriquement à une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Il s'agit d'une involution (sa composée avec elle-même est égale à l'identité).

On vérifie facilement que l'on a les règles de calcul suivantes :

$$\overline{z} + \overline{z'} = \overline{z + z'} \qquad \overline{z}\,\overline{z'} = \overline{z\,z'} \qquad -\overline{z} = \overline{-z}$$

$$1/\overline{z} = \overline{1/z} \qquad \overline{z/z'} = \overline{z}/\overline{z'}$$

$$\text{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \text{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

4- Module et inégalité triangulaire

Le **module** de $z = a + ib$ est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il s'interprète géométriquement comme la norme euclidienne du vecteur d'affixe z ou comme la distance du point d'affixe z à l'origine. De même, $|z - a|$ est la distance du point d'affixe z au point d'affixe a. Ainsi, R étant un réel strictement positif, $\{z, |z - a| < \text{R}\}$ est le **disque** (dit ouvert) de centre a de rayon R. L'ensemble $\{z, |z - a| \leq \text{R}\}$ s'appelle **disque fermé** de centre a de rayon R.

On vérifie facilement les règles de calculs suivantes :

$$|zz'| = |z|\,|z'| \qquad |z| = |\overline{z}| \qquad z\overline{z} = |z|^2 \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \qquad |\text{Re}(z)| \leq |z| \qquad |\text{Im}(z)| \leq |z|$$

Seule l'inégalité triangulaire $\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$ est non évidente. Elle découle de la même propriété dans le plan euclidien. On peut aussi la démontrer directement de la façon suivante :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\Leftrightarrow \quad |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |z|^2 + z\,\overline{z'} + \overline{z}\,z' + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad z\,\overline{z'} + \overline{z}\,z' \leq 2|z||z'|$$

On reconnaît dans le membre de gauche le double de la partie réelle de $z\,\overline{z'}$.

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(z\,\overline{z'}) \leq |z||z'|$ ce qui est vrai car $\mathrm{Re}(z\,\overline{z'}) \leq |z\,\overline{z'}|$

On a l'égalité $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z\,\overline{z'}) = |z\,\overline{z'}|$, donc si et seulement si il existe λ réel positif ou nul tel que $z\,\overline{z'} = \lambda$ ce qui est vérifié si et seulement si $z' = 0$ ou $z\,|z'^2| = \lambda z'$. Cette dernière relation est vérifiée si et seulement si z et z' sont colinéaires de même sens.

Quant à la première inégalité triangulaire, elle découle de la deuxième de la façon suivante :

$$|z| = |z + z' - z'| \leq |z + z'| + |z'|$$

$$\Rightarrow \quad |z| - |z'| \leq |z + z'|$$

De même en intervertissant les rôles de z et z'.

5- Argument

a) Définition :

L'**argument** d'un complexe non nul z est une mesure φ de l'angle $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{v})$ où $\boldsymbol{v}$ est le vecteur d'affixe z dans la base orthonormée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. On le note $\arg(z)$. Il est défini à 2π près. La valeur particulière appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est appelé **argument principal**. On notera par exemple :

$$\arg(z) \equiv \varphi\ [2\pi]$$

On a alors :

$$z = |z|\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

On a :

$$\arg(\overline{z}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

En effet, si $z = |z|\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, alors $\overline{z} = |z|\,(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))$ et $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|}(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))$ d'où les égalités de la première relation. Pour la deuxième, si $z' = |z'|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, alors :

$$zz' = |z|\,|z'|\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$= |z|\,|z'|\,(\cos(\varphi)\cos(\theta) - \sin(\varphi)\sin(\theta) + i\cos(\theta)\sin(\varphi) + i\cos(\varphi)\sin(\theta))$$
$$= |z|\,|z'|\,(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi))$$

en vertu des formules (à connaître) :

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi)$$

donc $\arg(zz') = \theta + \varphi = \arg(z) + \arg(z')$.

Alors que l'addition d'un vecteur z' s'interprète géométriquement par une translation de vecteur le vecteur d'affixe z', le produit $z \to zz'$ par z' s'interprète comme la composée de :

- une **homothétie** de centre O de rapport le réel $|z'|$: $z \to |z'|z$
- une rotation de centre O d'angle $\arg(z')$: $z \to \arg(z')z$

Cette composée s'appelle **similitude directe** de centre O, de rapport $|z'|$ et d'angle $\arg(z')$.

Ainsi, le produit par i est une rotation de $\dfrac{\pi}{2}$. Le produit par $j = e^{2i\pi/3}$ est une rotation de $\dfrac{2\pi}{3}$.

<u>b) Forme trigonométrique</u> :

Le calcul vu ci-dessus

$$(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \times (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

conduit à constater que, si on pose la fonction $f : \theta \to \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ alors $f(\theta + \varphi) = f(\theta) \times f(\varphi)$. Il s'agit d'une relation fonctionnelle comparable à celle de l'exponentielle et il est convenu de noter $f(\theta) = e^{i\theta}$, de sorte que :

$$z = |z|e^{i\varphi}$$ (**forme trigonométrique** d'un nombre complexe)

avec

$$e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

Il est intéressant de remarquer qu'on utilise pour désigner la fonction f les symboles e et i, et pas une notation λ^θ, avec λ défini autrement, alors qu'a priori, n'importe quelle exponentielle de θ pouvait faire l'affaire. Pourquoi ? Parmi les multiples raisons possibles, on a :

$$f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$
$$\Rightarrow \quad f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta) = if(\theta)$$

en convenant de dériver une fonction à valeurs complexes en dérivant sa partie réelle et sa partie imaginaire. Puisque dans $\mathbb{R}$, la dérivée par rapport à θ de la fonction $e^{a\theta}$ est $ae^{a\theta}$, il est naturel de poser $f(\theta) = e^{i\theta}$, étendant ainsi la règle de dérivation d'une exponentielle au cas où $a = i$.

<u>c) Exponentielle complexe</u> :

Plus généralement, pour $z = x + iy$ complexe, on pose :

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x \times e^{iy}$$

Il en résulte que la résolution de $e^z = a$ conduit à la discussion suivante :

si $a = 0$ alors, il n'y a pas de solution

sinon, $z = x + iy$ avec $x = \ln|a|$ et $y = \arg(a) + 2k\pi$, soit $z = \ln|a| + i\arg(a) + 2ik\pi$

On a $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ pour tout complexe z et z'. En effet, si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors :

$$e^{z+z'} = e^{x+x'} \times e^{i(y+y')}$$
$$= e^x e^{x'} \times e^{iy} e^{iy'}$$
$$= e^z e^{z'}$$

La dérivée de $t \to e^{at}$ avec a complexe est ae^{at}. En effet, si $a = x + iy$, alors :

$$e^{at} = e^{tx}(\cos(ty) + i\sin(ty))$$

dont la dérivée par rapport à t est :

$$xe^{tx}(\cos(ty) + i\sin(ty)) + e^{tx}(-y\sin(ty) + iy\cos(ty)) = (x + iy)\, e^{tx}(\cos(ty) + i\sin(ty))$$
$$= ae^{at}$$

<u>d) Formule d'Euler</u> :

Voici quelques formules :

$$e^{i\pi} = -1 \text{ (\textbf{formule d'Euler})}$$
$$e^{2i\pi} = 1$$
$$e^{i\pi/2} = i$$
$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2e^{i\theta/2}\cos(\frac{\theta}{2})$$
$$1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -2ie^{i\theta/2}\sin(\frac{\theta}{2})$$

En prenant les parties réelles et imaginaires des deux dernières formules, on obtient :

$$\cos(\theta) = 2\cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1 = \cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$
$$\sin(\theta) = 2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{2\tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

où l'on a posé $t = \tan(\frac{\theta}{2})$. On a aussi :

$$\tan(\theta) = \frac{2\tan(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Ces trois formules sont faciles à mémoriser. $\cos(\theta)$ est une fonction paire définie sur $\mathbf{R}$, et la seule façon de combiner les seules expressions $2t$, $1 + t^2$ et $1 - t^2$ en une fraction rationnelle paire définie sur $\mathbf{R}$ et de prendre le quotient $\frac{1 - t^2}{1 + t^2}$.

De même, $\sin(\theta)$ est une fonction impaire définie sur $\mathbf{R}$, et la seule façon de combiner les seules expressions $2t$, $1 + t^2$ et $1 - t^2$ en une fraction rationnelle impaire définie sur $\mathbf{R}$ et de prendre le quotient $\frac{2t}{1 + t^2}$.

Enfin la tangente est le quotient de sin par cos.

Quand θ varie de $-\pi$ à π exclus, $[\cos(\theta), \sin(\theta)]$ décrit le cercle privé du point $(-1, 0)$. $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ varie de $-\infty$ à $+\infty$. $t \to (\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2})$ est donc un paramétrage sous forme de fractions rationnelles de polynômes du cercle unité privé du point $(-1,0)$, ce dernier étant obtenu comme point limite quand t tend vers l'infini.

<u>e) Cercle unité</u> :

On appelle cercle unité $\mathbf{U}$ l'ensemble $\{z \mid |z| = 1\} = \{z \mid \exists\, \theta \in \mathbf{R}, z = e^{i\theta}\}$.

Cet ensemble possède les propriétés suivantes :

❑ $\mathbb{U}$ est stable pour le produit (ce qui signifie : $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U} \Rightarrow zz' \in \mathbb{U}$ pour tous z et z')
❑ Ce produit est associatif[5] (ce qui signifie que $(zz')z'' = z(z'z'')$ pour tous z, z', z'' de $\mathbb{U}$)
❑ 1, neutre du produit (ce qui signifie que $1z = z1 = z$ pour tout z de $\mathbb{U}$), appartient à $\mathbb{U}$
❑ si z appartient à $\mathbb{U}$, son inverse $\frac{1}{z}$ aussi.

$(\mathbb{U}, \times)$ est un **groupe** (voir L1/ENSEMBLE.PDF). Le produit étant commutatif (ce qui signifie que $zz' = z'z$ pour tous z et z' de $\mathbb{U}$), le groupe est dit commutatif (ou abélien). Il existe par ailleurs une analogie de structure entre $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{U},\times)$ par l'intermédiaire de l'application f suivante :

$$\begin{array}{ll} (\mathbb{R},+) & \rightarrow (\mathbb{U}, \times) \\ \theta & \rightarrow e^{i\theta} = f(\theta) \end{array}$$

On a en effet $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$
On dit que f est un **morphisme de groupe** (voir L2/GROUPES.PDF)

II : Utilisation des complexes

1- Formule de Moivre : (Moivre 1667-1754)

Cette formule s'énonce :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Elle découle de la propriété $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ qui se montre aisément par récurrence. Elle permet de calculer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

EXEMPLES :

❑ Calculer $\cos(\frac{\pi}{5})$, $\sin(\frac{\pi}{5})$, $\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\sin(\frac{2\pi}{5})$. Posons $\theta = \frac{\pi}{5}$ ou $\frac{2\pi}{5}$. On a $\sin(5\theta) = 0$. Or :

$$\begin{aligned} \sin(5\theta) &= \mathrm{Im}(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^5 = 5 \times \cos^4(\theta) \times \sin(\theta) - 10 \times \cos^2(\theta) \times \sin^3(\theta) + \sin^5(\theta) \\ &= 5(1 - \sin^2(\theta))^2 \times \sin(\theta) - 10(1 - \sin^2(\theta)) \times \sin^3(\theta) + \sin^5(\theta) \\ &= 5\sin(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 16\sin^5(\theta) \end{aligned}$$

donc :

$$16\sin^4(\theta) - 20\sin^2(\theta) + 5 = 0$$

On trouve $\sin^2(\theta) = \dfrac{10 \pm \sqrt{20}}{16} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$

Plus précisément, puisque $\sin(\frac{2\pi}{5}) > \sin(\frac{\pi}{5})$:

$$\sin^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

$$\sin^2(\frac{2\pi}{5}) = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$$

donc :

$$\sin(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

[5] Un exemple de produit non associatif est le produit vectoriel des vecteurs dans l'espace de dimension 3.

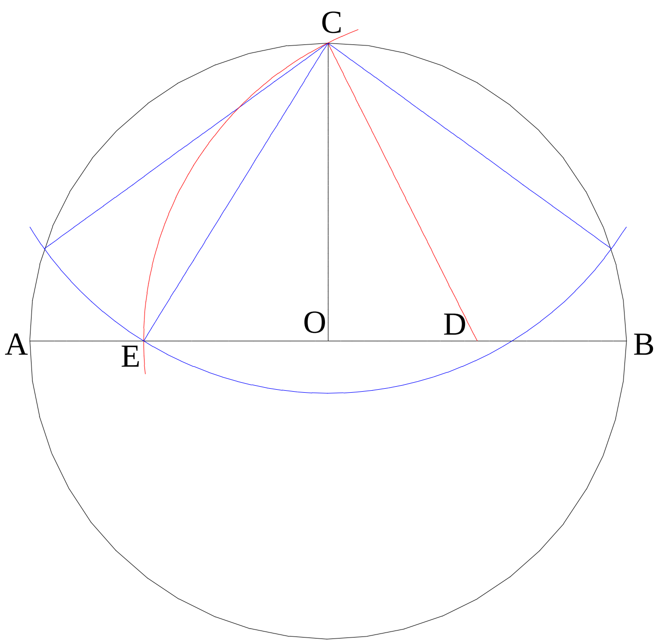
On en déduit :

$$\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) = \sin(\frac{\pi}{10})$$

Ces formules permettent de prouver qu'on peut construire un pentagone régulier à la règle et au compas. Tracer un cercle de centre O de rayon 1, de diamètre [AB], A = (–1, 0), B = (1, 0). Soit C = (0, 1), point du cercle sur le diamètre perpendiculaire à [AB]. Soit D = $(\frac{1}{2}, 0)$ le milieu de [OB].

Tracer le cercle de centre D passant par C, de rayon CD = $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ce cercle coupe [AO] au point E = $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$. On a alors CE = $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$ = $2\sin(\frac{\pi}{5})$ qui est la longueur du côté du pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Il suffit de reporter cette longueur le long du cercle pour construire le pentagone. Ci-dessous, on a reporté deux côtés du pentagone :



On a également OE = DE – OD = DC – OD = $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\sin(\frac{\pi}{10})$, ce qui prouve que OE est la longueur du côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de rayon 1.

❑ Exprimons également $\cos(\frac{2\pi}{15})$ sous forme de radicaux. Pour cela, considérons également $\cos(\frac{8\pi}{15})$.

On a, en utilisant les valeurs précédemment trouvées $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$:

$$\cos(\frac{2\pi}{15}) + \cos(\frac{8\pi}{15}) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}) + \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}) = 2\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos(\frac{2\pi}{15})\cos(\frac{8\pi}{15}) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5})\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5})$$

$$= (\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{5}) + \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{5}))(\cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{5}) - \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{5}))$$
$$= \cos^2(\frac{\pi}{3})\cos^2(\frac{\pi}{5}) - \sin^2(\frac{\pi}{3})\sin^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{-3 + \sqrt{5}}{8}$$

Connaissant leur somme et leur produit, on peut conclure que $\cos(\frac{2\pi}{15})$ et $\cos(\frac{8\pi}{15})$ sont les racines du polynôme $X^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}X + \frac{-3 + \sqrt{5}}{8}$, $\cos(\frac{2\pi}{15})$ en étant la racine positive. D'où :

$$\cos(\frac{2\pi}{15}) = \frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{8}$$
$$\cos(\frac{8\pi}{15}) = \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}{8}$$

❑ Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$. Ces deux quantités sont respectivement les parties réelles et imaginaires de $\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}$, qui est la somme d'une suite géométrique de raison e^{it}. Si cette raison est différente de 1, autrement dit si $t \neq 0$ modulo 2π, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i(n+1)t/2}}{e^{it/2}} \times \frac{-2i\sin(\frac{(n+1)t}{2})}{-2i\sin(\frac{t}{2})} = e^{int/2}\,\frac{\sin(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$

donc, en séparant parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \cos(\frac{nt}{2})\,\frac{\sin(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kt) = \sin(\frac{nt}{2})\,\frac{\sin(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$

qu'on peut éventuellement encore transformer en utilisant les formules :

$$2\cos(p)\sin(q) = \sin(q + p) + \sin(q - p)$$
$$2\sin(p)\sin(q) = \cos(q - p) - \cos(q + p)$$

2- Linéarisation

La linéarisation est le problème inverse du précédent. On se donne un produit de puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ et l'on souhaite exprimer cette expression en fonction d'une fonction linéaire (du premier degré) de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$. Ce problème se pose par exemple lorsque l'on cherche une primitive d'une telle fonction. Il suffit dans la plupart des cas d'utiliser :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

On peut également utiliser les formules de trigonométrie.

EXEMPLES:

❑ $$\cos^4(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} = \frac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}$$

ou $$\cos^4(\theta) = (\cos^2(\theta))^2 = \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)}{4}$$

$$= \frac{1 + 2\cos(2\theta) + \frac{1 + \cos(4\theta)}{2}}{4} = \frac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}$$

❑ $$\sin^3(\theta) \times \cos^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \times \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta})^2}{-32i}$$

$$= \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})(e^{4i\theta} - 2 + e^{-4i\theta})}{-32i}$$

$$= \frac{e^{5i\theta} - e^{3i\theta} - 2e^{i\theta} + 2e^{-i\theta} + e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta}}{-32i} = \frac{2\sin(\theta) + \sin(3\theta) - \sin(5\theta)}{16}$$

3- Réduction de *a*cos(θ) + *b*sin(θ)

a et b sont deux réels non tous deux nuls. On factorise par $\sqrt{a^2 + b^2}$. On obtient :

$$\sqrt{a^2 + b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin(\theta)\right]$$

Les coefficients $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ont la somme de leur carrés égal à 1. Il existe un réel Φ tel qu'ils valent respectivement par exemple cos(Φ) et –sin(Φ). On obtient alors la forme réduite :

$$\sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta + \Phi)$$

Si θ est de la forme $\omega t + \varphi$, cette transformation montre qu'une combinaison linéaire de cos et de sin de même pulsation ω et de même phase est une sinusoïde toujours de pulsation ω, mais déphasée de Φ.

4- Racines d'un complexe

<u>a) racine carrée, méthode algébrique</u> :

Soit Z = X + iY. On cherche $z = x + iy$ tel que $Z = z^2$.

On obtient :

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \text{(i)} & x^2 - y^2 = X \\ \text{(ii)} & 2xy = Y \\ \text{(iii)} & x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} \end{array}\right.$$

(iii) est obtenu en sommant les carrés de (i) et (ii) ou en prenant le module de Z. (i) et (iii) permettent de trouver x^2 et y^2, et donc x et y au signe près ; ii) permet de lever l'ambiguïté sur les signes.

Nous menons ci-dessous le calcul complet dans le cas général, mais dans la pratique, il est plus simple de refaire les calculs plutôt que de tenter de retenir les formules finales :

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2} \\ \text{sg}(xy) = \text{sg}(Y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad z = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}} + i\ \text{sg}(Y) \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}} \right)$$

EXEMPLE :

❑ $Z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 2xy = \dfrac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Application aux équations du second degré :

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c complexes se résout avec des formules analogues à celles de $\mathbf{R}$, en calculant le discriminant. En effet :

$$az^2 + bz + c = a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Si on pose $\Delta = \delta^2$, on obtient bien comme racine $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$. (On notera que, si $\sqrt{x}$ désigne un réel *positif*, la notation $\sqrt{z}$ est dénuée de sens puisqu'il n'y a pas de complexes positifs et on évitera donc d'écrire $\sqrt{\Delta}$). Il y a toujours deux racines (éventuellement confondues si $\Delta = 0$). Leur somme vaut $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit $\dfrac{c}{a}$.

EXEMPLE :

❑ Soit l'équation $(1 + i)z^2 - (5 + i)z + 6 + 4i = 0$

Le discriminant vaut $16 - 30i = \delta^2$ avec $\delta = 5 - 3i$. Les racines sont $\dfrac{5 + i \pm \delta}{2(1 + i)}$, soit, après simplification, $2 - 3i$ et $1 + i$.

<u>b) racine $n^{\text{ème}}$: méthode trigonométrique</u> :

Si $Z = |Z|\ e^{i\Phi}$, on cherche $z = |z|\ e^{i\varphi}$ tel que $z^n = Z$.

On obtient donc :

$$\begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ n\varphi \equiv \Phi\ [2\pi] \text{ donc } \varphi = \dfrac{\Phi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\ ,\ k \in \mathbf{Z} \text{ ou } k \in \{0,...,n-1\} \end{cases}$$

On a donc $z = \sqrt[n]{|Z|}\ \exp(\dfrac{i\Phi}{n} + \dfrac{2ik\pi}{n})$

EXEMPLES :

❑ Dans l'exemple du a), on a Z = $e^{i\pi/6}$. Donc $z = \pm e^{i\pi/12}$. En utilisant les conclusions des deux méthodes, on en déduit que :

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

❑ Résoudre $z^3 = 4\sqrt{2}\,(-1+i)$. En déduire $\cos(\frac{11\pi}{12})$, $\sin(\frac{11\pi}{12})$, $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$. L'équation est équivalente à $z^3 = 8e^{3i\pi/4}$ donc $z = 2e^{i\pi/4}$ ou $z = 2e^{i\pi/4+2i\pi/3} = 2e^{11i\pi/12}$ ou $z = 2e^{i\pi/4-2i\pi/3} = 2e^{-5i\pi/12}$. Ces trois nombres sont racines du polynôme $X^3 - 4\sqrt{2}\,(-1+i)$ et comme la première racine vaut $2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, on peut aussi factoriser le polynôme par $X - \sqrt{2}(1+i)$, ce qui donne :

$$X^3 - 4\sqrt{2}\,(-1+i) = (X - \sqrt{2}(1+i)) \times (X^2 + \sqrt{2}(1+i)X + 4i)$$

Le trinôme $X^2 + \sqrt{2}(1+i)X + 4i$ a pour discriminant $-12i = 6(-1+i)^2$ et les deux autres racines sont :

$$\frac{-\sqrt{2}(1+i)+\sqrt{6}(-1+i)}{2} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2} = 2e^{11i\pi/12} \text{ de partie imaginaire positive}$$

et

$$\frac{-\sqrt{2}(1+i)-\sqrt{6}(-1+i)}{2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}-i(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2} = 2e^{-5i\pi/12} \text{ de partie imaginaire négative}$$

donc :

$$\cos(\frac{11\pi}{12}) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \qquad \sin(\frac{11\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \qquad \sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

<u>c) racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité</u> :

Pour Z = 1, on obtient $z = e^{2ik\pi/n}$. Ces nombres forment les n racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité. Ces racines sont situés au sommet d'un polygone régulier de n côtés. Posons $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}, k \in \mathbb{Z}\}$. Ces racines sont distinctes et forment les n zéros du polynôme $X^n - 1 = 0$ (voir L1/POLYNOME.PDF). On a donc :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n})$$

On a par ailleurs $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1)$

Donc :

$$1 + X + ... + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n})$$

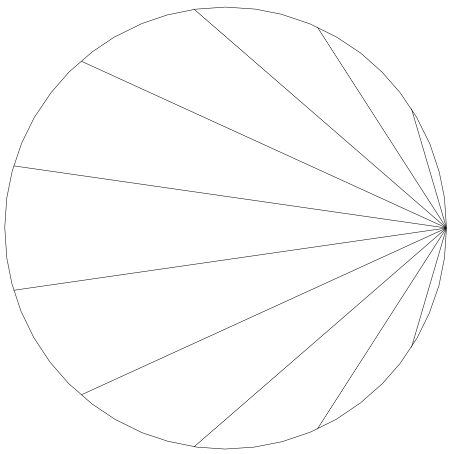
On considérera par exemple les cas particuliers $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$:

$n = 2$: 1 et -1 sont racines de $X^2 - 1 = 0$. -1 est racine de $X + 1 = 0$

$n = 3$: 1, j et j^2 sont racines de $X^3 - 1 = 0$. j et j^2 sont racines de $1 + X + X^2 = 0$

$n = 4$: 1, i, -1 et $-i$ sont racines de $X^4 - 1 = 0$. i, -1, $-i$ sont racines de $1 + X + X^2 + X^3 = 0$

Pour X = 1, la relation $1 + X + ... + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n})$ donne $n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{2ik\pi/n})$, qui possède l'interprétation graphique suivante (en prenant le module du membre de droite). Soit un cercle de rayon 1 et n points de sa circonférence répartis régulièrement. On joint l'un des points à tous les autres. Alors le produit des longueurs des segments ainsi formés vaut n.



5- Interprétation géométrique

Nous avons déjà vu que :

- $z \to az$ est une similitude directe de centre O, de rapport $|a|$, d'angle arg(a)
- $z \to z + b$ est une translation de vecteur b.

Il en résulte que $z \to az + b = Z$ est la composée d'une similitude directe et d'une translation. Si $a \neq 1$, il s'agit d'une similitude directe mais dont le centre est différent de O. Il suffit pour cela de chercher le point ω invariant par la transformation :

$$\omega = a\omega + b \Leftrightarrow \omega = \frac{b}{1-a}$$

et de constater que $Z - \omega = az + b - \frac{b}{1-a} = az - \frac{ab}{1-a} = a(z - \omega)$. Il s'agit d'une similitude directe de centre ω de rapport $|a|$, d'angle arg(a).

- $z \to \overline{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel.

Considérons maintenant $z \to \frac{1}{z}$. On obtient l'image d'un complexe en prenant l'opposé de l'argument (donc en faisant une symétrie par rapport à l'axe réel), puis en prenant l'inverse du module (donc un faisant ce qu'on appelle une **inversion**).

Interprétons maintenant le module et l'argument de $\dfrac{z-a}{z-b}$. Considérons les points A, B et Z d'affixe respectifs a, b et z. On a :

$$\frac{\text{ZA}}{\text{ZB}} = \left|\frac{z-a}{z-b}\right| \text{ rapport des longueurs des côtés du triangle issus de Z}$$

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \arg(z-a) - \arg(z-b) = \text{angle}(\text{O}x, \boldsymbol{AZ}) - \text{angle}(\text{O}x, \boldsymbol{BZ}) = \text{angle}(\boldsymbol{BZ}, \boldsymbol{AZ})$$
$$= \text{angle}(\text{BZA})$$

Certaines propriétés géométriques s'interprètent sous forme complexe. Par exemple :

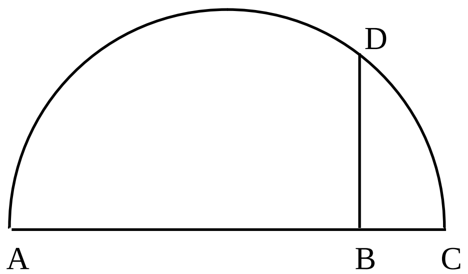
A, B et Z sont alignés si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) = 0$ ou π si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in \mathbf{R}$

$\boldsymbol{AZ}$ et $\boldsymbol{BZ}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbf{R}$ (imaginaire pur)

Annexe : Les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas

La construction de diverses figures au moyen d'une règle et d'un compas relève d'une catégorie de problèmes qui remontent à la Grèce antique. Ainsi trouve-t-on dans la prop.11 du livre IV des *Eléments d'Euclide* la méthode pour construire un pentagone régulier à la règle et au compas. C'est celle que nous avons donnée plus haut dans ce chapitre. On sait de même construire le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone, l'octogone et, d'une manière générale, les polygones à 3×2^n, 4×2^n, 5×2^n et 15×2^n côtés, mais pas les polygones à 7, 9, 11, 13 côtés par exemple. Pendant plusieurs siècles, aucune construction autre que celles connues depuis l'Antiquité ne fut ajoutée, et ce jusqu'en 1796, où Gauss, alors âgé de 19 ans, découvrit comment construire à la règle et au compas un polygone régulier à 17 côtés, ce qui lui assura aussitôt une réputation internationale.

En 1801, dans ses *Disquisitiones arithmeticae*, Gauss généralise son résultat et montre que la résolution des équations de la forme $x^n - 1 = 0$ avec n premier impair, ou de manière équivalente, la détermination de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ ou la construction d'un polygone régulier de n côtés, se ramène à la résolution d'équations polynomiales de degré p, où p est facteur premier de $n - 1$. Or la règle et le compas permettent, à partir d'un segment de longueur unité, de construire tout segment de longueur rationnelle, et, à partir de ceux-ci, d'itérer les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et d'extraction de racine carrée. En effet, cette dernière construction figure dans la prop.14 du livre II des *Eléments d'Euclide* et répond au problème de trouver un carré de côté x dont l'aire est égale à celle ab d'un rectangle donné. La méthode repose sur le cercle de diamètre $a + b$:



Si AB = a et BC = b, alors BD = $\sqrt{ab} = x$.

Il en résulte que, si on dispose d'une équation du second degré dont les coefficients sont constructibles à la règle et au compas, il en est de même des racines de cette équation.
Par conséquent, si n est un nombre premier tel que $n - 1$ est une puissance de $p = 2$, la détermination de $\cos(\frac{2\pi}{n})$ pourra se faire par des résolutions successives d'équation du second degré, et le polygone régulier de n côtés sera constructible à la règle et au compas. n est alors de la forme $2^m + 1$, mais on montre que, si m est impair ou multiple d'un impair, alors $2^m + 1$ est un nombre composé. Pour que $2^m + 1$ soit premier, il est donc nécessaire que m soit lui-même une puissance de 2. n est donc de la forme $2^{2^k} + 1$, ces derniers nombres étant appelés **nombres de Fermat**. Les seuls nombres de Fermat premiers connus aujourd'hui sont $3 = 2^1 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, $17 = 2^4 + 1$, $257 = 2^8 + 1$ et $65537 = 2^{16} + 1$.
Gauss en déduit que, si un polygone régulier possède un nombre de côtés de la forme $2^k p_1 ... p_m$, où les p_i sont des nombres de Fermat premiers distincts, alors ce polygone est constructible à la règle et au compas. La réciproque fut établie ultérieurement.

Nous donnons ci-dessous la suite d'équations du second degré à résoudre, permettant de déterminer l'expression exacte par radicaux de $\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{2\pi}{17})$ et $\cos(\frac{2\pi}{257})$.

1- Calcul de $\cos(\frac{2\pi}{5})$

Soit $\zeta = e^{2i\pi/5}$, qui vérifie $\zeta^5 = 1$ et $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$. Posons :

$$a = \zeta + \zeta^4 = \zeta + \zeta^{-1} = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$$

et $$b = \zeta^2 + \zeta^3 = \zeta^2 + \zeta^{-2} = 2\cos(\frac{4\pi}{5}) = -2\cos(\frac{\pi}{5}).$$

On a :

$$a + b = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = -1$$

et $$ab = (\zeta + \zeta^4)(\zeta^2 + \zeta^3) = \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^6 + \zeta^7 = \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta + \zeta^2 = -1$$

Donc a et b sont racines du polynôme $X^2 + X - 1$ et valent $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On retrouvent ainsi les valeurs de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{\pi}{5})$ trouvées plus haut, dans le paragraphe relatif à la formule de Moivre.

2- Calcul de $\cos(\frac{2\pi}{17})$

Posons $\zeta = e^{2i\pi/17}$, on a $\zeta^{17} = 1$ et $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + ... + \zeta^{16} = 0$. On pourra vérifier que les 16 puissances ζ^k, $1 \leq k \leq 16$, peuvent aussi s'obtenir sous la forme ζ^{3^k}, $1 \leq k \leq 16$, et on va utiliser cette propriété pour séparer $\zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + ... + \zeta^{16}$ en deux parties de huit puissances de ζ, puis en quatre parties de quatre puissances, et enfin en huit parties de deux puissances. Ainsi, pour $1 \leq k \leq 3$ et $1 \leq i \leq 2^k$, on pose :

$$s[k, i] = \sum_{j=0}^{2^{4-k}-1} \zeta^{3^{j2^k+i-1}}$$

les puissances 3^{j2^k+i-1} de ζ étant calculées modulo 17 puisque $\zeta^{17} = 1$. On a ainsi :

$$s[1, 1] = \sum_{j=0}^{2^3-1} \zeta^{3^{2j}} = \zeta + \zeta^9 + \zeta^{13} + \zeta^{15} + \zeta^{16} + \zeta^8 + \zeta^4 + \zeta^2$$

$$s[1, 2] = \sum_{j=0}^{2^3-1} \zeta^{3^{2j+1}} = \zeta^3 + \zeta^{10} + \zeta^5 + \zeta^{11} + \zeta^{14} + \zeta^7 + \zeta^{12} + \zeta^6$$

$$s[2, 1] = \sum_{j=0}^{2^2-1} \zeta^{3^{4j}} = \zeta + \zeta^{13} + \zeta^{16} + \zeta^4$$

$$s[2, 2] = \sum_{j=0}^{2^2-1} \zeta^{3^{4j+1}} = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^{14} + \zeta^{12}$$

$$s[2, 3] = \sum_{j=0}^{2^2-1} \zeta^{3^{4j+2}} = \zeta^9 + \zeta^{15} + \zeta^8 + \zeta^2$$

$$s[2, 4] = \sum_{j=0}^{2^2-1} \zeta^{3^{4j+3}} = \zeta^{10} + \zeta^{11} + \zeta^7 + \zeta^6$$

$$s[3, 1] = \sum_{j=0}^{2-1} \zeta^{3^{8j}} = \zeta + \zeta^{16}$$

$$s[3, 5] = \sum_{j=0}^{2-1} \zeta^{3^{8j+4}} = \zeta^{13} + \zeta^4$$

Tous les nombres $s[k, i]$ sont des réels. En effet, on a $3^8 \equiv -1 \bmod 17$, donc le terme $\zeta^{3^{j2^k+i-1}}$ d'indice j de $s[k, i]$, $0 \leq j \leq 2^{3-k} - 1$, a pour conjugué le terme suivant, également dans $s[k, i]$ et d'indice $j + 2^{3-k}$:

$$\zeta^{-3^{j2^k+i-1}} = \zeta^{3^8 3^{j2^k+i-1}} = \zeta^{3^{8+j2^k+i-1}} = \zeta^{3^{2^3+j2^k+i-1}} = \zeta^{3^{(j+2^{3-k})2^k+i-1}}$$

avec $2^{3-k} \leq j + 2^{3-k} \leq 2^{4-k} - 1$.

Le lecteur pourra vérifier, en utilisant le fait que $\sum_{k=0}^{16} \zeta^k = 0$, que :

$s[1, 1]$ et $s[1, 2]$ ont pour somme -1 et pour produit -4, donc sont racines de $X^2 + X - 4$.
$s[2, 1]$ et $s[2, 3]$ ont pour somme $s[1, 1]$ et pour produit -1, donc sont racines de $X^2 - s[1, 1]X - 1$.
$s[2, 2]$ et $s[2, 4]$ ont pour somme $s[1, 2]$ et pour produit -1, donc sont racines de $X^2 - s[1, 2] - 1$.
$s[3, 1]$ et $s[3, 5]$ ont pour somme $s[2, 1]$ et pour produit $s[2, 2]$, donc sont racines de $X^2 - s[2, 1]X + s[2, 2]$.

Il est remarquable que les $s[k, i]$ puisse être déterminés à partir des $s[k - 1, i]$ précédents en résolvant une équation du second degré.

Après avoir résolu ces quatre équations du second degré, on est en mesure de déterminer une expression de $s[3, 1] = \zeta + \zeta^{16} = \zeta + \zeta^{-1} = 2\cos(\frac{2\pi}{17})$. Le lecteur persévérant pourra obtenir une expression telle que :

$$\cos(\frac{2\pi}{17}) = -\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16} + \frac{\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{8}$$

3- Calcul de $\cos(\frac{2\pi}{257})$

On procède comme ci-dessus avec $\zeta = e^{2i\pi/257}$, et, pour $1 \leq k \leq 7$ et $1 \leq i \leq 2^k$:

$$s[k, i] = \sum_{j=0}^{2^{8-k}-1} \zeta^{3^{j2^k+i-1}}$$

les puissances de ζ étant calculées modulo 257 puisque $\zeta^{257} = 1$. On résout ensuite 24 équations du second degré issues des propriétés suivantes :

$s[1, 1]$ et $s[1, 2]$ ont pour somme -1 et pour produit -64
$s[2, 1]$ et $s[2, 3]$ ont pour somme $s[1, 1]$ et pour produit -16
$s[2, 2]$ et $s[2, 4]$ ont pour somme $s[1, 2]$ et pour produit -16
$s[3, 1]$ et $s[3, 5]$ ont pour somme $s[2, 1]$ et pour produit $3s[2, 2] + 2s[2, 3] + 3s[2, 4] - 2$
$s[3, 2]$ et $s[3, 6]$ ont pour somme $s[2, 2]$ et pour produit $-3s[2, 2] - s[2, 4] - 5$
$s[3, 3]$ et $s[3, 7]$ ont pour somme $s[2, 3]$ et pour produit $s[2, 2] - 2s[2, 3] + s[2, 4] - 4$
$s[3, 4]$ et $s[3, 8]$ ont pour somme $s[2, 4]$ et pour produit $-s[2, 2] - 3s[2, 4] - 5$
$s[4, 1]$ et $s[4, 9]$ ont pour somme $s[3, 1]$ et pour produit
$-2s[3, 2] - 2s[3, 4] - s[3, 5] - s[3, 7] - 2s[3, 8] - 2$
$s[4, 2]$ et $s[4, 10]$ ont pour somme $s[3, 2]$ et pour produit
$2s[3, 2] + 2s[3, 4] + s[3, 6] + 2s[3, 7] + s[3, 8]$
$s[4, 3]$ et $s[4, 11]$ ont pour somme $s[3, 3]$ et pour produit
$-s[3, 2] + s[3, 3] - s[3, 4] + s[3, 5] - s[3, 6] + s[3, 8] - 1$
$s[4, 4]$ et $s[4, 12]$ ont pour somme $s[3, 4]$ et pour produit
$-s[3, 2] - 2s[3, 3] - 2s[3, 5] - 2s[3, 7] - s[3, 8] - 2$
$s[4, 5]$ et $s[4, 13]$ ont pour somme $s[3, 5]$ et pour produit
$s[3, 2] - s[3, 4] + s[3, 5] - s[3, 6] + s[3, 7] - s[3, 8] - 1$
$s[4, 6]$ et $s[4, 14]$ ont pour somme $s[3, 6]$ et pour produit
$s[3, 2] + 2s[3, 3] + s[3, 4] + 2s[3, 6] + 2s[3, 8]$
$s[4, 7]$ et $s[4, 15]$ ont pour somme $s[3, 7]$ et pour produit
$-2s[3, 2] - s[3, 3] - s[3, 5] - 2s[3, 6] - 2s[3, 8] - 2$
$s[4, 8]$ et $s[4, 16]$ ont pour somme $s[3, 8]$ et pour produit
$2s[3, 2] + s[3, 4] + 2s[3, 5] + s[3, 6] + 2s[3, 8]$
$s[5, 1]$ et $s[5, 17]$ ont pour somme $s[4, 1]$ et pour produit
$-s[4, 4] - s[4, 5] - s[4, 7] - s[4, 8] - s[4, 9] - s[4, 10] - s[4, 11]$
$-s[4, 12] - s[4, 13] - s[4, 14] - s[4, 15] - s[4, 16] - 1$
$s[5, 2]$ et $s[5, 18]$ ont pour somme $s[4, 2]$ et pour produit $s[4, 2] + s[4, 3] + s[4, 4] + s[4, 7]$
$s[5, 8]$ et $s[5, 24]$ ont pour somme $s[4, 8]$ et pour produit $s[4, 8] + s[4, 9] + s[4, 10] + s[4, 13]$
$s[5, 9]$ et $s[5, 25]$ ont pour somme $s[4, 9]$ et pour produit $s[4, 9] + s[4, 10] + s[4, 11] + s[4, 14]$
$s[5, 10]$ et $s[5, 26]$ ont pour somme $s[4, 10]$ et pour produit $s[4, 10] + s[4, 11] + s[4, 12] + s[4, 15]$
$s[5, 16]$ et $s[5, 32]$ ont pour somme $s[4, 16]$ et pour produit

$-s[4, 3]-s[4, 4]-s[4, 6]-s[4, 7]-s[4, 8]-s[4, 9]-s[4, 10]$
$-s[4, 11]-s[4, 12]-s[4, 13]-s[4, 14]-s[4, 15]-1$

$s[6, 1]$ et $s[6, 33]$ ont pour somme $s[5, 1]$ et pour produit $s[5, 2]+s[5, 24]$
$s[6, 25]$ et $s[6, 57]$ ont pour somme $s[5, 25]$ et pour produit $s[5, 16]+s[5, 26]$
$s[7, 1]$ et $s[7, 65]$ ont pour somme $s[6, 1]$ et pour produit $s[6, 57]$

Pour vérifier ces propriétés, il conviendra d'écrire une fonction informatique `check(a,b,c,d)` capable de vérifier que $a+b=c$ et $ab=d$, où a, b, c, d sont des combinaisons linéaires des puissances de ζ, les calculs étant simplifiés par le fait que $\sum_{k=0}^{256} \zeta^k = 0$. Cette programmation est plus facile si on dispose d'un logiciel de calcul formel. Par exemple, avec Maple :

```
Pol:=add(z^k,k=0..256):
check:=(a,b,c,d)->(simplify(a+b-c,{Pol})=0) and (simplify(a*b-d,{Pol})=0):
```

La dernière des 24 propriétés permet de déterminer :

$$s[7, 1] = \sum_{j=0}^{2-1} \zeta^{3^{j2^7}} = \zeta + \zeta^{256} = \zeta + \zeta^{-1} = 2\cos(\frac{2\pi}{257})$$

L'expression explicite de ce cosinus sous forme de radicaux prend plusieurs pages et ne peut être affichée ici. On se bornera à donner ci-dessous la formation des radicaux intervenant dans cette expression :

$r = \sqrt{257}$

$a_1 = \sqrt{514 + 2r}$
$a_2 = \sqrt{514 - 2r}$

$b_1 = \sqrt{1028 - 60r + 30a_1 - 2ra_1}$
$b_2 = \sqrt{1028 - 60r - 30a_1 + 2ra_1}$
$b_3 = \sqrt{1028 + 60r + 30a_2 + 2ra_2}$
$b_4 = \sqrt{1028 + 60r - 30a_2 - 2ra_2}$

$c_1 = \sqrt{2056 + 72r + 28a_1 + 64a_2 + 34b_1 + 32b_2 + 64b_4 - 4ra_1 + 2rb_1 - 2a_1b_1}$
$c_2 = \sqrt{2056 + 72r + 28a_1 + 64a_2 - 34b_1 - 32b_2 - 64b_4 - 4ra_1 - 2rb_1 + 2a_1b_1}$
$c_3 = \sqrt{2056 + 72r - 28a_1 - 64a_2 - 34b_2 + 32b_1 + 64b_3 + 4ra_1 - 2rb_2 - 2a_1b_2}$
$c_4 = \sqrt{2056 + 72r - 28a_1 - 64a_2 + 34b_2 - 32b_1 - 64b_3 + 4ra_1 + 2rb_2 + 2a_1b_2}$
$c_5 = \sqrt{2056 - 72r + 28a_2 - 64a_1 + 34b_3 + 32b_4 + 64b_1 + 4ra_2 - 2rb_3 - 2a_2b_3}$
$c_6 = \sqrt{2056 - 72r + 28a_2 - 64a_1 - 34b_3 - 32b_4 - 64b_1 + 4ra_2 + 2rb_3 + 2a_2b_3}$
$c_7 = \sqrt{2056 - 72r - 28a_2 + 64a_1 + 34b_4 - 32b_3 + 64b_2 - 4ra_2 - 2rb_4 + 2a_2b_4}$
$c_8 = \sqrt{2056 - 72r - 28a_2 + 64a_1 - 34b_4 + 32b_3 - 64b_2 - 4ra_2 + 2rb_4 - 2a_2b_4}$

$$d_1 = \sqrt{\begin{array}{l} 4112 + 16r + 56a_1 + 192a_2 + 100b_1 + 96b_2 + 64b_4 + 66c_1 + 64c_4 - 64c_7 + 64c_8 \\ - 8ra_1 + 4rb_1 + 2rc_1 - 2a_1c_1 - 4a_1b_1 + 2b_1c_1 \end{array}}$$

$$d_2 = \sqrt{\begin{array}{l}4112 + 16r + 56a_1 + 192a_2 + 100b_1 + 96b_2 + 64b_4 - 66c_1 - 64c_4 + 64c_7 - 64c_8 \\ - 8ra_1 + 4rb_1 - 2rc_1 + 2a_1c_1 - 4a_1b_1 - 2b_1c_1\end{array}}$$

$$d_3 = \sqrt{\begin{array}{l}4112 + 16r - 56a_1 - 192a_2 - 100b_2 + 96b_1 + 64b_3 + 66c_3 - 64c_1 - 64c_5 - 64c_6 \\ + 8ra_1 - 4rb_2 + 2rc_3 + 2a_1c_3 - 4a_1b_2 - 2b_2c_3\end{array}}$$

$$d_4 = \sqrt{\begin{array}{l}4112 + 16r - 56a_1 - 192a_2 - 100b_2 + 96b_1 + 64b_3 - 66c_3 + 64c_1 + 64c_5 + 64c_6 \\ + 8ra_1 - 4rb_2 - 2rc_3 - 2a_1c_3 - 4a_1b_2 + 2b_2c_3\end{array}}$$

$$d_5 = \sqrt{\begin{array}{l}4112 - 16r + 56a_2 - 192a_1 - 100b_3 - 96b_4 - 64b_1 + 66c_6 + 64c_1 + 64c_2 + 64c_8 \\ + 8ra_2 + 4rb_3 - 2rc_6 - 2a_2c_6 + 4a_2b_3 - 2b_3c_6\end{array}}$$

$$d_6 = \sqrt{\begin{array}{l}4112 - 16r + 56a_2 - 192a_1 - 100b_3 - 96b_4 - 64b_1 - 66c_6 - 64c_1 - 64c_2 - 64c_8 \\ + 8ra_2 + 4rb_3 + 2rc_6 + 2a_2c_6 + 4a_2b_3 + 2b_3c_6\end{array}}$$

$$e_1 = \sqrt{\begin{array}{l}8224 + 224r - 256a_1 + 112a_2 - 128b_2 - 136b_3 - 128b_4 - 192c_1 - 64c_2 - 128c_3 \\ - 68c_6 - 64c_8 - 128d_2 - 128d_4 - 2d_6 + 16ra_2 + 8rb_3 + 4rc_6 + 2rd_6 + 8a_2b_3 \\ + 4a_2c_6 + 2a_2d_6 + 4b_3c_6 + 2b_3d_6 + 2c_6d_6\end{array}}$$

$$e_2 = \sqrt{\begin{array}{l}8224 + 224r - 256a_1 + 112a_2 - 128b_2 - 136b_3 - 128b_4 + 192c_1 + 64c_2 + 128c_3 \\ + 68c_6 + 64c_8 - 128d_1 - 128d_3 - 2d_5 + 16ra_2 + 8rb_3 - 4rc_6 + 2rd_5 + 8a_2b_3 \\ - 4a_2c_6 + 2a_2d_5 - 4b_3c_6 + 2b_3d_5 - 2c_6d_5\end{array}}$$

et enfin :

$$2\cos(\frac{2\pi}{257}) = -\frac{1}{128} + \frac{r}{128} + \frac{a_2}{128} + \frac{b_3}{128} + \frac{c_6}{128} + \frac{d_6}{128} + \frac{e_1}{128}$$
$$+ \frac{1}{128}\sqrt{\begin{array}{l}16448 - 64r - 512a_1 - 32a_2 - 128b_1 - 128b_2 - 528b_3 \\ - 256b_4 - 256c_1 - 128c_2 - 128c_3 + 120c_6 - 128c_8 - 128d_2 \\ - 128d_4 - 256d_5 - 4d_6 - 2e_1 - 256e_2 + 32ra_2 + 16rb_3 \\ + 8rc_6 + 4rd_6 + 2re_1 + 16a_2b_3 + 8a_2c_6 + 4a_2d_6 + 2a_2e_1 \\ + 8b_3c_6 + 4b_3d_6 + 2b_3e_1 + 4c_6d_6 + 2c_6e_1 + 2d_6e_1\end{array}}$$

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos(px)$ et $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(px)$.

b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{2^k}$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{2^k}$, puis les limites de ces sommes quand n tend vers l'infini, qu'on note $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2^k}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}$.

c) $\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}x^{p-1}$, $\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}$, $\sum_{p\geq 0} p\binom{n}{2p}$ et $\sum_{p\geq 0} p\binom{n}{3p}$.

Exo.2) Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(x)^k\cos(kx)$, puis $\sum_{k=0}^{\infty}\cos(x)^k\cos(kx)$ quand $|\cos(x)| < 1$.

b) $\sum_{k=0}^{n}\cos(a + kh)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(a + kh)$ pour $h \neq 0 \bmod 2\pi$.

c) $\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos(x)^k}$ et $\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(kx)}{\cos(x)^k}$ pour $x \neq 0 \bmod \frac{\pi}{2}$

Exo.3) a) Soit θ un réel. Factoriser $X^n - e^{2i\theta}$ dans $\mathbb{C}$.

b) En évaluant l'égalité du a) pour X = 1, en déduire que $\prod_{k=0}^{n-1}\sin(\frac{\theta + k\pi}{n}) = \frac{\sin(\theta)}{2^{n-1}}$.

c) En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

d) En évaluant le a) pour X = –1, montrer que $\prod_{k=0}^{n-1}\cos(\frac{\theta + k\pi}{n}) = (-1)^{(n-1)/2}\,\frac{\cos(\theta)}{2^{n-1}}$ pour n impair. En particulier, pour $\theta = 0$ et n impair, $\prod_{k=1}^{n-1}\cos(\frac{k\pi}{n}) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1}}$.

e) De même, montrer que $\prod_{k=0}^{n-1}\cos(\frac{\theta + k\pi}{n}) = \frac{(-1)^{n/2}\sin(\theta)}{2^{n-1}}$ pour n pair. En déduire que, pour n pair, $\prod_{\substack{k=1\\ k\neq n/2}}^{n-1}\cos(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n(-1)^{n/2-1}}{2^{n-1}}$.

Exo.4) a) Montrer que, pour tout a, b, c, d complexe, $\big|\,|a-b| - |c-d|\,\big| \leq |a-c| + |b-d|$

b) Montrer que, pour tout u et v complexes, $|u| + |v| \leq |u+v| + |u-v|$

c) Montrer que, pour tout z_1, z_2, z_3, z_4 complexes, $\sum_{k=1}^{4}|z_k| \leq \sum_{i<j}|z_i + z_j|$. On pourra utiliser le résultat b).

Exo.5) Résoudre les équations suivantes d'inconnue z :

a) $2(1 + i)z^2 + 2(a + i)z + ia(1 - i) = 0$, où a est un paramètre complexe.

b) $z^3 - 2(1 + i)z^2 + 5(i - 2)z + 3(7 + i) = 0$ sachant qu'il y a une racine réelle.

c) $-z^3 - 2z^2 + iz + 3 - i = 0$. Montrer que les points M_1, M_2, M_3 d'affixe les solutions sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle.

d) $z^4 - 2z^2\cos\theta + 1 = 0$. Quelle figure forment les points M_1, M_2, M_3, M_4 d'affixe les solutions ? A quelle condition sur θ forment-ils un carré ?

e) $\left(\dfrac{1 + iz}{1 - iz}\right)^3 = \dfrac{1 + i\tan(\theta)}{1 - i\tan(\theta)}$

Exo.6) Résoudre les équations suivantes d'inconnue z :

a) $(1 + z)^n - (1 - z)^n = 0$ où n est un entier supérieur ou égal à 2

b) $z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$

c) $z^6 + z^3(z + 1)^3 + (z + 1)^6 = 0$

d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\varphi + k\alpha)\, z^{n-k} = 0$, φ et α étant des paramètres donnés

e) Soit l'équation $(\mu + 3)z^3 - \mu z^2 - (\mu + 2)z + \mu = 0$ d'inconnue z et de paramètre réel μ. Quelle valeur faut-il donner à μ pour qu'elle admette une solution non réelle de module 1 ?

Exo.7) On pose $Z = \dfrac{z + 2i}{z - (1 + i)}$

a) Quel est l'ensemble des points d'affixe z tels que Z soit réel ?

b) Quel est l'ensemble des points d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur ?

c) Quel est l'ensemble des points d'affixe z tels que Z soit de module 1 ?

d) Quel est l'ensemble des points d'affixe z tels que Z soit de module 2 ?

Exo.8) Les trois questions sont indépendantes. Des résolutions géométriques évitent les calculs :

a) Soit a un complexe non nul. Trouver les complexes z non nuls et distincts de a tels que les points d'affixe az^2, za^2 et z^3 soient les sommets d'un triangle équilatéral.

b) Soient u et v les affixes complexes de deux sommets d'un carré, sur une diagonale. Trouver les affixes des deux autres sommets.

c) Déterminer z pour que z, $\dfrac{1}{z}$ et $z - 1$ aient même module.

Exo.9) a) Quelle est l'image de l'axe imaginaire pur, du demi plan $\mathrm{Re}(z) > 0$ et du demi-plan $\mathrm{Re}(z) < 0$ par l'application $z \to \dfrac{z - 1}{z + 1}$?

b) Montrer que l'image du cercle unité par l'application : $z \to \dfrac{z - 1}{z - 5}$ est le cercle de centre le point d'affixe $\dfrac{1}{6}$ et de rayon $\dfrac{1}{6}$.

c) Quelle est l'image de l'axe réel par l'application $z \to \dfrac{(1 + 2i)z + 1}{(1 - 2i)z + 1}$? Quelle est l'image de l'axe imaginaire pur ?

Exo.10) On donne :

$$N(z) = \frac{z^2 - 1}{2z} \qquad M(z) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$\Theta(z) = i\,\dfrac{e^{iz}+1}{e^{iz}-1}$ $\qquad$ $T(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

$D(z) = 2z$ $\qquad$ $Q(z) = z^2$

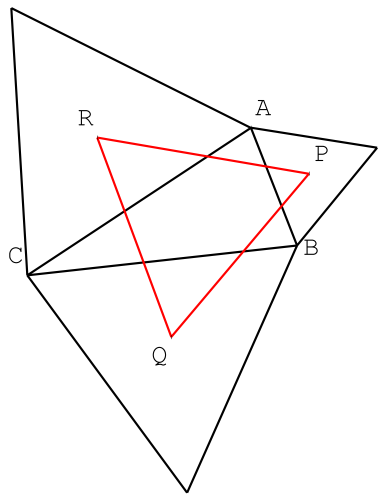
$L(z) = -\,iz$

a) Vérifier que $N \circ \Theta = \Theta \circ D$, $M \circ L = L \circ N$ et $Q \circ T = T \circ M$

b) En déduire une relation entre Q et D faisant intervenir Θ, T et L. La vérifier directement.

c) Donner une expression explicite de $M^n(z)$, où M^n est l'itéré $M \circ M \circ \ldots \circ M$ n fois. En déduire le comportement de la suite $(M^n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction de z.

Exo.11) Soit ABC un triangle quelconque. On note P, Q et R les centres des triangles équilatéraux construits vers l'extérieur de chacun des côtés de ABC. Utiliser les complexes pour montrer que PQR est équilatéral.



Exo.12) Pour cet exercice, il est utile de connaître la fonction arctan. Voir le chapitre L1/FONCTUSU.PDF.

a) t étant un réel, calculer dans $\mathbb{C}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{it}{n}\right)^n$.

b) Soit z complexe. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$.

2- Solutions

Sol.1) a) Posons $C = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos(px)$ et $S = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(px)$. On a :

$$C + iS = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} e^{ipx} = (1 + e^{ix})^n = \left(e^{ix/2}\, 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^n = e^{inx/2}\, 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)$$

donc $\quad C = 2^n \cos\left(\dfrac{nx}{2}\right) \cos^n\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$S = 2^n \sin\left(\dfrac{nx}{2}\right) \cos^n\left(\dfrac{x}{2}\right)$

b) Posons $C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{2^k}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{2^k}$. Alors :

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{2^k} = \frac{1 - \frac{e^{i(n+1)x}}{2^{n+1}}}{1 - \frac{e^{ix}}{2}} = \frac{(1 - \frac{e^{i(n+1)x}}{2^{n+1}})(1 - \frac{e^{-ix}}{2})}{1 - \cos(x) + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1 - \frac{e^{i(n+1)x}}{2^{n+1}} - \frac{e^{-ix}}{2} + \frac{e^{inx}}{2^{n+2}}}{\frac{5}{4} - \cos(x)}$$

donc :

$$C_n = \frac{1 - \frac{\cos((n+1)x)}{2^{n+1}} - \frac{\cos(x)}{2} + \frac{\cos(nx)}{2^{n+2}}}{\frac{5}{4} - \cos(x)} \text{ de limite } \frac{4 - 2\cos(x)}{5 - 4\cos(x)}$$

$$S_n = \frac{-\frac{\sin((n+1)x)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(x)}{2} + \frac{\sin(nx)}{2^{n+2}}}{\frac{5}{4} - \cos(x)} \text{ de limite } \frac{2\sin(x)}{5 - 4\cos(x)}$$

c) $\sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} x^{p-1}$ est la dérivée par rapport à x de $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p = (1 + x)^n$. On a donc :

$$\sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} x^{p-1} = n(1 + x)^{n-1}$$

donc :

pour $x = 1$, $\sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} = n2^{n-1}$

pour $x = -1$ et $n \geq 2$, $\sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} (-1)^{p-1} = 0 = -\sum_{p\geq 0} 2p \binom{n}{2p} + \sum_{p\geq 0} (2p + 1) \binom{n}{2p+1}$

mais par ailleurs, le cas précédent donne également $n2^{n-1} = \sum_{p\geq 0} 2p \binom{n}{2p} + \sum_{p\geq 0} (2p + 1) \binom{n}{2p+1}$,

donc, en retranchant les deux égalités et en simplifiant par 4, on obtient :

$$\sum_{p\geq 0} p \binom{n}{2p} = n2^{n-3}$$

Si $n \leq 1$, $\sum_{p\geq 0} p \binom{n}{2p} = 0$

pour $x = j$ et j^2, racines cubiques de l'unité, on obtient :

$$\sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} j^{p-1} = n(1 + j)^{n-1} \text{ et } \sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} j^{2(p-1)} = n(1 + j^2)^{n-1}$$

donc :

$$\sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} j^p = nj(1+j)^{n-1}$$

$$\sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} j^{2p} = nj^2(1+j^2)^{n-1}$$

En sommant les trois relations et en utilisant le fait que $1 + j^p + j^{2p} = 3$ si p est un multiple de 3 et 0 sinon, on arrive à :

$$3 \sum_{p\geq 0} 3p \binom{n}{3p} = n2^{n-1} + 2\,\mathrm{Re}(nj(1+j)^{n-1})$$

$$= n2^{n-1} + 2\,\mathrm{Re}(nj \times (-j^2)^{n-1})$$
$$= n2^{n-1} + 2n(-1)^{n-1}\,\mathrm{Re}(j^{2n-1})$$
$$= n2^{n-1} + 2n(-1)^{n-1}\,\mathrm{Re}(\exp(\frac{2i\pi(2n-1)}{3})$$
$$= n2^{n-1} + 2n(-1)^{n-1}\cos(\frac{2\pi(2n-1)}{3})$$
$$= n2^{n-1} + 2n\cos(\frac{2\pi(2n-1)}{3} - (n-1)\pi)$$
$$= n2^{n-1} - 2n\cos(\frac{(n+1)\pi}{3})$$

donc $$\sum_{p\geq 0} p \binom{n}{3p} = \frac{n}{9}(2^{n-1} + 2\cos(\frac{(n+1)\pi}{3}))$$

Si $n \equiv 0$ mod 3 ou $n \equiv 1$ mod 3, c'est égal à $\frac{n}{9}(2^{n-1} + (-1)^n)$. Si $n \equiv 2$ mod 3, c'est égal à $\frac{n}{9}(2^{n-1} + 2(-1)^n)$.

Sol.2) a) $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x)^k \cos(kx) = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(x)^k e^{ikx}$

On obtient une suite géométrique de raison $\cos(x)e^{ix}$. Cette raison est égale à 1 pour x multiple de π. Dans ce cas, la somme vaut n. Sinon, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x)^k \cos(kx) = \mathrm{Re}\,\frac{1-\cos(x)^n e^{inx}}{1-\cos(x)e^{ix}}$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{(1-\cos(x)^n e^{inx})(1-\cos(x)e^{-ix})}{(1-\cos(x)e^{ix})(1-\cos(x)e^{-ix})}$$
$$= \mathrm{Re}\,\frac{1-\cos(x)^n e^{inx} - \cos(x)e^{-ix} + \cos(x)^{n+1} e^{i(n-1)x}}{1-\cos(x)^2}$$
$$= \frac{1-\cos(x)^n \cos(nx) - \cos(x)^2 + \cos(x)^{n+1}\cos((n-1)x)}{\sin(x)^2}$$

$$= \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^n (\cos(x)\cos((n-1)x) - \cos(nx))}{\sin(x)^2}$$

$$= \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^n \sin(x)\sin((n-1)x)}{\sin(x)^2}$$

$$= 1 + \frac{\cos(x)^n \sin((n-1)x)}{\sin(x)}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(x)^k \cos(kx) = 1$$

b) Posons C = $\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kh)$ et S = $\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kh)$. Alors C + iS = $\sum_{k=0}^{n} \exp(ia+ikh)$ qui est la somme d'une suite géométrique de premier terme e^{ia} et de raison $e^{ih} \neq 1$. Donc :

$$C + iS = e^{ia} \frac{1 - e^{i(n+1)h}}{1 - e^{ih}}$$

$$= e^{ia} \exp(\frac{inh}{2}) \frac{\sin(\frac{(n+1)h}{2})}{\sin(\frac{h}{2})}$$

donc :

$$C = \cos(a + \frac{nh}{2}) \frac{\sin(\frac{(n+1)h}{2})}{\sin(\frac{h}{2})}$$

$$S = \sin(a + \frac{nh}{2}) \frac{\sin(\frac{(n+1)h}{2})}{\sin(\frac{h}{2})}$$

c) Posons C = $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos(x)^k}$ et S = $\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos(x)^k}$. Alors C + iS = $\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{\cos(x)^k}$ qui est la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{e^{ix}}{\cos(x)} \neq 1$. Donc :

$$C + iS = \frac{1 - \frac{e^{i(n+1)x}}{\cos(x)^{n+1}}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos(x)}}$$

$$= \frac{\cos(x)^{n+1} - e^{i(n+1)x}}{-i\sin(x)\cos(x)^n}$$

donc $\quad C = \dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)\cos(x)^n}$

$$S = \frac{\cos(x)^{n+1} - \cos((n+1)x)}{\sin(x)\cos(x)^n}$$

Sol.3) a) $X^n - e^{2i\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \exp(\frac{2i\theta + 2ik\pi}{n}))$

b) Pour X = 1, on obtient :

$$1 - e^{2i\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \exp(\frac{2i\theta + 2ik\pi}{n}))$$

or $1 - e^{2i\theta} = -2ie^{i\theta}\sin(\theta)$, ce qui donne :

$$-2ie^{i\theta}\sin(\theta) = \prod_{k=0}^{n-1} (-2i\exp(i\frac{\theta + k\pi}{n})\sin(\frac{\theta + k\pi}{n})$$

$$= (-2)^n i^n \exp(i\theta + \frac{i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k) \prod_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{\theta + k\pi}{n})$$

$$= (-2)^n i^n \exp(i\theta + \frac{(n-1)i\pi}{2}) \prod_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{\theta + k\pi}{n})$$

$$= (-2)^n i^n e^{i\theta} i^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{\theta + k\pi}{n})$$

$$= -2^n ie^{i\theta} \prod_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{\theta + k\pi}{n})$$

donc $\prod_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{\theta + k\pi}{n}) = \frac{\sin(\theta)}{2^{n-1}}$

c) On a donc $\sin(\frac{\theta}{n}) \prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{\theta + k\pi}{n}) = \frac{\sin(\theta)}{2^{n-1}}$, donc $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{\theta + k\pi}{n}) = \frac{\sin(\theta)}{2^{n-1}\sin(\frac{\theta}{n})}$. En passant à la limite quand θ tend vers 0, on obtient $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

d) Si on évalue le a) en X = – 1, on obtient :

$$(-1)^n - e^{2i\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} (-1 - \exp(\frac{2i\theta + 2ik\pi}{n})) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \exp(\frac{2i\theta + 2ik\pi}{n}))$$

donc $1 - (-1)^n e^{i\theta} = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \exp(\frac{2i\theta + 2ik\pi}{n}))$

Le membre de gauche vaut $1 + e^{i\theta}$ si n est impair et $1 - e^{i\theta}$ si n est pair. or $1 + e^{2i\theta} = 2e^{i\theta}\cos(\theta)$. D'où, pour n impair :

$$2e^{i\theta}\cos(\theta) = 2^n \exp(i\theta + \frac{(n-1)i\pi}{2}) \prod_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{\theta + k\pi}{n})$$

$$= 2^n e^{i\theta}(-1)^{(n-1)/2} \prod_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{\theta + k\pi}{n})$$

donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{\theta + k\pi}{n}) = (-1)^{(n-1)/2} \frac{\cos(\theta)}{2^{n-1}}$

e) Pour n pair, on obtient :

$$-2ie^{i\theta}\sin(\theta) = 2^n \exp(i\theta + \frac{(n-1)i\pi}{2}) \prod_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{\theta + k\pi}{n})$$

$$= -2^n e^{i\theta}(-1)^{n/2}\, i \prod_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{\theta + k\pi}{n})$$

donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{\theta + k\pi}{n}) = \frac{(-1)^{n/2}\sin(\theta)}{2^{n-1}}$.

On obtient la relation $\displaystyle\prod_{\substack{k=1\\ k\neq n/2}}^{n-1} \cos(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n(-1)^{n/2-1}}{2^{n-1}}$ en divisant par $\sin(\theta)$ puis en faisant tendre θ vers 0.

Remarquer que, pour $k = \dfrac{n}{2}$, $\cos(\dfrac{\theta + k\pi}{n}) = -\sin(\dfrac{\theta}{n})$.

Sol.4) a) $|a-b| \leq |a-c| + |c-d| + |d-b|$ etc...

b) $|u| = \left|\dfrac{u+v}{2} + \dfrac{u-v}{2}\right| \leq \left|\dfrac{u+v}{2}\right| + \left|\dfrac{u-v}{2}\right|$ et de même pour v et on ajoute membre à membre les deux inégalités.

c) On a $3\displaystyle\sum_{k=1}^{4} |z_k| = \sum_{i<j} (|z_i| + |z_j|) \leq \sum_{i<j} |z_i + z_j| + \sum_{i<j} |z_i - z_j|$ d'après le b).

Il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{i<j} |z_i - z_j| \leq 2 \sum_{i<j} |z_i + z_j|$$

On a par exemple, toujours en utilisant b) :

$$|z_1 - z_2| + |z_3 - z_4| \leq |z_1 - z_2 + z_3 - z_4| + |z_1 - z_2 - z_3 + z_4|$$

$$\leq |z_1 + z_3| + |z_2 + z_4| + |z_1 + z_4| + |z_2 + z_3|$$

On procède de même pour $|z_1 - z_3| + |z_2 - z_4|$ et $|z_1 - z_4| + |z_2 - z_3|$ et on somme les trois inégalités.

Sol.5) a) $\Delta = 4(a-i)^2$ d'où $z = -\dfrac{a(1-i)}{2}$ ou $z = \dfrac{-1-i}{2}$

b) Si x est racine réelle, on a :

$$x^3 - 2(1+i)x^2 + 5(i-2)x + 3(7+i) = 0$$

et donc, en séparant partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 10x + 21 = 0 \\ -2x^2 + 5x + 3 = 0 \end{cases}$$

d'où $x = 3$. On factorise ensuite le membre gauche de l'équation ce qui donne :

$$(z - 3)(z^2 + (1 - 2i)z - 7 - i) = 0$$

D'où $z = 3$, $z = -3 + i$, $z = 2 + i$.

c) 1 est racine évidente. L'équation s'écrit alors :

$$(z - 1)(-z^2 - 3z - 3 + i) = 0$$

dont les racines sont $z_1 = 1$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -2 - i$. On a :

$$z_3 - z_2 = -1 - 2i = -i(2 - i) = -i(z_1 - z_2)$$

Donc le sommet M_3 est l'image de M_1 par la rotation de centre M_2 est d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

d) Les solutions sont $z = \pm\, e^{\pm i\theta/2}$. Elles forment un rectangle, et un carré si et seulement si $\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

e) L'équation s'écrit aussi $\left(\dfrac{1 + iz}{1 - iz}\right)^3 = \dfrac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta) - i\sin(\theta)} = e^{2i\theta}$.

Donc $\dfrac{1 + iz}{1 - iz} = \exp(\dfrac{2i\theta}{3} + \dfrac{2ik\pi}{3})$, $k \in [\![0, 2]\!]$. Donc $iz = \dfrac{\exp(\frac{2i\theta}{3} + \frac{2ik\pi}{3}) - 1}{\exp(\frac{2i\theta}{3} + \frac{2ik\pi}{3}) + 1} = i\tan(\dfrac{\theta}{3} + \dfrac{k\pi}{3})$ donc

$z = \tan(\dfrac{\theta}{3} + \dfrac{k\pi}{3})$

Sol.6) a) 1 n'étant pas solution, on a :

$$(1 + z)^n - (1 - z)^n = 0.$$

$\Leftrightarrow \quad (\dfrac{1 + z}{1 - z})^n = 1$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0, n - 1]\!],\ \dfrac{1 + z}{1 - z} = \exp(\dfrac{2ik\pi}{n})$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0, n - 1]\!],\ \mathbb{Z},\ 1 + z = \exp(\dfrac{2ik\pi}{n})(1 - z)$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0, n - 1]\!],\ z\,(\exp(\dfrac{2ik\pi}{n}) + 1) = \exp(\dfrac{2ik\pi}{n}) - 1$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0, n - 1]\!],\ z = \dfrac{\exp(\frac{2ik\pi}{n}) - 1}{\exp(\frac{2ik\pi}{n}) + 1} = \dfrac{i\sin(\frac{k\pi}{n})}{\cos(\frac{k\pi}{n})} = i\tan(\dfrac{k\pi}{n})$

Si n est pair, k doit être différent de $\dfrac{n}{2}$ et il n'y a alors que $n - 1$ solutions

b) z^3 est racine du trinôme $X^2 + (1 - 2i\sqrt{2})X - 2i\sqrt{2}$ donc vaut -1 ou $2i\sqrt{2}$, donc z est racine cubique de ces deux nombres, à savoir $z = \exp(\dfrac{i\pi}{3} + \dfrac{2ik\pi}{3})$ ou bien $z = \sqrt{2}\exp(\dfrac{i\pi}{6} + \dfrac{2ik\pi}{3})$.

c) L'équation est équivalente à $(\dfrac{z}{z + 1})^3 = j$ ou j^2, d'où :

$\dfrac{z}{z + 1} = \exp(\pm\dfrac{2i\pi}{9} + \dfrac{2ik\pi}{3}) \qquad$ posons $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}$

donc $\quad z = (z + 1)e^{i\theta}$

donc $z = \dfrac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \dfrac{e^{i\theta/2}}{-2i\sin(\frac{\theta}{2})} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2\tan(\frac{\theta}{2})}$

θ prend les valeurs (à 2π près) $-\dfrac{8\pi}{9}, -\dfrac{4\pi}{9}, -\dfrac{2\pi}{9}, \dfrac{2\pi}{9}, \dfrac{4\pi}{9}, \dfrac{8\pi}{9}$.

Donc $\dfrac{\theta}{2}$ prend les valeurs $-\dfrac{4\pi}{9}, -\dfrac{2\pi}{9}, -\dfrac{\pi}{9}, \dfrac{\pi}{9}, \dfrac{2\pi}{9}, \dfrac{4\pi}{9}$.

d) Si α = 0 mod 2π, l'équation se réduit à $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\varphi)\, z^{n-k} = 0 = \cos(\varphi)\,(1 + z)^n$. Donc si $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$ mod π, la seule solution est – 1, sinon tout z est solution.

Si α = π mod 2π, l'équation se réduit à $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\varphi)(-1)^k\, z^{n-k} = 0 = \cos(\varphi)\,(-1 + z)^n$. Donc si $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$ mod π, la seule solution est 1, sinon tout z est solution.

Dans la suite, on supposera α ≠ 0 mod π, i.e. sin(α) ≠ 0. L'équation est alors équivalente à :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \exp(i\varphi + ik\alpha)\, z^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \exp(-i\varphi - ik\alpha)\, z^{n-k} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad e^{i\varphi}\,(e^{i\alpha} + z)^n + e^{-i\varphi}\,(e^{-i\alpha} + z)^n = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{e^{i\alpha} + z}{e^{-i\alpha} + z}\right)^n = -e^{-2i\varphi}$ car $-e^{-i\alpha}$ ne peut être solution puisque sin(α) ≠ 0

$\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \dfrac{e^{i\alpha} + z}{e^{-i\alpha} + z} = \exp\left(\dfrac{i\pi}{n} - \dfrac{2i\varphi}{n} + \dfrac{2ik\pi}{n}\right)$

posons $\theta = \dfrac{\pi}{n} - \dfrac{2\varphi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ pour alléger les notations

$\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\ (1 - e^{i\theta})z = e^{i(\theta-\alpha)} - e^{i\alpha}$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\ z = \dfrac{e^{i(\theta-\alpha)} - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\theta}}$ pour θ ≠ 0 mod 2π

$\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\ z = \dfrac{e^{i(\theta/2-\alpha)} - e^{i(\alpha-\theta/2)}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}$ pour θ ≠ 0 mod 2π

$\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\ z = \dfrac{\sin(\alpha - \frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$

Il y a n solutions en général, sauf si $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ mod π. En effet, dans ce cas, l'une des valeurs de k annule θ. Il n'y a alors que $n - 1$ solutions. Le membre de gauche de l'équation est d'ailleurs un polynôme en z de degré $n - 1$ seulement.

e) On cherche μ réel et θ ≠ 0 mod π tel que :

$(\mu + 3)e^{3i\theta} - \mu e^{2i\theta} - (\mu + 2)e^{i\theta} + \mu = 0$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\mu + 3)\cos(3\theta) - \mu\cos(2\theta) - (\mu + 2)\cos(\theta) + \mu = 0 \\ (\mu + 3)\sin(3\theta) - \mu\sin(2\theta) - (\mu + 2)\sin(\theta) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\mu + 3)(4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)) - \mu(2\cos(\theta)^2 - 1) - (\mu + 2)\cos(\theta) + \mu = 0 \\ (\mu + 3)(4\cos(\theta)^2 - 1) - 2\mu\cos(\theta) - \mu - 2 = 0 \end{cases}$$

où on a simplifié par $\sin(\theta)$ non nul dans la deuxième équation

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(\mu + 3)\cos(\theta)^3 - 2\mu\cos(\theta)^2 - (4\mu + 11)\cos(\theta) + 2\mu = 0 \\ 4(\mu + 3)\cos(\theta)^2 - 2\mu\cos(\theta) - 2\mu - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(\mu + 3)\cos(\theta) + \mu = 0 \\ 4(\mu + 3)\cos(\theta)^2 - 2\mu\cos(\theta) - 2\mu - 5 = 0 \end{cases}$$

en effectuant $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 - \cos(\theta)L_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(\mu + 3)\cos(\theta) + \mu = 0 \\ 2\mu\cos(\theta) - 2\mu - 5 = 0 \end{cases}$$

en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 + 4\cos(\theta)L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu\cos(\theta) = \mu - 3\cos(\theta) \\ \mu\cos(\theta) = \mu + \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu\cos(\theta) = \mu - 3\cos(\theta) \\ \cos(\theta) = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\dfrac{15}{11} \\ \cos(\theta) = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Les solutions sont $-\frac{5}{6} \pm i\frac{\sqrt{11}}{6}$, et $\frac{5}{6}$, la dernière solution se trouvant facilement avec la somme des racines qui vaut $\frac{\mu}{\mu + 3} = -\frac{5}{6}$.

Sol.7) a) $Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \dfrac{z + 2i}{z - (1 + i)} = \dfrac{\overline{z} - 2i}{\overline{z} - (1 - i)}$

$\Leftrightarrow -(1 - 3i)z - 2i(1 - i) = -(1 + 3i)\,\overline{z} + 2i(1 + i)$ et $z \neq 1 + i$

$\Leftrightarrow (1 - 3i)z + 2i(1 - i) \in \mathbb{R}$ et $z \neq 1 + i$

$\Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}, (1 - 3i)z + 2i = a, a \neq 4.$

$\Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}, z = \dfrac{a - 2i}{1 - 3i} = \dfrac{(a - 2i)(1 + 3i)}{10} = \dfrac{a + 6}{10} + i\,\dfrac{3a - 2}{10}, a \neq 4.$

Il s'agit de la droite $y = 3x - 2$, privé du point $(1, 1)$.
On peut aussi considérer le point A d'affixe $-2i$, B d'affixe $1 + i$, et M d'affixe z. Z est réel si et seulement si $\boldsymbol{AM}$ est colinéaire à $\boldsymbol{BM}$ et $BM \neq 0$, si et seulement si M appartient à la droite (AB) privé de B. La droite d'équation $y = 3x - 2$ est précisément la droite (AB).

b) $Z = -\overline{Z} \Leftrightarrow \dfrac{z + 2i}{z - (1 + i)} = -\dfrac{\overline{z} - 2i}{\overline{z} - (1 - i)}$ et $z \neq 1 + i$

$\Leftrightarrow 2|z|^2 - (1 + i)z - (1 - i)\overline{z} - 4 = 0$ et $z \neq 1 + i$

$\Leftrightarrow |z|^2 - \mathrm{Re}((1 + i)z) - 2 = 0$ et $z \neq 1 + i$.

Il s'agit du cercle d'équation $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}$ privé du point (1, 1).

En reprenant les notations du a), on peut aussi dire que Z est imaginaire pur si et seulement si ***AM*** est orthogonal à ***BM*** et BM ≠ 0 si et seulement si $<$***AM***, ***BM***$>$ = 0 et BM ≠ 0. C'est le cercle de diamètre [AB], privé de B.

c) $\left|\frac{z + 2i}{z - (1 + i)}\right| = 1 \Leftrightarrow |z + 2i| = |z - (1 + i)|$. Il s'agit de la médiatrice du segment [AB]. Son équation est $x + 3y + 1 = 0$.

d) $\left|\frac{z + 2i}{z - (1 + i)}\right| = 2 \Leftrightarrow |z + 2i| = 2\,|z - (1 + i)|$. Posons $z = x + iy$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 4(x - 1)^2 + 4(y - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow (x - \frac{4}{3})^2 + (y - 2)^2 = \frac{40}{9}$$

Il s'agit d'un cercle, ligne de niveau de la forme AM = kBM avec ici $k = 2$. Voir L1/GEOMELEM.PDF.

Sol.8) a) On cherche z tel que $|az^2 - za^2| = |za^2 - z^3| = |z^3 - az^2|$,

$$\Leftrightarrow |a|\,|z|\,|z - a| = |z|\,|z - a|\,|z + a| = |z|^2\,|z - a|$$
$$\Leftrightarrow |a| = |z| \text{ et } |a| = |z + a|$$

La première équation signifie que z appartient au cercle de centre 0 et de rayon $|a|$, et la deuxième que z appartient au cercle de centre $-a$ et de rayon $|a|$. Ces deux cercles se coupent en deux les points d'affixe aj et aj^2, où j est racine cubique de l'unité.

On peut aussi effectuer une résolution algébrique, l'équation $|a| = |z|$ conduisant à l'existence d'un réel θ tel que $z = ae^{i\theta}$. On reporte dans la deuxième équation, ce qui conduit à :

$$1 = |1 + e^{i\theta}| = 2\cos(\frac{\theta}{2})$$

ce qui donne $\frac{\theta}{2} = \pm\frac{\pi}{3}$ et donc $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$. On retrouve $z = aj$ ou aj^2.

b) Le centre du carré est $\frac{u + v}{2}$. Les deux autres sommets s'obtiennent par une rotation de $\pm\frac{\pi}{2}$ des deux sommets initiaux, ce qui donne : $\frac{u + v}{2} \pm i\,\frac{u - v}{2}$

c) On doit avoir $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z - 1| \Leftrightarrow |z| = 1$ et $|z| = |z - 1|$, donc z appartient à l'intersection du cercle unité et de la médiatrice du segment [OA], O d'affixe nulle et B d'affixe 1. Donc :

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Sol.9) a) z appartient à l'axe imaginaire pur si et seulement si z appartient à la médiatrice du segment [AB], A d'affixe -1 et B d'affixe 1, si et seulement si $|z + 1| = |z - 1|$, si et seulement si $\left|\frac{z - 1}{z + 1}\right|$

appartient au cercle. Donc si $Z = \dfrac{z-1}{z+1}$ avec z imaginaire pur, alors Z appartient au cercle unité, et de plus $Z \neq 1$. Réciproquement, si Z appartient au cercle unité privé du point d'affixe 1, alors il existe z tel que $Z = \dfrac{z-1}{z+1}$, à savoir $z = \dfrac{Z+1}{1-Z}$, et les équivalences précédentes prouvent que $|Z| = 1 \Rightarrow z$ est imaginaire pur.
De même, $\mathrm{Re}(z) > 0$ si et seulement si z est plus proche de B que de A, si et seulement si $|z+1| > |z-1|$, si et seulement si $|Z| = \left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < 1$. L'image du demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$ est le disque unité ouvert (au sens où l'inégalité est stricte). L'image du demi-plan $\mathrm{Re}(z) < 0$ est l'ensemble des Z vérifiant $|Z| > 1$.

b) Posons $Z = \dfrac{z-1}{z-5}$. Il s'agit de montrer que : $\exists\ \theta,\ Z = \dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}-5} \Leftrightarrow \exists\ \varphi,\ Z - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}\,e^{i\varphi}$. Supposons d'abord que $Z = \dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}-5}$. Alors :

$$Z - \frac{1}{6} = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}-5} - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{5e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}-5}$$

qui est bien de module $\dfrac{1}{6}$ car $|5e^{i\theta}-1| = |e^{i\theta}(5-e^{-i\theta})| = |5-e^{-i\theta}| = |5-e^{i\theta}| = |e^{i\theta}-5|$. Donc Z appartient au cercle de centre le point d'affixe $\dfrac{1}{6}$ et de rayon $\dfrac{1}{6}$.

Réciproquement, si Z appartient à ce cercle, $\exists\ \varphi,\ Z - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}\,e^{i\varphi}$ et il s'agit de trouver θ tel que $\dfrac{5e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}-5} = e^{i\varphi}$, ou encore $e^{i\theta} = \dfrac{1-5e^{i\varphi}}{5-e^{i\varphi}}$. Comme $\left|\dfrac{1-5e^{i\varphi}}{5-e^{i\varphi}}\right| = 1$ (comme ci-dessus), un tel θ existe.

c) Posons $Z = \dfrac{(1+2i)z+1}{(1-2i)z+1}$ ou bien $z = \dfrac{Z-1}{1+2i-(1-2i)Z}$, pour $Z \neq \dfrac{1+2i}{1-2i}$. On a :

z réel

$\Leftrightarrow \quad z = \overline{z}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{Z-1}{1+2i-(1-2i)Z} = \dfrac{\overline{Z}-1}{1-2i-(1+2i)\overline{Z}}$

$\Leftrightarrow \quad (1-2i)Z - (1+2i)\,Z\overline{Z} - 1 + 2i + (1+2i)\,\overline{Z} = (1+2i)\overline{Z} - 1 - 2i - (1-2i)Z\overline{Z} + (1-2i)Z$

$\Leftrightarrow \quad Z\overline{Z} = 1$

Donc l'image de l'axe réel est le cercle unité, privé du point $\dfrac{1+2i}{1-2i}$ (ce point correspond au cas limite quand z tend vers l'infini).
De même :

z imaginaire pur

$\Leftrightarrow \quad z = -\,\overline{z}$

$\Leftrightarrow \qquad \dfrac{Z - 1}{1 + 2i - (1 - 2i)Z} = - \dfrac{\overline{Z} - 1}{1 - 2i - (1 + 2i)\overline{Z}}$

$\Leftrightarrow \qquad (1 - 2i)Z - (1 + 2i)\, Z\overline{Z} - 1 + 2i + (1 + 2i)\,\overline{Z} = -(1 + 2i)\overline{Z} + 1 + 2i + (1 - 2i)Z\overline{Z} - (1 - 2i)Z$

$\Leftrightarrow \qquad Z\overline{Z} - (1 - 2i)Z + (1 + 2i)\,\overline{Z} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \qquad Z\overline{Z} - 2\,\mathrm{Re}((1 - 2i)Z) + 1 = 0$

posons $Z = X + iY$

$\Leftrightarrow \qquad X^2 + Y^2 - 2X - 4Y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \qquad (X - 1)^2 + (Y - 2)^2 = 4$

Il s'agit du cercle de centre (1, 2) et de rayon 2, privé du point $\dfrac{1 + 2i}{1 - 2i}$ (correspondant aussi au cas où z tend vers l'infini).

On peut montrer que toute droite ou cercle est transformée en une droite ou un cercle par les applications $z \to \dfrac{az + b}{cz + d}$ avec quelques cas particuliers correspondant au z qui annule le dénominateur ou qui tend vers l'infini. Ces applications s'appellent les **transformations de Möbius**.

Sol.10) a) $(N \circ \Theta)(z) = \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{e^{iz} + 1}{e^{iz} - 1} + \dfrac{e^{iz} - 1}{e^{iz} + 1}\right) = i\,\dfrac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = (\Theta \circ D)(z)$

$(M \circ L)(z) = i\,\dfrac{1 - z^2}{2z} = (L \circ N)(z)$

$(Q \circ T)(z) = \left(\dfrac{z - 1}{z + 1}\right)^2 = (T \circ M)(z)$

ce qui correspond au diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\Theta"'] & {} \arrow[d, "\Theta"] \\
{} \arrow[r, "N"] \arrow[d, "L"'] & {} \arrow[d, "L"] \\
{} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "T"'] & {} \arrow[d, "T"] \\
{} \arrow[r, "Q"] & {}
\end{tikzcd}$$

b) On a donc $Q \circ T \circ L \circ \Theta = T \circ L \circ \Theta \circ D$. On a $(T \circ L \circ \Theta)(z) = e^{-iz}$, de sorte que :

$$Q(e^{-iz}) = e^{-iD(z)} = e^{-2iz}$$

c) On a $M = T^{-1} \circ Q \circ T$, donc $M^n = T^{-1} \circ Q^n \circ T$, avec $Q^n(z) = z^{2^n}$ et $T^{-1}(z) = \dfrac{z + 1}{1 - z}$, donc :

$$M^n(z) = (T^{-1} \circ Q^n \circ T)(z) = (T^{-1} \circ Q^n)(\frac{z-1}{z+1})$$

$$= T^{-1}((\frac{z-1}{z+1})^{2^n}) = \frac{(\frac{z-1}{z+1})^{2^n} + 1}{1 - (\frac{z-1}{z+1})^{2^n}}$$

Si $\text{Re}(z) > 0$, on a $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$ (voir Exo.8.a) donc $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{z-1}{z+1})^{2^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} M^n(z) = 1$.

Si $\text{Re}(z) < 0$, on a $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| > 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{z-1}{z+1})^{2^n} = \infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} M^n(z) = -1$

Si $\text{Re}(z) = 0$, z est imaginaire pur, $\frac{z-1}{z+1}$ est unitaire de la forme $e^{i\theta}$ et :

$$M^n(z) = \frac{\exp(2^n i\theta) + 1}{1 - \exp(2^n i\theta)} = \frac{i}{\tan(2^{n-1}\theta)}$$

Dans ce dernier cas, la suite reste sur l'axe imaginaire pure.
Ce dernier cas est numériquement intéressant. D est une fonction extrêmement simple, mais qui caractérise néanmoins les phénomènes chaotiques ou sensibles aux conditions initiales. En effet, l'itéré n fois de D vérifie $D^n(z) = 2^n z$ de sorte que, si la valeur de z modulo 2π est connue avec une erreur de ε (par exemple $\varepsilon = 10^{-15}$ ce qui est souvent le cas en pratique), alors $D^{50}(z)$ modulo 2π ne pourra être connue à moins d'une unité près, ce qui rend tout calcul numérique inapproprié. Il en résulte que les fonctions N, M, et Q sont elles aussi chaotiques car on a :

$$N = \Theta \circ D \circ \Theta^{-1}$$
$$M = L \circ \Theta \circ D \circ L^{-1} \circ \Theta^{-1}$$
$$Q = T \circ L \circ \Theta \circ D \circ \Theta^{-1} \circ L^{-1} \circ T^{-1}$$

donc, pour tout entier n :

$$N^n = \Theta \circ D^n \circ \Theta^{-1}$$
$$M^n = L \circ \Theta \circ D^n \circ L^{-1} \circ \Theta^{-1}$$
$$Q^n = T \circ L \circ \Theta \circ D^n \circ \Theta^{-1} \circ L^{-1} \circ T^{-1}$$

et aucun calcul numérique précis ne sera valide sur ces fonctions au bout de quelques dizaines d'itérations. C'est le cas de $M^n(z)$ quand z est imaginaire pur. En effet, on a vu que $M^n(z) = \frac{i}{\tan(2^{n-1}\theta)}$. L'argument θ est multiplié par 2 à chaque itération. Le comportement numérique approché de $M^n(z)$ est alors imprévisible, comme celui de $D^n(\theta)$.
La fonction M n'est autre que celle qui intervient dans la méthode de Newton [voir L1/DLTAYLOR.PDF] pour résoudre numériquement l'équation $x^2 - 1 = 0$. En effet, si on pose $f(x) = x^2 - 1$, alors $M(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. La fonction N est celle qui intervient dans la résolution de l'équation $x^2 + 1 = 0$. On voit que, si ces équations sont triviales à résoudre, leur résolution numérique conduit à des difficultés insoupçonnées.

Sol.11) Notons a , b, c, p, q, r les affixes des différents points. $b - a$ est alors l'affixe du vecteur $\boldsymbol{AB}$. Soit $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$, vérifiant $j^3 = 1$. L'application $z \to jz$ correspond à une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, de sorte que :

$$b - p = j(a - p)$$

ce qui donne :

$$(j-1)p = ja - b$$

On a de même :

$$(j-1)q = jb - c$$
$$(j-1)r = jc - a$$

Eliminons a, b, c entre ces trois équations en multipliant la première par j^2, la seconde par j, la troisième par 1, et en ajoutant les trois résultats. Il reste :

$$j^2(j-1)p + j(j-1)q + (j-1)r = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\quad j^2p + jq + r = 0$

$\Leftrightarrow$ $\quad -(1+j)p + jq + r = 0$

$\Leftrightarrow$ $\quad r - p = j(p - q)$

Le vecteur ***PR*** se déduit de ***QP*** par une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$, ce qui signifie que PQR est équilatéral.

Sol.12) a) Posons $1 + \dfrac{it}{n} = r_n \exp(i\theta_n)$ avec $r_n = \sqrt{1 + \dfrac{t^2}{n^2}}$ et $\theta_n = \arctan(\dfrac{t}{n})$.

On a $r_n^{\,n} = \exp(n \ln(\sqrt{1 + \dfrac{t^2}{n^2}})) = \exp(\dfrac{n}{2}\ln(1 + \dfrac{t^2}{n^2})) = \exp(\dfrac{n}{2}(\dfrac{t^2}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})) \to 1$ quand n tend vers $+\infty$, et $n\theta_n$ tend vers t. Donc la limite est e^{it}.

b) Si $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, alors $1 + \dfrac{z}{n} = 1 + \dfrac{a}{n} + \dfrac{ib}{n} = r_n \exp(i\theta_n)$ avec $r_n = \sqrt{(1 + \dfrac{a}{n})^2 + \dfrac{b^2}{n^2}}$ et θ_n tel que $\cos(\theta_n) = \dfrac{1 + \dfrac{a}{n}}{r_n}$ et $\sin(\theta_n) = \dfrac{b}{nr_n}$. Comme $1 + \dfrac{z}{n} \to 1$, on peut supposer n assez grand pour que $\theta_n = \arctan(\dfrac{b}{n+a})$. On a :

$$n\ln(r_n) = \frac{n}{2}\ln((1 + \frac{a}{n})^2 + \frac{b^2}{n^2}) = \frac{n}{2}\ln(1 + \frac{2a}{n} + o(\frac{1}{n})) \to a \text{ donc } r_n^{\,n} \to e^a,$$

et $\quad n\theta_n \to b$,

donc $(1 + \dfrac{z}{n})^n \to e^{a+ib} = e^z$.

◆