FONCTIONS USUELLES

PLAN

I : Fonctions exponentielles

1- Exponentielles et logarithmes

❑ La fonction **logarithme** ln est la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$ définie sur]0, +∞[et s'annulant en $x = 1$. Autrement dit :

$$\forall\, x > 0,\ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Sa dérivée $\frac{1}{x}$ étant strictement positive, ln est donc strictement croissante. La dérivée de $\ln(ax)$ valant $\frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$, $\ln(ax)$ est égal à $\ln(x)$ + Cte. La valeur de Cte est obtenue en prenant $x = 1$, ce qui donne la relation célèbre :

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$$

Cette relation, transformant produit en somme, a permis, depuis le XVIIème et jusqu'à l'introduction des calculatrices à bas prix vers 1980, d'accélérer notablement les possibilités de calcul des mathématiciens. Ainsi Laplace s'émerveille-t-il "*des logarithmes, admirable instrument, qui, en réduisant à quelques heures le travail de plusieurs mois, double si l'on peut dire la vie des astronomes, et leur épargne les erreurs et les dégoûts inséparables des longs calculs*"[1]. En prenant $a = \frac{1}{x}$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

[1] Jean Dhombres, *L'Ecole Normale Supérieure, leçons de mathématiques*, Dunod (1992), deuxième leçon de Laplace, p.56

Etant strictement croissante, ou bien $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ ou bien $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = l$ limite finie. Comme, pour n entier, $\ln(2^n) = n\ln(2)$ (récurrence facile) et que cette quantité tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, la seule conclusion possible est :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Et donc, en considérant $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

ln réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. Sa réciproque est l'**exponentielle** :

$$t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$$

Le nombre e est tel que $1 = \ln(e)$ soit $\int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1$. e vaut environ 2,71828...

Les limites relatives à ln se traduisent pour l'exponentielle de la façon suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

La règle de dérivation d'une fonction réciproque (Voir L1/DERIVEE.PDF) conduit à :

$$(e^x)' = e^x$$

On a également $e^{x+y} = e^x e^y$ puisqu'en prenant les logarithmes des deux membres, on obtient d'une part :

$$\ln(e^{x+y}) = x + y$$

et d'autre part :

$$\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y$$

❑ Pour tout a strictement positif et b, on posera $a^b = e^{\ln(a)b}$. Cette définition est compatible avec le calcul des puissances de a, puisque, pour n entier, on a :

$$\begin{aligned} e^{\ln(a)n} &= e^{\ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a)} \qquad \text{avec } n \text{ exposants } \ln(a) \\ &= e^{\ln(a)} \times e^{\ln(a)} \times \ldots \times e^{\ln(a)} \\ &= a \times a \times \ldots \times a \\ &= a^n \end{aligned}$$

On a alors $\ln(a^b) = b \ln(a)$, et également $(e^x)^y = e^{xy}$ obtenu en prenant $a = e^x$ et $b = y$ dans la formule donnant a^b. On a enfin, pour $a > 0$ et différent de 1 :

$$x = a^t \Leftrightarrow x = e^{\ln(a)t} \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(a)t \Leftrightarrow t = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

a^t est l'exponentielle de t en base a et $\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ est le logarithme de x en base a. Le logarithme le plus utilisé en dehors du logarithme en base e (dit **népérien**) est le **logarithme décimal**, pour lequel $a = 10$, et que l'on note souvent $\log_{10}$, voire même log. On rencontre aussi en informatique le logarithme en base 2.

Si u est une fonction strictement positive, et v une fonction quelconque, on a :

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

La deuxième forme peut servir à dériver la fonction ou à en calculer les limites.

❑ Un certain nombre de limites usuelles doivent être connues :

PROPOSITION

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ *et plus généralement* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^a} = 0$ *pour tout* $a > 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ *et plus généralement* $\lim\limits_{x\to 0} x^a\ln(x) = 0$ *pour tout* $a > 0$

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ *et plus généralement* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^a} = +\infty$ *pour tout* $a > 0$

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ *et plus généralement* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^a e^x = 0$ *pour tout* $a > 0$

Démonstration :

❑ (i) Soit $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. f admet pour dérivée $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ qui est négative pour $x > e$, donc f est décroissante strictement positive sur $[e, +\infty[$. Elle admet donc une limite l positive ou nulle en $+\infty$. Cette limite est aussi celle de $\dfrac{\ln(y)}{y}$ avec $y = x^2$, soit :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = l$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{x^2} = l$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} 2 \times \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x} = l$$

$$\Rightarrow \quad 2 \times l \times 0 = l$$

$$\Rightarrow \quad l = 0$$

Toutes les autres limites s'en déduisent. En remplaçant x par x^a, on obtient :

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^a)}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a\ln(x)}{x^a} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$$

(ii) En changeant dans (i) x en $\dfrac{1}{x}$ avec x tendant vers 0, on obtient :

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1/x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} -x\ln(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$$

En remplaçant x par x^a, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} x^a\ln(x) = 0$

(iii) En changeant dans (i) x par e^x, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En élevant à la puissance a, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{ax}}{x^a} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{ax}}{a^a x^a} = +\infty$ en divisant par a^a et enfin, en remplaçant ax par x, on obtient bien $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^a} = +\infty$.

(iv) Remplacer x par $-x$ dans (iii).

Les limites précédentes peuvent aussi se mémoriser en établissant une hiérarchie des fonctions selon leur rapidité à tendre vers l'infini. Ci-dessous, sur chaque ligne, chaque fonction est négligeable (voir L1/FONCTION.PDF pour le sens de ce terme) devant les fonctions situées à sa droite. *a* désigne en réel strictement positif :

fonctions tendant vers l'infini quand x tend vers $+\infty$:	$\ln(x)$	x^a	e^x
fonctions tendant vers 0 quand x tend vers $+\infty$:	e^{-x}	$\dfrac{1}{x^a}$	$\dfrac{1}{\ln(x)}$
fonctions tendant vers 0 quand x tend vers 0 :	x^a	$\dfrac{1}{\ln(x)}$	

2- Fonctions trigonométriques hyperboliques

a) sh(x) et ch(x) :

On pose :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(**sinus hyperbolique**) (**cosinus hyperbolique**)

On vérifie facilement que :

$e^x = \mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)$

sh est impair.

ch est pair et strictement positif.

$\mathrm{sh}(0) = 0$

$\mathrm{ch}(0) = 1$

(sh et ch sont respectivement la partie paire et impaire de l'exponentielle)

sh' = ch donc sh est strictement croissante, et du signe de x.

ch' = sh donc ch est décroissant sur $]-\infty,0]$ et croissant sur $[0,+\infty[$.

$\mathrm{sh}(x) \sim \mathrm{ch}(x) \sim \dfrac{e^x}{2}$ au voisinage de $+\infty$.

(La notation $\sim$ est définie L1/FONCTION.PDF. $f \sim g$ au voisinage de x_0 signifie que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$)

$\mathrm{sh}(x) \sim x$ au voisinage de 0 (car $\mathrm{sh}'(0) = 1$).

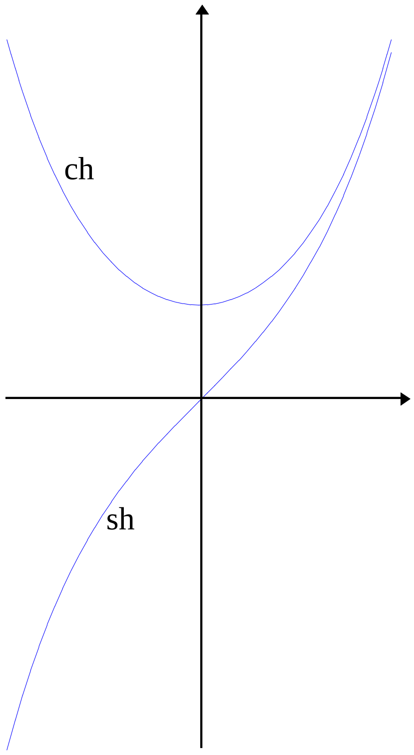
$\mathrm{ch}(x) \sim 1$ au voisinage de 0.

$\mathrm{ch}(x) - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$ car on vérifiera que $\mathrm{ch}(x) - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2(\dfrac{x}{2})$

Il existe des formules de trigonométries hyperboliques, en particulier :

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

On consultera sur ce point l'annexe, donnant une comparaison des formules de trigonométries circulaires et hyperboliques.



sh étant continue strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une réciproque, notée **argsh**, (arg pour argument), qu'on peut calculer explicitement. Pour tout x réel, on a :

$$y = \text{argsh}(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \text{sh}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2y} - 2e^y x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

La seule racine positive est $x + \sqrt{x^2 + 1}$. On a donc, pour tout x réel :

$$\boxed{\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

On vérifiera que sa dérivée vaut $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. En calcul intégral, on pourra donc utiliser comme primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ la fonction $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

De même, ch étant continue strictement monotone de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$, elle admet une réciproque, notée **argch**. Pour tout $x \geq 1$, on a :

$$y = \text{argch}(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \text{ch}y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \text{ et } y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2y} - 2e^y x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Les deux racines sont positives, mais la seule racine supérieure ou égale à 1 est $x + \sqrt{x^2 - 1}$. On a donc :

$$\boxed{\text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}$$

En fait, il peut être parfois utile d'étendre cette fonction à l'intervalle $]-\infty, -1]$ en considérant $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|$, dont on vérifiera en exercice qu'elle est impaire. Sa dérivée vaut $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Ainsi, en calcul intégral, on pourra utiliser comme primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ la fonction $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|$.

b) th(x) :

On pose

$$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$ (**tangente hyperbolique**)

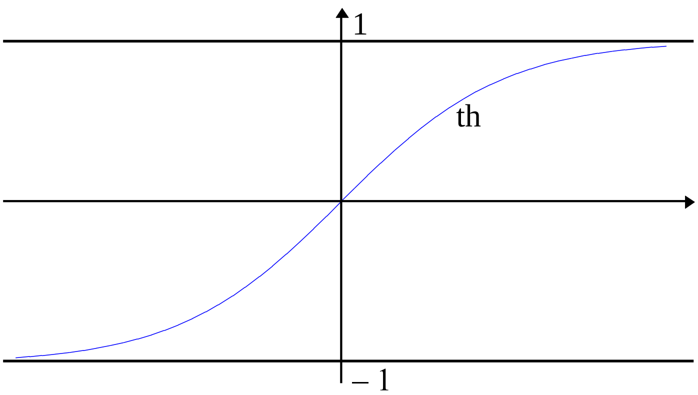
On a :

th est impaire.

$\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x) > 0$ donc th est strictement croissante.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1$

$\text{th}(x) \sim x$ au voisinage de 0 (car $\text{th}'(0) = 1$).



th est continue strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Elle admet donc une réciproque, notée **argth**.

Pour tout $x \in\,]-1, 1[$, on a :

$y = \text{argth}(x)$

$\Leftrightarrow \quad x = \text{th}(y) = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$

$\Leftrightarrow \quad e^{2y} = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

$\Leftrightarrow \quad y = \dfrac{1}{2} \ln(\dfrac{1 + x}{1 - x})$

Ainsi :

$$\boxed{\text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1 + x}{1 - x})}$$

Il est parfois utile d'étendre cette fonction à $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ en considérant $\frac{1}{2}\ln(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|)$. Sa dérivée vaut $\frac{1}{1-x^2}$.

II : Fonctions circulaires

1- fonctions trigonométriques

J'ose espérer qu'aucun lecteur n'ignore ce que sont les fonctions sinus, cosinus et tangente. La fonction **cotangente** est définie par :

$$\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Les anglo-saxons utilisent couramment les fonctions **sécante** et **cosécante** :

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\text{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

Il convient d'apprendre les formules trigonométriques situées en fin de ce chapitre ☺. On a également indiqué un formulaire pour les fonctions hyperboliques. Il est d'usage beaucoup moins fréquent que pour les fonctions circulaires, mais il peut être utile parfois de savoir que les formules existent.

2- Réciproque des fonctions trigonométriques

a) arcsinus :

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est continue strictement monotone. Elle admet donc une réciproque appelée arcsinus et notée **arcsin**. On a donc :

$$\theta = \arcsin(x) \Leftrightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ et } x = \sin(\theta)$$

(On fera un rapprochement dans la formulation avec l'équivalence :

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y \geq 0 \text{ et } x = y^2)$$

Voici un tableau de valeurs :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sin(\theta)$
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	θ

arcsin est strictement croissante, impaire :

❑ $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

❑ $\forall x \in [-1,1], \sin(\arcsin(x)) = x$

❑ $\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta$

MAIS cette dernière relation est fausse si θ appartient à un autre intervalle.

EXEMPLE :

❑ $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4})) = \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$

(On fera un rapprochement dans la formulation des relations précédentes avec :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, (\sqrt{x})^2 = x$

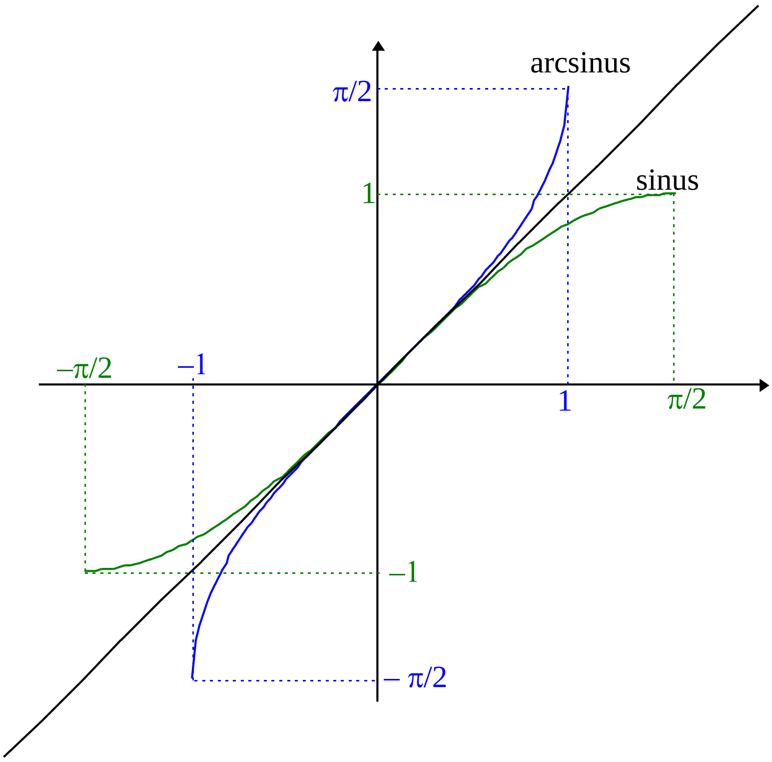
$\forall y \in \mathbb{R}^+, \sqrt{y^2} = y$

MAIS pour y quelconque dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{y^2} = |y|$ qui peut être différent de y)

❑ $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

car cos est positif sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et dans ce cas, $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$

La dérivée d'arcsin(x) est $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ (voir L1/DERIVEE.PDF pour savoir comment dériver la réciproque d'une fonction).



b) arccosinus :

cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ est continue strictement monotone. Elle admet donc une réciproque appelée arccosinus et notée **arccos**. On a donc :

$$\theta = \arccos(x) \Leftrightarrow \theta \in [0, \pi] \text{ et } x = \cos(\theta)$$

Voici un tableau de valeurs :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos(\theta)$
$\arccos(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	θ

arccos est strictement décroissante :

❑ $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

En effet, $\theta = \arccos(-x) \Leftrightarrow -x = \cos(\theta)$ et $\theta \in [0, \pi]$

$\Leftrightarrow x = -\cos(\theta) = \cos(\pi - \theta)$ et $\pi - \theta \in [0, \pi]$

$\Leftrightarrow \pi - \theta = \arccos(x)$

❑ $\forall\, x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$

❑ $\forall\, \theta \in [0, \pi], \arccos(\cos\theta) = \theta$

MAIS cette dernière relation est fausse si θ appartient à un autre intervalle.

EXEMPLE : $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{4})) = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$

❑ $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

car sin est positif sur $[0, \pi]$, et dans ce cas, $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$

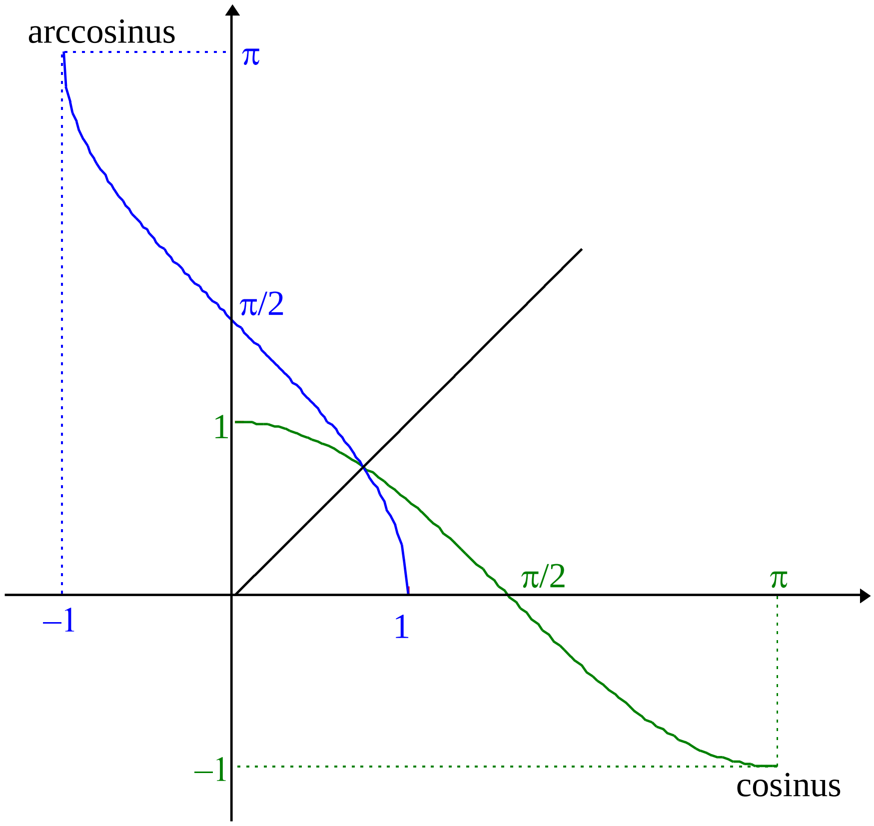
❑ $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

En effet, $\theta = \arcsin(x) \Leftrightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin(\theta) = x$

$\Leftrightarrow x = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ et $\frac{\pi}{2} - \theta \in [0,\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \arccos(x)$

La dérivée de $\arccos(x)$ est $-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ (voir L1/DERIVEE.PDF)



c) <u>arctangente</u> :

tan : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est continue strictement monotone. Elle admet donc une réciproque appelée arctangente et notée **arctan**. On a donc :

$$\theta = \arctan(x) \Leftrightarrow \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } x = \tan(\theta)$$

Voici un tableau de valeurs :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\tan(\theta)$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	θ

arctan est strictement croissante, impaire :
- ❑ $\arctan(-x) = -\arctan(x)$
- ❑ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$
- ❑ $\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan(\theta)) = \theta$

MAIS cette dernière relation est fausse si θ appartient à un autre intervalle.

EXEMPLE : $\arctan(\tan(\frac{3\pi}{4})) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

❑ $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

car cos est positif sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et dans ce cas, $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}$

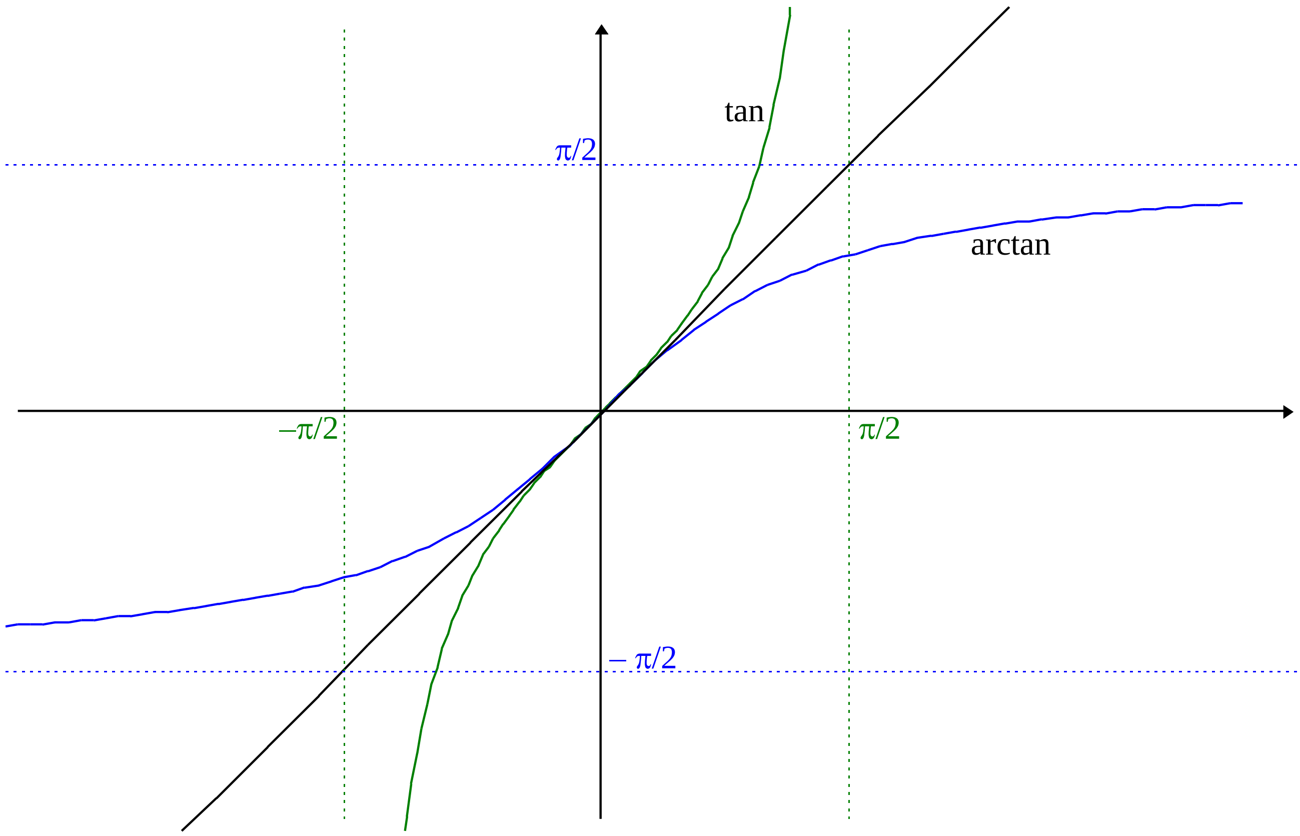
❑ $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ car $\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x)) \times \cos(\arctan(x))$

❑ $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(x)$ où $\mathrm{sgn}(x) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$

Les deux membres étant des fonctions impaires de x, il suffit de le montrer pour $x > 0$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \theta = \arctan(\tfrac{1}{x}) &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \tan(\theta) \text{ et } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\tan(\theta)} = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) \text{ et } \frac{\pi}{2} - \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \arctan(x) \end{aligned}$$

La dérivée d'arctan(x) est $\dfrac{1}{1+x^2}$ (voir L1/DERIVEE.PDF).



Annexe : Trigonométrie

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

FORMULES

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$
$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$
$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$
$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$
$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$
$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2}$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2}$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a + b) + \sin(a - b)}{2}$$
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\frac{p + q}{2}\cos\frac{p - q}{2}$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\frac{p + q}{2}\sin\frac{p - q}{2}$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\frac{p + q}{2}\cos\frac{p - q}{2}$$

pour $t = \tan(\frac{x}{2})$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$
$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$
$$\tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$
$$\mathrm{ch}(a + b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$$
$$\mathrm{ch}(a - b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$$
$$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$$
$$\mathrm{ch}^2(x) = \frac{1 + \mathrm{ch}(2x)}{2}$$
$$\mathrm{sh}(a + b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$$
$$\mathrm{sh}(a - b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$$
$$\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$$
$$\mathrm{sh}^2(x) = \frac{\mathrm{ch}(2x) - 1}{2}$$
$$\mathrm{th}(a + b) = \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}$$
$$\mathrm{th}(a - b) = \frac{\mathrm{th}(a) - \mathrm{th}(b)}{1 - \mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}$$
$$\mathrm{th}(2x) = \frac{2\,\mathrm{th}(x)}{1 + \mathrm{th}^2(x)}$$
$$\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) = \frac{\mathrm{ch}(a + b) + \mathrm{ch}(a - b)}{2}$$
$$\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \frac{\mathrm{ch}(a + b) - \mathrm{ch}(a - b)}{2}$$
$$\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \frac{\mathrm{sh}(a + b) + \mathrm{sh}(a - b)}{2}$$
$$\mathrm{ch}(p) + \mathrm{ch}(q) = 2\,\mathrm{ch}\frac{p + q}{2}\,\mathrm{ch}\frac{p - q}{2}$$
$$\mathrm{ch}(p) - \mathrm{ch}(q) = 2\,\mathrm{sh}\frac{p + q}{2}\,\mathrm{sh}\frac{p - q}{2}$$
$$\mathrm{sh}(p) + \mathrm{sh}(q) = 2\,\mathrm{sh}\frac{p + q}{2}\,\mathrm{ch}\frac{p - q}{2}$$

pour $t = \mathrm{th}(\frac{x}{2})$

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}$$
$$\mathrm{th}(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

DERIVEES

$\cos'(x) = -\sin(x)$

$\sin'(x) = \cos(x)$

$\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$

$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$

$\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$

PARAMETRAGES

paramétrage de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$x = a\cos(t) \quad y = b\sin(t)$

paramétrage de l'hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$x = a\,\mathrm{ch}(t) \quad y = b\,\mathrm{sh}(t)$

EQUIVALENTS au voisinage de 0

$\sin(x) \sim x$

$\cos(x) \sim 1$

$\tan(x) \sim x$

$1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$

$\mathrm{sh}(x) \sim x$

$\mathrm{ch}(x) \sim 1$

$\mathrm{th}(x) \sim x$

$\mathrm{ch}(x) - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$

DEVELOPPEMENTS LIMITES au voisinage de 0

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

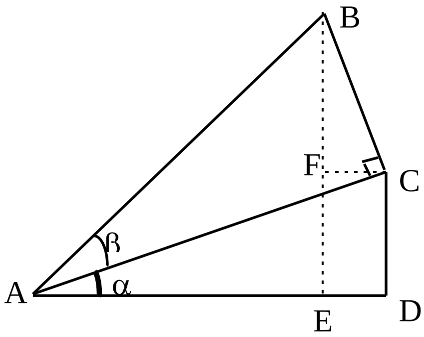
$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) A l'aide de la figure suivante, démontrer les formules relatives à $\sin(\alpha + \beta)$ et $\cos(\alpha + \beta)$:



Exo.2) Soit n entier positif et a réel tel que $\frac{a}{2^n}$ soit différent de 0 modulo π.

a) Montrer que : $\forall\ n$, $\cos(\frac{a}{2}) \cos(\frac{a}{4}) \dots \cos(\frac{a}{2^n}) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(a)}{\sin(\frac{a}{2^n})}$

b) Que vaut la limite de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$?

c) En déduire la formule de Viète (1579) :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \dots$$

Exo.3) a) Comparer $\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}})$.

b) Plus généralement, comparer $\arctan(x)$ et $\arcsin(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$.

Exo.4) Comparer $\arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$ et $\arctan(x)$.

Exo.5) Comparer $4\arctan(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ et $\arccos(\frac{1}{3})$.

Exo.6) Pour $x \geq 0$, comparer les fonctions :

a) $f_1(x) = \tan(\frac{\arctan(x)}{2})$

b) $f_2(x) = \text{th}(\frac{\text{argth}(x)}{2})$ $(x < 1)$

c) $f_3(x) = \tan(\frac{\arcsin(x)}{2})$ $(x < 1)$

d) $f_4(x) = \text{th}(\frac{\text{argsh}(x)}{2})$

Exo.7) Montrer que $\frac{\pi}{4}$ est égal aux expressions suivantes :

a) $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$ (Hutton 1776)

b) $2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7})$ (Hutton 1776)

c) $2\arctan(\frac{1}{2}) - \arctan(\frac{1}{7})$

d) $4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$ (formule de Machin, qui permit de calculer une centaine de décimales de π vers 1700 et 10000 vers 1958. Le record actuel est de plusieurs milliers de milliards de décimales, obtenues avec d'autres formules).

e) $5\arctan(\frac{1}{7}) + 2\arctan(\frac{3}{79})$ (Euler 1755)

f) $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})$ (Strassnitzk, Dase 1844)

g) $2\arctan(\frac{1}{4}) + \arctan(\frac{1}{7}) + 2\arctan(\frac{1}{13})$

h) $6\arctan(\frac{1}{8}) + 2\arctan(\frac{1}{57}) + \arctan(\frac{1}{239})$ (Störmer 1896)

i) $3\arctan(\frac{1}{4}) + \arctan(\frac{1}{20}) + \arctan(\frac{1}{1985})$ (Loney 1893)

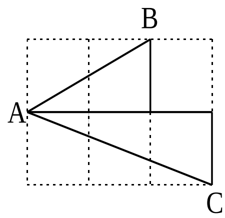
j) $4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{70}) + \arctan(\frac{1}{99})$ (Euler 1764)

k) $12\arctan(\frac{1}{18}) + 8\arctan(\frac{1}{57}) - 5\arctan(\frac{1}{239})$ (Gauss 1836)

l) $8\arctan(\frac{1}{10}) - \arctan(\frac{1}{239}) - 4\arctan(\frac{1}{515})$ (Klingenstierna 1730)

m) Soit (x_n) la suite définie par $x_1 = 1$ et $\forall\, n$, $x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1$. Soit $y_n = x_n + 1$. Montrer que, pour tout n, $\frac{\pi}{4} = \sum_{i=1}^{n} \arctan(\frac{1}{y_i}) + \arctan(\frac{1}{x_{n+1}})$. On pourra commencer par montrer que, pour tout réel t, $\arctan(\frac{1}{1+t+t^2}) = \arctan(1+t) - \arctan(t)$.

Donner également quelques démonstrations géométriques telles celle-ci pour le a)



On remarque en effet que l'angle en A vaut $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$ et que le triangle ABC est un triangle rectangle en B et isocèle (BA = BC), de sorte que l'angle A vaut aussi $\frac{\pi}{4}$.

Exo.8) Résoudre $\arccos(x) = \arctan(x)$.

Exo.9) Résoudre $\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}$.

Exo.10) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin^2(x) - \frac{\pi^2}{4}}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exo.11) Soit $\varphi(x) = \frac{\mathrm{th}(x)}{x}$ pour $x > 0$.

a) Montrer que φ est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $]0,1[$.

b) Soit ψ sa réciproque. Donner un équivalent de ψ au voisinage de 0.

Exo.12) Donner des équivalents de arccos(x) et argch(x) au voisinage de 1.

Exo.13) On considère les fonctions tan définie de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ et sh définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Déterminer une fonction f de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\ \theta \in\ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\text{sh}(f(\theta)) = \tan(\theta)$.

b) Cette fonction permet d'établir une correspondance entre sh et tan. Que vaut $\text{ch}(f(\theta))$ et $\text{th}(f(\theta))$?

c) A quoi correspondent les formules $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$? $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$?

Exo.14) a) Simplifier argsh(tan(arcsin(th(t)))).

b) Simplifier sin(arctan(cotan(arccos(x)))).

Exo.15) Soit $x \geq 1$. Soient (C_n), (S_n) et (T_n) les suites définies par :

$$C_0 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \qquad S_0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad C_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + C_n}{2}} \qquad S_{n+1} = \frac{S_n}{C_{n+1}} \qquad T_n = \frac{S_n}{C_n}$$

a) Montrer que, pour tout n, $T_n \leq \ln(x) \leq S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(x)$.

b) Donner un équivalent de $S_n - T_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exo.16) a) Montrer que $\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{25}\right)\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) Montrer que $\sin\left(\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{4465}{281232}\sqrt{3}\right)\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{13}\sqrt{229}}$.

2- Solutions

Sol.1) L'angle α se retrouve aussi en B dans le triangle FBC car (BF) $\perp$ (AD) et (BC) $\perp$ (AC).
Posant AB = 1, on a AC = $\cos(\beta)$, BC = $\sin(\beta)$, AD = $\cos(\alpha)\cos(\beta)$, CD = $\sin(\alpha)\cos(\beta)$, FC = $\sin(\alpha)\sin(\beta)$, FB = $\cos(\alpha)\sin(\beta)$. Il suffit alors de constater que :

AE = $\cos(\alpha + \beta)$ = AD – FC

et que BE = $\sin(\alpha + \beta)$ = CD + FB.

Sol.2) a) Par récurrence sur n. Pour $n = 1$, la formule est $\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$ qui résulte de :

$$\sin(a) = \sin\left(2 \times \frac{a}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right).$$

Supposons la formule vraie au rang n. On a alors :

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{4}\right) \ldots \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin(a)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$$

On a par ailleurs $\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$ et, en remplaçant au dénominateur, on obtient le résultat attendu au rang $n + 1$.

b) Quand n tend vers l'infini, la limite est $\dfrac{\sin(a)}{a}$.

c) Prendre $a = \dfrac{\pi}{2}$, avec $\cos(\dfrac{a}{2}) = \cos(\dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$. Les radicaux (r_n) intervenant dans la formule vérifient $r_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \cos(\dfrac{a}{2})$, et, pour $n > 1$, $r_n = \sqrt{\dfrac{1 + r_{n-1}}{2}}$. Par récurrence, $r_n = \cos(\dfrac{a}{2^n})$. D'après les questions précédentes, la limite du produit $r_1...r_n$ est $\dfrac{\sin(a)}{a} = \dfrac{2}{\pi}$.

Sol.3) a) Ces deux nombres sont éléments de $[0, \dfrac{\pi}{2}]$. Il suffit de vérifier qu'ils ont même tangente :

$$\tan(\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}})) = \frac{\sin(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}}))}{\cos(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}}))} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}}))}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Si $\theta = \arctan(x)$ alors $x = \tan(\theta)$ et $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, de sorte que $\cos(\theta) \geq 0$. On a donc :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\sin(\theta) = \tan(\theta)\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Comme $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, on a bien $\theta = \arcsin(\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}})$.

Pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on a $\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et on retrouve le a).

Sol.4) Les deux expressions étant des fonctions impaires de x, on peut se limiter au cas $x \geq 0$.
Soit $\theta = \arctan(x)$. Alors $x = \tan(\theta)$ donc :

$$\arcsin(\frac{2x}{1 + x^2}) = \arcsin(\frac{2\tan(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}) = \arcsin(\sin(2\theta))$$

Si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ donc $0 \leq 2\theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, donc :

$$\arcsin(\frac{2x}{1 + x^2}) = \arcsin(\sin(2\theta)) = 2\theta = 2 \arctan(x)$$

Si $x \geq 1$, alors $\dfrac{\pi}{4} \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ donc $\dfrac{\pi}{2} \leq 2\theta < \pi$ donc $0 \leq \pi - 2\theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ donc :

$$\arcsin(\frac{2x}{1 + x^2}) = \arcsin(\sin(2\theta)) = \arcsin(\sin(\pi - 2\theta)) = \pi - 2\theta = \pi - 2 \arctan(x)$$

Sol.5) Comparons les tangentes des deux nombres :

$$\tan(2 \arctan(\sqrt{3} + \sqrt{2})) = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{1 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = -\frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4 + 2\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(4\arctan(\sqrt{3}+\sqrt{2})) = -\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2}$$

Comme $\frac{1}{3} \geq 0$, $\arccos(\frac{1}{3}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos(\arccos(\frac{1}{3})) \geq 0$ et $\tan(\arccos(\frac{1}{3})) \geq 0$. On a donc :

$$\frac{1}{3} = \cos(\arccos(\frac{1}{3})) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arccos(\frac{1}{3}))}} \text{ donc } \tan(\arccos(\frac{1}{3})) = 2\sqrt{2}.$$

Comme $\sqrt{3}+\sqrt{2} \geq 1$, $\arctan(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, donc $4\arctan(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \in [\pi, 2\pi]$. Par ailleurs, on a vu que $\arccos(\frac{1}{3}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Comme les deux nombres ont des tangentes opposées, on a :

$$4\arctan(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 2\pi - \arccos(\frac{1}{3})$$

Sol.6) a) Posons $\theta = \frac{\arctan(x)}{2} \in [0, \frac{\pi}{4}[$. On a donc $x = \tan(2\theta)$, avec $2\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On en tire :

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(2\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{car } \cos(2\theta) \geq 0$$

$$\sin(2\theta) = \tan(2\theta)\cos(2\theta) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Donc $f_1(x) = \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{\sin(2\theta)}{1+\cos(2\theta)} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$

b) De même, si $t = \frac{\text{argth}(x)}{2}$, on a $x = \text{th}(2t)$, donc :

$$\text{ch}(2t) = \frac{1}{\sqrt{1-\text{th}^2(2t)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{sh}(2t) = \text{th}(2t)\text{ch}(2t) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

D'où :

$$f_2(x) = \text{th}(t) = \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)} = \frac{\text{sh}(t)\text{ch}(t)}{\text{ch}^2(t)} = \frac{\text{sh}(2t)}{1+\text{ch}(2t)} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

c) Prenons $\varphi = \frac{\arcsin(x)}{2} \in [0, \frac{\pi}{4}[$. Donc $x = \sin(2\varphi)$ avec $2\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(2\varphi) = \sqrt{1-x^2}$ et :

$$f_3(x) = \tan(\varphi) = \frac{\sin(2\varphi)}{1+\cos(2\varphi)} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi, $\text{th}(\frac{\text{argth}(x)}{2}) = \tan(\frac{\arcsin(x)}{2}) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$

d) Prenons $u = \frac{\text{argsh}(x)}{2}$, donc $x = \text{sh}(2u)$, $\text{ch}(2u) = \sqrt{1+x^2}$ et :

$$f_4(x) = \text{th}(u) = \frac{\text{sh}(2u)}{1+\text{ch}(2u)} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

Ainsi, $\tan(\frac{\arctan(x)}{2}) = \text{th}(\frac{\text{argsh}(x)}{2}) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$

Sol.7) La méthode générale consiste à montrer que la tangente du nombre considéré vaut 1 et que le nombre se trouve dans un intervalle où seul $\frac{\pi}{4}$ a pour tangente 1, par exemple un intervalle du type $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ou $[0, \pi]$ ou $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$, etc.

a) Outre la démonstration géométrique donnée ci-dessus, on a :

$$\tan(\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1$$

et $\quad \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$

car $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ donc $0 \leq \arctan(\frac{1}{2}) \leq \frac{\pi}{4}$. De même pour $\arctan(\frac{1}{3})$.

b) On a :

$$\tan(2\arctan(\frac{1}{3})) = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{3}{4}$$

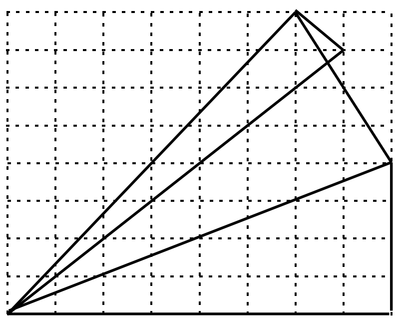
puis $\quad \tan(2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7}) = \dfrac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{7}} = 1$

donc $2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7}) = \frac{\pi}{4} \bmod \pi$

et $2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7}) \in [0, \frac{3\pi}{4}]$ car chaque arctan est élément de $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Donc $2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7}) = \frac{\pi}{4}$

c) On peut utiliser la méthode générale, ou bien remarquer que c) = 2 × a) – b), ou bien utiliser une démonstration géométrique :



d) $\quad \tan(2\arctan(\frac{1}{5})) = \dfrac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{5}{12}$

puis $\quad \tan(4\arctan(\frac{1}{5})) = \dfrac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5^2}{12^2}} = \dfrac{120}{119}$

Comme $0 \le 4\arctan(\frac{1}{5}) \le 4\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) \le 4 \times \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ et que le seul angle dans $[0, \frac{2\pi}{3}]$ dont la tangente est $\frac{120}{119}$ est $\arctan(\frac{120}{119})$, on a $4\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan(\frac{120}{119})$.

Enfin $\quad \tan(4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})) = \dfrac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}} = 1.$

On conclut en remarquant que $0 \le \arctan(\frac{120}{119}) - \arctan(\frac{1}{239}) < \frac{\pi}{2}$.

e) $\quad \tan(2\arctan(\frac{1}{7})) = \dfrac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{7^2}} = \dfrac{7}{24}$

puis $\quad \tan(4\arctan(\frac{1}{7})) = \dfrac{\frac{7}{12}}{1-\frac{7^2}{24^2}} = \dfrac{336}{527}$

et $\quad \tan(5\arctan(\frac{1}{7})) = \dfrac{\frac{336}{527} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{336}{527} \times \frac{1}{7}} = \dfrac{2879}{3353}$

Comme $0 \le 5\arctan(\frac{1}{7}) \le 5\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) \le \frac{5\pi}{6}$ et que le seul angle dans $[0, \frac{5\pi}{6}]$ dont la tangente est $\frac{2879}{3353}$ est $\arctan(\frac{2879}{3353})$, on a $5\arctan(\frac{1}{7}) = \arctan(\frac{2879}{3353})$.

De même :

$$\tan(2\arctan(\frac{3}{79})) = \dfrac{\frac{6}{79}}{1-\frac{3^2}{79^2}} = \dfrac{237}{3116}$$

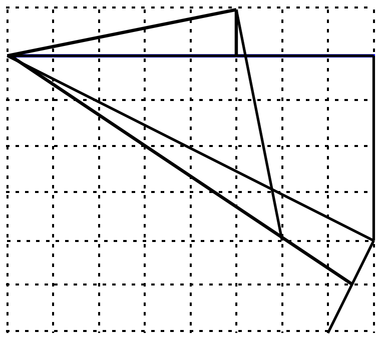
avec $0 \le 2\arctan(\frac{3}{79}) < 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc $2\arctan(\frac{3}{79}) = \arctan(\frac{237}{3116})$

Enfin :

$$\tan(5\arctan(\frac{1}{7}) + 2\arctan(\frac{3}{79})) = \dfrac{\frac{2879}{3353} + \frac{237}{3116}}{1 - \frac{2879}{3353} \times \frac{237}{3116}} = 1$$

Comme $0 \le \arctan(\frac{2879}{3353}) + \arctan(\frac{237}{3116}) < \pi$, on a bien $5\arctan(\frac{1}{7}) + 2\arctan(\frac{3}{79}) = \frac{\pi}{4}$.

f) Outre la démonstration générale, on pourra aussi essayer de comprendre pourquoi la figure suivante donne une démonstration de la formule $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8}) = \frac{\pi}{4}$.



g) laissé au lecteur.
h) i) j) k) l) laissés au lecteur.
m) Montrons que $\arctan(\frac{1}{1+t+t^2}) = \arctan(1+t) - \arctan(t)$. Les deux membres sont éléments de $[0, \pi]$ et ont même tangente. En effet :

$$\tan(\arctan(\frac{1}{1+t+t^2})) = \frac{1}{1+t+t^2}$$

$$\tan(\arctan(1+t) - \arctan(t)) = \frac{1+t-t}{1+(1+t)t} = \frac{1}{1+t+t^2}$$

On montre ensuite la proposition demandée par récurrence. Pour $n = 1$, la formule donne $\frac{\pi}{4} = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$ qui est la formule a). Si la relation est vraie au rang $n - 1$, il suffit de montrer que $\arctan(\frac{1}{x_n}) = \arctan(\frac{1}{y_n}) + \arctan(\frac{1}{x_{n+1}})$. Or :

$$\arctan(\frac{1}{x_{n+1}}) = \arctan(\frac{1}{x_n^2 + x_n + 1}) = \arctan(1 + x_n) - \arctan(x_n)$$

$$= (\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{1+x_n})) - (\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x_n}))$$

$$= \arctan(\frac{1}{x_n}) - \arctan(\frac{1}{y_n})$$

Sol.8) Les deux termes doivent appartenir à $[0, \pi] \cap]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[= [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $x \geq 0$.

En prenant $\theta = \arctan(x)$, on a $\tan(\theta) = x$ et $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. cos étant bijective sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, en appliquant cos aux deux membres de l'égalité $\arccos(x) = \arctan(x)$, on obtient l'équation équivalente suivante :

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{1+x^2}$$ le sens $\Leftarrow$ est valide car $x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x^4 + x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ car $x^2 \geq 0$. L'autre racine, négative, n'est pas retenue

$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ car $x \geq 0$

Sol.9) Si on prend la tangente des deux membres et si on développe le membre de gauche, on obtient :

$$\frac{x^3 - 12x}{3x^2 - 10} = \tan(\frac{5\pi}{4}) = 1$$

donc $x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$

dont les racines sont 5, $\sqrt{3} - 1$ et $-\sqrt{3} - 1$. Ces trois nombres sont donc tels que :

$$\tan(\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3)) = \tan(\frac{5\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \quad \arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{\pi}{4} \bmod \pi$$

Il suffit, pour chacune des valeurs trouvées de x, d'encadrer chaque arctan, afin de déterminer un intervalle auquel appartient le nombre $\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3)$. Par exemple $2 \geq 1$, donc $\frac{\pi}{4} \leq \arctan(2) \leq \frac{\pi}{2}$. On établira des encadrements analogues pour toutes les autres valeurs rencontrées. D'où (entre autres possibilités) :

$$\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$$

$$\arctan(-4+\sqrt{3}) + \arctan(-1+\sqrt{3}) + \arctan(2+\sqrt{3}) \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$$

$$\arctan(-4-\sqrt{3}) + \arctan(-1-\sqrt{3}) + \arctan(2-\sqrt{3}) \in [-\pi, 0]$$

Au vu de leur intervalle d'appartenance, on a donc :

$$\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) = \frac{5\pi}{4}$$

$$\arctan(-4-\sqrt{3}) + \arctan(-1+\sqrt{3}) + \arctan(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan(-4-\sqrt{3}) + \arctan(-1-\sqrt{3}) + \arctan(2-\sqrt{3}) = -\frac{3\pi}{4}$$

Seule $x = 5$ est solution de l'équation initale.

Sol.10) Posons $\frac{\pi}{2} - \theta = \arcsin(x)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arcsin^2(x) - \frac{\pi^2}{4}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\theta\to 0} \frac{(\frac{\pi}{2}-\theta)^2 - \frac{\pi^2}{4}}{\sqrt{1-\sin^2(\frac{\pi}{2}-\theta)}} = \lim_{\theta\to 0} \frac{(\frac{\pi}{2}-\theta)^2 - \frac{\pi^2}{4}}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{-\pi\theta + \theta^2}{\sin(\theta)} = -\pi$$

Sol.11) a) On a $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = 0$.

Montrons que φ est strictement décroissante. $\varphi'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{\mathrm{ch}^2(x)} - \mathrm{th}(x)}{x^2}$ donc :

$$\varphi'(x) < 0$$

$\Leftrightarrow \quad x < \mathrm{ch}^2(x)\ \mathrm{th}(x) = \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(2x)}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2x < \mathrm{sh}(2x)$ ce qui est vrai. Pour le voir, ou bien on étudie la fonction $x \to \mathrm{sh}(2x) - 2x$, ou bien on remarque que sh est une fonction convexe sur $[0, +\infty[$, donc son graphe est situé au dessus de sa tangente en 0.

b) $x = \varphi(y) = \dfrac{\mathrm{th}(y)}{y} \sim \dfrac{1}{y}$ quand y tend vers $+\infty$ ou quand x tend vers 0. Donc $y = \psi(x) \sim \dfrac{1}{x}$.

Sol.12) Pour $0 \le x \le 1$, posons $x = \cos(\theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. $\theta = \arccos(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1.

On a alors :

$$x^2 = \cos^2(\theta)$$

donc $1 - x^2 = \sin^2(\theta) \sim \theta^2$ quand θ tend vers 0 ou quand x tend vers 1

donc $\arccos(x) = \theta \sim \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x} \sim \sqrt{2}\,\sqrt{1-x}$ quand x tend vers 1

On montrera de même que $\mathrm{argch}(x) \sim \sqrt{2}\,\sqrt{x-1}$ quand x tend vers 1 en prenant $t \ge 0$ tel que $x = \mathrm{ch}(t)$, $t = \mathrm{argch}(x)$. On utilisera $x^2 - 1 = \mathrm{sh}^2(t) \sim t^2$.

Sol.13) a) On a $f(\theta) = \mathrm{argsh}(\tan(\theta)) = \ln(\tan(\theta) + \sqrt{1 + \tan^2(\theta)}) = \ln(\tan(\theta) + \dfrac{1}{\cos\theta})$

$$= \ln(\frac{\sin(\theta) + 1}{\cos(\theta)})$$

On peut continuer le calcul en utilisant $\sin(\theta) = \dfrac{2\tan(\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})}$ et $\cos(\theta) = \dfrac{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\theta}{2})}$ donc :

$$\frac{\sin(\theta) + 1}{\cos(\theta)} = \frac{1 + 2\tan(\frac{\theta}{2}) + \tan^2(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{(1 + \tan(\frac{\theta}{2}))^2}{1 - \tan^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{1 + \tan(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan(\frac{\theta}{2})} = \tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})$$

donc $f(\theta) = \ln(\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}))$.

Nous avons rencontré cette fonction dans L1/INTEGRAL.PDF comme primitive de $\dfrac{1}{\cos(\theta)}$. De fait, en dérivant la fonction composée argsh(tant(θ)), on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}}\,\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

b) $\quad \mathrm{ch}(f(\theta)) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(f(\theta))} = \sqrt{1 + \tan^2(\theta)} = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$

$$\text{th}(f(\theta)) = \frac{\text{sh}(f(\theta))}{\text{ch}(f(\theta))} = \tan(\theta)\cos(\theta) = \sin(\theta)$$

autrement dit f est une fonction qui transforme sh en tan, ch en $\frac{1}{\cos}$, th en sin. On notera une ressemblance entre les graphes de tan, $\frac{1}{\cos}$, sin sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et ceux sur $\mathbf{R}$ de sh, ch, th, l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ étant distendu en $]-\infty, \infty[$.

c) Posons $t = f(\theta)$. On obtient :

$$1 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \frac{1}{\text{ch}^2(t)} + \text{th}^2(t) \text{ donc } \text{ch}^2(t) = 1 + \text{sh}^2(t).$$

et $\quad \text{sh}(t) = \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \text{th}(t)\ \text{ch}(t)$.

Sol.14) a) $\text{argsh}(\tan(\arcsin(\text{th}(t)))) = \text{argsh}(\frac{\sin(\arcsin(\text{th}(t)))}{\cos(\arcsin(\text{th}(t)))}) = \text{argsh}(\frac{\text{th}(t)}{\sqrt{1 - \text{th}^2(t)}})$

$$= \text{argsh}(\text{th}(t) \times \text{ch}(t)) = \text{argsh}(\text{sh}(t)) = t$$

Autre méthode. Si on pose $t = f(\theta)$ avec le f de l'exercice précédent et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors :

$$\text{th}(t) = \sin(\theta)$$
$$\text{sh}(t) = \tan(\theta)$$
$$\text{ch}(t) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

et $\quad \text{argsh}(\tan(\arcsin(\text{th}(t)))) = \text{argsh}(\tan(\theta)) = t$

On aurait de même :

$$t = \text{argth}(\text{th}(t)) = \text{argth}(\sin(\theta)) = \text{argth}(\sin(\arctan(\text{sh}(t)))$$

et d'autres formules comparables.

b) La fonction est définie pour $x \in]-1, 1[$. Posons $\theta = \arccos(x) \in]0, \pi[$.

Pour $x = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\text{cotan}(\theta) = 0$ et $\sin(\arctan(\text{cotan}(\arccos x))) = 0$.

Sinon on a :

$$\sin(\arctan(\text{cotan}(\arccos x))) = \sin(\arctan(\text{cotan}(\theta)))$$
$$= \sin(\arctan(\frac{1}{\tan(\theta)}))$$
$$= \sin(\arctan(\tan(\frac{\pi}{2} - \theta))$$

avec $\frac{\pi}{2} - \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ domaine d'inversion de tan

$$= \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$$
$$= \cos(\theta)$$
$$= x$$

Sol.15) a) Si on pose $x = e^t$, alors, $C_0 = \text{ch}(t)$, $S_0 = \text{sh}(t)$, $T_0 = \text{th}(t)$, et, par récurrence, pour tout n, $C_n = \text{ch}(\frac{t}{2^n})$, $S_n = 2^n\ \text{sh}(\frac{t}{2^n})$, et $T_n = 2^n\ \text{th}(\frac{t}{2^n})$.

Utiliser ensuite le fait que, pour $u \geq 0$, $\text{th}(u) \leq u \leq \text{sh}(u)$ et que $\text{th}(u) \sim \text{sh}(u) \sim u$ quand u tend vers 0.

b) Enfin $S_n - T_n = 2^n \text{ th}(\frac{t}{2^n}) (\text{ch}(\frac{t}{2^n}) - 1) \sim 2^n \times \frac{t}{2^n} \times \frac{1}{2} \frac{t^2}{2^{2n}} = \frac{t}{2^{2n+1}}$ quand n tend vers l'infini.

La convergence est rapide et l'exercice donne un moyen numérique efficace de calcul du logarithme d'un nombre à partir des opérations élémentaires.

Sol.16) a) Soit $\theta = \frac{1}{3} \arccos(\frac{2\sqrt{5}}{25})$. On a $3\theta = \arccos(\frac{2\sqrt{5}}{25})$, ou encore $\cos(3\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{25}$, ou enfin, en développant $\cos(3\theta)$: $4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{25}$.

$\cos(\theta)$ est donc une solution positive de l'équation $4x^3 - 3x = \frac{2\sqrt{5}}{25}$. On vérifie facilement que $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ est également solution. Enfin, l'étude de la fonction $x \to 4x^3 - 3x$ permet de voir qu'il y a une unique racine positive à cette équation. Donc $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) On procède comme au a) Posons $\theta = \frac{1}{3} \arctan(\frac{4465}{281232} \sqrt{3})$. On a $3\theta = \arctan(\frac{4465}{281232} \sqrt{3})$ donc $\cos(3\theta) \geq 0$. Par ailleurs $\tan(3\theta) = \frac{4465}{281232} \sqrt{3}$ d'où l'on tire :

$$\cos(3\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(3\theta)}} = \frac{93744}{8862529} \sqrt{8931}.$$

En développant $\cos(3\theta)$, on obtient :

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = \frac{93744}{8862529} \sqrt{8931}$$

Donc $\cos(\theta)$ est une racine positive de l'équation $4x^3 - 3x = \frac{93744}{8862529} \sqrt{8931}$.

On veut savoir si $\sin(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{13}\sqrt{229}}$ ou si $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} = \frac{63}{5954} \sqrt{8931}$. On peut vérifier que cette dernière valeur est bien solution de l'équation $4x^3 - 3x = \frac{93744}{8862529} \sqrt{8931}$. Par ailleurs, l'étude de la fonction $x \to 4x^3 - 3x$ permet de voir qu'il y a une unique racine positive à cette équation.

◆