

Vous avez toute liberté pour télécharger, imprimer, photocopier ce cours et le diffuser gratuitement. Toute diffusion à titre onéreux ou utilisation commerciale est interdite sans accord de l'auteur.

Si vous êtes le gestionnaire d'un site sur Internet, vous avez le droit de créer un lien de votre site vers mon site, à condition que ce lien soit accessible librement et gratuitement. Vous ne pouvez pas télécharger les fichiers de mon site pour les installer sur le vôtre.

LES REELS

PLAN

I : Corps des réels

- 1) Corps totalement ordonné
- 2) Rationnels et irrationnels
- 3) Propriétés caractéristiques de \mathbf{R}

II : Conséquences de la propriété de la borne supérieure

- 1) Partie entière d'un réel
- 2) Parties denses de \mathbf{R}
- 3) Intervalles
- 4) Droite achevée

Annexe : corps non archimédien

Exercices

- 1) Énoncés
- 2) Solutions

I : Corps des réels

1- Corps totalement ordonné

Soit $(\mathbf{K}, +, \times)$ un corps. Il est dit **totalment ordonné** s'il est muni d'une relation d'ordre total \leq compatible avec ses opérations. Plus précisément, la relation d'ordre doit vérifier :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4, a \leq b \text{ et } c \leq d \Rightarrow a + b \leq c + d$$

$$\forall (a, b, c) \in \mathbf{K}^3, a \leq b \text{ et } c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$$

Si $a < b$, alors, pour tout c , $a + c < b + c$. On a déjà $a + c \leq b + c$ d'après le premier axiome en prenant $c = d$. On ne peut avoir $a + c = b + c$ sinon on aurait $a + c + (-c) = b + c + (-c)$ et donc $a = b$.

EXEMPLE :

□ \mathbf{Q} et \mathbf{R} sont des corps totalement ordonnés.

□ $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}$ est un corps totalement ordonné.

Notons 0 et 1 les neutres pour la somme et le produit dans \mathbf{K} . Si \mathbf{K} est totalement ordonné, on a nécessairement $1 \geq 0$ (et même $1 > 0$ car 1 est supposé différent de 0 dans un corps). En effet, si $1 \leq 0$, alors $1 + (-1) \leq 0 + (-1)$ donc $0 \leq -1$, donc $0 \times (-1) \leq (-1) \times (-1)$ donc $0 \leq 1$.

EXEMPLE

□ Il est impossible de faire de \mathbf{C} un corps totalement ordonné, car quelle que soit la relation d'ordre total compatible avec les opérations, que l'on ait $i > 0$ ou $-i > 0$, on en déduirait dans chaque cas en élevant au carré que $-1 > 0$ et donc $1 < 0$.

Pour tout entier relatif n , posons :

$$n1 = \begin{cases} 1 + \dots + 1 & n \text{ fois si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -1 - \dots - 1 & |n| \text{ fois si } n < 0 \end{cases}$$

Pour tout $n > 0$, $n1 > 0$ par récurrence sur n . On l'a montré ci-dessus pour $n = 1$, et si $n1 > 0$, alors $(n + 1)1 = n1 + 1 > 1 > 0$. On en déduit que, si $n < 0$, alors $n1 < 0$. On a donc $n1 = 0 \Rightarrow n = 0$.

L'application $f: n \in \mathbf{Z} \rightarrow n1$ est telle que, pour tout n et m entier, $f(n + m) = f(n) + f(m)$. Elle est de plus injective. En effet, si $f(n) = f(m)$ avec $n \geq m$ par exemple, alors $n1 = m1$, donc $(n - m)1 = 0$ et donc $n - m = 0$ d'après la remarque ci-dessus et donc $n = m$. On peut alors injecter \mathbf{Z} dans \mathbf{K} en confondant l'entier n et son image $f(n)$. \mathbf{K} étant un corps contenant \mathbf{Z} , il contient donc également \mathbf{Q} . Ainsi, tout corps totalement ordonné est une extension de \mathbf{Q} .

2- Rationnels et irrationnels

Nous ne définirons pas ce qu'est un réel. Nous supposons seulement qu'il existe un corps totalement ordonné \mathbf{R} , contenant \mathbf{Q} , et doté de certaines propriétés caractéristiques. Ces propriétés caractéristiques de \mathbf{R} sont données dans le prochain paragraphe. Soit x un réel.

ou bien x appartient à \mathbf{Q} . x est dit rationnel.

ou bien x n'appartient pas à \mathbf{Q} . x est dit irrationnel. Exemples : $\sqrt{2}$, π , e , $\ln(2)$...

Voici une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers strictement positifs, on peut

choisir $\frac{p}{q}$ irréductible (c'est-à-dire p et q sans diviseurs communs autre que 1). On a alors $p^2 = 2q^2$. p^2

est pair, donc p aussi (si p est impair, $p = 2k + 1$ et $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair). Ainsi $p = 2k$. Donc $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ donc $2k^2 = q^2$. Donc q est pair. Ce qui est impossible car la fraction est irréductible.

3- Propriétés caractéristiques de \mathbf{R}

Jusqu'au XIXème, les réels ne sont pas définis (comme dans le 2) ci-dessus). Certaines propriétés sont utilisées implicitement. Les mathématiciens du XIXème se sont employés à les mettre à jour explicitement. Ainsi, Cauchy utilise-t-il vers 1820 une propriété analogue à celle que nous appelons propriété des segments emboîtés un peu plus bas. Plus tard, voici ce que Dedekind (1831-1916) écrit sur la droite réelle (Continuité et nombres irrationnels, 1872) :

La comparaison entre le domaine \mathbf{Q} des nombres rationnels et une droite induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité ?[...] J'y ai réfléchi longtemps en vain, mais finalement j'ai trouvé ce que je cherchais. Les avis sur cette découverte seront peut-être partagés ; je crois cependant que la plupart des gens en trouveront le contenu bien trivial. Il consiste en ceci. [...] Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit situé à gauche de tout point de la seconde classe, il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions.

La propriété précédente est appelée propriété des coupures de Dedekind. Enfin, la plupart des cours de premier cycle universitaire fait reposer les propriétés de \mathbf{R} sur l'existence d'une borne supérieure. L'objet de ce paragraphe est de montrer que les diverses présentations (existence d'une borne supérieure, coupures de Dedekind, segments emboîtés de Cauchy) sont équivalentes. Le lecteur, s'il le souhaite, peut passer directement au II) en admettant l'existence des bornes supérieures dans \mathbf{R} .

Considérons les propriétés suivantes, où \mathbf{K} désigne un corps totalement ordonné (entre autres \mathbf{Q} ou \mathbf{R}) :

(P₁) (**Propriétés des coupures de Dedekind**) Si (A,B) forme une partition de \mathbf{K} de façon que $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$, alors il existe un élément x_0 de \mathbf{K} tel que :

ou bien $A = \{a \in \mathbf{K} \mid a \leq x_0\}$ et $B = \{b \in \mathbf{K} \mid b > x_0\}$

ou bien $A = \{a \in \mathbf{K} \mid a < x_0\}$ et $B = \{b \in \mathbf{K} \mid b \geq x_0\}$

(P₂) (**Propriété de la borne supérieure**) Toute partie non vide majorée E admet une **borne supérieure**, i.e. l'ensemble des majorants de A admet un minimum, noté Sup(E).

(P₃) (**Propriété de la borne inférieure**) Toute partie non vide minorée E admet une **borne inférieure**, i.e. l'ensemble des minorants de A admet un maximum, noté Inf(E).

(P₄) a) (**Propriété des segments emboîtés**) Si (a_n) est une suite croissante et (b_n) une suite décroissante telles que $\forall n, a_n \leq b_n$, alors il existe un élément x de \mathbf{K} vérifiant :

$$\forall n, a_n \leq x \leq b_n$$

(x appartient à tous les segments $[a_n, b_n]$).

b) (**Propriété d'Archimède**) $\forall x > 0, \forall y > 0, \exists n \in \mathbf{N}, x < ny$.

\mathbf{Q} ne vérifie aucune de ces propriétés. Voici des contre-exemples :

(P₁) : $A = \{\frac{p}{q} \mid \frac{p}{q} < 0 \text{ ou } [\frac{p}{q} \geq 0 \text{ et } \frac{p^2}{q^2} < 2]\}$ et $B = \mathbf{Q} - A$. La coupure devrait être $\sqrt{2}$ mais c'est un irrationnel.

(P₂) : La partie A précédente, bien que majorée, n'admet pas de borne supérieure dans \mathbf{Q} . Sa borne supérieure existe dans \mathbf{R} , mais c'est un irrationnel : $\sqrt{2}$.

(P₃) : La partie B précédente, bien que minorée, n'admet pas de borne inférieure dans \mathbf{Q} . Sa borne inférieure existe dans \mathbf{R} , mais c'est un irrationnel : $\sqrt{2}$.

(P₄) : Si (a_n) est une suite croissante de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, et (b_n) une suite décroissante de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, alors il n'existe aucun rationnel x vérifiant :

$$\forall n, a_n \leq x \leq b_n$$

x existe dans \mathbf{R} , mais c'est l'irrationnel $\sqrt{2}$.

\mathbf{R} vérifie toutes ces propriétés. Nous allons d'abord montrer que, si l'une de ces propriétés est vraie, les autres aussi. Elles sont équivalentes.

Démonstration :

□ (P₁) \Rightarrow (P₂)

Soit E une partie non vide, majorée par m . Appelons B l'ensemble des majorants de E et $A = \mathbf{K} \setminus B$.

Il s'agit de montrer que B admet un minimum.

B est non vide, car m appartient à B.

A est non vide, car il existe un élément x dans E, et $x - 1$ ne majorant pas x se trouve donc dans A.

$\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$. En effet, $a \in A$ signifie que a ne majore pas E, et donc qu'il existe x élément de E tel que $a < x$. $b \in B$ signifie que b majore E et donc que $x \leq b$. Donc $a < b$.

$\{A, B\}$ forme une partition de \mathbf{K} . C'est évident puisque $A = \mathbf{K} \setminus B$.

Les hypothèses de (P_1) sont vérifiées. Il existe donc m_0 élément de \mathbf{K} tel que :

(α) ou bien $A = \{a \in \mathbf{K} \mid a \leq m_0\}$ et $B = \{b \in \mathbf{K} \mid b > m_0\}$

(β) ou bien $A = \{a \in \mathbf{K} \mid a < m_0\}$ et $B = \{b \in \mathbf{K} \mid b \geq m_0\}$

Dans le cas (β), m_0 est le plus petit élément de B. m_0 est donc le plus petit majorant de E. La borne supérieure de E existe donc et vaut m_0 .

Montrons que le cas (α) est impossible. Dans le cas (α), m_0 est élément de A et ne majore donc pas E. Il existe x élément de E tel que $m_0 < x$.

On a alors $m_0 < \frac{m_0 + x}{2} < x$. (Dans le cas d'un corps quelconque K, la division par 2 consiste à

multiplier par l'inverse de $1 + 1$). $\frac{m_0 + x}{2}$ étant supérieur à m_0 est élément de B, donc majore E. Il est cependant inférieur à x élément de E, ce qui est absurde. La contradiction est ainsi prouvée.

□ $(P_2) \Leftrightarrow (P_3)$

Supposons (P_2) . On peut donner deux démonstrations de (P_3) .

démonstration 1 :

Soit E une partie non vide minorée par m . Posons $E' = \{x \mid -x \in E\}$. Alors E' est non vide est majorée par $-m$. Elle admet donc une borne supérieure S d'après l'hypothèse (P_2) :

$\forall x \in E', x \leq S$ (S majore E')

$\forall \beta < S, \exists x \in E', x > \beta$ (S est le plus petit majorant. Aucun $\beta < S$ ne majore E')

Donc :

$\forall y \in E, -S \leq y$ (poser $x = -y$)

$\forall \alpha > -S, \exists y \in E, y < \alpha$ (car $-\alpha < S$, donc il existe x élément de E' tel que $-\alpha < x$, et l'on pose $y = -x$)

$-S$ est donc la borne inférieure de E, plus grand des minorants de E.

Une démonstration symétrique prouve que $(P_3) \Rightarrow (P_2)$

démonstration 2 :

Soit E une partie non vide minorée. Soit F l'ensemble non vide des minorants. Alors :

$$\forall x \in F, \forall y \in E, x \leq y$$

Donc F est majoré par n'importe quel élément de E. Il admet donc une borne supérieure S, qui, en tant que plus petit majorant de F, est plus petit que n'importe quel élément de E (qui sont tous des majorants de F). On a donc :

$$\forall y \in E, S \leq y$$

Cela montre que S minore E ; il appartient donc lui-même à l'ensemble F des minorants. Il s'agit donc, non seulement d'une borne supérieure, mais aussi d'un maximum. Ce maximum S est donc le plus grand des minorants de E. Mais cela est la définition même de la borne inférieure de E. Ainsi, $S = \text{Inf}(E)$.

□ $(P_2) \Rightarrow (P_4)$

(La raison pour laquelle nous préférons montrer (P_4) à partir de (P_2) et non de (P_3) est que (P_2) est traditionnellement choisi comme axiome vérifié par \mathbf{R} , plutôt que (P_3)).

Montrons a)

On a : $\forall n, a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$

Donc (a_n) est majorée par b_0 . Soit x la borne supérieure des a_n . x répond à la question. On a en effet pour tout $n, a_n \leq x$. Montrons que :

$$\forall m, x \leq b_m$$

Si $n < m$, on a : $a_n \leq a_m \leq b_m$

Si $n > m$, on a : $a_n \leq b_n \leq b_m$

On a donc :

$$\forall n, \forall m, a_n \leq b_m$$

Donc tous les b_m majorent les a_n . x étant le plus petit majorant, on en déduit que :

$$\forall m, x \leq b_m.$$

Montrons b)

Soit $E = \{ny \mid n \in \mathbf{N}, ny \leq x\}$. E est non vide (il contient 0) et majoré par x . Il admet donc une borne supérieure S . $S - y$ n'est donc pas un majorant de E , puisqu'il est inférieur à S , plus petit majorant. Donc il existe ny élément de E tel que :

$$S - y < ny$$

$\Leftrightarrow S < (n+1)y$. Donc $(n+1)y$ ne peut être élément de E , donc $(n+1)y > x$.

Une autre formulation de (P_4) a) est la suivante :

On appelle segment $[a, b]$ l'ensemble des x de \mathbf{K} vérifiant : $a \leq x \leq b$. Soit (I_n) une suite décroissante de segments. Alors l'intersection de tous les I_n est non vide.

□ $(P_4) \Rightarrow (P_1)$

Choisissons a et b arbitraires respectivement dans A et B . Posons $I_0 = [a, b]$ et définissons par récurrence une suite décroissante de segment (I_n) . Supposons I_{n-1} défini, avec $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $a_{n-1} \in A, b_{n-1} \in B$. On peut définir l'élément $\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, et l'on a :

$$a_{n-1} < \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} < b_{n-1}$$

$\{A, B\}$ formant une partition de \mathbf{K} , l'élément $\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ appartient soit à A , soit à B .

S'il appartient à A , on pose $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ et $b_n = b_{n-1}$.

S'il appartient à B , on pose $b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ et $a_n = a_{n-1}$.

Dans tous les cas, on a I_n inclus dans I_{n-1} , et de plus :

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

D'après la propriété a) de (P_4) , il existe x_0 tel que :

$$\forall n, a_n \leq x_0 \leq b_n$$

Il suffit alors de montrer que x_0 majore A et minore B . Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si x_0 ne majore pas A , il existe α élément de A tel que $x_0 < \alpha$.

Puisque $0 < \alpha - x_0$ et $0 < b_0 - a_0$, il existe, d'après la propriété b) de (P_4) un entier n tel que :

$$0 < b_0 - a_0 < n(\alpha - x_0)$$

Or $n < 2^n$ donc

$$0 < b_0 - a_0 < n(\alpha - x_0) < 2^n (\alpha - x_0)$$

$$\Leftrightarrow 0 < b_n - a_n < \alpha - x_0.$$

Par ailleurs, $a_n \leq x_0 \Leftrightarrow b_n - x_0 \leq b_n - a_n$.

Donc $b_n - x_0 < \alpha - x_0$

Donc $b_n < \alpha$ or ceci est impossible car tout élément de B est supérieur à tout élément de A.

On montre de même que x_0 minore B. Enfin il appartient à A ou B puisque $\{A, B\}$ réalise une partition de \mathbf{K} .

On notera l'intérêt de la propriété d'Archimède pour conclure.

Pourquoi \mathbf{R} vérifie-t-il l'une de ces propriétés ? Car :

DEFINITION

On suppose l'existence d'un corps totalement ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure.

On appelle corps des réels ce corps.

On prend donc (P_2) comme axiome de \mathbf{R} . \mathbf{R} vérifie donc également les autres propriétés. On peut montrer qu'un tel corps existe, ce que nous ne ferons pas ici. On le construit par exemple à partir des coupures de \mathbf{Q} . Par ailleurs, on montre qu'il est unique à isomorphisme près.

Rappelons les propriétés qui caractérisent la borne supérieure S d'une partie E majorée de \mathbf{R} . S est le plus petit des majorants de E, ce qui signifie :

$$\forall x \in E, x \leq S$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x > S - \varepsilon$$

Celles qui caractérisent la borne inférieure I d'une partie E minorée de \mathbf{R} sont :

$$\forall x \in E, I \leq x$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x < I + \varepsilon$$

ce qui signifie que I est le plus grand des minorants.

Une utilisation courante de la borne supérieure est la suivante :

$$\forall x \in A, x \leq M \Rightarrow \text{Sup}(A) \leq M$$

En effet, M majore A et $\text{Sup}(A)$ est le plus petit majorant. De même :

$$\forall x \in A, x \geq m \Rightarrow \text{Inf}(A) \geq m$$

II : Conséquences de la propriété de la borne supérieure

1- Partie entière d'un réel

PROPOSITION :

Soit x un réel. Il existe un unique entier p , appelé **partie entière** de x tel que :

$$p \leq x < p + 1$$

Démonstration :

□ Supposons d'abord $x > 0$. Considérons $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n \leq x\}$. Cet ensemble est une partie non vide majorée. Elle admet donc une borne supérieure α . Montrons que α est entier et élément de A . En effet, $\alpha - 1$ n'est pas un majorant de A donc il existe n élément de A tel que $\alpha - 1 < n \leq \alpha$. Les entiers supérieurs à n sont alors supérieurs à α et ne peuvent être dans A . n est donc le plus grand élément de A et est donc égal à α . Ce qui prouve l'existence. On note $p = \lfloor x \rfloor$.

Pour $x < 0$, posons $p = -\lfloor -x \rfloor - 1$ si x est non entier, et x si x est entier. Dans le premier cas, on a :

$$\lfloor -x \rfloor < -x < \lfloor -x \rfloor + 1$$

donc $-\lfloor -x \rfloor - 1 < x < -\lfloor -x \rfloor$

donc $p = -\lfloor -x \rfloor - 1$ est bien la partie entière de $-x$. Ainsi, $\lfloor -3,5 \rfloor = -4$. On remarquera que cette définition utilisée en Mathématiques ne correspond pas toujours aux valeurs données par la plupart des calculatrices qui donne comme partie entière de $x < 0$, la valeur $-\lfloor -x \rfloor$. Pour éviter des difficultés, on évitera l'utilisation de parties entières de nombres négatifs.

Montrons l'unicité : Si $q < p$, alors $q + 1 \leq p \leq x$, et si $q > p$, alors $q \geq p + 1 > x$, donc, si $q \neq p$, on ne peut avoir $q \leq x < q + 1$. La partie entière est donc unique.

Ainsi, tout réel x s'écrit de manière unique $n + y$, avec n élément de \mathbf{Z} et y élément de $[0, 1[$. Plus généralement, soit a réel strictement positif, alors x s'écrit de manière unique $na + y$, avec n élément de \mathbf{Z} et y élément de $[0, a[$. Il suffit d'écrire $\frac{x}{a} = n + \frac{y}{a}$, avec $\frac{y}{a}$ élément de $[0, 1[$. On dit que x et z sont

congrus modulo a si $x - z$ est un multiple entier de a , ce qu'on note $x \equiv z \pmod{a}$. On vérifiera que la relation de congruence est une relation d'équivalence. Elle est compatible avec la somme. En effet :

$$x \equiv z \pmod{a} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z}, x = z + na$$

$$x' \equiv z' \pmod{a} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbf{Z}, x' = z' + ma$$

donc $x + x' = z + z' + (n + m)a$

donc $x + x' \equiv z + z' \pmod{a}$

Par contre, la relation n'est pas compatible avec le produit, sauf si z et z' sont entiers.

COROLLAIRE

(i) Soit x un réel. Il existe un unique entier relatif M et une unique suite $(d_n)_{n \geq 1}$ d'entiers tels que :

$$\forall n, d_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket \text{ et } \forall N, \exists n > N, d_n \neq 9$$

et

$$\forall n, M + \underbrace{\frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n}{10^n}}_{\text{valeur approchée par défaut}} \leq x < M + \underbrace{\frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n + 1}{10^n}}_{\text{valeur approchée par excès}}$$

On a ainsi $x = \lim_{n \rightarrow \infty} M + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n}{10^n}$, noté $x = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$. On obtient le **développement décimal** de x .

(ii) Réciproquement, si on se donne un entier M et une suite (d_n) d'entiers vérifiant :

$$\forall n, d_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket \text{ et } \forall N, \exists n > N, d_n \neq 9$$

Alors, il existe un unique réel x dont le développement décimal est donné par M et la suite (d_n) .

Démonstration :

□ (i) : On montre l'existence et l'unicité de M et des d_n par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, l'inégalité s'écrit $M \leq x < M + 1$ et on voit que $M = \lfloor x \rfloor$, seule valeur possible.

M étant défini, pour $n = 1$, l'inégalité s'écrit :

$$M + \frac{d_1}{10} \leq x < M + \frac{d_1 + 1}{10}$$

$$\Leftrightarrow d_1 \leq 10(x - M) < d_1 + 1$$

et donc $d_1 = \lfloor 10(x - M) \rfloor$, seule valeur possible. Or $0 \leq x - M < 1$, donc $0 \leq 10(x - M) < 10$, donc d_1 est un entier entre 0 et 9.

Supposons définis M, d_1, \dots, d_{n-1} avec $n \geq 2$. d_n doit vérifier :

$$\frac{d_n}{10^n} \leq x - M - \frac{d_1}{10} - \dots - \frac{d_{n-1}}{10^{n-1}} \leq \frac{d_n + 1}{10^n}$$

$$\Leftrightarrow d_n \leq 10^n(x - M - \frac{d_1}{10} - \dots - \frac{d_{n-1}}{10^{n-1}}) < d_n + 1$$

donc $d_n = \lfloor 10^n(x - M - \frac{d_1}{10} - \dots - \frac{d_{n-1}}{10^{n-1}}) \rfloor$, seule valeur possible.

Par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence vérifiée au rang $n - 1$, on a :

$$0 \leq x - M - \frac{d_1}{10} - \dots - \frac{d_{n-1}}{10^{n-1}} < \frac{1}{10^{n-1}}$$

$$\text{donc } 0 \leq 10^n(x - M - \frac{d_1}{10} - \dots - \frac{d_{n-1}}{10^{n-1}}) < 10$$

donc d_n est un entier entre 0 et 9.

□ (i-suite) : Montrons que la suite (d_n) vérifie : $\forall N, \exists n > N, d_n \neq 9$. Par l'absurde, s'il existe un rang N tel que, pour tout $n > N$, $d_n = 9$, alors on a, pour tout $n > N$:

$$M + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n}{10^n} \leq x < M + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n + 1}{10^n}$$

$$\Leftrightarrow M + \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{10^k} + \sum_{k=N+1}^n \frac{9}{10^k} \leq x < M + \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{10^k} + \sum_{k=N+1}^n \frac{9}{10^k} + \frac{1}{10^n}$$

$$\Leftrightarrow M + \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{10^k} + \frac{9}{10^{N+1}} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-N}}}{1 - \frac{1}{10}} \leq x < M + \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{10^k} + \frac{9}{10^{N+1}} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-N}}}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{1}{10^n}$$

$$\Leftrightarrow M + \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^N} (1 - \frac{1}{10^{n-N}}) \leq x < M + \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^N} (1 - \frac{1}{10^{n-N}}) + \frac{1}{10^n}$$

$$\Leftrightarrow M + \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^N} - \frac{1}{10^n} \leq x < M + \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^N}$$

Passant à la limite quand n tend vers l'infini, on aurait $x = M + \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^N}$, mais cela signifie que

le chiffre d_N aurait dû être non pas d_N , mais $d_N + 1$.

Ainsi, le développement décimal de $\frac{1}{5}$ est 0,2000000... et non 0,199999999999...

□ (ii) : Si on se donne un entier M et une suite d'entiers (d_n) positive ou nulle, posons $a_n = M + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n}{10^n}$ et $b_n = M + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n + 1}{10^n}$. La suite (a_n) est clairement croissante, et, pour tout n , $a_n \leq b_n$. Montrons que, si, pour tout n , $d_n \leq 9$, la suite (b_n) est décroissante :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{d_{n+1} + 1}{10^{n+1}} - \frac{1}{10^n} = \frac{d_{n+1} - 9}{10^{n+1}} \leq 0$$

Les $[a_n, b_n]$ forment alors une suite de segments emboîtés, donc il existe un réel x tel que :

$$\forall n, a_n \leq x \leq b_n$$

x est unique, car si y est un autre réel vérifiant $a_n \leq y \leq b_n$ pour tout n , alors $|x - y| \leq b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$.

Passant à la limite, on obtient $x = y$.

L'inégalité $x \leq b_n$ est en fait une inégalité stricte pour tout n en utilisant l'hypothèse $\forall N, \exists n > N, d_n \neq 9$. En effet, si $\exists N, x = b_N$, puisque la suite (b_n) décroît mais majore x , on a :

$$\forall n > N, x \leq b_n \leq b_N = x$$

donc $\forall n > N, x = b_n$

donc la suite (b_n) est constante à partir du rang N . Donc :

$$\forall n > N, 0 = b_n - b_{n-1} = \frac{d_n - 9}{10^n}$$

donc $\forall n > N, d_n = 9$, contrairement à l'hypothèse.

On a finalement :

$$\forall n, d_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket \text{ et } \forall N, \exists n > N, d_n \neq 9$$

et $\forall n, M + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n}{10^n} \leq x < M + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n + 1}{10^n}$

ce qui signifie que M et la suite (d_n) donnent bien le développement décimal de x .

2- Parties denses de \mathbb{R}

PROPOSITION :

- (i) Entre deux rationnels, il existe un irrationnel.
- (ii) Entre deux irrationnels, il existe un rationnel.

Une formulation équivalente est la suivante :

Soit I un intervalle non réduit à un point. Alors I contient au moins un élément de \mathbf{Q} et un élément de son complémentaire \mathbf{Q}^c . On dit que \mathbf{Q} est **dense** dans \mathbf{R} , de même que \mathbf{Q}^c .

Démonstration :

□ (i) Si x et y sont deux rationnels tels que $x < y$, alors posons :

$$z = x + \frac{(y-x)\sqrt{2}}{2}$$

z est un irrationnel compris entre x et y .

□ (ii) Si x et y sont deux irrationnels, il existe q entier tel que :

$$0 < \frac{1}{q} < y - x$$

(On utilise ici le fait que \mathbf{R} vérifie la propriété d'Archimède)

Considérons maintenant $p = \lfloor qx \rfloor$. On a :

$$p \leq qx < p + 1 \leq qx + 1 < qx + q(y - x) = qy$$

Donc $x < \frac{p+1}{q} < y$

Il résulte des propriétés précédentes que, pour tout x réel, il existe une suite (y_n) de rationnels et une suite (z_n) d'irrationnels ayant pour limite x . En effet, dans tout intervalle $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, il existe un rationnel y_n et un irrationnel z_n . On a $|x - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|x - z_n| < \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$.

Voici d'autres exemples de parties denses dans \mathbf{R} :

L'anneau \mathbf{D} des nombres décimaux

L'anneau $\mathbf{Z}[1/2]$ des nombres dyadiques $\{p/2^n \mid p \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$

L'ensemble $\mathbf{Z} + \pi\mathbf{Z} = \{a + b\pi, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$.

Dans ce dernier cas, il suffit de montrer qu'il est dense dans $[0, 1]$. Considérons les parties fractionnaires des $n\pi$, notées également $n\pi \bmod 1$. Tous ces nombres sont différents, car si $n\pi \bmod 1$ est égal à $m\pi \bmod 1$, cela signifie que $n\pi - m\pi$ est entier et que π est rationnel. Etant en nombre infini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle de la forme $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]$, k entier, inclus dans $[0, 1]$ de longueur ε et qui en possède 2. Par différence de ces deux nombres, il existe donc un nombre de la forme $y = k\pi \bmod 1$ dans $[0, \varepsilon]$. Donc $0 \leq y \leq \varepsilon$. Des multiples de y se trouveront alors dans tout intervalle de longueur ε . Une conséquence de ce qui précède est que $\{\sin(n), n \in \mathbf{Z}\}$ qui est l'image directe par sinus de l'ensemble $\mathbf{Z} + \pi\mathbf{Z}$, est dense dans $[-1, 1]$. La démonstration se généralise à tout ensemble $\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$, α irrationnel.

3- Intervalles

Un intervalle s'écrit $|a, b|$ où $|$ remplace ici $[$ ou $]$. a peut être fini ou valoir $-\infty$, b peut être fini ou valoir $+\infty$. L'intervalle est alors l'ensemble des réels compris entre a et b , éventuellement au sens large.

PROPOSITION :

I est un intervalle si et seulement si :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x < z < y \Rightarrow z \in I$$

Une partie vérifiant cette propriété est dite **convexe**. Une autre formulation est :

$$\forall x \in I, \forall y \in I, x < y \Rightarrow [x, y] \subset I$$

Démonstration :

□ Il est évident qu'un intervalle vérifie la propriété de convexité. Montrons la réciproque. Soit I convexe. Montrons qu'il s'agit d'un intervalle. Si I est minoré, posons $a = \text{Inf}(I)$ sinon, $a = -\infty$. Si I est majoré, posons $b = \text{Sup}(I)$ sinon, $b = +\infty$. On a donc I inclus dans $[a, b]$.

Soit z tel que $a < z < b$. Dans tous les cas, il existe x et y éléments de I tels que :

$$a \leq x < z < y \leq b$$

Montrons le pour x :

Si $a = -\infty$, cela signifie que I n'est pas minoré, et donc que z ne minore pas I , et donc qu'il existe x élément de I tel que $x < z$.

Si a est fini, a est le plus grand des minorants, donc z ne minore pas I , et donc il existe x éléments de I tel que $a \leq x < z$.

La propriété de convexité prouve que z est élément de I . Ainsi, $]a, b[$ est inclus dans I . Le fait que a et b appartiennent ou non à I fermera éventuellement l'une des bornes de l'intervalle ou les deux.

4- Droite achevée

On définit $\overline{\mathbf{R}}$ en ajoutant à \mathbf{R} deux symboles, $+\infty$ et $-\infty$.

Sur le nouvel ensemble ainsi défini, on prolonge la relation d'ordre usuelle sur \mathbf{R} par :

$$\forall x \text{ réel, } -\infty < x < +\infty$$

On peut alors désigner le nouvel ensemble sous la forme d'intervalle $[-\infty, +\infty]$.

L'intérêt de la droite achevée réside dans le fait que nombre de résultats dans \mathbf{R} est lié au fait d'être borné au pas. On obtient, dans la droite achevée, des résultats plus concis :

Voici une liste de résultats dans \mathbf{R} , dont certains sont prouvés dans le chapitre sur les suites de réels (voir L1/SUITES.PDF) :

Toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.

Toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.

Toute suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Toute suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. De toute suite non bornée, on peut extraire une suite tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Ces résultats s'énoncent de façon plus concise dans la droite achevée :

Toute partie admet une borne supérieure.

Toute partie admet une borne inférieure.

Toute suite croissante converge vers sa borne supérieure.

Toute suite décroissante converge vers sa borne inférieure.

De toute suite, on peut extraire une sous-suite convergente.

Annexe : corps non archimédien

On donne ici un exemple de corps ne vérifiant pas la propriété d'Archimède. Considérons le corps $\mathbf{R}(X)$ des fractions rationnelles de polynômes. Ses éléments sont les fractions $f = \frac{P}{Q}$ avec P et Q des

polynômes, Q étant un polynôme non nul. On définit l'égalité dans $\mathbf{R}(X)$ par : $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \Leftrightarrow PB = AQ$ et

les opérations sont les opérations usuelles sur les fractions.

On définit une relation d'ordre sur $\mathbf{R}(X)$ en utilisant les fonctions rationnelles associées aux fractions rationnelles : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ si $f = \frac{P}{Q}$. Une telle fonction n'est pas nécessairement

définie pour tout x réel, mais l'est pour x assez grand, car Q étant non nul n'admet qu'un nombre fini de racines. On pose alors :

$$f \leq g \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \geq M, f(x) \leq g(x)$$

On vérifiera que \leq est une relation d'ordre. Par exemple, pour l'antisymétrie, avec $f = \frac{P}{Q}$ et $g = \frac{A}{B}$:

$$\begin{aligned} & f \leq g \text{ et } g \leq f \\ \Rightarrow & \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \geq M, f(x) \leq g(x) \text{ et } \exists M' \in \mathbf{R}, \forall x \geq M', g(x) \leq f(x) \\ \Rightarrow & \forall x \geq \text{Max}(M, M'), f(x) = g(x) \\ \Rightarrow & \forall x \geq \text{Max}(M, M'), P(x)B(x) = A(x)Q(x) \\ \Rightarrow & PB = AQ \quad \text{car PB et AQ sont deux polynômes coïncidant sur une infinité de valeurs} \\ \Rightarrow & \frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \\ \Rightarrow & f = g \end{aligned}$$

Il s'agit d'un ordre total car $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ ou une constante ou $-\infty$ en fonction des puissances des termes de plus haut degré des numérateurs et dénominateurs de f et g . Il en résulte qu'on aura $f(x) \leq g(x)$ pour tout x assez grand, ou $f(x) \geq g(x)$ pour tout x assez grand.

Cette relation d'ordre étend la relation d'ordre usuel sur \mathbf{R} . En effet, si f est la fraction rationnelle égale à la constante réelle a , et si g est la fraction rationnelle égale à la constante réelle b , alors :

$$f \leq g \text{ (dans } \mathbf{R}(X)) \Leftrightarrow a \leq b \text{ (dans } \mathbf{R})$$

(i) $\mathbf{R}(X)$ n'est pas archimédien. En effet : $0 < X$ et $0 < 1$, mais :

$$\forall n \in \mathbf{N}, n < X$$

On peut interpréter X comme un infiniment grand. Il est plus grand que tous les entiers (et que tous les réels)

(ii) $\mathbf{R}(X)$ ne vérifie pas la propriété des segments emboîtés. Soit $a_n = n$ et $b_n = \frac{X}{n}$. Alors (a_n) croît strictement, (b_n) décroît strictement, et pour tout n , $a_n < b_n$. Supposons qu'il existe $\frac{P}{Q}$, avec $Q > 0$ tel

que, pour tout n , $a_n < \frac{P}{Q} < b_n$. On a alors n :

$$\forall n, \exists M, \forall x \geq M, n \leq \frac{P(x)}{Q(x)} \leq \frac{x}{n}$$

et donc aussi :

$$\forall n, \exists M, \forall x \geq M, n \leq \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right| \leq \frac{x}{n}$$

La condition $\forall n, \exists M, \forall x \geq M, n \leq \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right|$ implique que $\deg(P) > \deg(Q)$ (car si $\deg(P) \leq \deg(Q)$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ est un réel qui ne saurait surpasser tous les entiers n) alors que la condition

$\forall n, \exists M, \forall x \geq M, \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right| \leq \frac{x}{n}$ implique $\deg(P) \leq \deg(Q)$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right| = 0$ et donc

$\deg(P) < \deg(XQ) = \deg(Q) + 1$). On obtient une contradiction.

(iii) Par conséquent, $\mathbf{R}(X)$ ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure. L'exemple précédent prouve que (a_n) est majoré, mais ne possède pas de borne supérieure.

(iv) De même, $\mathbf{R}(X)$ ne vérifie pas la propriété des coupures. Soit :

$$A = \{f \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < +\infty\} \quad (\text{i.e. la limite est finie, ou bien vaut } -\infty)$$

et $B = \mathbf{R}(X) \setminus A$. Alors $\{A, B\}$ forme une partition de $\mathbf{R}(X)$.

Si $g \in B$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. On a alors :

$$\forall f \in A, \forall g \in B, f < g$$

La suite définie en (ii) vérifie :

$$\forall n, a_n \in A, b_n \in B$$

Le raisonnement qui y est tenu prouve qu'il n'existe aucun élément limitant A et B.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$, d'intersection non vide. Montrer que :

$$\text{Sup} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \leq \text{Inf} \{ \text{Sup}(A_i), i \in I \}$$

Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Exo.2) $\lfloor x \rfloor$ désignant la fonction partie entière de x , et n un entier strictement positif, montrer que :

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

$$\text{b) } \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

Exo.3) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de \mathbf{R} telles que, pour tout i , $a_i = \text{Sup}(A_i)$ existe. Soit A la réunion des A_i . Montrer que $\text{Sup}(A)$ existe si et seulement si $\text{Sup} \{ a_i, i \in I \}$ existe et qu'alors il y a égalité entre les deux bornes supérieures.

Exo.4) Soit x un réel. S'il existe $\varepsilon > 0$ et une infinité de fractions irréductibles $\frac{p}{q}$ ($q > 0$) telles que :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}$$

montrer que x est irrationnel.

Exo.5) Lors du passage du franc à l'euro, les règles de conversions étaient les suivantes. La valeur de conversion était : 1 euro = 6,47551 francs.

□ Conversion de l'euro vers le franc : le montant en euro multiplié par le taux de conversion est égal au montant en franc. Pour obtenir un montant exprimé avec deux chiffres après la virgule, la règle suivante est appliquée :

si le troisième chiffre après la virgule est égal ou supérieur à 5, on arrondit au centime supérieur ;

si le troisième chiffre après la virgule est inférieur à 5, on arrondit au centime inférieur.

Exemples :

$$47,21 \text{ euros} \times 6,47551 = 305,7088271 \text{ F arrondi à } 305,71 \text{ F}$$

$$47,22 \text{ euros} \times 6,47551 = 305,7735822 \text{ F arrondi à } 305,77 \text{ F}$$

□ Conversion du franc vers l'euro : le montant en franc divisé par le taux de conversion est égal au montant en euro. La même règle d'arrondi s'applique.

Exemples :

$$1321,24 \text{ F} \div 6,47551 = 204,036438 \text{ euros, arrondis à } 204,04 \text{ euros}$$

Dans le cas où un montant exprimé à l'origine en euro est converti en franc puis reconverti en euro, le montant d'origine en euro est toujours retrouvé.

Exemple :

$$\text{montant d'origine} \quad 204,36 \text{ euros}$$

$$\text{montant en franc} \quad 204,36 \times 6,47551 = 1323,3352236 \text{ arrondi à } 1323,34 \text{ F}$$

$$\text{conversion inverse} \quad 1323,34 \div 6,47551 = 204,3607376 \text{ arrondi à } 204,36 \text{ euros}$$

Mais dans le cas où un montant exprimé à l'origine en franc est converti en euro puis reconverti en franc, le montant final en franc peut différer du montant d'origine.

Exemple :

$$\text{montant d'origine} \quad 1323,35 \text{ francs}$$

$$\text{montant en euro} \quad 1323,35 \div 6,47551 = 204,3622819 \text{ arrondi à } 204,36 \text{ euros}$$

$$\text{conversion inverse} \quad 204,36 \times 6,47551 = 1323,3352236 \text{ arrondi à } 1323,34 \text{ F}$$

a) Montrer que dans le cas d'une double conversion euro \rightarrow franc \rightarrow euro, on retrouve toujours le résultat initial.

b) Quel écart maximal peut-on obtenir entre le montant d'origine en franc et le montant final après une double conversion franc \rightarrow euro \rightarrow franc ?

Exo.6) a) Montrer que les sous-groupes G de $(\mathbf{R}, +)$ sont soit denses, soit de la forme $a\mathbf{Z} = \{an \mid n \in \mathbf{Z}\}$, a réel. On pourra considérer la borne inférieure de $G \cap \mathbf{R}^{+*}$, et distinguer deux cas, suivant que cette borne inférieure est nulle ou pas.

b) Montrer qu'il existe n élément de \mathbf{Z} tel que les quatre premiers chiffres décimaux significatifs de 2^n sont 1789. (On admettra que le logarithme décimal de 2 est irrationnel).

c) Soit f une fonction continue périodique non constante. Montrer que f admet une plus petite période strictement positive. On l'appelle la période de f .

Exo.7) Calculer la fonction f définie par :

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} [\lim_{n \rightarrow \infty} |\cos(m! \pi x)|^n]$$

suivant que x est rationnel ou non.

Exo.8) Calculer $\text{Inf}\{ 1 + x + x^2 + \dots + x^{2n} \mid n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R} \}$. S'agit-il d'un minimum ?

Exo.9) Soient A , B et C trois parties non vides bornées de \mathbf{R} . Montrer que :

$$\text{Inf}(A \cup \{\text{Sup}(B \cup C)\}) \geq \text{Sup}\{\text{Inf}(A \cup B), \text{Inf}(A \cup C)\}$$

Exo.10) a) (a_{ij}) étant une famille de réels, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, comparer $\text{Max}_i (\text{Min}_j a_{ij})$ et $\text{Min}_j (\text{Max}_i a_{ij})$.

b) f étant une fonction bornée des deux variables x et y , comparer $\text{Sup}_x (\text{Inf}_y f(x,y))$ et $\text{Inf}_y (\text{Sup}_x f(x,y))$.

2- Solution

Sol.1) Soit $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Alors $\forall i, x \in A_i$, donc $x \leq \text{Sup}(A_i)$. Ainsi, x minore $\{\text{Sup}(A_i), i \in I\}$.

Comme la borne inférieure est le plus grand des minorants, on a $x \leq \text{Inf} \{\text{Sup}(A_i), i \in I\}$. Il en résulte que $\text{Inf} \{\text{Sup}(A_i), i \in I\}$ majore $\bigcap_{i \in I} A_i$. Comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, on a $\text{Sup} (\bigcap_{i \in I} A_i) \leq \text{Inf} \{\text{Sup}(A_i), i \in I\}$.

Pour une inégalité stricte, prendre par exemple $A_1 = [0, 1] \cup \{2\}$ et $A_2 = [0, 1] \cup \{3\}$.

Sol.2) a) Soit $p \in \mathbf{Z}$ et $k_0 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $p + \frac{k_0}{n} \leq x < p + \frac{k_0 + 1}{n}$, autrement dit :

$$np + k_0 = \lfloor nx \rfloor$$

On vérifiera que :

$$\text{pour } k \in \llbracket 0, n - k_0 - 1 \rrbracket, \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = p$$

$$\text{pour } k \in \llbracket n - k_0, n - 1 \rrbracket, \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = p + 1$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = np + k_0 = \lfloor nx \rfloor$$

b) Avec les notations précédentes, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = p + \frac{k_0}{n}$ a même partie entière p que x .

c) Distinguons deux cas.

Si n est pair, égal à $2m$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lfloor \frac{k}{2} \rfloor &= \sum_{k=1}^{2m} \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \sum_{k=1}^m \lfloor \frac{2k}{2} \rfloor + \sum_{k=0}^{m-1} \lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = \sum_{k=1}^m k + \sum_{k=0}^{m-1} k = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)m}{2} \\ &= m^2 = \lfloor \frac{4m^2}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor \end{aligned}$$

Si n est impair, égal à $2m + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lfloor \frac{k}{2} \rfloor &= \sum_{k=1}^{2m+1} \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \sum_{k=1}^m \lfloor \frac{2k}{2} \rfloor + \sum_{k=0}^m \lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor = \sum_{k=1}^m k + \sum_{k=0}^m k = m(m+1) \\ &= m^2 + m = \lfloor \frac{4m^2 + 4m + 1}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor \end{aligned}$$

Sol.3) $\forall x \in A = \bigcup_{i \in I} A_i, \exists i \in I, x \in A_i$ donc $\exists i \in I, x \leq \text{Sup}(A_i) = a_i$ donc $x \leq \text{Sup} \{a_i \mid i \in I\}$, donc si $\text{Sup} \{a_i \mid i \in I\}$ existe, $\text{Sup} \{a_i \mid i \in I\}$ majore A , donc $\text{Sup}(A)$ existe et on a $\text{Sup}(A) \leq \text{Sup} \{a_i \mid i \in I\}$.

Réciproquement : soit $i \in I. \forall x \in A_i, x \in A$, donc si $\text{Sup}(A)$ existe, $x \leq \text{Sup}(A)$, donc $\text{Sup}(A)$ majore A_i donc $a_i \leq \text{Sup}(A)$. Ceci étant vrai pour tout i , $\text{Sup}(A)$ majore $\{a_i \mid i \in I\}$, donc $\text{Sup} \{a_i \mid i \in I\}$ existe et $\text{Sup} \{a_i \mid i \in I\} \leq \text{Sup}(A)$.

Sol.4) Par l'absurde, si x est le rationnel $\frac{a}{b}$, alors $\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}$ donc $|aq - bp| \leq \frac{b}{q^\varepsilon}$. Donc, si le couple (p, q) est distinct de (a, b) , on a :

$$1 \leq |aq - bp| \leq \frac{b}{q^\varepsilon}$$

donc $b \geq q^\varepsilon$

L'ensemble des q vérifiant cette inégalité est de cardinal fini, et pour chaque q de cet ensemble, l'ensemble des p vérifiant $\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}$ est aussi de cardinal fini. On obtient une contradiction avec l'hypothèse de l'existence d'un nombre infini de $\frac{p}{q}$ vérifiant l'inégalité.

Sol.5) a) Considérons une somme e en euros. Sa valeur en francs vaut ec , où $c = 6,47551$. Cette valeur est arrondie à la valeur $f = ec + y$ où y est l'erreur d'arrondi avec $-0,005 < y \leq 0,005$. La deuxième conversion donne $\frac{f}{c} = e + \frac{y}{c}$ avec $-0,001 < -\frac{0,005}{c} < \frac{y}{c} \leq \frac{0,005}{c} < 0,001$. On retrouve la valeur de e avec une erreur inférieure à 1 millième d'euro. L'arrondi de $\frac{f}{c}$ redonne bien e .

b) Considérons une somme f en francs. Sa valeur exacte convertie en euros vaut $\frac{f}{c}$. Cette valeur est arrondie à la valeur $e = \frac{f}{c} + z$ où z est l'erreur d'arrondi avec $-0,005 < z \leq 0,005$. La deuxième conversion donne $ec = f + zc$ avec $-0,04 < -0,005c < zc \leq 0,005c < 0,04$. On commet donc une erreur inférieure ou égale à 3 centimes de franc.

Exemple : 1323,37 francs donne 204,37 euros qui redonne 1323,40 francs.

A l'inverse, 1323,30 francs donne 204,35 euros qui redonne 1323,27 francs.

Sol.6) a) Si $G = \{0\}$, on a $G = 0\mathbf{Z}$. Sinon, G possède un élément strictement positif. Considérons $a = \text{Inf}(G \cap \mathbf{R}^{+*})$.

Premier cas, $a = 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, ε ne minore pas $G \cap \mathbf{R}^{+*}$ puisque ε est plus grand que le plus grand minorant, donc il existe $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$. En considérant les $ng, n \in \mathbf{Z}$, on en déduit que, dans tous les intervalles de longueur ε , il existe un élément de G , donc G est dense dans \mathbf{R} .

Deuxième cas, $a > 0$. Montrons que $a \in G$. En effet, $\frac{3a}{2}$ ne minore pas $G \cap \mathbf{R}^{+*}$, donc $\exists g \in G$, $a \leq g < \frac{3a}{2}$, et si $g \neq a$, g ne minore pas $G \cap \mathbf{R}^{+*}$ donc il existe $h \in G$, $a \leq h < g < \frac{3a}{2}$. Donc $0 < g - h < a/2 < a$, et on obtient une contradiction entre $g - h \in G \cap \mathbf{R}^{+*}$ et a minore $G \cap \mathbf{R}^{+*}$. Donc $g = a$ ce qui prouve que $a \in G$.

Montrons maintenant que tout élément de G est un multiple de a . Soit $g \in G$, et $n = \lfloor \frac{g}{a} \rfloor$. On a alors $g = na + h$, avec $0 \leq h < a$. Comme $h = g - na \in G$ et que a minore $G \cap \mathbf{R}^{+*}$, on ne peut avoir $h > 0$, donc $h \leq 0$, et comme $h \geq 0$, $h = 0$. Donc $g = na$.

b) On demande de montrer que :

$$\exists k, n, 1789 \times 10^k \leq 2^n < 1790 \times 10^k$$

$$\Leftrightarrow k + \log(1789) \leq n \log(2) < \log(1790) + k \text{ (où } \log \text{ désigne le logarithme décimal)}$$

$$\Leftrightarrow \log(1789) \leq n \log(2) - k < \log(1790)$$

Considérons $G = \mathbf{Z} + \log(2)\mathbf{Z}$. $\log(2)$ étant irrationnel, G est dense dans \mathbf{R} , donc il existe un de ses éléments dans l'intervalle $[\log(1789), \log(1790)[$.

c) On considère $G = \{p \in \mathbf{R} \mid \forall x, f(x+p) = f(x)\}$. G est l'ensemble des périodes de f . Il n'est pas difficile de montrer que G est un groupe additif. Par ailleurs, il n'est pas réduit à $\{0\}$ puisqu'on a supposé que f est périodique. Pour conclure, d'après le a), il suffit de montrer que G n'est pas dense. Supposons par l'absurde qu'il le soit. Soit p un réel quelconque. G étant dense, il existe une suite (p_n) de G qui converge vers p . f étant continue, on a alors, pour tout x de \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} f(x+p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x+p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) && \text{car, pour tout } n, f(x+p_n) = f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ce qui montre que $p \in G$ et donc que $G = \mathbf{R}$. Mais dans ce cas, pour tout p , $f(0) = f(p)$, ce qui prouve que la fonction f est constante, contrairement à l'hypothèse. Donc G n'est pas dense. Il est de la forme $a\mathbf{Z}$, et a est la période cherchée.

Un exemple de fonction non continue périodique ayant un ensemble de périodes dense est donné par exemple par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f est telle que $G = \mathbf{Q}$.

Sol.7) Si x est rationnel de la forme $\frac{p}{q}$, $q > 0$, alors pour $m > q$, $m!\pi x$ est un multiple entier de π , donc

$$\cos(m!\pi x) = \pm 1, \text{ donc, pour } m > q, \lim_{n \rightarrow \infty} |\cos(m!\pi x)| = 1, \text{ donc } f(x) = 1.$$

Si x est irrationnel, alors, pour tout m , $|\cos(m!\pi x)| < 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |\cos(m!\pi x)| = 0$, donc $f(x) = 0$

Sol.8) Nous allons montrer que la borne inférieure demandée vaut $\frac{1}{2}$. On commence par montrer que

$\frac{1}{2}$ minore strictement $1 + x + \dots + x^{2n}$ pour tout réel x et tout entier n .

$$\text{Si } x \geq 0, 1 + x + \dots + x^{2n} \geq 1 > \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } -1 < x < 0, 1 + x + \dots + x^{2n} = \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x} \geq \frac{1}{1 - x} > \frac{1}{2}$$

Si $x = -1$, $1 + x + \dots + x^{2n} = 1 > \frac{1}{2}$

Si $x < -1$, $1 + x + \dots + x^{2n} = \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x} > \frac{1 - x}{1 - x} = 1 > \frac{1}{2}$

Montrons maintenant que $\frac{1}{2}$ est le plus grand des minorants. Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de montrer que que

$\frac{1}{2} + \varepsilon$ ne minore pas l'ensemble des $1 + x + \dots + x^{2n}$, et donc qu'il existe x et n tel que

$$1 + x + \dots + x^{2n} < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$, $\exists x \in]-1, 0[$, $\frac{1}{1-x} < \frac{1}{2} + \varepsilon$ (ne prenant x assez proche de -1).

Pour un tel x , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1-x} < \frac{1}{2} + \varepsilon$ donc $\exists n$, $\frac{1 - x^{2n+1}}{1-x} < \frac{1}{2} + \varepsilon$ (en

prenant n assez grand). Donc $\exists x, \exists n$, $1 + x + \dots + x^{2n} < \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Sol.9) L'énoncé est symétrique en B et C. Donc il suffit de montrer que :

$$\text{Inf}(A \cup \{\text{Sup}(B \cup C)\}) \geq \text{Inf}(A \cup B)$$

Soit $x \in A \cup \{\text{Sup}(B \cup C)\}$.

Ou bien $x \in A$ donc $x \in A \cup B$, donc $x \geq \text{Inf}(A \cup B)$.

Ou bien $x = \text{Sup}(B \cup C)$, donc x majore $B \cup C$, donc x majore B, donc si $b \in B \subset A \cup B$, on a $x \geq b \geq \text{Inf}(A \cup B)$.

Donc, pour tout x de $A \cup \{\text{Sup}(B \cup C)\}$, $x \geq \text{Inf}(A \cup B)$. Donc $\text{Inf}(A \cup B)$ minore $A \cup \{\text{Sup}(B \cup C)\}$. Donc $\text{Inf}(A \cup \{\text{Sup}(B \cup C)\}) \geq \text{Inf}(A \cup B)$

Sol.10) a) Soit i_0 l'indice pour lequel le maximum $\text{Max}_i (\text{Min}_j a_{ij})$ est atteint. On a donc :

$$\text{Max}_i (\text{Min}_j a_{ij}) = \text{Min}_j a_{i_0 j}$$

Pour chaque j , $a_{i_0 j} \leq \text{Max}_i a_{ij}$. Si on prend le minimum des deux membres lorsque j varie, on obtient :

$$\text{Max}_i (\text{Min}_j a_{ij}) = \text{Min}_j a_{i_0 j} \leq \text{Min}_j (\text{Max}_i a_{ij})$$

L'inégalité peut être stricte. Par exemple, pour les valeurs $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, i étant l'indice de ligne et j

l'indice de colonne, $\text{Max}_i (\text{Min}_j a_{ij}) = 0$ alors que $\text{Min}_j (\text{Max}_i a_{ij}) = 2$.

b) Pour tout x_0 , $\text{Sup}_x (\text{Inf}_y f(x,y)) \geq \text{Inf}_y f(x_0,y)$, et pour tout $\varepsilon > 0$, $\text{Sup}_x (\text{Inf}_y f(x,y)) - \varepsilon$ ne majore plus la famille des $\text{Inf}_y f(x,y)$ donc $\exists x_0$, $\text{Inf}_y f(x_0,y) > \text{Sup}_x (\text{Inf}_y f(x,y)) - \varepsilon$.

Or, pour tout y , $f(x_0, y) \leq \text{Sup}_x f(x,y)$, donc, si on prend la borne inférieure des deux membres quand y varie, on obtient $\text{Inf}_y f(x_0,y) \leq \text{Inf}_y (\text{Sup}_x f(x,y))$.

On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\text{Sup}_x (\text{Inf}_y f(x,y)) - \varepsilon < \text{Inf}_y (\text{Sup}_x f(x,y))$. Cette relation étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, en faisant tendre ε vers 0, on obtient $\text{Sup}_x (\text{Inf}_y f(x,y)) < \text{Inf}_y (\text{Sup}_x f(x,y))$.

L'inégalité peut être stricte. Par exemple, soit $f(x, y) = \cos(x + y)$

Pour tout x , $\text{Inf}_y f(x, y) = -1$, donc $\text{Sup}_x (\text{Inf}_y f(x,y)) = -1$.

Pour tout y , $\text{Sup}_x f(x, y) = 1$, donc $\text{Inf}_y (\text{Sup}_x f(x,y)) = 1$.

