DERIVATION

PLAN

I : Dérivée

1- Définition

DEFINITION

Une fonction f définie sur un intervalle I *et à valeurs réelles est* **dérivable** *en x_0 élément de* I *s'il existe un réel noté $f'(x_0)$ tel que :*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$$

quand h tend vers 0.

Si f est dérivable en tout point de I *et si f' est continue sur* I*, on dit que f est* C^1 *sur* I.

On rappelle que $o(h)$ désigne une fonction négligeable devant h quand h tend vers 0, i.e. qui vérifie :

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

La définition de la dérivabilité est équivalente à :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

ou à :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

La droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est la droite tangente au graphe représentatif de f, au point d'abscisse x_0. Au lieu de f', on trouve également les notations Df ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. La définition précédente s'applique aussi aux fonctions à valeurs complexes. Comme une fonction à valeurs complexes admet une limite si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire en admettent une, une fonction f à valeurs complexes, de partie réelle g et imaginaire h, est dérivable si et seulement si g et h le sont et on a alors $f' = g' + ih'$.

La définition est également équivalente à l'existence d'une fonction φ **continue** en x_0 telle que :

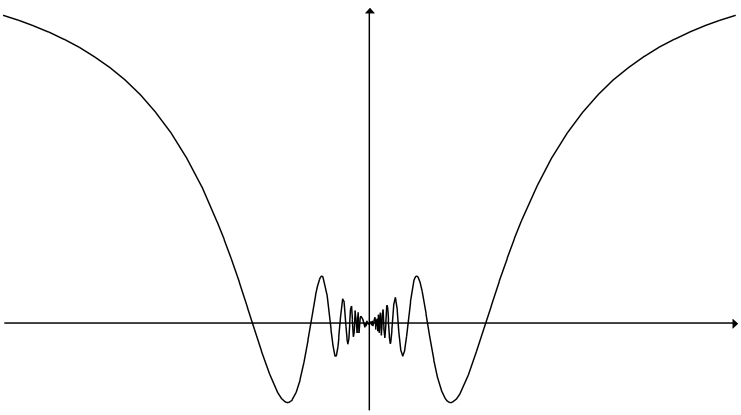
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\varphi(x)$$

avec $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. En dehors de x_0, $\varphi(x)$ est égal au taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Il résulte immédiatement de la définition qu'une fonction dérivable est continue. La réciproque est fausse comme le prouve l'exemple de $|x|$ en 0.

Si on se limite à $h > 0$ dans le calcul de $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, on parle de **dérivée à droite**. Si l'on se limite à $h < 0$, on parle de **dérivée à gauche**. Si f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et si les deux dérivées sont égales, alors f est dérivable en x_0.

La fonction $x \to |x|$ est dérivable à droite et à gauche de 0, la dérivée à droite valant 1 et celle à gauche valant -1. Il existe des fonctions continues n'admettant aucune dérivée à droite et à gauche de 0, par exemple $x \to x \sin(\frac{1}{x})$.



Il existe des fonctions continues dérivables en aucun point, mais la présentation d'un contre-exemple dépasse le niveau d'un cours de première année.

La différence entre f dérivable et f C^1 est assez subtile. Dans les exercices du chapitre L1/INTEGRAL.PDF, on montre que :

f est dérivable sur $[a, b]$ de dérivée f' si et seulement si :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ x \in [a, b],\ \exists\ \alpha > 0,\ \forall\ h \in]-\alpha, \alpha[,\ \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon$$

f est C^1 sur $[a, b]$ de dérivée f' si et seulement si :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ \forall\ x \in [a, b],\ \forall\ h \in]-\alpha, \alpha[,\ \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon$$

La seule différence est le α qui dépend de x (et de ε) dans la première phrase et pas dans la seconde.

2- Opérations

a) Somme, produit, quotient

PROPOSITION

Si f et g sont deux fonctions dérivables en un point x_0 alors $f + g$, fg et $\frac{f}{g}$ (en supposant $g(x_0) \neq 0$ dans ce dernier cas) sont dérivables en x_0 et :

$$(f + g)'(x_0) = (f' + g')(x_0)$$
$$(fg)'(x_0) = (f'g + fg')(x_0)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x_0)$$

Démonstration :

❑ Somme : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$

❑ Produit : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x) + \lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f'(x_0)g'(x_0)$$

❑ Quotient : Si g est continue en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, g ne s'annule pas sur un intervalle contenant x_0. $\frac{f}{g}$ est alors définie en tout point de cet intervalle et :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\frac{1}{g(x)} - \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2} g'(x_0)$$
$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

EXEMPLES :

❑ Les formules de dérivation des fonctions trigonométriques sin' = cos et cos' = – sin reposent sur les propriétés suivantes :

$$\cos(x + h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$$
$$\sin(x + h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Des justifications des deux formules de trigonométrique sont données dans L1/ESPEUCL.PDF. Quant à la dernière formule sur la limite de $\frac{\sin(h)}{h}$ en 0, elle résulte de la définition du radian comme

mesure des angles, et peut être prise comme définition même du radian[1]. Elle permet par exemple de montrer que la longueur d'un arc de cercle de rayon 1 et d'angle x radian vaut précisément x.
On déduit des propriétés données que :

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

car $\quad \cos(h) = \cos^2(\frac{h}{2}) - \sin^2(\frac{h}{2})$

donc $\quad 1 - \cos(h) = 2\sin^2(\frac{h}{2})$

et $\quad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2(\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{2} \frac{\sin^2(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})^2} = 0$

De même :

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \\ &= -\sin(x)\end{aligned}$$

On en déduit celle de tan et cotan :

$$\tan' = (\frac{\sin}{\cos})' = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

$$\text{cotan}' = (\frac{\cos}{\sin})' = \frac{-\sin^2-\cos^2}{\sin^2} = -\frac{1}{\sin^2} = -(1+\text{cotan}^2)$$

b) Composition

PROPOSITION

Soit f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Démonstration :

❑ En effet, il existe deux fonctions φ et ψ, respectivement continues en x_0 et $y_0 = f(x_0)$, telles que :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\varphi(x) \text{ et } f'(x_0) = \varphi(x_0)$$

$$g(y) = g(y_0) + (y - y_0)\,\psi(y) \text{ et } g'(y_0) = \psi(y_0)$$

Donc, en prenant $y = f(x)$:

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + (f(x) - f(x_0))\,\psi(f(x))$$

[1] Il est bon de mettre en garde le lecteur sur le fait qu'il pourra rencontrer dans ses lectures mathématiques des textes prétendant prouver la valeur de cette limite, la plupart du temps en encadrant l'aire d'un secteur angulaire par des triangles ou des polygones. Ces prétendues démonstrations occultent soigneusement le fait que l'aire d'un domaine circulaire dissimule ou bien un calcul intégral reposant sur des primitives et des dérivées qui utilisent précisément la formule qu'elles prétendent démontrer, ou bien encadrent le secteur angulaire par des polygones dont le nombre de côtés augmente indéfiniment, cachant soigneusement le fait que le passage à la limite utilisé pour obtenir l'aire désirée repose lui aussi sur la limite qu'on prétend prouver.

$= g(f(x_0)) + (x - x_0)\,\varphi(x)\psi(f(x))$

La fonction $\varphi(x)\psi(f(x))$ est continue en x_0, donc $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = \varphi(x_0)\psi(f(x_0)) = f\,'(x_0)\,g'(f(x_0))$$

La règle de dérivation d'une fonction composée se note agréablement en physique, où seules les variables portent un nom et non les fonctions elles-mêmes. Supposons une quantité E dépendant de la position z d'un mobile. On a alors E = E(z). Supposons que z dépende du temps t de sorte que $z = z(t)$ et que E = E($z(t)$) = E(t) pour abréger. On remarquera que cette dernière notation est invalide en mathématique à cause d'une ambiguïté. E(3) désigne-t-il la valeur de E pour $z = 3$ ou pour $t = 3$? Cette ambiguïté n'existe pas en physique où l'on demandera E(3 mètres) ou E(3 secondes), l'unité appliquée aux variables levant alors l'ambiguïté. La règle de dérivation des fonctions composées se note alors :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

On notera que cette notation "fractionnaire" n'est valide qu'au premier ordre, puisqu'on s'exercera à vérifier que :

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

en utilisant la règle de dérivation d'un produit et d'une composée de fonctions.

EXEMPLES :

❑ La dérivée de $\ln(\sin(x))$ est $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \text{cotan}(x)$.

Celle de $-\ln(\cos(x))$ est $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$.

Celle de $\ln(\tan(\frac{x}{2}))$, vue comme composée de $x \to \frac{x}{2} \to \tan(\frac{x}{2}) \to \ln(\tan(\frac{x}{2}))$ est :

$$\frac{1}{\tan(\frac{x}{2})} \times \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sin(x)}$$

Celle de $\ln(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}))$ est $\dfrac{1}{\cos(x)}$, soit par calcul direct d'une composée comme ci-dessus, soit en composant $\ln(\tan(\frac{x}{2}))$ par la translation $x \to x + \frac{\pi}{2}$.

Ces formules peuvent être utiles en calcul intégral, puisqu'inversement, elles donnent des primitives de $\tan(x)$, $\dfrac{1}{\sin(x)}$, $\dfrac{1}{\cos(x)}$.

c) Réciproque

PROPOSITION

Soit f continue sur un intervalle I, *bijective sur* I, *dérivable en x_0 et telle que* $f\,'(x_0) \neq 0$. *Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et* :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f\,'(x_0)} = \frac{1}{f\,'(f^{-1}(y_0))}$$

Démonstration :

❑ En effet, il existe une fonction φ, continue en x_0 telle que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\varphi(x) \text{ et } f'(x_0) = \varphi(x_0)$$

Posons $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, et donc $x = f^{-1}(y)$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Comme φ est continue en x_0 et que $f'(x_0) = \varphi(x_0)$ est non nulle, il existe un intervalle centré en x_0 sur lequel φ ne s'annule pas. Nous prendrons x dans cet intervalle et y dans l'image de cet intervalle par φ (image qui contient y_0 en son intérieur). On a alors :

$$x = x_0 + \frac{y - y_0}{\varphi(x)}$$

donc $\quad f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + (y - y_0)\,\dfrac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$

La fonction $y \to \dfrac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$ est continue en y_0 comme composée de fonctions continues, et sa valeur en y_0 est $\dfrac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \dfrac{1}{\varphi(x_0)} = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

f^{-1} est donc dérivable en y_0 de dérivée $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Si f est bijective dérivable sur I, si la dérivée de f' ne s'annule pas et si on note x la variable de f^{-1} plutôt que y, alors $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ en tout point de $f(\mathrm{I})$.

EXEMPLES :

❑ Pour $f(x) = \ln(x)$, de dérivée $\dfrac{1}{x}$, on obtient : $(e^x)' = \dfrac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$.

❑ Pour $f(x) = \sin(x)$ de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[-1, 1]$, de réciproque arcsin (voir le chapitre L1/FONCTUSU.PDF pour les propriétés des fonctions arcsin, arccos, arctan), on obtient :

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ pour } x \in]-1,1[.$$

❑ De même, pour $f(x) = \cos(x)$ de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$ de réciproque arccos, on a :

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ pour } x \in]-1,1[$$

❑ Pour $f(x) = \tan(x)$ de $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ vers $\mathbf{R}$, on obtient : $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

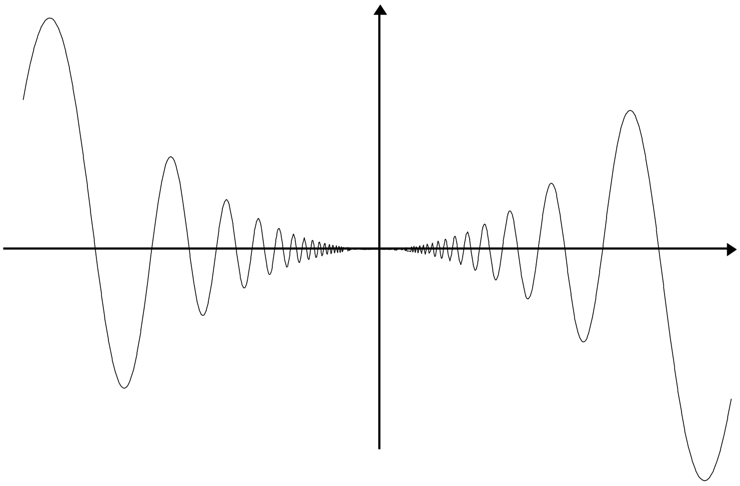
3- Dérivées successives

Si f est dérivable sur un intervalle I, on peut considérer la fonction dérivée f', et se poser la question de savoir si elle est elle–même continue ou dérivable. Si c'est le cas, on peut définir sa dérivée f'' appelée **dérivée seconde** de f. Plus généralement, on note $f^{(k)}$ ou $\mathrm{D}^k f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$ la dérivée d'ordre k.

On remarquera cependant que f' peut être définie en tout point de I mais peut ne pas être continue. Un exemple est donné par la fonction $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ dont la dérivée n'est pas continue en 0. On a en effet, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin(\frac{1}{x})$ qui tend vers $0 = f'(0)$, alors que, pour x non nul, on a :

$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$

qui n'a pas de limite en 0. On représente ci-dessous le graphe de f entre –1 et 1, dans un repère non orthonormé. Il y a une tangente horizontale en 0 (le graphe est compris entre les deux paraboles $y = \pm x^2$), mais les tangentes au graphe aux points d'intersection avec Ox ont des pentes qui tendent vers ± 1.



On note $C^n(I)$ l'espace vectoriel des fonctions dont les n premières dérivées existent sur I et sont continues.

Montrons que, si f et g sont C^n, il en est de même de $f + g$, de fg, de $\frac{f}{g}$ si g ne s'annule pas, de $g \circ f$, et de f^{-1} à condition que f soit bijective et que sa dérivée ne s'annule pas.

a) Somme

Il est trivial de vérifier par récurrence que $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

b) Produit

On dispose d'une formule donnant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit.

FORMULE DE LEIBNIZ

Soit f et g deux fonctions n fois dérivables. Alors fg est n fois dérivable et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p)}$$

où l'on convient que $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$. $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binomial $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $0 \leq p \leq n$ et 0 sinon.

Démonstration :

❑ Elle se fait par récurrence sur n. C'est évidemment vérifié pour $n = 0$ ainsi que pour $n = 1$, pour lequel on reconnaît : $(fg)' = f'g + fg'$.

Si la formule est vraie au rang n et que les fonctions sont $n + 1$ fois dérivables, on voit que $(fg)^{(n)}$ est dérivable et de dérivée :

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (f^{(p+1)} g^{(n-p)} + f^{(p)} g^{(n-p+1)}) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p+1)} g^{(n-p)} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} g^{(n-p+1)}$$

$$= \sum_{p=0}^{n+1} \left[\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}\right] f^{(p)} g^{(n-p+1)}$$

en changeant d'indice $p + 1 \to p$ dans la première somme

$$= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} f^{(p)} g^{(n-p+1)}$$

car $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$

(On a utilisé le fait que $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$).

La démonstration, ainsi que la nature de la formule, est donc comparable à celle du développement du binôme de Newton. Ce n'est pas un hasard : la formule de Leibniz permet d'en déduire la formule du binôme de Newton. Il suffit de prendre $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = e^{bx}$ et d'appliquer la formule de Leibniz en $x = 0$.

c) Quotient

Il n'existe pas de formule générale simple donnant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un quotient, mais on peut montrer par récurrence que $\dfrac{f}{g}$ est C^n. C'est le cas pour $n = 1$ au vu de la formule $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Supposons que ce soit le cas pour $n - 1$. Alors :

$f \in C^n(I)$ et $g \in C^n(I) \Rightarrow f \in C^{n-1}(I)$, $g \in C^{n-1}(I)$, $f' \in C^{n-1}(I)$, $g' \in C^{n-1}(I)$

$\Rightarrow$ $f'g \in C^{n-1}(I)$, $fg' \in C^{n-1}(I)$ et $g^2 \in C^{n-1}(I)$ en utilisant le résultat prouvé sur le produit

$\Rightarrow$ $f'g - fg' \in C^{n-1}(I)$ et $g^2 \in C^{n-1}(I)$ en utilisant le résultat sur la somme

$\Rightarrow$ $\dfrac{f'g - fg'}{g^2} \in C^{n-1}(I)$ en appliquant l'hypothèse de récurrence

$\Rightarrow$ $\dfrac{f}{g} \in C^n(I)$

d) Composition

Il n'existe pas de formule générale simple donnant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une composée de fonctions, mais on peut montrer par récurrence $g \circ f$ est C^n. Le raisonnement est comparable au précédent. C'est vrai pour $n = 1$ car $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$. On note $J = f(I)$. Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$:

$f \in C^n(I)$ et $g \in C^n(J) \Rightarrow f \in C^{n-1}(I)$, $f' \in C^{n-1}(I)$, $g' \in C^{n-1}(J)$

$\Rightarrow$ $g' \circ f \in C^{n-1}(I)$, $f' \in C^{n-1}(I)$ en appliquant l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$

$\Rightarrow$ $(g' \circ f)f' \in C^{n-1}(I)$ en appliquant le résultat sur le produit.

$\Rightarrow$ $g \circ f \in C^n(I)$

e) Réciproque

De même, la formule $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ permet de voir que, si f appartient $C^n(I)$, est bijective de I sur J, et si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} appartient à $C^n(J)$. Cela se montre également par récurrence, la formule donnant $(f^{-1})'$ prouvant le cas $n = 1$. Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$:

$f \in C^n(I)$

$\Rightarrow$ $f' \in C^{n-1}(I)$, $f^{-1} \in C^{n-1}(J)$ en appliquant l'hypothèse de récurrence

$\Rightarrow$ $f' \circ f^{-1} \in C^{n-1}(J)$ en appliquant le résultat sur la composée de fonction

$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{f' \circ f^{-1}} \in C^{n-1}(J)$ en appliquant le résultat sur le quotient

$\Rightarrow$ $f^{-1} \in C^n(J)$

II : Théorème de Rolle et conséquences

1- Théorème de Rolle

Ce théorème a d'abord été énoncé par Rolle au XVIIème sous la forme suivante : entre deux racines d'un polynôme P, il y a une racine de sa dérivée P'.

THEOREME DE ROLLE

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeur réelles, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un élément c de $]a, b[$, tel que $f'(c) = 0$.

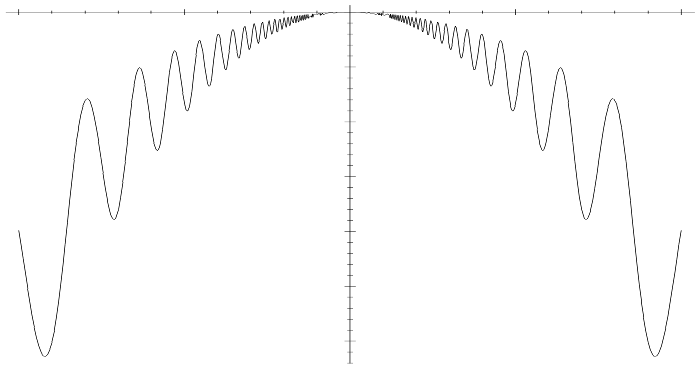
Démonstration :

❑ f est continue sur un segment, donc admet un maximum et un minimum (toute la difficulté du théorème de Rolle repose sur ce résultat, montré dans le chapitre L1/FONCTION.PDF). Si ceux-ci se trouvent l'un en a et l'autre en b, cela signifie que f est constante, et alors c peut être pris de façon quelconque. Sinon, l'un des deux extrema se situe à l'intérieur de l'intervalle, en c. En un tel point, la dérivée s'annule. En effet, si par exemple c est un maximum, on a, par passage à la limite :

$$\left[\begin{array}{l} \text{pour } x < c,\ \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0 \\ \text{pour } x > c,\ \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0 \end{array}\right.$$

donc $f'(c) = 0$.

Il est faux de croire que, si c est un maximum, alors f est croissante à gauche de c, puis décroissante après. $f(c)$ est certes la valeur maximale, mais f peut ne pas être monotone, ni à gauche, ni à droite. Prendre par exemple $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} - x^2 \sin^2 \dfrac{1}{x}$.



Le théorème de Rolle ne s'applique pas aux fonctions à valeurs complexes. Par exemple $f(x) = e^{ix}$, définie sur $[0, 2\pi]$, vérifie $f(0) = f(2\pi) = 1$, mais la dérivée de f, égale à ie^{ix} ne s'annule pas.

2- Théorème des accroissements finis

THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ *à valeurs réelles, dérivable sur* $]a, b[$. *Alors il existe un élément c de* $]a, b[$, *tel que* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

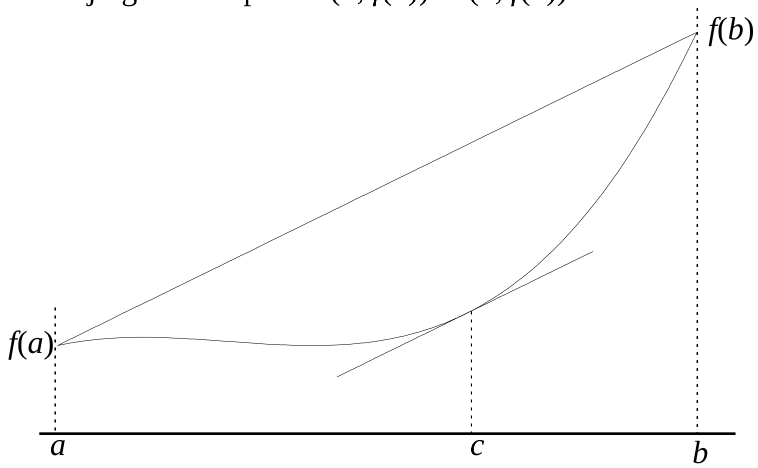
<u>Démonstration</u> :

❑ Il suffit de se ramener au théorème de Rolle. Pour cela, il suffit de poser, pour x dans $[a, b]$:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

g représente l'écart entre f et la fonction affine qui coïncide avec f aux bornes de l'intervalle. g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $g(a) = 0 = g(b)$. Donc il existe c élément de $]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui donne le résultat cherché.

Géométriquement, cela signifie qu'il existe un point de l'intervalle où la pente de la tangente est égale à la pente de la corde joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$:



Pas plus que le théorème de Rolle, ce théorème ne s'applique aux fonctions à valeurs complexes.

3- Applications

a) sens de variation d'une fonction à valeurs réelles

PROPOSITION

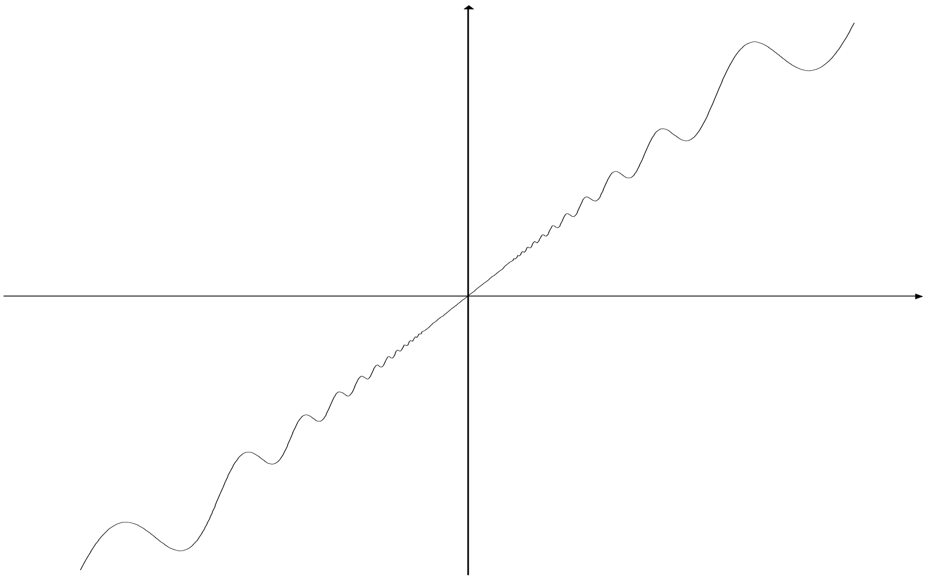
f croissante sur $]a, b[\Leftrightarrow f\,' \geq 0$.

f décroissante sur $]a, b[\Leftrightarrow f\,' \leq 0$

f constante sur $]a, b[\Leftrightarrow f\,' = 0$

Le sens $\Rightarrow$ découle d'un passage à la limite sur des taux d'accroissements de signe constant. Il peut être montré dès la classe de Première. La réciproque résulte du théorème des accroissements finis. Si $f\,'$ est de signe constant (ou nul), il en est de même de tout taux d'accroissement $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ puisque ce dernier est égal à $f\,'(c)$ avec c entre x et y.

Il est faux de croire que $f\,'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur un intervalle contenant x_0. Il suffit de la stricte positivité sur ***tout un intervalle***, mais la positivité en un point unique ne suffit pas. Considérer par exemple $f(x) = x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x})$ en 0. On a $f\,'(0) = 1$, mais $f\,'$ n'est de signe constant dans aucun voisinage de 0.



Si f est dérivable et si $f\,' > 0$, f est strictement croissante. La réciproque est fausse. Il se peut que f soit strictement croissante et dérivable, et que $f\,'$ s'annule. Il suffit de prendre $f(x) = x^3$. L'équivalence est la suivante. Notons Z l'ensemble des x où $f\,'$ s'annule :

f strictement croissante $\Leftrightarrow f\,' \geq 0$ et Z ne contient aucun intervalle $I =]a, b[$ avec $a < b$

En effet, dire que f est croissante sans l'être strictement, c'est dire qu'il existe $x < y$ tel que $f(x) = f(y)$, ou encore que f est constante sur un intervalle, ou encore que $f\,'$ s'annule sur un intervalle, ou enfin que Z contient un intervalle ouvert.

Si Z ne contient aucun intervalle ouvert non vide I, cela signifie que :

$\forall$ I ouvert non vide, $I \not\subset Z$

$\Leftrightarrow$ $\forall$ I ouvert non vide, $I \cap Z^c \neq \emptyset$ ou Z^c est le complémentaire de Z

$\Leftrightarrow$ Z^c est **dense** dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, on a aussi :

f strictement croissante $\Leftrightarrow f\,' \geq 0$ et $f\,' > 0$ sur une partie dense de $\mathbb{R}$

b) Dérivation à une borne d'un intervalle

PROPOSITION

Soit f continue sur $[a, b]$*, dérivable sur* $]a, b[$*, et telle que* $\lim\limits_{x \to a} f\,'(x) = l$*, l étant fini ou infini. Alors, si l est fini, f est dérivable à droite de a et* $f\,'(a) = l$*. Si l est infini, le taux d'accroissement de f en a tend vers l'infini.*

Démonstration :

❑ En effet, pour tout $x > a$, il existe $c \in\ ]a, x[$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f\,'(c)$. c est une fonction implicite de x. Lorsque x tend vers a, c tend vers a, de sorte que $f\,'(c)$ tend vers l par composition des limites. Le taux d'accroissement admet donc la même limite.

c) Inégalité des accroissements finis

INEGALITE DES ACCROISSEMENT FINIS

Soit f une fonction continue sur un intervalle I *à valeurs réelles, dérivable sur* I*. On suppose qu'il existe k tel que* $|f\,'| \leq k$*. Alors, pour tout a et b de* I, $\left|\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leq k$

Démonstration :

❑ C'est évident puisqu'il existe c tel que $\left|\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| = |f\,'(c)| \leq k$. On a donc montré qu'une fonction dont la dérivée est bornée par k, est lipschitzienne de rapport k. (Voir L1/FONCTION.PDF pour la définition de lipschitzien).

Cette inégalité est également valable, sous les mêmes hypothèses, pour les fonctions f à valeurs complexes alors que le théorème d'égalité des accroissements finis est généralement faux dans ce cas. Considérons θ l'argument de $f(b) - f(a)$. Ce θ est tel que $e^{-i\theta}(f(b) - f(a))$ est réel. Posons $g(t) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}f(t))$, de sorte que g est à valeurs réelles et que :

$$g(b) - g(a) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}(f(b) - f(a))) = e^{-i\theta}(f(b) - f(a))$$

D'où $|g(b) - g(a)| = |f(b) - f(a)|$

g est dérivable et :

$$|g\,'(t)| = |\mathrm{Re}(e^{i\theta} f\,'(t))| \leq |e^{i\theta} f\,'(t)| = |f\,'(t)| \leq k$$

$\Rightarrow$ $|g(b) - g(a)| \leq k\,|b - a|$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis à g.

$\Rightarrow$ $|f(b) - f(a)| \leq k\,|b - a|$

Interprétation physique de l'inégalité des accroissements finis :

Si la variable est le temps t, et $f(t)$ la position d'un mobile sur un axe, $f\,'(t)$ est la vitesse instantanée du mobile. On a donc :

Si la vitesse instantanée est majorée à chaque instant par k,
alors la vitesse moyenne sur un intervalle de temps donné aussi.

Ce résultat physique a l'air d'aller de soi, et on se demande pourquoi il en faudrait une justification mathématique reposant sur le théorème de accroissements finis, lui-même reposant sur le théorème de Rolle, reposant à son tour sur l'existence d'extrema, qui elle-même repose sur l'existence de borne supérieure et de borne inférieure, ces derniers étant des axiomes, tout cela pour arriver à un résultat physique évident.

En fait, l'inégalité des accroissements finis ne montre pas un résultat physique évident. Elle montre l'adéquation entre la réalité physique et les modèles qui ont été choisis pour décrire cette réalité. Il faut bien avoir conscience que ces modèles sont des constructions abstraites simplifiant la réalité et que rien ne permet d'assurer à coup sûr la correspondance entre une déduction mathématique et une expérience physique. Tant que les deux sont en accord, il n'y a pas de remise en cause à faire, mais rien n'assure qu'il en sera toujours ainsi. Quels désaccords pourrait-il y avoir entre la réalité et son modèle ? En voici des exemples :

❑ Le choix d'utiliser les éléments de $\mathbf{R}$ pour définir une position x, un instant t, une intensité de courant I et plus généralement d'utiliser $\mathbf{R}^3$ pour modéliser notre espace est difficilement justifiable. En effet, le développement décimal d'un réel s'écrit avec une infinité de chiffres. Cette exigence n'est d'aucune utilité en physique qui se contente de nombres décimaux (ayant un nombre fini de décimales), voire de nombres entiers si l'unité de mesure a été choisie suffisamment petite. De plus, une mesure physique n'est pas en soi un réel, ni un décimal, mais plutôt un intervalle dans lequel se trouve la mesure, qui possède toujours une incertitude. Nous devrions donc définir des opérations (somme, produit...) entre intervalles de décimaux plutôt qu'entre réels pour avoir une représentation plus fidèle de la réalité physique. La difficulté de mettre en œuvre de telles opérations, ainsi que la commodité consistant à disposer d'un nombre arbitraire et non limité de décimales, adaptable au progrès des précisions des mesures, fait qu'on utilise les réels.

❑ Le choix de la définition de la vitesse instantanée est également discutable. On choisit comme définition de cette vitesse instantanée $V(t_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$, limite de la vitesse moyenne entre l'instant considéré et un autre instant, et donc égale à la dérivée usuelle. On aurait très bien pu choisir d'autres définitions plus raisonnables, par exemple $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0-h)}{2h}$, limite de la vitesse moyenne sur un intervalle centré en l'instant considéré. On notera qu'un mobile ayant une loi horaire $f(t) = |t|$ (modélisant par exemple un choc) n'a pas de vitesse définie en $t = 0$ dans le premier cas, mais a une vitesse nulle dans le second. On dispose donc de deux modèles différents et il faut choisir entre l'un et l'autre.

Il serait d'ailleurs plus juste encore de noter qu'étant dans l'impossibilité physique de définir un instant de manière infiniment précise, on devrait plutôt définir la vitesse comme $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0+k)}{(h-k)}$. On montre en fait que cette définition signifie qu'une fonction f pour laquelle cette quantité est définie en tout point est dérivable au sens usuel, mais qu'en plus, sa dérivée est continue (autrement dit, f est C^1) (voir L1/CALCDIF1.PDF).

❑ Le fait de raisonner sur des fonctions C^1 et même C^∞ est très courant en physique, lorsque l'évolution des processus est jugée suffisamment régulière. Notons cependant qu'il existe, aussi bien en mathématiques qu'en physique, des notions rejetant cette régularité et faisant largement usage de fonctions à la rigueur continues, mais dérivables nulle part (chaos, fractales...).

d) Etude de suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$:

PROPOSITION

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. *On suppose qu'il existe k élément de* $[0, 1[$ *tel que* $|f'| \leq k$ *et qu'il existe un nombre* α *tel que* $f(\alpha) = \alpha$ (**point fixe** *de f*). *Alors* α *est unique et toute suite* (u_n) *vérifiant* $u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* α.

Démonstration :

❑ α est unique car s'il existait deux points fixes distincts α et β, on aurait, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|\beta - \alpha| = |f(\beta) - f(\alpha)| \leq k\,|\beta - \alpha|$$

En simplifiant par $|\beta - \alpha|$, cela entraînerait $1 \leq k$ qui est contraire à l'hypothèse.

Considérons maintenant une suite récurrence (u_n). On a :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq k\,|u_n - \alpha| \text{ en appliquant l'inégalité des accroissements finis.}$$

On en déduit alors par récurrence que :

$$\forall\, n, |u_n - \alpha| \leq k^n\,|u_0 - \alpha|$$

et comme $\lim\limits_{n \to \infty} k^n = 0$, on a bien $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \alpha$.

Cette propriété peut servir à obtenir des valeurs approchées de α en utilisant une suite récurrente. La proposition est également valide sur un intervalle I à condition que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. On dit que I est **stable** par f.

EXEMPLE :

❑ Soit $f(x) = e^{-x}$. Considérons une suite définie par u_0 réel quelconque et, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrons que la suite converge.

On a $u_1 = f(u_0) > 0$ et $0 < u_2 = f(u_1) < 1$. Quitte à changer d'indice, on peut donc supposer dans notre démonstration qu'on part de $u_0 \in]0, 1[$. La limite éventuelle de la suite est le point fixe α de f, qui vérifie $\alpha = e^{-\alpha}$. Ce point fixe existe car $f(x) - x$ décroît strictement, prenant la valeur $1 > 0$ pour $x = 0$, et la valeur $\frac{1}{e} - 1 < 0$ pour $x = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) - x$ en un unique point α, élément de $[0, 1]$.

Si $u_0 > \alpha$, alors, comme f décroît, $u_1 = f(u_0) < f(\alpha) = \alpha$, donc, en changeant à nouveau les indices, on peut supposer $0 < u_0 \leq \alpha$. Si $u_0 = \alpha$, alors, pour tout n, $u_n = \alpha$. Supposons donc $0 < u_0 < \alpha$. Soit $d = \alpha - u_0$. On a $0 < d < \alpha$ et pour $u_0 = \alpha - d \leq x \leq \alpha + d$, on a :

$$|f'(x)| = e^{-x} \leq \exp(d - \alpha) < 1$$

et $$|f(x) - \alpha| = |f(x) - f(\alpha)| \leq |x - \alpha|\,\exp(d - \alpha) \leq d$$

en appliquant l'inégalité des accroissements finis, de sorte que l'intervalle $\mathrm{I} = [\alpha - d, \alpha + d]$ a son image par f incluse dans lui-même. Il est donc stable par f et tous les u_n sont éléments de cet intervalle. L'inégalité $|f'(x)| \leq \exp(d - \alpha)$ montre que la fonction f est lipschitzienne de rapport

$\exp(d - \alpha)$ strictement inférieur à 1. La convergence de la suite de terme général $u_{n+1} = f(u_n)$ vers α est donc assurée.
Dans le chapitre L1/DLTAYLOR.PDF, on verra une méthode de convergence beaucoup plus rapide vers la solution de l'équation $x = e^{-x}$.

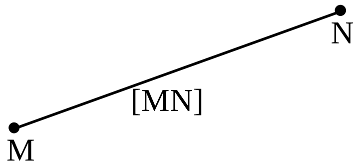
III : Fonctions convexes

1- Définition

On dit qu'une partie A du plan (ou plus généralement d'un espace affine) est **convexe** si :

$$\forall\ M \in A,\ \forall\ N \in A,\ [MN] \subset A$$

où le **segment** [MN] est l'ensemble des points de la forme $\lambda M + (1 - \lambda)Y$, $\lambda \in [0, 1]$, barycentres de x et y à coefficients positifs ou nuls (voir L1/GEOMAFF.PDF).



PROPOSITION
Soit f une fonction définie sur un intervalle I*, à valeurs réelles. Il y a équivalence entre :*

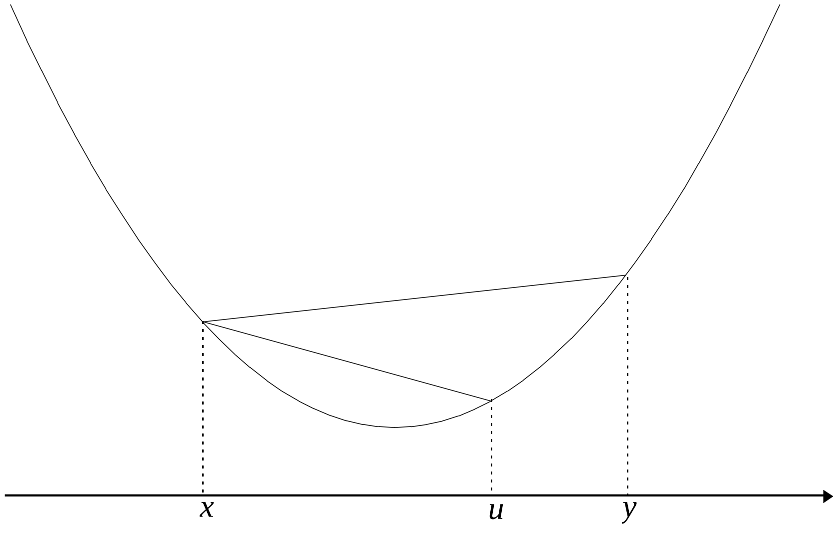
(i) $A = \{(x, y) \mid y \geq f(x)\}$ *est une partie convexe du plan.*

(ii) $\forall\ x \in I,\ \forall\ y \in I,\ \forall\ \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ (**inégalité de convexité**)

(iii) *Pour tout u de* I*, la fonction qui à x associe* $\dfrac{f(x) - f(u)}{x - u}$ *est croissante.*

Une fonction f vérifiant ces propriétés est dite **convexe***. Si – f est convexe, on dit que f est* **concave***.*

Ci-dessous, le graphe d'une fonction convexe :



Lorsque λ décrit $[0, 1]$, le point $(\lambda x + (1 - \lambda)y\ ,\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ décrit l'arc de la courbe représentative de f, entre les points d'abscisse x et y. Le point $(\lambda x + (1 - \lambda)y\ ,\ \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$, lui, est barycentre de $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ avec les coefficients λ et $1 - \lambda$. Il décrit donc le segment de droite joignant $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$. La propriété ii) s'interprète en disant que l'arc limité par les points d'abscisse x et y se trouve sous sa corde correspondante. La propriété iii) exprime que les pentes des cordes dont une extrémité est $(u, f(u))$ augmentent lorsque l'abscisse de l'autre des extrémité croît.

Pour une fonction concave, toutes les inégalités sont inversées.

Démonstration :

❑ i) $\Rightarrow$ ii) : $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ sont éléments de A. Donc le segment joignant ces deux points est une partie de A puisque A est supposé convexe. Donc, $(\lambda x + (1-\lambda)y\ ,\ \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$ qui appartient à ce segment est dans A, ce qui signifie que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

❑ ii) $\Rightarrow$ iii) : Afin de considérer toutes les positions possibles par rapport à u, nous montrerons que :

$$\text{si } x < y < u < z < t, \text{ alors } \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq \frac{f(y)-f(u)}{y-u} \leq \frac{f(z)-f(u)}{z-u} \leq \frac{f(t)-f(u)}{t-u}$$

Ces trois inégalités équivalent respectivement à :

$$\text{avec } \lambda = \frac{u-y}{u-x}, \qquad y = \lambda x + (1-\lambda)u, \qquad f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(u)$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{z-u}{z-y}, \qquad u = \lambda y + (1-\lambda)z, \qquad f(u) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(z)$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{t-z}{t-u}, \qquad z = \lambda u + (1-\lambda)t, \qquad f(z) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(t)$$

Dans les trois cas, $\lambda \in [0, 1]$ et ces trois inégalités sont bien vérifiées, d'après ii).

❑ iii) $\Rightarrow$ i) : Soient deux points (x, y) et (t, z) éléments de A, avec par exemple $x \leq t$. On a donc $y \geq f(x)$, $z \geq f(t)$. Soit λ élément de $[0, 1]$. Nous voulons montrer que $\lambda y + (1-\lambda)z \geq f(\lambda x + (1-\lambda)t)$. Il suffit pour cela de montrer :

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(t) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)t)$$

Cette inégalité est évidemment vraie pour $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Si λ appartient à $]0, 1[$, posons $u = \lambda x + (1-\lambda)t$. L'inégalité à prouver est alors équivalente à :

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq \frac{f(t)-f(u)}{t-u}$$

qui est vérifiée d'après la croissance du taux d'accroissement relatif à u.

EXEMPLE :

❑ e^x, x^2 sont des fonctions convexes.

❑ Soit $R \to I(R)$ la fonction qui, au revenu annuel R d'un contribuable, associe son impôt sur le revenu I(R). Cette fonction est affine par morceaux (elle est affine sur chaque tranche d'impôt), continue (pour éviter les effets de seuil au passage d'une tranche), croissante (bien évidemment), et convexe. Cette dernière propriété est une incitation fiscale aux couples à se marier. En effet, si les deux membres d'un couple ont des revenus R_1 et R_2, le couple paiera $I(R_1) + I(R_2)$ si ses deux membres font une déclaration séparée, mais paiera $2I(\frac{R_1 + R_2}{2})$ si le couple est marié et fait une déclaration commune. Pour une fonction convexe, $2I(\frac{R_1 + R_2}{2}) \leq I(R_1) + I(R_2)$ (propriéte (ii) avec $\lambda = \frac{1}{2}$).

2- Convexité et dérivation

PROPOSITION

Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I. Alors f est continue et admet en chaque point une dérivée à droite et à gauche.

Démonstration :

❑ Pour tout u de I, il existe x et y tel que $x < u < y$. On a alors :

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(y) - f(u)}{y - u}$$

En outre, pour $x < u$, le taux d'accroissement de gauche est une fonction croissante de x, majorée par le taux de droite, donc admet une limite, qui n'est autre que la dérivée à gauche de u. De même, le taux d'accroissement de droite admet une limite qui est la dérivée à droite de u. On a donc :

$$f_g'(u) \leq f_d'(u)$$

Etant dérivable à gauche et à droite, f est continue à gauche et à droite, donc continue.

Il est essentiel de travailler sur un intervalle ouvert, comme le montre l'exemple suivant donnant une fonction convexe non continue à l'extrémité d'un intervalle non ouvert :

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

$$x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Même sur un intervalle ouvert, on ne peut espérer prouver que f est dérivable, puisque $x \to |x|$ fournit un contre-exemple.

PROPOSITION

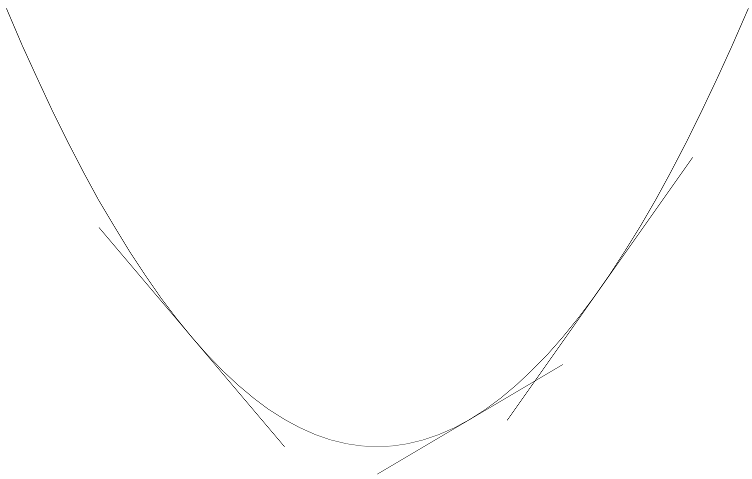
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. *Il y a équivalence entre :*

(i) *f est convexe*

(ii) *f ' est croissante*

(iii) *La courbe représentative de f est au-dessus de chaque tangente*

Si f est deux fois dérivable, la condition donnée en (ii) *est équivalente à* $f'' \geq 0$.



Démonstration :

❑ i) ⇒ ii) : Supposons f convexe. Soit $x < y$. On a, pour $x < u < t < y$:

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(t) - f(u)}{t - u} \leq \frac{f(y) - f(t)}{y - t}$$

La première inégalité provient de la croissance du taux d'accroissement relatif à u, la deuxième de la croissance du taux d'accroissement relatif à t. Si l'on fait tendre u vers x et t vers y, on obtient :

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

Donc f' est croissante.

❑ ii) ⇒ iii) : Soit f' croissante. Dire que la courbe représentative de f est au-dessus de chaque tangente, par exemple, celle qui passe par le point d'abscisse u, signifie que :

$$\forall x,\ f(x) \geq (x - u)f'(u) + f(u)$$

ou encore :

$$x < u \Rightarrow \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq f'(u)$$

et $$x > u \Rightarrow \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \geq f'(u)$$

Montrons la première inégalité, l'autre étant analogue. D'après le théorème des accroissements finis, il existe c tel que $x < c < u$ et $\frac{f(x) - f(u)}{x - u} = f'(c)$. f' étant croissante, l'inégalité est vérifiée.

❑ iii) ⇒ i) : L'inégalité de convexité de f à démontrer peut s'écrire :

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(y) - f(u)}{y - u}$$

où l'on a posé $u = \lambda x + (1 - \lambda)y$, avec $x < u < y$, $\lambda \in [0, 1]$. Or, comme ci-dessus, iii) signifie que :

$$x < u \Rightarrow \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq f'(u)$$

$$y > u \Rightarrow f'(u) \leq \frac{f(y) - f(u)}{y - u}$$

de sorte que $\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq f'(u) \leq \frac{f(y) - f(u)}{y - u}$. Donc on a bien $\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(y) - f(u)}{y - u}$.

3- Inégalité de convexité

L'inégalité de convexité se généralise à n points sous la forme suivante :

PROPOSITION

Soit f convexe sur I, *soient* $(x_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ *des points de* I, et $(\lambda_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ *des réels positifs ou nuls de somme* 1. *Alors :*

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration :

❑ Par récurrence sur n.

Cette propriété est vraie pour $n = 2$. Il s'agit en effet de l'inégalité de convexité usuelle de f. Supposons-la vraie pour $n - 1$. La propriété au rang n exprime que l'image du barycentre g des points d'abscisse x_i, affectés des coefficients λ_i est inférieure au barycentre des images $f(x_i)$, affectés des mêmes coefficients. Or, si g' est le barycentre de x_1, ..., x_{n-1}, g peut être considéré comme barycentre de g', affecté des coefficients $\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1} = s_{n-1}$ et de x_n affecté du coefficient $\lambda_n = 1 - s_{n-1}$. Ces propriétés se traduisent par :

$$g' = \frac{\lambda_1 x_1}{s_{n-1}} + ... + \frac{\lambda_{n-1} x_{n-1}}{s_{n-1}} \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{s_{n-1}} = 1$$

$$g = s_{n-1}g' + \lambda_n x_n = s_{n-1}g' + (1 - s_{n-1})x_n$$

Selon l'hypothèse de récurrence, on a :

$$f(g') \leq \frac{\lambda_1 f(x_1)}{s_{n-1}} + ... + \frac{\lambda_{n-1} f(x_{n-1})}{s_{n-1}}$$

or $\quad f(g) \leq s_{n-1}f(g') + (1 - s_{n-1})f(x_n) = s_{n-1}f(g') + \lambda_n f(x_n)$ par convexité de f

donc $\quad f(g) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

APPLICATIONS :

❑ Considérons $f(x) = e^x$ et $\lambda_i = \frac{1}{n}$. On obtient :

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp(x_i)$$

ce qui donne, en posant $y_i = \exp(x_i)$:

$$\boxed{\sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n} \leq \frac{y_1 + ... + y_n}{n}}$$

$\sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$ s'appelle **moyenne géométrique** des nombres positifs y_1, ..., y_n alors que $\frac{y_1 + ... + y_n}{n}$ en est la **moyenne arithmétique**. La moyenne géométrique est donc inférieure à la moyenne arithmétique.

Une démonstration directe de cette dernière égalité peut également se faire de la façon suivante. Notons $m = \frac{y_1 + ... + y_n}{n}$, et $z_i = y_i - m$. On veut montrer que :

$$y_1 y_2 \dots y_n \leq m^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(y_1) + ... + \ln(y_n) \leq n \ln(m)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{y_1}{m}\right) + ... + \ln\left(\frac{y_n}{m}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(1 + \frac{z_1}{m}\right) + ... + \ln\left(1 + \frac{z_n}{m}\right) \leq 0$$

inégalité qui résulte des deux relations suivantes :

$$\forall x, \ln(1 + x) \leq x$$

(qu'on peut montrer par une étude de fonction, mais qui est elle-même une inégalité de convexité appliquée sur la fonction – ln [position de la fonction ln par rapport à sa tangente])

et $\quad z_1 + ... + z_n = 0$

❑ On considère n corps numérotés de 1 à n. Le $i^{\text{ème}}$ corps est à la température T_i et possède une capacité thermique C_i. (Cela signifie que, pour faire varier sa température de ΔT, il faut lui fournir la quantité de chaleur $Q_i = C_i \times \Delta T$). On met les n corps en contact tout en les isolant globalement de l'extérieur, et ils échangent de la chaleur entre eux jusqu'à atteindre une température uniforme T_0.

On a alors $\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0$, donc $\sum_{i=1}^{n} C_i(T_0 - T_i) = 0$ donc $T_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} C_i T_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i}$. On appelle variation d'entropie S_i relative au corps i l'intégrale $\displaystyle\int_{T_i}^{T_0} \frac{C_i}{T}\, dT$ .On note S la somme des S_i. Montrons que $S \geq 0$ (**deuxième principe de la thermodynamique**). On a $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ avec $S_i = C_i \ln(\dfrac{T_0}{T_i})$, et :

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \ln(\frac{T_0}{T_i}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} C_i \ln(T_0) \geq \sum_{i=1}^{n} C_i \ln(T_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(T_0) \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i \ln(T_i)}{\sum_{i=1}^{n} C_i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} C_i T_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i}\right) \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i \ln(T_i)}{\sum_{i=1}^{n} C_i}$$

Cela résulte de la concavité du log, avec les coefficients $\lambda_i = \dfrac{C_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i}$.

De nombreuses autres inégalités, non évidentes, peuvent se montrer par inégalité de convexité appliquée sur une fonction convexe bien choisie.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Donner les dérivées des fonctions qui, à x, associent

a) $((x^x)^x)^x$

b) $(x^x)^{(x^x)}$

c) $x^{\left(x^{(x^x)}\right)}$

Exo.2) Soit f une fonction deux fois dérivable, bijective, et dont la dérivée de s'annule pas. Calculer $(f^{-1})''$ en fonction de f', f'' et f^{-1}.

Exo.3) Soit f continue et dérivable sur $]0,+\infty[$, et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = a$. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

Exo.4) a) Prouver le théorème de Rolle généralisé : soit f continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $f(a) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Alors, il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Proposer un théorème des accroissements finis généralisé, et sa démonstration.

Exo.5) Le théorème de Darboux : Soit f dérivable sur $[a, b]$. On suppose $f'(a) < f'(b)$. On définit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(a) + f'(a)(x-a) & \text{si } x < a \\ f(x) & \text{si } a \le x \le b \\ f(b) + f'(b)(x-b) & \text{si } x > b \end{cases}$$

a) Montrer que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Soit m tel que $f'(a) < m < f'(b)$. Montrer qu'il existe une droite de pente m qui coupe le graphe de Φ en deux points, l'un d'abscisse inférieure à a et l'autre d'abscisse supérieure à b.

c) Montrer qu'il existe α et β tels que $m = \dfrac{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}{\beta - \alpha}$

d) Montrer qu'il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $m = f'(c)$.

e) Bien que n'étant pas nécessairement continue, f' vérifie une propriété connue. Laquelle ?

f) Donner un exemple de fonction n'admettant pas de primitive.

Exo.6) Règle de L'Hôpital : a) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et telle que la dérivée de g ne s'annule pas. Montrer que : $\exists\, c \in\,]a, b[$, $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. On pourra considérer la fonction $\varphi : x \to f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))$.

b) Si, de plus, on a $f(a) = g(a) = 0$, montrer que : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$.

Exo.7) Chercher les fonctions f dérivables en 0 telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

Exo.8) Soit f dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Pour tout entier $n \ge 1$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$:

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n^2})\,(1 + \frac{2}{n^2}) \ldots (1 + \frac{n}{n^2})$

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n^2})$

Exo.9) Résoudre l'équation différentielle suivante $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} y^{(p)} = 0$ d'inconnue la fonction y. (On pourra considérer la fonction $x \to e^x y(x)$).

Exo.10) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ non constante, de classe C^1, et telle que $f \circ f = f$. On pose $f([0, 1]) = [a, b]$.

a) Déterminer la restriction de f à $[a, b]$.
b) Que peut-on dire de $f'(a)$?
c) On suppose $a > 0$. Etablir une contradiction.
d) En déduire que $f = \mathrm{Id}$.

Exo.11) Soit f élément de $C^4([-1,1])$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3, tel que :

$$P(-1) = f(-1) \quad P(1) = f(1) \quad P'(-1) = f'(-1) \quad P'(1) = f'(1)$$

b) Soit $Q(x) = (x-1)^2(x+1)^2$. Montrer que, pour tout a de $]-1, 1[$, il existe c élément de $]-1, 1[$ tel que :

$$f(a) = P(a) + \frac{f^{(4)}(c)}{24} Q(a)$$

(On pourra considérer la fonction $\Phi(x) = f(x) - P(x) - KQ(x)$, où K est choisi tel que $\Phi(a) = 0$. On sera amené à appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle sur Φ et ses dérivées).

Exo.12) Soit $P(x) = (1-x^2)^n$. Montrer que $P^{(n)}$ admet n racines distinctes entre -1 et 1.

Exo.13) f étant une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$, montrer que pour tout réel d n'appartenant pas à $[a, b]$, il existe un réel c de $]a, b[$ tel que la tangente au graphe de f au point d'abscisse c passe par le point $(d, 0)$.

Exo.14) a) Prouver que : $\forall \alpha \in [0, 1], \forall x > 0, \forall y > 0, x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y$

b) Plus généralement, si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des réels strictement positifs et si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont des réels positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, montrer que $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

Exo.15) a) Soit f convexe sur $\mathbb{R}$, majorée par une constante. Montrer que f est constante.

b) Soit f convexe sur $\mathbb{R}$, majorée par une fonction affine $x \to ax + b$. Montrer que f est elle-même affine, de même coefficient a.

Exo.16) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall a, \forall b, f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$. On se propose de montrer que f est convexe.

a) Montrer que $f(\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b) \leq \frac{1}{4}f(a) + \frac{3}{4}f(b)$ et que, de même, $f(\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b) \leq \frac{3}{4}f(a) + \frac{1}{4}f(b)$

b) Montrer par récurrence sur n que, pour tout k compris entre 0 et 2^n, on a :

$$f\left(\frac{k}{2^n}a + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)b\right) \leq \frac{k}{2^n}f(a) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(b)$$

c) Conclure.

Exo.17) Montrer que :

a) $\forall x > 0, \forall y > 0, \forall a > 0, \forall b > 0, x \ln(\frac{x}{a}) + y \ln(\frac{y}{b}) \geq (x + y) \ln(\frac{x + y}{a + b})$

b) $\forall x > 0, \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $\forall \alpha \geq 1, \forall x \geq 0, x^\alpha - 1 \geq \alpha(x - 1)$

d) $\forall n \in \mathbf{N}^*, (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) \geq 1$

e) $\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(\frac{1}{p_i}) \leq \ln(n)$, où les p_i sont n éléments de $[0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Exo.18) Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ n réels strictement positifs. Pour tout réel α non nul, on considère la quantité suivante, dite moyenne d'ordre α :

$$\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

Pour $\alpha = 1$, on a la moyenne arithmétique, et pour $\alpha = -1$ la **moyenne harmonique**.

a) Trouver la limite de la moyenne d'ordre α quand α tend vers 0, $+\infty$ et $-\infty$.

b) Montrer que la fonction $f : \alpha \to \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$ est croissante (pour le montrer, on peut se ramener à l'inégalité de l'exercice 16.e)).

c) On lance un objet d'une hauteur h avec une vitesse horizontale V_0 dans le champ gravitationnel vertical g. Montrer que la portée du lancer jusqu'à ce que l'objet touche le sol est la moyenne géométrique de $2h$ et $\frac{V_0^2}{g}$. Si on lance l'objet vers le haut avec la vitesse V_0, montrer que la hauteur maximale est la moyenne arithmétique de $2h$ et $\frac{V_0^2}{g}$.

d) Une voiture roule à la vitesse V km/h pendant une heure, puis à la vitesse V' km/h pendant 1 h. Montrer que sa vitesse moyenne est la moyenne arithmétique de V et V'. Si elle roule à la vitesse V km/h pendant 1 km et à la vitesse V' km/h pendant 1 km, montrer que sa vitesse moyenne est la moyenne harmonique de V et V'.

e) Montrer que les moyennes de taux d'inflation se calculent géométriquement.

f) Montrer que la résistance moyenne d'un circuit électrique est arithmétique si le circuit est monté en série et harmonique s'il est monté en parallèle.

g) Dans une ellipse (voir L2/CONIQUE.PDF), soient R_a et R_p les distances maximale et minimale d'un point de l'ellipse à son foyer. Montrer que le demi-grand axe de l'ellipse est la moyenne arithmétique de R_a et R_p et que le demi-petit axe est leur moyenne géométrique.

2- Solutions

Sol.1) On trouve respectivement :

a) $x^2 (3\ln(x) + 1) ((x^x)^x)^x$

b) $(x^x)^{(x^x)} x^x (\ln(x) + 1) (x \ln(x) + 1)$

c) $x^{\left(x^{(x^x)}\right)}\, x^{\left(x^x\right)}\, x^{x-1} \ln(x)\, (x \ln(x)^2 + x \ln(x) + 1) + x^{\left(x^{(x^x)}\right)}\, x^{\left(x^x - 1\right)}$

Sol.2) $(f^{-1})'' = -\dfrac{f'' \circ f^{-1}}{(f' \circ f^{-1})^3}$.

Sol.3) En raisonnant sur la fonction $f(x) - ax$, on se ramène au cas où $a = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et x_0 tel que, pour $x > x_0$, $|f'(x)| \leq \varepsilon$. Pour $x \geq x_0$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{x - x_0}{x} + \frac{f(x_0)}{x}$$

En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x_0, x]$, il existe $c \geq x_0$ tel que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$. Donc :

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c) \times \frac{x - x_0}{x} + \frac{f(x_0)}{x}$$

donc $\quad \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leq |f'(c)| + \left|\dfrac{f(x_0)}{x}\right| \leq \varepsilon + \left|\dfrac{f(x_0)}{x}\right|$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{f(x_0)}{x}\right| = 0$, il existe $x_1 \geq x_0$ tel que, pour $x \geq x_1$, $\left|\dfrac{f(x_0)}{x}\right| \leq \varepsilon$. On donc :

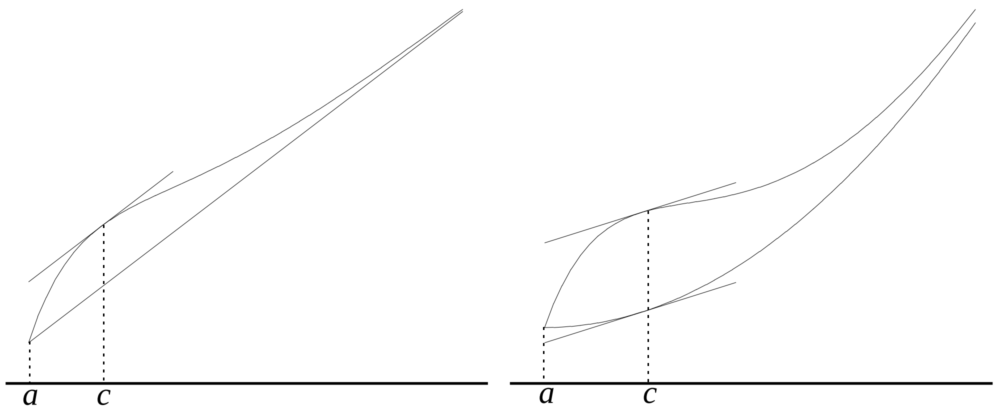
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x_1, \forall\, x \geq x_1, \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq 2\varepsilon$$

ce qui est la définition de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (en remplaçant 2ε par ε).

Sol.4) a) Si f est identiquement nulle, prendre c quelconque. Sinon, il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il existe $A > x_0$ tel que, $\forall\, x \geq A$, $|f(x)| < |f(x_0)|$ et en particulier $|f(A)| < |f(x_0)|$. Sur le segment $[a, A]$, $|f|$ admet un maximum en un point c autre que a et A puisque $|f(A)| < |f(x_0)|$ et $|f(a)| < |f(x_0)|$. En ce point c élément de $]a, A[$, f admet un extremum et on conclut comme dans la démonstration du théorème de Rolle usuel.

b) Par exemple, si f est continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$, si le graphe de f admet une asymptote d'équation $y = \alpha x + \beta$ et si $f(a) = \alpha a + \beta$, alors il existe $c > a$ tel $f'(c) = \alpha$. L'existence de l'asymptote signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \alpha x - \beta = 0$. On applique le a) sur la fonction $x \to f(x) - \alpha x - \beta$.

Ou encore, si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$, dérivables sur $]a, +\infty[$, si $f(a) = g(a)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$, alors il existe $c > a$ tel $f'(c) = g'(c)$. On applique le a) sur la fonction $x \to f(x) - g(x)$. Voici deux graphiques illustrant respectivement ces deux propriétés.



Sol.5) a) Vérifier que Φ et sa dérivée se raccordent bien à gauche et à droite de a et b.
b) Prendre $y = mx + d$ avec d suffisamment grand pour que :

$\exists\, \alpha < a,\ m\alpha + d = \Phi(\alpha) = f(a) + f\,'(a)(\alpha - a)$

et $\exists\, \beta > b,\ m\beta + d = \Phi(\beta) = f(b) + f\,'(b)(\beta - b)$

On veut donc que

$$\alpha = \frac{f(a) - af\,'(a) - d}{m - f\,'(a)} < a \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{f(b) - bf\,'(b) - d}{m - f\,'(b)} > b$$

$\Leftrightarrow \quad d > f(a) - ma \qquad$ et $\qquad d > f(b) - mb$

Il suffit donc de prendre $d > \mathrm{Max}(f(a) - ma, f(b) - mb)$

c) Avec les α et β ci-dessus, on a $m\alpha + d = \Phi(\alpha)$ et $m\beta + d = \Phi(\beta)$ donc $m = \dfrac{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

d) On applique le théorème des accroissements finis sur Φ. Il existe $c \in [\alpha, \beta]$, $m = \Phi'(c)$, mais comme $f\,'(a) < m < f\,'(b)$, on a nécessairement $c \in\ ]a, b[$.
e) On a prouvé que $f\,'$ vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Ce théorème s'applique y compris si $f\,'$ existe mais n'est pas continue. Jusqu'à la démonstration de ce théorème par Darboux en 1875, les mathématiciens pensaient que le théorème des valeurs intermédiaires étaient une caractéristique des seules fonctions continues [G. Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **4** (1875), 57-112]. En 1926, C. H. Rowe ajoutera une condition supplémentaire à la vérification du théorème des valeurs intermédiaires pour garantir la continuité de la fonction. Voir les exercices du chapitre L2/EVNORME.PDF.
f) Une fonction ne vérifiant pas le théorème des valeurs intermédiaires n'admettra donc pas de primitive. C'est le cas par exemple de la partie entière $x \to \lfloor x \rfloor$. On peut certes définir $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor\, \mathrm{d}t$, mais cette fonction n'est pas dérivable aux points x entiers.

Sol.6) a) φ est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus :

$$\varphi(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = \varphi(b)$$

On peut donc lui appliquer le théorème de Rolle :

$\exists\, c \in\ ]a, b[,\ \varphi'(c) = 0$

ce qui donne le résultat demandé.

b) Si $f(a) = g(a)$, alors, en appliquant le a) dans l'intervalle $[a, x]$, $x \in\ ]a, b[$, on a :

$$\exists\, c \in\ ]a, x[,\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f\,'(c)}{g'(c)}$$

c dépend de x, et, quand x tend vers a, c aussi, donc, par composition des limites, $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ tend vers l. Il résulte de l'égalité précédente que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ aussi.

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos(x)^2} - \cos(x)}{3x^2}$ (règle de L'Hôpital)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)^3}{3x^2 \cos(x)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)^3}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(x)^2 \sin(x)}{6x} \qquad \text{(règle de L'Hôpital)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(Et toute rigueur, le calcul se lit de bas en haut, l'existence de la limite initiale étant justifiée par l'existence de la limite finale). On verra dans le chapitre L1/DL.PDF une autre technique pour calculer ce genre de limite.

Sol.7) En appliquant la relation $f(2x) = 2f(x)$ en $x = 0$, on a $f(0) = 0$.
Par ailleurs, on a, pour tout n, x étant fixé :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2^n f(\frac{x}{2^n}) && \text{par récurrence, en utilisant } f(\frac{x}{2^n}) = 2f(\frac{x}{2^{n+1}}) \\
&= 2^n \left(f(0) + \frac{x}{2^n} f'(0) + o(\frac{1}{2^n})\right) && \text{car } f \text{ est dérivable en 0. } o(\frac{1}{2^n}) \text{ est une suite négligeable} \\
& && \text{devant } \frac{1}{2^n} \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty \\
&= x f'(0) + o(1) && \text{car } f(0) = 0\text{. } o(1) \text{ est une suite qui tend vers 0} \\
& && \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty \\
&= x f'(0) && \text{en passant à la limite } n \to +\infty
\end{aligned}$$

Donc f est nécessairement une fonction linéaire de la forme $x \to ax$. Réciproquement, une telle fonction vérifie bien la relation $f(2x) = 2f(x)$.

Sol.8) a) Comme f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$, on a, quand x tend vers 0, $f(x) = xf'(0) + x\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On a donc :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \varepsilon(\frac{k}{n^2})$$

$$= \frac{n+1}{2n} f'(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \varepsilon(\frac{k}{n^2})$$

donc $\left|u_n - \frac{f'(0)}{2}\right| \leq \left|\frac{f'(0)}{2n}\right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \text{Max}\ \{\left|\varepsilon(\frac{k}{n^2})\right|, 1 \leq k \leq n\}$

$$\leq \left|\frac{f'(0)}{2n}\right| + \frac{n+1}{2n} \text{Max}\ \{\left|\varepsilon(\frac{k}{n^2})\right|, 1 \leq k \leq n\}$$

La quantité Max $\{\left|\varepsilon(\frac{k}{n^2})\right|, 1 \leq k \leq n\}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En effet, soit $a > 0$ et $\alpha > 0$ tel que, pour $|x| \leq \alpha$, $|\varepsilon(x)| \leq a$ (définition de $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$).

Pour $n \geq \frac{1}{\alpha}$, et $1 \leq k \leq n$, on a $0 < \frac{k}{n^2} \leq \alpha$, donc $\left|\varepsilon(\frac{k}{n^2})\right| \leq a$. On a montré que :

$$\forall\ a > 0, \exists\ \mathrm{N}\ (= \frac{1}{\alpha}), \forall\ n \geq \mathrm{N}, \text{Max}\ \{\left|\varepsilon(\frac{k}{n^2})\right|, 1 \leq k \leq n\} \leq a$$

ce qu'il fallait démontrer.

En passant à la limite dans l'inégalité $\left|u_n - \frac{f'(0)}{2}\right| \leq \left|\frac{f'(0)}{2n}\right| + \frac{n+1}{2n} \text{Max}\ \{\left|\varepsilon(\frac{k}{n^2})\right|, 1 \leq k \leq n\}$, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{f'(0)}{2}$.

b) On applique le a) à la fonction $\ln(1 + x)$ de dérivée égale à 1 en 0. On obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n^2}) = \frac{1}{2}$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n^2})\ (1 + \frac{2}{n^2}) \dots (1 + \frac{n}{n^2}) = \sqrt{e}$

c) On applique le a) à la fonction sinus de dérivée 1 en 0. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n^2}) = \frac{1}{2}$$

Sol.9) $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} y^{(p)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} y^{(p)}\ e^x = 0$

$\Leftrightarrow (ye^x)^{(n)} = 0$ (appliquer la formule de Leibniz)

$\Leftrightarrow \exists\ \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}], ye^x = \mathrm{P}(x)$

$\Leftrightarrow \exists\ \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}], y = e^{-x}\ \mathrm{P}(x)$

$\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Sol.10) a) Pour tout x de $[a, b]$, il existe $t \in [0, 1]$, $x = f(t)$, donc $f(x) = (f \circ f)(t) = f(t) = x$. Donc la restriction de f à $[a, b]$ est égale à Id.

b) Comme f est non constante, $a < b$. En considérant la dérivée à droite de a, on a $f'(a) = 1$.

c) Si $a > 0$, alors, pour $h > 0$, $f(a - h) = f(a) - hf'(a) + o(h) = a - h + o(h) < a$ pour h assez petit, ce qui contredit le fait que $f([0, 1]) \subset [a, b]$.

d) Donc $a = 0$. On montre de même que $b = 1$. Ainsi, $f = \mathrm{Id}$ sur $[a, b] = [0, 1]$.

Sol.11) a) Si on cherche P sous la forme $aX^3 + bX^2 + cX + d$, on obtient le système :

$$\begin{cases} -a+b-c+d = f(-1) \\ a+b+c+d = f(1) \\ 3a-2b+c = f'(-1) \\ 3a+2b+c = f'(1) \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent les valeurs uniques de $a + c$ et $b + d$, les deux dernières de b et $3a + c$. On en déduit les valeurs uniques de a, b, c, d.

b) On a $\Phi(-1) = \Phi'(-1) = \Phi(1) = \Phi'(1) = \Phi(a) = 0$, donc, en appliquant le théorème de Rolle sur Φ entre -1 et a d'une part, et entre a et 1 d'autre part, on en déduit l'existence de b et d tels que :

$$-1 < b < a < d < 1 \qquad \Phi'(b) = \Phi'(d) = 0$$

On applique ensuite le théorème de Rolle sur Φ' entre -1 et b, entre b et d, et entre d et 1. Il existe u, v, w tels que :

$$-1 < u < b < v < d < w < 1 \qquad \Phi''(u) = \Phi''(v) = \Phi''(w) = 0$$

On applique ensuite le théorème de Rolle sur Φ'' entre u et v et entre v et w. Il existe t et z tels que :

$$u < t < v < z < w \qquad \Phi'''(t) = \Phi'''(z) = 0$$

On applique une dernière fois le théorème de Rolle sur Φ''' entre t et z. Il existe c tel que :

$$t < c < z \qquad \Phi^{(4)}(c) = 0$$

Mais $\quad \Phi^{(4)}(c) = f^{(4)}(c) - 24K$, donc $K = \dfrac{f^{(4)}(c)}{24}$.

Donc $\quad 0 = \Phi(a) = f(a) - P(a) - \dfrac{f^{(4)}(c)}{24} Q(a)$

Sol.12) Par récurrence sur k, entier variant de 0 à n, montrons que $P^{(k)}(x) = (1 - x^2)^{n-k}Q_k(x)$, où Q_k est un polynôme de degré k admettant k racines distinctes dans $]-1, 1[$. Cette propriété est vraie pour $k = 0$ avec $Q_0 = 1$. Elle est vraie pour $k = 1$, avec $P'(x) = (1 - x^2)^{n-1}(-2x)$ et $Q_1(x) = -2x$. Supposons-la vraie à un rang $k < n$. Alors :

$$\begin{aligned} P^{(k+1)}(x) &= ((1 - x^2)^{n-k}Q_k(x))' = -2x(n-k)(1 - x^2)^{n-k-1}Q_k(x) + (1 - x^2)^{n-k}Q_k'(x) \\ &= (1 - x^2)^{n-k-1}(-2x(n-k)Q_k(x) + (1 - x^2)^{n-k}Q_k'(x)) \end{aligned}$$

Prenons $Q_{k+1}(x) = -2x(n-k)Q_k(x) + (1 - x^2)^{n-k}Q_k'(x)$ dont le degré vaut :

$$\deg(Q_{k+1}(x)) = \deg(P^{(k+1)}(x)) - \deg((1 - x^2)^{n-k-1}) = 2n - k - 1 - 2(n - k - 1) = k + 1$$

Par ailleurs, Q_k est supposé avoir k racines distinctes $x_1 < x_2 < ... < x_k$ dans $]-1, 1[$. $P^{(k)}$ s'annule donc en -1, x_1, ..., x_k, 1. On lui applique le théorème de Rolle sur les intervalles $[-1, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_i, x_{i+1}]$, ..., $[x_k, 1]$, et on en déduit que $P^{(k+1)}$, et donc Q_{k+1}, s'annule en un point intérieur à chacun de ces $k + 1$ intervalles.

Pour $k = n$, on obtient Q_n, et donc $P^{(n)}$, s'annulant en n points de $]-1, 1[$.

Sol.13) Pour tout $c \in [a, b]$, l'équation de la droite joignant $(d, 0)$ à $(c, f(c))$ est :

$$y = \frac{f(c)}{c-d}(x - d)$$

Sa pente $\dfrac{f(c)}{c-d}$ est une fonction continue de c sur $[a, b]$, s'annulant en a et b, et dérivable sur $]a, b[$.

On peut donc lui appliquer le théorème de Rolle. Il existe un point c de $]a, b[$ où sa dérivée s'annule, ce qui conduit à :

$$f'(c)(c - d) - f(c) = 0$$

ou encore

$$f'(c)(d - c) + f(c) = 0$$

L'équation de la tangente au graphe de f en ce point c est :

$$y = f'(c)(x - c) + f(c)$$

La condition précédente exprime précisément le fait que cette tangente passe par $(d, 0)$.

Sol.14) le a) est un cas particulier du b) avec $n = 2$, $x = x_1$, $y = x_2$, $\alpha = \alpha_1$, $1 - \alpha = \alpha_2$. La comparaison entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique montrée dans le cours est un cas particulier du b) avec les α_i tous égaux à $\frac{1}{n}$. On peut montrer le b) en utilisant la convexité de l'exponentielle :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln(x_i)\right) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\ln(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Sol.15) a) Par l'absurde, si f est non constante, il existe $x < y$ tels que $f(x) \neq f(y)$. Supposons par exemple que $f(x) < f(y)$ (l'autre cas est comparable). Posons $a = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$. f étant convexe, la fonction $t \to \frac{f(t) - f(y)}{t - y}$ est croissante, donc, pour $t > y > x$, $\frac{f(t) - f(y)}{t - y} \ge \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a$. Donc :

$$f(t) \ge f(y) + a(t - y) \text{ qui tend vers } +\infty \text{ quand } t \text{ tend vers } +\infty$$

Donc f n'est pas bornée, contrairement à l'hypothèse.

b) Appliquer le a) sur la fonction $x \to f(x) - ax - b$, dont on vérifiera qu'elle est convexe, et majorée par la constante 0.

Sol.16) a) $f(\frac{1}{4} a + \frac{3}{4} b) = f(\frac{1}{2} \frac{a + b}{2} + \frac{1}{2} b) \le \frac{1}{2} f(\frac{a + b}{2}) + \frac{1}{2} f(b)$

$$\le \frac{1}{2} (\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)) + \frac{1}{2} f(b) = \frac{1}{4} f(a) + \frac{3}{4} f(b)$$

Procéder de même pour $f(\frac{3}{4} a + \frac{1}{4} b) \le \frac{3}{4} f(a) + \frac{1}{4} f(b)$.

b) La relation est vrai pour $n = 1$ et le a) prouve le cas $n = 2$. Supposons-la vraie pour $n - 1$, montrons-la pour n. Si k est pair, on se ramène immédiatement au cas précédent. On suppose donc $k = 2p + 1$ avec $2p + 1$ compris entre 0 et 2^n, i.e. $0 \le p < 2^{n-1}$. Alors :

$$f(\frac{k}{2^n} a + (1 - \frac{k}{2^n})b) = f(\frac{2p + 1}{2^n} a + (1 - \frac{2p + 1}{2^n}) b)$$

$$= f(\frac{1}{2} [\frac{p}{2^{n-1}} a + (1 - \frac{p}{2^{n-1}})b] + \frac{1}{2} [\frac{p + 1}{2^{n-1}} a + (1 - \frac{p + 1}{2^{n-1}})b])$$

$$\le \frac{1}{2} f(\frac{p}{2^{n-1}} a + (1 - \frac{p}{2^{n-1}})b) + \frac{1}{2} f(\frac{p + 1}{2^{n-1}} a + (1 - \frac{p + 1}{2^{n-1}})b) \text{ en appliquant la propriété de } f$$

$$\le \frac{1}{2} [\frac{p}{2^{n-1}} f(a) + (1 - \frac{p}{2^{n-1}}) f(b)] + \frac{1}{2} [\frac{p + 1}{2^{n-1}} f(a) + (1 - \frac{p + 1}{2^{n-1}}) f(b)]$$

d'après l'hypothèse de récurrence

$$\le \frac{2p + 1}{2^n} f(a) + (1 - \frac{2p + 1}{2^n}) f(b)$$

c) L'ensemble des nombres $\frac{k}{2^n}$, $0 \leq k \leq 2^n$, $n \geq 0$, est dense dans [0, 1]. Pour tout réel λ élément de [0, 1], il existe une suite de rationnels de ce type, convergeant vers λ. f étant continue, si on passe à la limite dans la relation $f(\frac{k}{2^n} a + (1 - \frac{k}{2^n})b) \leq \frac{k}{2^n} f(a) + (1 - \frac{k}{2^n}) f(b)$, on obtient :

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

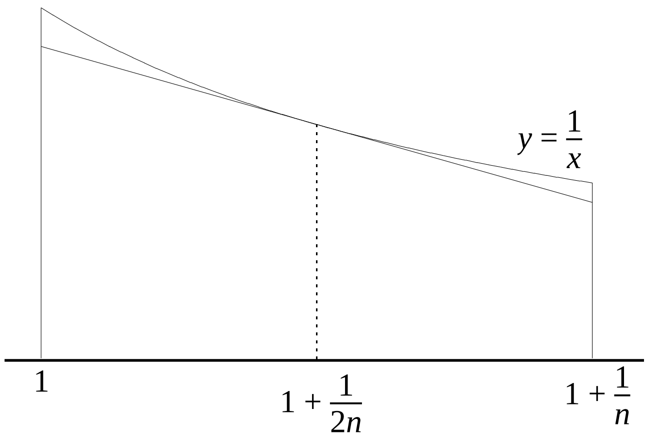
donc f est convexe.

Sol.17) a) Utiliser le fait que – ln soit convexe et une inégalité de convexité appliquée sur $\frac{a}{x}$ et $\frac{b}{y}$, avec $\lambda = \frac{x}{x+y}$ et $1 - \lambda = \frac{y}{x+y}$.

b) On a $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$. Il s'agit donc de montrer que $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} \leq \sqrt{x}$. Utiliser le fait que $x \to \sqrt{x}$ est concave et une inégalité de convexité appliquée en $x + 1$ et $x - 1$, avec $\lambda = \frac{1}{2}$.

c) Utiliser le fait que la fonction $x \to x^\alpha$ est convexe et donc que son graphe est situé au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.

d) L'inégalité est équivalente à $\ln(1 + \frac{1}{n}) \geq \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}}$. Le membre de gauche est $\int_1^{1+1/n} \frac{1}{t}\, dt$ alors que le membre de droite est l'aire du trapèze de base $[1, 1 + \frac{1}{n}]$ et tangent en $1 + \frac{1}{2n}$ à la courbe $\frac{1}{x}$. On utilise la convexité de $\frac{1}{x}$ pour dire que la tangente est sous la courbe, donc que l'intégrale est supérieure à l'aire du trapèze.



e) ln est concave, donc $\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(\frac{1}{p_i}) \leq \ln(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{p_i}) = \ln(n)$.

Sol.18) a) Supposons que x_n soit la plus grande valeur. On a :

$$\left(\frac{x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \leq \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \leq \left(\frac{n x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

donc $\dfrac{x_n}{n^{1/\alpha}} \leq \left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \leq x_n$

En faisant tendre α vers $+\infty$, on obtient $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} = x_n = \text{Max}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

On montrera de même que $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} \left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} = \text{Min}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Enfin, quand α tend vers 0, on a $\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}$ qui tend vers 1, donc :

$$\ln\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)$$

est le taux d'accroissement en $\alpha = 0$ de la fonction $\alpha \to \ln\left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)$. Donc $\lim\limits_{\alpha\to0} \dfrac{1}{\alpha}\ln\left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)$ est la dérivée en $\alpha = 0$ de $\ln\left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)$, à savoir la valeur en $\alpha = 0$ de $\dfrac{\ln(x_1)x_1^\alpha + ... + \ln(x_n)x_n^\alpha}{x_1^\alpha + ... + x_n^\alpha}$, donc :

$$\lim_{\alpha\to0} \ln\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} = \frac{\ln(x_1) + ... + \ln(x_n)}{n} = \ln \sqrt[n]{x_1...x_n}$$

donc $\lim\limits_{\alpha\to0} \left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} = \sqrt[n]{x_1...x_n}$, moyenne géométrique des x_i.

b) f est croissante si et seulement si $\ln(f)$ est croissante. On a :

$$\ln(f(\alpha)) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right)$$

dont la dérivée vaut $-\dfrac{1}{\alpha^2}\ln\left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right) + \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{x_1^\alpha\ln(x_1) + x_2^\alpha\ln(x_2) + ... + x_n^\alpha\ln(x_n)}{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}$. Il s'agit donc de montrer que :

$$\ln\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right) \leq \alpha\,\frac{x_1^\alpha\ln(x_1) + x_2^\alpha\ln(x_2) + ... + x_n^\alpha\ln(x_n)}{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}$$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\dfrac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}\right) \leq \dfrac{x_1^\alpha\ln(x_1^\alpha) + x_2^\alpha\ln(x_2^\alpha) + ... + x_n^\alpha\ln(x_n^\alpha)}{x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha}$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\dfrac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}\right) \leq \dfrac{y_1\ln(y_1) + y_2\ln(y_2) + ... + y_n\ln(y_n)}{y_1 + y_2 + ... + y_n}$ en posant $y_k = x_k^\alpha$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\dfrac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}\right) \leq p_1\ln(y_1) + ... + p_n\ln(y_n)$ en posant $p_k = \dfrac{y_k}{y_1 + ... + y_n}$

$\Leftrightarrow \quad \ln(y_1 + ... + y_n) + p_1\ln\left(\dfrac{1}{y_1}\right) + ... + p_n\ln\left(\dfrac{1}{y_n}\right) \leq \ln(n)$

$\Leftrightarrow \quad \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\dfrac{1}{p_i}\right) \leq \ln n.$

c) Si on lance un objet d'une hauteur h avec une vitesse horizontale V_0 selon Ox dans le champ gravitationnel vertical g, l'équation du mouvement est $\left[\begin{array}{l} x = V_0 t \\ z = h - \dfrac{gt^2}{2} \end{array}\right.$. La portée du lancer est la valeur

de x pour laquelle $z = 0$, ce qui donne $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ et $x = \sqrt{\dfrac{2h{V_0}^2}{g}}$, moyenne géométrique de $2h$ et $\dfrac{{V_0}^2}{g}$.
Si on lance l'objet vers le haut depuis la hauteur h, on a $z = h + V_0t - \dfrac{gt^2}{2}$, la hauteur maximale étant atteinte en la valeur de t qui annule $\dfrac{dz}{dt} = V_0 - gt$, soit $t = \dfrac{V_0}{g}$. La hauteur atteinte est $z = h + \dfrac{{V_0}^2}{2g}$, qui est la moyenne arithmétique de $2h$ et $\dfrac{{V_0}^2}{g}$.
d) Si une voiture roule à la vitesse V km/h pendant une heure, puis à la vitesse V' km/h pendant 1 h, elle a parcouru la distante V + V' en 2h, et sa vitesse moyenne est $\dfrac{V + V'}{2}$ km/h, moyenne arithmétique de V et V'. Si elle roule à la vitesse V km/h pendant 1 km et à la vitesse V' km/h pendant 1 km, le temps de parcours des 2 km est $\dfrac{1}{V} + \dfrac{1}{V'}$ h, donc sa vitesse moyenne est $\dfrac{2}{\dfrac{1}{V} + \dfrac{1}{V'}}$. km/h, moyenne harmonique de V et V'.
e) Si les prix sont multipliés par t la première année, puis par u la deuxième, alors ils sont multipliés par $t \times u$ au cours des deux ans. Le taux moyen est v tel que $v \times v = y \times u$, soit $v = \sqrt{tu}$, moyenne géométrique de t et u.
f) Si deux résistances R et R' sont montées en série et sont parcourues par un courant I, la tension U et U' aux bornes des deux résistances vérifient respectivement U = RI et U' = R'I, donc la tension aux bornes de l'ensemble des deux résistances et U + U' = (R + R')I. Si on remplace chaque résistance par une résistance ρ de façon à obtenir la même tension, on aura U + U' = 2ρI, donc $\rho = \dfrac{R + R'}{2}$, moyenne arithmétique des deux résistances.
Si les deux résistances sont montées en parallèle et soumises à une tension U, elles sont parcourues par les courants respectifs $I = \dfrac{U}{R}$ et $I' = \dfrac{U}{R'}$. Le courant total traversant l'ensemble des deux résistances est $I + I' = \dfrac{U}{R} + \dfrac{U}{R'}$. Si on remplace chaque résistance par une résistance ρ de façon à obtenir le même courant total, on aura $\dfrac{U}{R} + \dfrac{U}{R'} = \dfrac{U}{\rho} + \dfrac{U}{\rho}$, soit $\rho = \dfrac{2}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R'}}$, moyenne harmonique des deux résistances.
g) Si $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est l'équation de la conique, avec $b \leq a$, les foyers ont pour abscisse $\pm\, c$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Prenons le foyer d'abscisse positive. On a $R_a = a + c$ et $R_p = a - c$, dont la moyenne arithmétique vaut $\dfrac{R_a + R_p}{2} = a$ et la moyenne géométrique vaut $\sqrt{R_aR_p} = \sqrt{a^2 - c^2} = b$.

◆