EQUATIONS DIFFERENTIELLES

PLAN

I : Equations différentielles linéaires du premier ordre
1) Définition
2) Equations à coefficients constants
3) Equations à coefficients non constants
4) Exemple d'équation non linéaire
II : Equations différentielles linéaires du second ordre
1) Définition
2) Equations à coefficients constants
Annexe : Résolution d'une équation particulière

Résoudre une **équation différentielle** $y' = f(x,y)$ sur un intervalle (généralement ouvert) I, c'est trouver une fonction $y(x)$ dérivable sur I vérifiant :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ y'(x) = f(x,y(x))$$

Les courbes représentatives des fonctions solutions s'appellent **courbes intégrales**.

I : Equations différentielles linéaires du premier ordre

1- Définition

DEFINITION :
Soient a, b, c des fonctions continues sur un intervalle I. *On appelle* **équation différentielle linéaire du premier ordre** *une équation du type :*

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

Une fonction f est solution de cette équation sur I *si* :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$$

Par exemple, la fonction $\exp(-\dfrac{x^2}{2})$ est solution de l'équation $y' + xy = 0$. Les fonctions considérées peuvent éventuellement être à valeurs complexes. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f = g + ih$ avec g et h fonctions à valeurs réelles dérivables, on pose $f' = g' + ih'$. Ainsi, pour a complexe, la dérivée de e^{ax} est ae^{ax} (voir L1/COMPLEXE.PDF).

2- Equations à coefficients constants

Il s'agit d'équations pour lesquelles les fonctions a et b sont constantes. On suppose a non nul. Quitte à diviser par a et à renommer les coefficients, on peut se ramener à une équation du type :

$$y' + ay = c(x)$$

<u>a) Equation homogène (ou équation sans second membre)</u> :

On appelle ainsi l'équation $y' + ay = 0$. Quelles sont ses solutions sur $\mathbf{R}$, avec a réel ?

❑ Il y a la solution $y = 0$.

❑ Cherchons les solutions ne s'annulant en aucun point. On peut alors écrire : $\dfrac{y'}{y} = -a$

$\Rightarrow \quad \ln|y| = -ax + \text{Cte}$, en prenant une primitive de chaque membre

$\Rightarrow \quad |y| = e^{\text{Cte}} \times e^{-ax}$

La fonction y ne s'annulant pas et étant continue, elle garde un signe constant. En posant $\lambda = e^{\text{Cte}}$ ou $-e^{\text{Cte}}$ suivant le signe de y, on obtient :

$$y = \lambda e^{-ax}$$

❑ Existe-t-il d'autres solutions, par exemple des solutions s'annulant en certains points ? Qu'en est-il si a (et donc y) sont complexes ? Montrons que les solutions sont de la même forme (mais avec λ complexe si a est complexe). Il suffit de montrer que, si y est une solution, alors ye^{ax} est constant. Posons donc z la fonction égale à ye^{ax}. Pour montrer que z est constant, il suffit de calculer sa dérivée :

$$z' = y'e^{ax} + aye^{ax} = 0$$

$z' = 0$ donc z est constante (complexe si les fonctions sont à valeurs complexes).

Ces résultats permettent d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION :
Soit a réel ou complexe. Alors :

i) *Les solutions de l'équation différentielle* $y' + ay = 0$ *sont de la forme* $y = \lambda e^{-ax}$*, où* λ *est un scalaire quelconque. Elles forment un espace vectoriel de dimension* 1 *dont une base est la fonction* e^{-ax}.

ii) *Si l'on fixe une condition* $y(x_0) = y_0$*, alors cette solution est unique.*

iii) *En particulier, si y s'annule en un point, y est identiquement nulle.*

<u>b) Equation avec second membre</u> :
Considérons l'équation $y' + ay = c(x)$.
Soit y_0 une solution particulière de cette équation. On remarque alors que :

i) si z est solution de l'équation homogène associée, alors $y_0 + z$ est solution de l'équation complète. En effet :

$y_0' + ay_0 = c(x)$
$z' + az = 0$
$\Rightarrow \quad (y_0 + z)' + a(y_0 + z) = c(x)$

ii) Inversement, si y est solution de l'équation complète, alors $y - y_0$ est solution de l'équation homogène. En effet :

$y' + ay = c(x)$
$y_0' + ay_0 = c(x)$
$\Rightarrow \quad (y - y_0)' + a(y - y_0) = 0$

La conséquence de cette remarque est la suivante. Pour trouver TOUTES les solutions y de l'équation complète, il suffit de trouver les solutions z de l'équation homogène associée (ce qu'on sait faire), et de leur ajouter UNE solution particulière de l'équation complète. Pour trouver cette solution particulière, on distingue généralement les deux cas suivant :

❑ Si $c(x) = P(x)e^{kx}$ où P est un polynôme de degré n et k une constante réelle ou complexe (ce dernier cas permet de traiter les fonctions trigonométriques), on cherche y sous la forme $Q(x)e^{kx}$, où Q est un polynôme. On obtient l'équation suivante, après simplification :

$$Q'(x) + (k + a)Q(x) = P(x)$$

Si l'on cherche les coefficients de Q, de degré n, cela revient à résoudre un système triangulaire de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues. Les coefficients de la diagonale valent $k + a$. Il y a donc une solution si $k \neq -a$. Par contre, si $k = -a$, on obtient $Q'(x) = P(x)$ et il faut choisir Q de degré $n + 1$.

❑ Si $c(x)$ est une fonction quelconque, on cherche y sous la forme :

$$y = \lambda(x)e^{-ax}.$$

Cette méthode est connue sous le nom de **méthode de variation de la constante**. On prend la solution de l'équation homogène, mais au lieu de prendre λ constant, on prend λ fonction de x. En reportant dans l'équation différentielle, on obtient l'équation suivante, après simplification :

$\lambda'(x)e^{-ax} = c(x)$, d'où $\lambda'(x) = c(x)e^{ax}$ et il suffit de trouver une primitive de $c(x)e^{ax}$

On remarque également que, si y_1 est solution particulière avec second membre b_1 et si y_2 est solution particulière avec second membre b_2, alors $y_1 + y_2$ est solution particulière avec second membre $b_1 + b_2$:

$$\left| \begin{array}{l} y_1' + ay_1 = b_1 \\ y_2' + ay_2 = b_2 \end{array} \right. \Rightarrow (y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = b_1 + b_2$$

C'est ce qu'on appelle le **principe de superposition**.

EXEMPLES :

❑ Résoudre $y' + y = e^{2x}$

La solution de l'équation homogène est $y = \lambda e^{-x}$

Une solution particulière cherchée sous la forme ae^{2x} est $\frac{1}{3}e^{2x}$

La solution générale est donc $\frac{1}{3}e^{2x} + \lambda e^{-x}$

❑ Résoudre $y' + y = e^{-x}$

La solution de l'équation homogène est $y = \lambda e^{-x}$

Une solution particulière cherchée sous la forme $(ax + b)e^{-x}$ est xe^{-x}, et b ne joue aucun rôle puisque be^{-x} est solution de l'équation homogène. Ici, on a $P = \lambda$ polynôme de degré $n = 0$. On cherche une solution particulière sous la forme $Q(x)e^{-x}$ car l'exponentielle intervenant dans le second membre est la même que celle qui intervient dans la solution de l'équation homogène ($k = -1$).

La solution générale est donc $xe^{-x} + \lambda e^{-x}$

❑ Résoudre $y' + 2y = x^2e^{-2x} + 2e^{3x} + 1 + x$

La solution de l'équation homogène est $y = \lambda e^{-2x}$

Par le principe de superposition, il suffit de chercher des solutions particulières pour chaque terme du second membre, et de les ajouter.

Solution avec second membre x^2e^{-2x}. Comme e^{-2x} est l'exponentielle intervenant dans la solution de l'équation homogène, on cherche une solution sous la forme $y = (ax^3 + bx^2 + cx)e^{-2x}$. , avec un polynôme de degré 3. Il est inutile de prendre un terme constant, car on obtient alors une solution de l'équation homogène, qui n'a aucune contribution au terme du second membre. En reportant dans l'équation différentielle, on obtient l'équation :

$3ax^2 + 2bx + c = x^2$. D'où $a = \frac{1}{3}$, $b = c = 0$, et la solution particulière $y = \frac{x^3}{3} e^{-2x}$

Solution avec second membre $2e^{3x}$. Une solution cherchée sou la forme ae^{3x} est $\frac{2}{5} e^{3x}$.

Solution avec second membre $1 + x$. Une solution cherchée sous la forme $ax + b$ est $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

La solution générale est donc :

$$y = \lambda e^{-2x} + \frac{x^3}{3} e^{-2x} + \frac{2}{5} e^{3x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

❑ Résoudre $y' - y = \cos(x)$

Il suffit de résoudre avec comme second membre e^{ix}. Soit y la solution. Il n'est pas difficile de voir que le conjugué de y sera solution de l'équation avec second membre e^{-ix}, et donc par superposition, que sa partie réelle (demi-somme des solutions trouvées) est solution avec second membre égal à $\cos(x)$.

La solution de l'équation homogène est $y = \lambda e^x$

Une solution particulière de la forme ae^{ix} est $\frac{1}{i-1} e^{ix} = -\frac{1+i}{2} e^{ix}$

Sa partie réelle est $-\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$

La solution générale de l'équation initiale est donc $\frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} + \lambda e^x$

3- Equations à coefficients non constants

Soit une telle équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Nous la résoudrons sur un intervalle I sur lequel a ne s'annule pas.

Equation homogène ou équation sans second membre

On appelle ainsi l'équation $a(x)y' + b(x)y = 0$. Quelles sont ses solutions sur I dans le cas réel ?

❑ Il y a la solution $y = 0$.

❑ Cherchons les solutions ne s'annulant en aucun point. On peut alors écrire :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

$\Rightarrow$ $\ln|y| = G(x) + \text{Cte}$ où G est une primitive de $-\frac{b(x)}{a(x)}$

$\Rightarrow$ $|y| = e^{\text{Cte}} \times e^{G(x)}$

La fonction y ne s'annulant pas, elle garde un signe constant. En posant $\lambda = e^{\text{Cte}}$ ou $-e^{\text{Cte}}$ suivant le signe de y, on obtient :

$$y = \lambda e^{G(x)}$$

❑ Montrons qu'il n'y a pas d'autres solutions. Si y est une telle solution, montrons que $ye^{-G(x)}$ est constante. Posons $z = ye^{-G(x)}$. On a alors :

$$z' = y'e^{-G(x)} - G'(x)ye^{-G(x)} = e^{-G(x)}\left(y' + \frac{b(x)}{a(x)}y\right) = 0$$

Ainsi, $z' = 0$ donc z est constante.

Ces résultats permettent d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION :

Soit $a(x)y' + b(x)y = 0$ *une équation différentielle linéaire du premier ordre. Alors :*

i) *Les solutions de cette équation sur un intervalle* I *où la fonction a ne s'annule pas forment un espace vectoriel de dimension* 1 *dont une base est la fonction* $e^{G(x)}$ *où* G *est une primitive de* $-\dfrac{b(x)}{a(x)}$.

ii) *Si l'on fixe une condition* $y(x_0) = y_0$*, alors cette solution est unique.*

iii) *En particulier, si y s'annule en un point, y est identiquement nulle.*

<u>Equation avec second membre</u>

Considérons l'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Soit y_0 solution de cette équation. On remarque, comme dans le cas des équations à coefficients constants, que :

i) si z est solution de l'équation homogène associée, alors $y_0 + z$ est solution de l'équation complète.

ii) Inversement, si y est solution de l'équation complète, alors $y - y_0$ est solution de l'équation homogène.

La conséquence de cette remarque est la même que pour les équations différentielles à coefficients constants. Pour trouver TOUTES les solutions y de l'équation complète, il suffit de trouver les solutions z de l'équation homogène associée (ce qu'on sait faire), et de leur ajouter UNE solution particulière de l'équation complète. On peut appliquer la méthode de variation de la constante . On cherche une solution y sous la forme :

$$y = \lambda(x)e^{G(x)} \text{ (où } e^{G(x)} \text{ est solution de l'équation homogène)}$$

Après report dans l'équation différentielle et simplification, cela conduit à l'équation :

$$a(x)\lambda'(x)e^{G(x)} = c(x)$$

$\Rightarrow \quad \lambda'(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)} e^{-G(x)}$. Il suffit alors de chercher une primitive de λ'.

EXEMPLES

❑ $xy' + y = 3x^2$

Résolution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$: une primitive de $-\dfrac{1}{x}$ étant $G(x) = -\ln(|x|)$, les solution sont $\lambda\exp(-\ln(|x|) = \dfrac{\lambda}{|x|}$, λ réel, ou encore $y = \dfrac{\lambda}{x}$ en rebaptisant $-\lambda$ en λ dans le cas où

$x < 0$. Il est important de noter que λ est une constante par intervalle. Par exemple, sur $\mathbb{R}^*$, on a la solution $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 0 \\ -\dfrac{2}{x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$. Cela résulte du fait qu'une fonction z de dérivée nulle est constante sur un intervalle, mais si elle est définie sur une réunion d'intervalles disjoints, il peut y avoir une constante différente pour chaque intervalle.

Résolution de l'équation avec second membre. On applique la méthode de variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $y = \dfrac{\lambda(x)}{x}$, ce qui conduit à $\lambda'(x) = 3x^2$ d'où $\lambda(x) = x^3$ par exemple.
La solution générale est donc :

$$y = x^2 + \frac{\lambda}{x},\ \lambda \text{ réel}$$

Il existe une solution sur $\mathbb{R}$: $y = x^2$ et c'est la seule.

❑ $xy' - 2y = 0$

Résolution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$:
Une primite de $\dfrac{2}{x}$ est $G(x) = 2\ln(|x|) = \ln(x^2)$ donc la solution générale de l'équation homogène est $y = \lambda x^2$.
Mais quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$? Il faut prendre conscience que la constante λ est une constante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est une constante sur $\mathbb{R}^{-*}$, mais que ce n'est peut-être pas la même dans les deux cas. Les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont donc :

$$\begin{cases} \exists\, \lambda,\ \forall\, x > 0\ y = \lambda x^2 \\ \exists\, \mu,\ \forall\, x < 0,\ y = \mu x^2 \end{cases}$$

Or la fonction ainsi définie se prolonge par continuité en 0 ainsi que sa dérivée en posant $y(0) = y'(0) = 0$ et l'équation différentielle est encore vérifiée en $x = 0$. Ainsi, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\begin{cases} \exists\, \lambda,\ \forall\, x > 0\ y = \lambda x^2 \\ \exists\, \mu,\ \forall\, x < 0,\ y = \mu x^2 \end{cases}$$

❑ $xy' = ay$ et $y(1) = 1$, pour $x > 0$

Une primitive de $\dfrac{a}{x}$ est $G(x) = a\ln(x)$, donc la solution générale est $\lambda \exp(a \ln(x)) = \lambda x^a$.

La condition $y(1) = 1$ impose $\lambda = 1$, d'où $y = x^a$.

4- Exemple d'équation non linéaire

On sait résoudre quelques types d'équation non linéaire. Considérons par exemple $y' = e^{x+y}$. Cette équation est dite **à variables séparables** car on peut séparer les termes en y des termes en x.

$y'e^{-y} = e^x$

$\Leftrightarrow$ $-e^{-y} = e^x - \text{Cte}$ en prenant une primitive de chaque membre

$\Leftrightarrow$ $y = -\ln(\text{Cte} - e^x)$

La constante doit nécessairement être positive pour avoir un domaine de définition non vide, égal à $]-\infty, \ln(\text{Cte})[$. Les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par une translation. En effet, soit les fonctions :

$$f_1(x) = -\ln(1 - e^x)$$

et $$f_a(x) = -\ln(a - e^x)$$

On a :

$$f_a(x) = -\ln(a(1 - \exp(x - \ln(a))) = -\ln(a) - \ln(1 - \exp(x - \ln(a)))$$
$$= -\ln(a) + f_1(x - \ln(a))$$

Un point (x, y) appartient au graphe de f_a si et seulement si $y = f_a(x)$, si et seulement si $y + \ln(a) = f_1(x - \ln(a))$, si et seulement si le point $(x - \ln(a), y + \ln(a))$ appartient au graphe de f_1. Le graphe de f_a se déduit du graphe de f_1 par une translation de vecteur $(\ln(a), -\ln(a))$.

II : Equations différentielles linéaires du second ordre

1- Définition

DEFINITION :
Soit a, b, c, d des fonctions continues sur un intervalle I. *On appelle* **équation différentielle linéaire du second ordre** *une équation du type :*

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

Une fonction f est solution de cette équation sur I *si*

$$\forall\, x \in \text{I},\ a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x) = d(x)$$

2- Equations à coefficients constants

Il s'agit d'équations pour lesquelles les fonctions a, b et c sont constantes. On a donc une équation du type :

$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

Nous supposerons $a \neq 0$, sinon, on a en fait une équation du premier ordre. a, b, c peuvent être éventuellement des nombres complexes. Dans ce cas, on cherche y à valeurs complexes.

<u>a) Equation homogène ou équation sans second membre</u> :
On appelle ainsi l'équation $ay'' + by' + cy = 0$. Quelles sont ses solutions ? Par analogie avec les équations du premier ordre à coefficients constants pour lesquelles les solutions sont des exponentielles, cherchons les solutions sous la forme : $y = e^{rx}$. Lorsque l'on remplace dans l'équation, on obtient, après simplification :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Cette équation s'appelle **équation caractéristique** associée à l'équation différentielle. Elle admet toujours des solutions, éventuellement complexes si le discriminant est négatif ou si a, b et c sont des complexes.

Cherchons d'autres solutions sous la forme $y = f(x)e^{rx}$. On obtient :

$$y' = (f'(x) + rf(x))\, e^{rx}$$
$$y'' = (f''(x) + 2rf'(x) + r^2f(x))\, e^{rx}$$

En reportant dans l'équation, on obtient, après simplification de l'exponentielle :

$$af'' + (2ar + b)\, f' + (ar^2 + br + c)f = 0$$

Or r est solution de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. D'où :

$af'' + (2ar + b)f' = 0.$

Cette équation est une équation du premier ordre en f'. Sa solution est :

$$f'(x) = \text{Cte} \times \exp\left(-\frac{(2ar+b)x}{a}\right)$$

On distingue alors deux cas :

i) si $2ar + b \neq 0$, alors, en intégrant à nouveau,on a, pour certaines constantes A et B :

$$f(x) = \text{A} \times \exp\left(-\frac{(2ar+b)x}{a}\right) + \text{B}$$

donc $\quad y = \text{A} \times \exp\left(-\frac{(ar+b)x}{a}\right) + \text{B} \times e^{rx}$

Or $-\frac{ar+b}{a}$ n'est autre que l'autre racine de l'équation caractéristique. Ainsi y est combinaison linéaire des deux solutions exponentielles trouvées. La condition $2ar + b \neq 0$ est équivalente à :

$r \neq -\frac{b}{2a}$ ou encore

$\Delta \neq 0$ où Δ est le discriminant de l'équation caractéristique.

Dans le cas où a, b et c sont réels et où les racines r et r' sont complexes, alors r et r' sont conjuguées. Les solutions y à valeurs complexes sont combinaisons linéaires à coefficients complexes de e^{rx} et $e^{r'x}$ mais on peut aussi la prendre comme combinaisons linéaires à coefficients complexes de $\frac{e^{rx}+e^{r'x}}{2} = \text{Re}(e^{rx})$ et de $\frac{e^{rx}-e^{r'x}}{2i} = \text{Im}(e^{rx})$. Si $r = \alpha + i\beta$, alors $r' = \alpha - i\beta$, et la solution générale y à valeurs complexes est combinaison linéaire à coefficients complexes de $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$. On obtient la solution générale à valeurs réelles en prenant les combinaisons linéaires à coefficients réels de $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

ii) Si $2ar + b = 0$, on remarque d'abord que cette condition équivaut à $r = -\frac{b}{2a}$ ou encore à $\Delta = 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique admet une racine double, et il n'y a qu'une solution exponentielle. On a alors :

$f' = \text{Cte}$ d'où, en intégrant à nouveau :

$f = \text{A}x + \text{B}$ et

$y = \text{A}xe^{rx} + \text{B}e^{rx}$

y est combinaison linéaire de deux fonctions, dont l'une est l'exponentielle déjà trouvée.

Ces résultats permettent d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION :

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ *une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Alors les solutions de cette équation sont de la forme suivante :*

i) *Soit* (*) $ar^2 + br + c = 0$ *l'équation caractéristique associée et* Δ *son discriminant.*

si Δ *est non nul, alors* y *est combinaison linéaire des deux fonctions* e^{rx} *et* $e^{r'x}$ *où* r *et* r' *sont solutions de* (*).

si Δ est nul, alors y est combinaison linéaire des deux fonctions e^{rx} et xe^{rx} où r est racine double de (*).

ii) *Ces solutions forment un espace vectoriel de dimension 2*

iii) *Dans le cas réel, si Δ est négatif, alors y est combinaison linéaire des deux fonctions* $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ *et* $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ *où* $r = \alpha + i\beta$ *et* $r' = \alpha - i\beta$ *sont solutions conjuguées de* (*).

EXEMPLES :

❑ Résoudre $y'' - 2y' + y = 0$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

dont les solutions sont 1, racine double. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$y = \mathrm{A}xe^x + \mathrm{B}e^x$$

❑ Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

dont les solutions sont 1 et 2. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$y = \mathrm{A}e^{2x} + \mathrm{B}e^x$$

❑ Résoudre $y'' + y' + y = 0$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + r + 1 = 0$$

dont les solutions sont $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ et j^2, racines complexes. Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

sur $\mathbb{C}$: $y = \mathrm{A}e^{jx} + \mathrm{B}e^{j^2x}$ avec A et B complexes

ou $y = e^{-1/2x}\,(\mathrm{A}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mathrm{B}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}))$ avec (d'autres) A et B complexes

sur $\mathbb{R}$: $y = e^{-1/2x}\,(\mathrm{A}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mathrm{B}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}))$ avec A et B réels

$e^{-x/2}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})$ et $e^{-x/2}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de e^{jx}.

<u>b) Equation avec second membre</u> :

Considérons l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$. Soit y_0 solution de cette équation. On remarque alors que, comme dans le cas des équations du premier ordre :

i) si z est solution de l'équation homogène associée, alors $y_0 + z$ est solution de l'équation complète.

ii) Inversement, si y est solution de l'équation complète, alors $y - y_0$ est solution de l'équation homogène.

Comme dans le cas des équations du premier ordre, la conséquence de cette remarque est la suivante. Pour trouver TOUTES les solutions y de l'équation complète, il suffit de trouver les solutions z de l'équation homogène associée (ce qu'on sait faire), et de leur ajouter UNE solution particulière de l'équation complète. Il est facile de vérifier que le principe de superposition s'applique également dans le cas présent : si y_1 est solution particulière avec second membre d_1 et si y_2 est solution particulière avec second membre d_2, alors $y_1 + y_2$ est solution particulière avec second membre $d_1 + d_2$.

Voici un cas important : $d(x) = \mathrm{P}(x)e^{kx}$ où P est un polynôme de degré n et k une constante réelle ou complexe (ce dernier cas permet de traiter les fonctions trigonométriques). Cherchons y sous la forme $\mathrm{Q}(x)e^{kx}$, avec Q un polynôme. On a :

$y = \mathrm{Q}(x)e^{kx}$

$y' = (\mathrm{Q}'(x) + k\mathrm{Q}(x))\, e^{kx}$

$y'' = (\mathrm{Q}''(x) + 2k\mathrm{Q}'(x) + k^2\mathrm{Q}(x))\, e^{kx}$

On obtient l'équation suivante, après simplification :

$$a\mathrm{Q}''(x) + (2ka + b)\mathrm{Q}'(x) + (ak^2 + bk + c)\mathrm{Q}(x) = \mathrm{P}(x)$$

Si l'on cherche les coefficients de Q, de degré n, cela revient à résoudre un système triangulaire de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues. Les coefficients de la diagonale valent $ak^2 + bk + c$. On reconnaît là le premier membre de l'équation caractéristique. Il y a donc une solution si k n'est pas racine de cette équation.

Si $ak^2 + bk + c = 0$ (autrement dit k est racine de l'équation caractéristique), la démarche précédente conduit à rechercher un polynôme Q, tel que $a\mathrm{Q}''(x) + (2ka + b)\mathrm{Q}'(x) = \mathrm{P}(x)$, avec Q de degré $n + 1$. On obtient un système triangulaire dont les termes de la diagonale valent $2ak + b$. Si ce terme est non nul, alors il est possible de trouver Q. Or $2ak + b$ non nul signifie k différent de $-\dfrac{b}{2a}$, et k étant racine de l'équation caractéristique, cela signifie que le discriminant est non nul, et donc que k est racine simple de l'équation.

Si $ak^2 + bk + c = 0$ et $2ak + b = 0$, alors k est racine de l'équation caractéristique et vaut $-\dfrac{b}{2a}$. cela signifie donc que le discriminant est nul, et donc que k est racine double de l'équation. On obtient alors l'équation $a\mathrm{Q}''(x) = \mathrm{P}(x)$, avec Q de degré $n + 2$. a étant non nul, il est alors possible de trouver Q.

Nous ne nous intéresserons pas à d'autres expressions de d. Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION :

Soit $ay'' + by' + cy = \mathrm{P}(x)e^{kx}$ *une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants,* P *étant un polynôme.*

i) *Si k n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme* $\mathrm{Q}(x)e^{kx}$, *avec* $\deg(\mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P})$.

ii) *Si k est racine simple de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme* $\mathrm{Q}(x)e^{kx}$, *avec* $\deg(\mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P}) + 1$.

iii) *Si k est racine double de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme* $\mathrm{Q}(x)e^{kx}$, *avec* $\deg(\mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P}) + 2$.

EXEMPLES :

❑ Résoudre $y'' + y = \cos(x)$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$

La solution de l'équation homogène est $y = \mathrm{A}\cos(x) + \mathrm{B}\sin(x)$

Une solution particulière avec second membre e^{ix} se cherche sous la forme axe^{ix} car i est racine simple de l'équation caractéristique. On trouve $-\frac{1}{2}\, i\, xe^{ix}$. De même, $\frac{1}{2}\, i\, xe^{-ix}$ sera solution particulière avec second membre e^{-ix} et, par le principe de superposition, la solution particulière de $\cos(x)$, demi-somme de e^{ix} et de e^{-ix}, ou partie réelle de e^{ix}, s'obtiendra en prenant la demi-somme de $-\frac{1}{2}\, i\, xe^{ix}$ et de $\frac{1}{2}\, i\, xe^{-ix}$, autrement dit la partie réelle de $-\frac{1}{2}\, i\, xe^{ix}$. D'où $y = \frac{1}{2}\, x\sin(x)$.

La solution générale est donc $\mathrm{A}\cos(x) + \mathrm{B}\sin(x) + \frac{1}{2}\, x\sin(x)$.

❑ Résoudre $y'' - 2y' + y = e^x$

L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 1 = 0$. 1 est racine double.

La solution de l'équation homogène est $y = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}xe^x$

Une solution particulière avec second membre e^x se cherche sous la forme ax^2e^x. On trouve $\frac{1}{2}\, x^2e^x$.

La solution générale est donc $\mathrm{A}e^x + \mathrm{B}xe^x + \frac{1}{2}\, x^2e^x$.

Annexe : Résolution d'une équation particulière

Nous allons nous arrêter plus longuement sur l'équation différentielle à coefficients constants :

$$ay'' + by' + cy = d\cos(\omega t)$$

où $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$, $d \geq 0$, et y une fonction de t. Ce type d'équation intervient dans un grand nombre de phénomènes physiques, où t représente le temps, en particulier en mécanique et en électrodynamique. En voici quelques exemples :

En mécanique :

Un objet est soumis à une force de frottement opposée à sa vitesse et proportionnelle à celle–ci, à une force de rappel proportionnelle à son déplacement et enfin, à un régime forcé de pulsation ω. C'est le cas par exemple pour :

❑ le pendule élastique (masse-ressort) :

masse m
coefficient de frottement f
raideur du ressort k
force imposée de module F

L'équation du mouvement est donnée par :

$$mx'' + fx' + kx = \mathrm{F}\cos(\omega t)$$

❑ le pendule de torsion :

moment d'inertie J
coefficient de frottement f
couple de rappel C
couple forcé de module G

L'équation du mouvement est donné par :

$$J\theta'' + f\theta' + C\theta = G\cos(\omega t)$$

❑ le pendule simple (masse au bout d'un fil de longueur l, dans un champ de gravitation g), sans frottement, pour des petites oscillations :

L'équation du mouvement est donnée par :

$$l\theta'' + g\theta = 0$$

En électrodynamique :
Un circuit électrique comprend en série, une résistance R, une inductance L, et une capacité C. Il est soumis à une tension périodique U de pulsation ω. La quantité d'électricité Q traversant un point du circuit vérifie :

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = U\cos(\omega t)$$

Le cas étudié s'applique dans ces situations, ce qui signifie également que tout phénomène mécanique a un équivalent électrique, et inversement.

1- Equation homogène $ay'' + by' + cy = 0$

Cette équation correspond à un système qui n'est soumis à aucune oscillation forcée. L'équation caractéristique est :

$$ar^2 + br + c = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$ avec δ éventuellement imaginaire pur ou nul.

Les racines sont donc :

$$r' = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } r'' = \frac{-b+\delta}{2a}$$

Si $b = 0$ (absence de frottement, absence de résistance), alors δ est imaginaire pur et non nul, et les solutions sont des fonctions trigonométriques, sans atténuation de l'amplitude. Nous noterons $\frac{\delta}{2a} = i\omega_0$. ω_0 est appelé **pulsation propre** d'oscillation du système étudié, avec $\omega_0^2 = \frac{c}{a}$.

Si $b > 0$, r et r' sont des réels strictement négatifs, car $b^2 > \delta^2$, ou des complexes à partie réelle strictement négative. Les solutions sont des combinaisons linéaires d'exponentielles qui tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Si δ est imaginaire pur, ce qui se produit lorsque $b^2 < 4ac$ (faible frottement ou faible résistance), les solutions oscillent autour de 0, avec atténuation de l'amplitude.

Dans tous les exemples physiques proposés, $\frac{b}{a}$ est homogène à l'inverse d'un temps et peut donc être noté $\frac{1}{\tau_e}$. L'équation différentielle sans second membre prend alors la forme :

$$y'' + \frac{y'}{\tau_e} + \omega_0^2 y = 0.$$

- Si $\boxed{\tau_e > \dfrac{1}{2\omega_0}}$ le système est faiblement amorti, Δ est strictement négatif, δ est imaginaire pur. $r = -\dfrac{1}{2\tau_e} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{1}{4\tau_e^2}}$. Les solutions y sont combinaisons linéaires de $\exp(-\dfrac{t}{2\tau_e})\cos(\omega t)$ et $\exp(-\dfrac{t}{2\tau_e})\sin(\omega t)$, avec une pulsation $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{1}{4\tau_e^2}}$ légèrement inférieure à la pulsation propre.

- Le cas limite (appelé **amortissement critique**) est obtenu lorsque $\boxed{\tau_e = \dfrac{1}{2\omega_0}}$, pour lequel $\Delta = 0$.

  On a alors $r = -\dfrac{1}{2\tau_e}$ racine double, et y est combinaison linéaire de $\exp(-\dfrac{t}{2\tau_e})$ et de $t\exp(-\dfrac{t}{2\tau_e})$.

- Si $\boxed{\tau_e < \dfrac{1}{2\omega_0}}$, le système est fortement amorti, Δ est positif, δ est réel. Il n'y a pas d'oscillation. on a $r = -\dfrac{1}{2\tau_e} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4\tau_e^2} - \omega_0^2} = -\dfrac{1}{2\tau_e} \pm \beta$. avec $\beta = \dfrac{\delta}{2}$. y est combinaison linéaire de $\exp(-\dfrac{t}{2\tau_e})\exp(\beta t)$ et $\exp(-\dfrac{t}{2\tau_e})\exp(-\beta t)$. On préfèrera parfois prendre la demi-somme et la demi-différence de ces fonctions, faisant intervenir les fonctions trigonométriques sinus et cosinus hyperboliques, établissant un rapprochement formel avec le premier cas. y est alors combinaison linéaire de $\exp(-\dfrac{t}{2\tau_e})\,\mathrm{ch}(\beta t)$ et $\exp(-\dfrac{t}{2\tau_e})\,\mathrm{sh}(\beta t)$.

EXEMPLE : Si on impose les conditions initiales $y(0) = y_0$, et $y'(0) = 0$, on trouve respectivement :

$$y = y_0 \exp(-\frac{t}{2\tau_e})\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{2\omega\tau_e}\sin(\omega t)\right)$$

$$y = y_0 \exp(-\frac{t}{2\tau_e})\left(1 + \frac{t}{2\tau_e}\right)$$

$$y = y_0 \exp(-\frac{t}{2\tau_e})\left(\mathrm{ch}(\beta t) + \frac{1}{2\beta\tau_e}\mathrm{sh}(\beta t)\right)$$

L'amortissement critique correspond aux deux cas limites $\omega \to 0$ et $\beta \to 0$.
τ_e s'appelle **durée de relaxation en énergie**. L'énergie est, dans les exemples proposés, proportionnelle à y_0^2. La durée τ_e donne un ordre de grandeur de la durée au bout de laquelle l'énergie du système a diminué de $\dfrac{1}{e}$.

2- Solution particulière avec second membre

Cette équation correspond à un système qui est soumis à une oscillation forcée.
Lorsque $b > 0$, il y a toujours une solution particulière avec second membre $d\exp(i\omega t)$ sous la forme $y = A\exp(i\omega t)$, car $i\omega$ ne peut être solution de l'équation caractéristique. On obtient une solution avec second membre $d\cos(\omega t)$ en en prenant la partie réelle.
La solution générale est donc la somme d'une solution périodique de pulsation ω et de solutions exponentielles s'annulant en $+\infty$. Les solutions exponentielles n'interviennent physiquement que lors

de la phase transitoire correspondant à la mise en route du système. La solution périodique correspond, elle, à la solution en régime permanent.

Lorsque $b = 0$, la situation est analogue sauf dans un cas, si ω est égal à ω_0, solution de l'équation caractéristique. Il y a alors une solution particulière avec second membre $d \exp(i\omega_0 t)$ sous la forme $y = \mathrm{A}t \exp(i\omega_0 t)$. On obtient une solution avec second membre $d \cos(\omega_0 t)$ en en prenant la partie réelle. On dit qu'il y a **résonance**. Dans ce cas, y prendra des valeurs arbitrairement grandes.

On peut s'approcher d'un phénomène de résonance avec un coefficient b non nul, quoique faible. y restera borné mais sa borne peut être élevée. Ce phénomène est parfois recherché (enfant sur une balançoire donnant des impulsions à la fréquence propre de la balançoire, antenne en résonance avec une fréquence donnée), parfois évité (utilisation d'amortisseurs).

Le phénomène de résonance peut se révéler extrêmement dangereux. Citons l'effondrement du pont de Basse-Chaîne près d'Angers en 1850, sous les pas cadencés d'un bataillon en marche (226 morts). Depuis ce temps, les militaires rompent le pas lorsqu'ils traversent à pied un pont.

Plus récemment, le pont de Tacoma, aux Etats-Unis, s'est effondré le 7 novembre 1940 sous l'effet du vent, quelques mois seulement après son inauguration. Le lecteur est invité à rechercher en ligne des vidéos de cet effondrement en donnant à un moteur de recherche les mots-clefs "pont de Tacoma". Cependant, dans ce dernier cas, l'effondrement ne serait pas dû à une action périodique extérieure mais plutôt à la formation de tourbillons sur le tablier du pont amplifiant peu à peu le mouvement du pont (lire Jean-Michel Courty, Edouard Kierlik, *Pont de Tacoma, la contre-enquête*, Pour la Science, n°364, (Février 2008), p.98-99).

cas général	Mécanique	Electricité	
y	élongation x	charge Q	grandeur étudiée
y'	vitesse V	intensité I	dérivée
Le coefficient a s'oppose aux variations de la dérivée par inertie ou autoinduction	masse m	inductance L	Energie cinétique ou magnétostatique : $W = \frac{1}{2} m V^2$ ou $\frac{1}{2} L I^2$
Le coefficient b est responsable des pertes d'energie	frottement f	résistance R	Puissance de l'effet Joule $P = fV^2$ ou RI^2
Le coefficient c est celui du phénomène de rappel	raideur k	capacité$^{-1}$ $\frac{1}{C}$	Energie potentielle emmagasinée $W = \frac{1}{2} k x^2$ ou $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$
Durée de relaxation $\tau_e = \frac{a}{b}$	$\frac{m}{f}$	$\frac{L}{R}$	
Période T à la résonance $\frac{2\pi}{\omega_0}$ Pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{c/a}$	$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ $\sqrt{\frac{k}{m}}$	$2\pi\sqrt{LC}$ $\frac{1}{\sqrt{LC}}$	
Le coefficient d est celui du moteur du phénomène	force F	tension U	Résistance = fV ou RI Rappel = kx ou $\frac{Q}{C}$
$b = d = 0$ $y = y_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$	pas de frottement pas de force imposée	pas de résistance pas de tension imposée	phénomène périodique non amorti
$b > 0$, $d = 0$ $\lim\limits_{t\to\infty} y = 0$	frottement pas de force imposée	résistance pas de tension imposée	amortissement du phénomène
$b > 0$, $d > 0$ solution particulière $y = y_m \cos(\omega t + \varphi)$	frottement force imposée	résistance tension imposée	régime stationnaire périodique asymptotique
$b = 0$, $d > 0$ Si $\omega \neq \omega_0$, alors y est somme de fonctions périodiques de pulsation ω et ω_0. Si $\omega = \omega_0$, il y a résonance	pas de frottement force imposée	pas de résistance tension imposée	

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Résoudre les équations différentielles :

a) $y' + 2y = x^2 - x + 3$

b) $y' + y = e^x \sin(x)$

Exo.2) a et b étant des réels, résoudre l'équation différentielle $\left[\begin{array}{l} y' - ay = e^{bx} \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$.

Exo.3) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $x(1 + x^2)y' - (x^2 - 1)y + 2x = 0$

b) $x^2\cos(x)\, y' = x^2\sin(x)\, y - 1$

c) $(2x - x^2)y' + (x - 1)y = 2x - 1$. On cherchera une solution particulière sous forme d'un polynôme.

d) $y' - y = y(0)$

Exo.4) Soit D : $y \to y' + xy$. On note $D^2 = D \circ D$, $D^3 = D \circ D^2$.

a) Calculer $D^3(y)$

b) Résoudre l'équation différentielle : $y^{(3)} + 3xy'' + 3(x^2 + 1)y' + (x^3 + 3x)y = 0$

Exo.5) a) Résoudre, pour $x \geq 0$: $\left[\begin{array}{l} y' - \dfrac{y}{a + x} = b, \text{ avec } a > 0,\ b \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$

b) Un fil élastique idéal possède une longueur L au temps $t = 0$. On le tire de sorte qu'il s'allonge de 1 m/s, de façon homogène sur toute sa longueur. Un escargot ponctuel part d'une extrémité du fil avec une vitesse $v_0 = 1$ cm/s par rapport au fil. Atteindra-t-il l'autre extrémité du fil, et si oui, au bout de combien de temps ? Application numérique, L = 1 m, $v_0 = 1$ cm/s.

Exo.6) Théorème de Floquet : soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$ périodique de période T. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = a(x)y(x)$ sont de la forme $y(x) = f(x)e^{\sigma x}$ où f est une fonction périodique de période T et σ un réel qu'on exprimera en fonction de a et T.

Exo.7) Soit s un paramètre strictement positif. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2sy' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

où y est une fonction de x. Quelle est la solution qui converge le plus vite vers 0 quand x tend vers $+\infty$?

Exo.8) Résoudre

a) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$

b) $y'' + y' - 2y = 8\sin(x)$

c) $y'' + 16y = \sin(x) + \cos(4x)$

d) $my'' - (1 + m^2)y' + my = xe^x$

e) $y'' + y = -\sin(ax)$, $a \in \mathbb{R}$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = \dfrac{1}{2}$

Exo.9) Chute libre avec frottement : Soit y la hauteur à laquelle se trouve un parachutiste tombant verticalement. Son accélération est égale à la somme de l'accélération de la pesanteur et d'une accélération due au frottement de l'air égale à $-k$V, où V est sa vitesse, et k une constante positive.

a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par y, en fonction du temps t ?

b) La résoudre avec comme condition initiale $y(0) = h$ et $y'(0) = 0$.

c) Effectuer un développement limité de y à l'ordre 2 au voisinage de $t = 0$.

d) Calculer $\lim\limits_{t \to \infty} y'(t)$

(Pour les développements limités, voir L1/DLTAYLOR.PDF).

Exo.10) Trajectoire d'un projectile avec frottement : On considère un projectile lancé à l'instant $t = 0$ dans un plan vertical Oxz à partir du point O, avec une vitesse initiale V_0, la vitesse faisant un angle θ avec l'horizontale Ox. Oz est la verticale ascendante. Le projectile est soumis à l'accélération de la pesanteur g et à une force de frottement opposée à la vitesse, de coefficient k. On note $(x(t), z(t))$ la position du projectile en fonction du temps t. L'équation du mouvement est donc :

$$\begin{cases} x'' = -kx' \\ z'' = -kz' - g \end{cases}$$

a) Résoudre ce système et exprimer les solutions en fonction de k, g, θ et V_0 et du temps t.

b) Pour tout t, quelle est la limite de $x(t)$ et $z(t)$ quand k tend vers 0 ?

c) Dans le cas général, exprimer z en fonction de x, indépendamment de t.

d) Vérifiez que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{z}{x} = V_0\tan(\theta)$. Pour tout t, calculer $\lim\limits_{k \to 0} z$ en fonction de x.

Exo.11) Soit y_0 un réel. On considère l'équation différentielle $\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

a) Résoudre cette équation différentielle.

b) La **méthode d'Euler** pour résoudre une équation différentielle du type $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ consiste à prendre un pas $h > 0$ et à remplacer la variable x par une suite (x_n) et la fonction $x \to y(x)$ par une suite (y_n) telles que $x_0 = 0$ et que, pour tout n, $x_{n+1} = x_n + h$ et $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$. En appliquant cette méthode à l'équation différentielle $y' = y - x$, déterminer l'expression générale de x_n et de y_n en fonction de y_0, n, h.

c) Soit x un réel donné. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$, h étant pris égal à $\dfrac{x}{n}$.

2- Solutions

Sol.1) a) La solution générale de l'équation homogène est λe^{-2x}. On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme d'un polynôme de degré 2, $y = ax^2 + bx + c$. On obtient :

$$y' + 2y = 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2 - x + 3$$

donc $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 2$.

La solution générale de l'équation complète est $y = \lambda e^{-2x} + \dfrac{x^2}{2} - x + 2$

b) La solution générale de l'équation homogène est λe^{-x}. On cherche ensuite une solution particulière avec second membre $e^x\, e^{ix}$, dont $e^x\sin(x)$ est la partie imaginaire, sous la forme d'une constante facteur de $e^{(1+i)x}$. On trouve $\dfrac{e^{(1+i)x}}{2 + i}$. De même, une solution particulière avec second membre $e^x e^{-ix}$ est $\dfrac{e^{(1-i)x}}{2-i}$ et, par superposition, une solution particulière avec second membre $e^x\sin(x)$ est $\mathrm{Im}(\dfrac{e^{(1+i)x}}{2+i})$:

$$\mathrm{Im}(\frac{e^{(1+i)x}}{2+i}) = \mathrm{Im}(\frac{(2-i)e^{(1+i)x}}{5}) = \frac{e^x(-\cos(x)+2\sin(x))}{5}$$

La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\lambda e^{-x} + \frac{e^x(-\cos(x)+2\sin(x))}{5}$$

Sol.2) L'équation homogène a pour solution λe^{ax}.
Le second membre est le produit d'une exponentielle par un polynôme de degré nul. On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme du produit de l'exponentielle par un polynôme de degre 0 ou 1, selon que $b \neq a$ ou $b = a$.
Si $b \neq a$, une solution particulière est $\dfrac{e^{bx}}{b-a}$. La solution générale de l'équation complète est $\lambda e^{ax} + \dfrac{e^{bx}}{b-a}$, et la condition initiale donne $\lambda = 1 - \dfrac{1}{b-a}$, d'où $y = e^{ax} + \dfrac{e^{bx}-e^{ax}}{b-a}$
Si $b = a$, une solution particulière est xe^{ax}. La solution de l'équation complète, compte tenu de la condition initiale, est $e^{ax} + xe^{ax}$.
On pourra vérifier que le cas $b = a$ se déduit du cas $b \neq a$ par passage à la limite :

$$\lim_{b\to a} e^{ax} + \frac{e^{bx}-e^{ax}}{b-a} = e^{ax} + xe^{ax}$$

Sol.3) a) On résout cette équation différentielle sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, intervalles où le coefficient de y' ne s'annule pas. La solution générale de l'équation homogène est de la forme $\lambda \exp(\mathrm{G}(x))$ avec G une primitive de $\dfrac{x^2-1}{x(1+x^2)}$:

$$\int \frac{x^2-1}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{y-1}{2y(1+y)}\,dy \qquad \text{avec } y = x^2$$

$$= \int -\frac{1}{2y} + \frac{1}{1+y}\,dy$$

$$= \ln(1+y) - \frac{1}{2}\ln(y) = \ln(1+x^2) - \ln(|x|) = \ln\frac{1+x^2}{|x|}$$

ce qui donne la solution $\lambda\dfrac{1+x^2}{|x|}$, λ réel, ou même $\lambda\dfrac{1+x^2}{x}$ en renommant $-\lambda$ en λ pour $x < 0$.

On trouve une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante, ce qui conduit à $x(1+x^2)\,\lambda'(x)\dfrac{1+x^2}{x} = -2x$, donc $\lambda'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, d'où $\lambda(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (+ Cte). Une solution particulière est donc $\dfrac{1}{x}$.

La solution générale de l'équation complète est donc $y = \lambda\dfrac{1+x^2}{x} + \dfrac{1}{x}$, λ réel.

b) On gagne du temps en remarquant que l'équation différentielle est équivalente à $(y \cos(x))' = -\frac{1}{x^2}$, d'où $y = \frac{1}{x\cos(x)} + \frac{\lambda}{\cos(x)}$, où λ est un réel propre à chaque intervalle où $x\cos(x)$ ne s'annule pas.

c) On résout sur $]-\infty, 0[$, ou sur $]0, 2[$, ou sur $]2, +\infty[$. La solution générale de l'équation homogène est de la forme $\lambda \exp(G(x))$ avec G une primitive de $\frac{x-1}{x^2-2x} = \frac{x-1}{x(x-2)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-2)}$, d'où $G = \frac{1}{2} \ln |x(2-x)|$. La solution générale de l'équation homogéne est donc $\lambda\sqrt{|x(2-x)|}$.

Si y est un polynôme de degré n solution particulière de l'équation complète, de coefficient dominant a_n, alors $(2x - x^2)y' + (x-1)y$ est de degré au plus $n + 1$ et le coefficient de degré $n + 1$ est $-na_n + a_n$. Comme on veut obtenir $2x - 1$, polynôme de degré 1, il est nécessaire que $n \leq 1$. Soit donc $y = ax + b$. On obtient :

$$\begin{aligned}(2x - x^2)y' + (x-1)y &= a(2x - x^2) + (x-1)(ax + b)\\ &= (a + b)x - b = 2x - 1\end{aligned}$$

donc $a = b = 1$ et $y = x + 1$ est solution particulière.

La solution générale de l'équation complète est $x + 1 + \lambda\sqrt{|x(2-x)|}$.

d) L'équation équivaut à :

$$\exists\, a,\ y' - y = a \text{ et } y(0) = a$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \exists\, a,\ y = \lambda e^x - a \text{ et } \lambda - a = a$$

donc $\lambda = 2a$ et les solutions sont $y = a(2e^x - 1)$, $a \in \mathbb{R}$. Elles forment un espace vectoriel engendré par la fonction $2e^x - 1$. C'est d'ailleurs le noyau de l'application linéaire $y \to y' - y - y(0)$, alors que, pour a donné non nul, l'espace des solutions de $y' - y = a$ n'est pas un espace vectoriel.

Sol.4) a) On obtient l'expression donnée en b).

b) On a donc $D^3(y) = 0$. Posons $z = D^2(y)$. On a $D(z) = 0 = z' + xz$, d'où $z = \lambda\exp(-\frac{x^2}{2})$.

Puis posons $u = D(y)$, de sorte que $D(u) = z$ ou $u' + xu = \lambda\exp(-\frac{x^2}{2})$. On cherchera une solution particulière par la méthode de variation de la constante et on trouvera :

$$u = (\lambda x + \mu)\exp(-\frac{x^2}{2})$$

Enfin, on résout $D(y) = u$ ou $y' + xy = (\lambda x + \mu)\exp(-\frac{x^2}{2})$ ce qui donne :

$$y = (\frac{\lambda x^2}{2} + \mu x + \nu)\exp(-\frac{x^2}{2})$$

Sol.5) a) La solution de l'équation homogène est $\lambda(a + x)$. On applique la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière, ce qui conduit à :

$$\lambda'(a + x) = b$$

d'où $\lambda = b \ln(a + x)$ (+ Cte)

La solution générale de l'équation différentielle est $\lambda(a + x) + b(a + x) \ln(a + x)$. La condition initiale donne $\lambda = -b \ln(a)$, d'où $y = b\,(a + x) \ln(1 + \frac{x}{a})$

b) Notons y l'abscisse de l'escargot par rapport à l'extrémité d'où il est parti. A un instant t quelconque, sa vitesse par rapport à cette extrémité (vitesse absolue) est la somme de sa vitesse v_0

(vitesse relative) par rapport au fil et de la vitesse du point du fil où il se trouve au moment considéré, due à l'extension du fil (vitesse d'entraînement). La longueur du fil (en m) à l'instant t étant L + t, et la vitesse de la deuxième extrémité du fil par rapport à la première étant 1 m/s, la vitesse d'entraînement au point d'abscisse y est $\dfrac{y}{\mathrm{L} + t}$. Ainsi :

$$y' = v_0 + \frac{y}{\mathrm{L} + t}$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$. On reconnaît l'équation différentielle a) avec t au lieu de x, a = L et $b = v_0$ d'où ;

$$y = v_0\,(\mathrm{L} + t)\ln(1 + \frac{t}{\mathrm{L}})$$

L'escargot atteint l'autre extrémité du fil à un instant t tel que y = L + t, soit $1 = v_0 \ln(1 + \dfrac{t}{\mathrm{L}})$, ou encore $1 + \dfrac{t}{\mathrm{L}} = \exp(\dfrac{1}{v_0})$ ou enfin $t = \mathrm{L}\,(\exp(\dfrac{1}{v_0}) - 1)$.

Pour L = 1 m et v_0 = 1 cm/s, $t = e^{100} - 1$ s $\approx 8{,}5 \times 10^{35}$ années.

Sol.6) Les solutions sont de la forme :

$$y(x) = y(0)\exp(\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s).$$

Supposons d'abord que σ et f existent pour en déduire leur expression. On doit avoir :

$$y(0) = f(0) = f(\mathrm{T}) = y(\mathrm{T})\exp(-\sigma\mathrm{T}) = y(0)\exp(\int_0^{\mathrm{T}} a(s)\,\mathrm{d}s - \sigma\mathrm{T}),$$

donc nécessairement $\sigma = \dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} a(s)\,\mathrm{d}s$, et pour ce σ, $f(x) = y(x)e^{-\sigma x}$.

Réciproquement, vérifions que les σ et f précédemment définis conviennent bien. Il s'agit de vérifier que f est T-périodique :

$$f(x + \mathrm{T}) - f(x) = y(x + \mathrm{T})\exp(-\sigma(x + \mathrm{T})) - y(x)\exp(-\sigma x)$$

Il suffit donc de montrer que $y(x + \mathrm{T}) = y(x)\exp(\sigma\mathrm{T})$ ou que :

$$\exp(\int_0^{x+\mathrm{T}} a(s)\,\mathrm{d}s) = \exp(\int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s + \sigma\mathrm{T})$$

$\Leftrightarrow \quad \exp(\displaystyle\int_x^{x+\mathrm{T}} a(s)\,\mathrm{d}s) = \exp(\sigma\mathrm{T})$ ce qui résulte de la périodicité de a et de la définition de σ.

Sol.7) L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $\mathrm{X}^2 + 2s\mathrm{X} + 1 = 0$.

Pour $s > 1$, les racines de l'équation caractéristique sont $-s \pm \sqrt{s^2 - 1}$. Donc la solution de l'équation différentielle est combinaison linéaire de $\exp((-s + \sqrt{s^2 - 1})x)$ et de $\exp((-s - \sqrt{s^2 - 1})x)$, ou bien, en prenant les demi-somme et demi-différence, de $e^{-sx}\,\mathrm{ch}(\sqrt{s^2 - 1}\,x)$ et de $e^{-sx}\,\mathrm{sh}(\sqrt{s^2 - 1}\,x)$. Compte tenu des conditions initiales, on trouve :

$$y = e^{-sx}\,\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{s^2 - 1}\,x)}{\sqrt{s^2 - 1}} \sim \frac{\exp((\sqrt{s^2 - 1} - s)x)}{2\sqrt{s^2 - 1}} \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty$$

Pour $s = 1$, -1 est racine double de l'équation caractéristique et y est combinaison linéaire de e^{-x} et de xe^{-x}. Compte tenu des conditions initiales, on trouve :

$$y = xe^{-x}$$

Pour $s < 1$, les solutions complexes de l'équation différentielle sont $-s \pm i\sqrt{1-s^2}$, et y est combinaison linéaire de $e^{-sx}\cos(\sqrt{1-s^2}\,x)$ et de $e^{-sx}\sin(\sqrt{1-s^2}\,x)$. Compte tenu des conditions initiales, on trouve :

$$y = e^{-sx}\frac{\sin(\sqrt{1-s^2}\,x)}{\sqrt{1-s^2}}$$

On vérifiera que xe^{-x} est négligeable devant $\exp((\sqrt{s^2-1}-s)x)$, $s > 1$ et devant e^{-sx}, $s < 1$, quand x tend vers l'infini.

Sol.8) a) $y = (\lambda x + \mu)e^{-x} + \dfrac{e^{2x}}{9}$

b) $y = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x} - \dfrac{12}{5}\sin(x) - \dfrac{4}{5}\cos(x)$

c) $y = \lambda\cos(4x) + \mu\sin(4x) + \dfrac{\sin(x)}{15} + x\dfrac{\sin(4x)}{8}$

d) Pour $m = 0$, c'est une équation différentielle du premier ordre.
Sinon, elle est du second ordre avec, pour équation caractéristique, $m\mathrm{X}^2 - (1+m^2)\mathrm{X} + m = 0$, de racines m et $\dfrac{1}{m}$. Pour $m = \pm 1$, la racine est double. On cherchera une solution particulière de l'équation complète sous forme d'un polynôme de degré 1 facteur de e^x, sauf pour $m = 1$ pour lequel le degré du polynôme devra monter à 2, puisque le coefficient $m = 1$ est le même que celui intervenant dans l'exponentielle de xe^x. On trouvera pour solutions de l'équation complète :

pour $|m| \neq 1$ et $m \neq 0$, $y = \lambda e^{mx} + \mu e^{x/m} + \dfrac{1-x}{(1-m)^2}e^x$

pour $m = -1$, $y = (\lambda x + \mu)e^{-x} + \dfrac{1-x}{4}e^x$

pour $m = 1$, $(\lambda x + \mu)e^x + \dfrac{x^3e^x}{6}$

pour $m = 0$, $y = (1-x)e^x + \lambda$

e) Il faut distinguer $a \neq \pm 1$, et $a = \pm 1$. Dans ce dernier cas, l'exponentielle complexe e^{iax} intervenant implicitement dans le second membre est la même que celle qui intervient dans la solution générale de l'équation homogène, et la recherche d'une solution particulière se fait sous la forme du produit d'un polynôme de degré 1 par cette exponentielle. On trouvera :

pour $a \neq \pm 1$, $y = (\dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{a^2-1})\sin(x) + \dfrac{\sin(ax)}{a^2-1}$

pour $a = 1$, $y = \dfrac{x\cos(x)}{2}$

pour $a = -1$, $y = \sin(x) - \dfrac{x\cos(x)}{2}$

Sol.9) a) Dirigeons l'axe vertical vers le haut. V étant égale à la dérivée de y par rapport au temps t, et la pesanteur étant dirigée vers le bas, on a $y'' = -g - ky'$.
b) C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre en y'. La solution de l'équation homogène est λe^{-kt}, une solution particulière est donnée par $-\dfrac{g}{k}$. Donc la solution générale est :

$$y' = \lambda e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

La condition initiale $y'(0) = 0$ donne $\lambda = \frac{g}{k}$. Finalement, $y' = \frac{g}{k}(e^{-kt} - 1)$

Il suffit d'intégrer pour trouver y. La valeur de la constante d'intégration s'obtient avec la condition $y(0) = h$:

$$y = \frac{g}{k}\left(-\frac{e^{-kt}}{k} - t\right) + \frac{g}{k^2} + h$$

c) $y = \frac{g}{k}\left(-\frac{1 - kt + \frac{k^2t^2}{2} + o(t^2)}{k} - t\right) + \frac{g}{k^2} + h = h - \frac{gt^2}{2} + o(t^2)$

On reconnaît dans $h - \frac{gt^2}{2}$ l'expression de la chute libre dans le vide.

d) $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = -\frac{g}{k}$, vitesse limite de chute, qu'on peut aussi déduire de l'équation différentielle $y'' = -g - ky'$ en prenant une accélération nulle.

Sol.10) a) Ce probléme est une généralisation du précédent, avec une vitesse initiale non nulle. On obtient successivement :

$$\begin{cases} x' = V_0\cos(\theta)\, e^{-kt} \\ z' = \left(\frac{g}{k} + V_0\sin(\theta)\right)e^{-kt} - \frac{g}{k} \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x = \frac{V_0\cos(\theta)}{k}(1 - e^{-kt}) \\ z = \left(\frac{g}{k} + V_0\sin(\theta)\right)\frac{1 - e^{-kt}}{k} - \frac{gt}{k} \end{cases}$$

b) Quand k tend vers 0, x tend vers $V_0\cos(\theta)t$. Pour z, on utilise un développement limité de l'exponentielle à l'ordre 2 en 0 :

$$e^{-kt} = 1 - kt + \frac{k^2t^2}{2} + o(k^2)$$

donc $\frac{1 - e^{-kt}}{k} = t - \frac{kt^2}{2} + o(k^2)$

donc $z = \left(\frac{g}{k} + V_0\sin(\theta)\right)\left(t - \frac{kt^2}{2} + o(k^2)\right) - \frac{gt}{k}$ de limite $V_0\sin(\theta)t - \frac{gt^2}{2}$ quand k tend vers 0. Le mouvement $\begin{cases} x = V_0\cos(\theta)t \\ z = V_0\sin(\theta)t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$ est celui du mouvement d'un projectile soumis à l'accélération de la pesanteur g sans frottement.

c) On a $\frac{1 - e^{-kt}}{k} = \frac{x}{V_0\cos(\theta)}$ et $t = -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{kx}{V_0\cos(\theta)}\right)$ donc :

$$z = \left(\frac{g}{k} + V_0\sin(\theta)\right)\frac{x}{V_0\cos(\theta)} + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{V_0\cos(\theta)}\right)$$
$$= \tan(\theta)\, x + \frac{gx}{kV_0\cos(\theta)} + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{V_0\cos(\theta)}\right)$$

d) On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{z}{x} = \tan(\theta) + \frac{g}{kV_0\cos(\theta)} - \frac{g}{k^2}\frac{k}{V_0\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

Pour la limite quand k tend vers 0, on utilise un développement limité du logarithme à l'ordre 2 :

$$\ln(1 - \frac{kx}{V_0\cos(\theta)}) = -\frac{kx}{V_0\cos(\theta)} - \frac{k^2x^2}{2V_0^2\cos^2(\theta)} + o(k^2)$$

donc :

$$z = (\frac{g}{k} + V_0\sin(\theta))\frac{x}{V_0\cos(\theta)} - \frac{gx}{k^2V_0\cos(\theta)} - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2(\theta)} + o(1)$$

de limite $x\tan(\theta) - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2(\theta)}$. On retrouve la classique trajectoire parabolique d'un projectile soumis à une accélération constante, sans frottement. On peut aussi retrouver cette limite en éliminant t des expressions de x et z trouvées en b).

Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, dans le cas parabolique, le projectile retombe au point d'abscisse $x > 0$ telle que $x\tan(\theta) - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2(\theta)} = 0$, soit $x = \frac{V_0^2\sin(2\theta)}{g}$ (maximale pour $\theta = \frac{\pi}{4}$). Dans le cas général où k est non nul, on ne peut exprimer explicitement ce point de chute, dont l'abscisse x est solution de l'équation $\tan(\theta)\, x + \frac{gx}{kV_0\cos(\theta)} + \frac{g}{k^2}\ \ln(1 - \frac{kx}{V_0\cos(\theta)}) = 0$.

Sol.11) a) La solution générale de l'équation différentielle $y' = y - x$ est $y' = \lambda e^x + x + 1$. La condition initiale impose que $\lambda = y_0 - 1$, donc $y = (y_0 - 1)e^x + x + 1$.
b) On a $x_n = nh$, et $y_{n+1} = y_n + h(y_n - x_n) = (1 + h)y_n - nh^2$. Les premières valeurs de la suite sont :

$$y_1 = (1 + h)y_0$$
$$y_2 = (1 + h)^2y_0 - h^2$$
$$y_3 = (1 + h)^3y_0 - 3h^2 - h^3$$
$$y_4 = (1 + h)^4y_0 - 6h^2 - 4h^3 - h^4$$
$$y_5 = (1 + h)^5y_0 - 10h^2 - 10h^3 - 5h^4 - h^5$$

On peut conjecturer que :

$$y_n = (1 + h)^ny_0 - (1 + h)^n + 1 + nh$$

ce qu'on vérifie ensuite par récurrence.
c) Pour $h = \frac{x}{n}$, on a $y_n = (1 + \frac{x}{n})^ny_0 - (1 + \frac{x}{n})^n + 1 + x = e^xy_0 - e^x + 1 + x$. On retrouve la solution trouvée en a).

◆