SUITES

PLAN

I : Corps des réels

1- Borne supérieure et inférieure

❑ Un réel peut être vu, sous forme numérique, comme un entier relatif constituant sa partie entière, suivie d'une infinité de chiffres constituant sa partie décimale.

EXEMPLE :

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937 51...$$

Nous préférons cependant partir de propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$ plutôt que de cette définition de ce qu'est un réel, qui pose par ailleurs un certain nombre de problèmes. Par exemple, les deux réels suivants (le premier étant suivis d'une infinité de 0 et le second d'une infinité de 9) sont égaux :

5,28000000000000000000... et 5,27999999999999999999.......

(la différence vaut en effet 0.00000000000000000000... et est nulle !!). D'autre part, les opérations sur deux réels ne sont pas si facilement définies qu'il y paraît. Pour connaître la $n^{\text{ème}}$ décimale d'une somme, par exemple, il faut connaître tous les chiffres qui suivent pour savoir si une retenue ne serait pas susceptible de se propager de droite à gauche jusqu'à la décimale considérée.

Nous admettrons que l'une des propriétés caractéristiques de $\mathbb{R}$ est l'existence d'une borne supérieure pour toute partie majorée. Il s'agit d'une propriété caractéristique dans le sens où cette propriété fait partie de la définition de $\mathbb{R}$ ou des axiomes régissant la relation d'ordre de $\mathbb{R}$. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. Cela signifie qu'il existe un majorant M vérifiant :

$$\forall a \in \mathrm{A},\ a \leq \mathrm{M}$$

Il est clair que si M est un majorant et M' un nombre tel que M ≤ M', alors M' est aussi un majorant. Le majorant M sera donc considéré meilleur que M' puisque la connaissance de M' n'apporte qu'une information dégradée par rapport à la connaissance de M. On a donc intérêt à chercher un majorant le plus petit possible. On appelle **borne supérieure** de A (si elle existe) le nombre S égal au plus petit majorant de A. S est plus grand que tous les éléments de A (S majore A), mais, parmi tous les majorants possibles, S est le plus petit.

On procède de même pour les parties minorées par un nombre m :

$$\forall a \in \mathrm{A},\ m \leq a$$

et l'on cherche m le plus grand possible. I est **la borne inférieure** de A si I est le plus grand minorant de A, c'est à dire si I est plus petit que tous les éléments de A (I minore A), mais que, parmi tous les minorant possibles, I est le plus grand.

EXEMPLE :

❑ Soit A =]0,1[. Tous les réels négatifs ou nuls minorent A. Le plus grand de ces minorants est 0. Il s'agit de la borne inférieure. On note Inf(A) = 0. Tous les réels supérieur ou égaux à 1 majore A. Le plus petit de ces majorants est 1. Il s'agit de la borne supérieure. On note Sup(A) = 1. On notera qu'il ne s'agit ni de minimum ni de maximum, dans le sens où ni Inf(A) ni Sup(A) n'appartient à A.

❑ Soit A = $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors Inf(A) = 0 et n'est pas élément de A. Sup(A) = 1 et est élément de A. Dans le cas présent, A admet 1 comme maximum mais n'a pas de minimum.

On peut écrire également :

$$\mathrm{S} = \mathrm{Sup(A)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall a \in \mathrm{A},\ a \leq \mathrm{S} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathrm{A},\ a > \mathrm{S} - \varepsilon \end{array}\right.$$

La première ligne signifie que S majore A, et la deuxième signifie que tout nombre inférieur à S (donc de la forme S – ε avec ε > 0) ne majore pas A. Donc S est le plus petit majorant de A. C'est la borne supérieure.

De même :

$$\mathrm{I} = \mathrm{Inf(A)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall a \in \mathrm{A},\ a \geq \mathrm{I} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathrm{A},\ a < \mathrm{I} + \varepsilon \end{array}\right.$$

AXIOME

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

Comme dit plus haut, cette propriété est caractéristique de $\mathbb{R}$ et ne saurait être démontrée.

CONSEQUENCE

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

Il suffit en effet d'effectuer une symétrie par rapport à 0 pour échanger les nombres positifs et négatifs, pour transformer une partie majorée en partie minorée et une borne supérieure en borne inférieure. Plus formellement, si $B = \{-a, a \in A\}$ et si $S = \text{Sup}(A)$, alors $-S = \text{Inf}(B)$. En effet :

– S minore B car, $\forall\, b \in B$, $-b \in A$ et comme $-b \leq S$, $-S \leq b$

– S est le plus grand des minorants car si ε est strictement positif, $\exists\, a \in A$, $a > S - \varepsilon$, donc $-S + \varepsilon > -a$, or $-a \in B$, donc $-S + \varepsilon$ ne minore par B.

Une utilisation courante de la borne supérieure est la suivante :

$$\forall\, x \in A,\ x \leq M \Rightarrow \text{Sup}(A) \leq M$$

En effet, M majore x et Sup(A) est le plus petit des majorants.

De même :

$$\forall\, x \in A,\ x \geq m \Rightarrow \text{Inf}(A) \geq m$$

(Pour plus de détails, voir le chapitre L1/REELS.PDF)

2- Suites

Une **suite** $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme une application $n \in \mathbb{N} \to u_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

On peut définir la somme $u + v$ de deux suites en posant $(u + v)_n = u_n + v_n$.

On peut de même définir le produit par un scalaire λ : $(\lambda u)_n = \lambda u_n$

Ces deux opérations confère à l'ensemble des suites une structure d'espace vectoriel (voir le chapitre *Espaces Vectoriels* dans le chapitre L1/ESPVECT.PDF)

On peut définir une relation d'ordre dans l'espace des suites réelles :

$$u \leq v \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$$

Une suite réelle u est **majorée** si :

$$\exists\, M,\ \forall\, n,\ u_n \leq M$$

Une suite réelle u est **minorée** si :

$$\exists\, m,\ \forall\, n,\ m \leq u_n$$

Une suite réelle est **bornée** si elle est majorée et minorée. Cela peut s'écrire également sous la forme :

$$\exists\, M,\ \forall\, n,\ |u_n| \leq M$$

Cette dernière définition a l'intérêt de pouvoir s'appliquer également aux suites complexes.

Une suite réelle u est **croissante** si :

$$\forall\, n,\ u_n \leq u_{n+1}$$

Une suite réelle u est **décroissante** si :

$$\forall\, n,\ u_n \geq u_{n+1}$$

Une suite réelle est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Une suite réelle u est **strictement croissante** si :

$$\forall\ n,\ u_n < u_{n+1}$$

Une suite réelle u est **strictement décroissante** si :

$$\forall\ n,\ u_n > u_{n+1}$$

Une suite réelle est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

II : Limite d'une suite

1- Préambule

On se posera les questions suivantes :

Quand dit-on qu'une suite tend vers 0 ?

Comment montre-t-on que a^n tend vers 0 quand n tend vers ∞, pour $|a| < 1$?

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Si (x_n) est décroissante positive, (x_n) converge vers 0.

Si (x_n) tend vers $+\infty$, alors (x_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Si (x_n) tend vers l, avec $l \geq 0$, alors (x_n) est positive à partir d'un certain rang.

Si (x_n) converge, alors (x_n) est bornée.

Si $(x_{n+1} - x_n)$ tend vers 0, alors (x_n) converge.

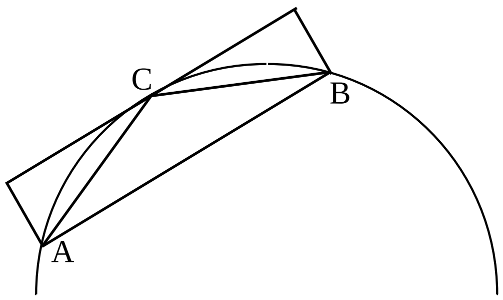
(Parmi les cinq affirmations précédentes, quatre sont fausses, une seule est vraie)

2- Un exemple historique

Archimède prouve que l'on peut approximer l'aire d'un disque d'aussi près que l'on veut par des polygones réguliers. Par encadrement d'un cercle par un polygone de 96 côtés, Archimède prouve que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

et, par la même méthode, Al–Kashi, en 1424, utilise un polygone de 3×2^{28} côtés pour trouver 16 décimales de π. Ce record ne fut battu qu'en 1596 par Ludolph, avec 35 décimales. On améliore l'approximation donnée par un polygone en doublant le nombre de ses côtés.



Soient A et B deux sommets adjacents du premier polygone, et C le milieu de l'arc AB. On peut remarquer que le triangle ABC possède une aire moitié de celle du rectangle de coté AB, dont un autre côté est tangent au cercle en C. L'aire du triangle ABC est donc supérieure à la moitié de l'aire de la portion de disque ABC. Ainsi, quand on double le nombre de côtés d'un polygone régulier, la différence d'aire entre le disque et le polygone est divisée par un rapport supérieur à 2.

Archimède ne dit pas que la différence des aires entre le disque et le polygone tend vers 0 lorsque le nombre de côtés tend vers $+\infty$, mais il conclut que cette différence pourra être rendue aussi petite que l'on veut en énonçant le principe suivant :

> *Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie supérieure à sa moitié, et si l'on retranche encore du reste une partie supérieure à sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que toute grandeur donnée de la même espèce.*

Nous pourrions traduire cet énoncé de la façon suivante :
Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall\, n,\ u_n \le \frac{1}{2} u_{n-1},$$

alors : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n, u_n < \varepsilon$
En tenant compte du fait que la suite est ici décroissante, on pourra comparer cette dernière formulation (datant du IIIème siècle avant JC) avec la définition d'une suite convergeant vers 0 donnée ci-dessous (datant de la deuxième moitié du XIXème siècle). Il peut paraître étonnant de voir qu'il a fallu 2000 ans pour formaliser définitivement cette notion de limite.

3- Définition

La nécessité des définitions suivantes est apparue au cours du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Elles se substituent aux concepts intuitifs qui avaient prévalu jusque là.

Les définitions ci–dessous s'appliquent aux suites réelles ou complexes.
DEFINITION :

i) *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge vers *l*** *si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \text{N}, \forall\, n > \text{N}, |x_n - l| < \varepsilon$$

ii) (*Dans* $\mathbb{R}$) *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **tend vers $+\infty$** *si :*

$$\forall\, A, \exists\, \text{N}, \forall\, n > \text{N}, x_n > A$$

iii) (*Dans* $\mathbb{R}$) *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **tend vers $-\infty$** *si :*

$$\forall\, A, \exists\, \text{N}, \forall\, n > \text{N}, x_n < A$$

iv) *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **tend vers ∞** *si :*

$$\forall\, A, \exists\, \text{N}, \forall\, n > \text{N}, |x_n| > A$$

On remarquera que les définitions ci–dessus correspondent dans tous les cas à la définition générale suivante :
DEFINITION :

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *tend vers une limite L, finie ou non si :*

$$\forall\, \text{V voisinage de } L, \exists\, \text{N}, \forall\, n > \text{N}, x_n \in \text{V}$$

un **voisinage** désignant une partie contenant :

pour un réel l, un intervalle de la forme $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$
pour un complexe l, un disque de centre l de rayon ε
pour $+\infty$, un intervalle de la forme $]A, +\infty[$
pour $-\infty$, un intervalle de la forme $]-\infty, A[$
pour ∞, le complémentaire d'un disque (ou d'un intervalle) de centre 0, de rayon A.

Tous les termes de la suite, sauf un nombre fini, sont dans un voisinage quelconque de la limite.

Une suite qui **converge** est une suite qui tend vers une limite finie. Sinon, elle **diverge**. Il résulte de la définition que toute suite convergente est bornée. En effet, tous les termes, sauf un nombre fini, sont contenus dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ pour les suites réelles, ou le disque de centre l, de rayon $\varepsilon > 0$ pour les suites complexes.

La limite, finie ou non, si elle existe, est unique. S'il y avait deux limites L et L', il suffirait de choisir deux voisinages disjoints V et V' pour obtenir une contradiction.

Pour une suite complexe $u = v + iw$ avec $v_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $w_n = \mathrm{Im}(u_n)$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} v_n = \mathrm{Re}(l) \text{ et } \lim_{n \to \infty} w_n = \mathrm{Im}(l)$$

En effet, si $\lim_{n \to \infty} u_n = l$, alors $|v_n - \mathrm{Re}(l)| \leq |u_n - l|$ et $|w_n - \mathrm{Im}(l)| \leq |u_n - l|$ permettent de montrer l'implication $\Rightarrow$.

Réciproquement, si $\lim_{n \to \infty} v_n = \mathrm{Re}(l)$ et $\lim_{n \to \infty} w_n = \mathrm{Im}(l)$, on pourra utiliser le fait que :

$$|u_n - l| \leq |v_n - \mathrm{Re}(l)| + |w_n - \mathrm{Im}(l)|$$

Ainsi, on a la possibilité de raisonner globalement sur la suite u, ou bien de se ramener à l'étude des deux suites réelles v et w.

EXEMPLES :

❑ La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ converge vers 0. Prendre dans la définition un entier N supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$.

❑ Une suite (x_n) est dite **stationnaire** s'il existe N tel que la suite $(x_n)_{n\geq \mathrm{N}}$, définie à partir du rang N, est constante. Une suite stationnaire est convergente vers cette valeur constante.

❑ On appelle **sous-suite** ou **suite extraite** d'une suite (x_n) une suite que nous noterons $(x_{\Phi(n)})$ où $(\Phi(n))$ est une suite strictement croissante d'indice. Par exemple, si $\Phi(n) = 2n$, la suite extraite est celle des termes d'indices pairs. Si $\Phi(n) = 2n + 1$, la suite extraite est celle des termes d'indices impairs.
On vérifie que, si une suite converge, alors toute sous-suite converge vers la même limite. En effet, soit l la limite de (x_n), et $(x_{\Phi(n)})$ une suite extraite. Φ étant strictement croissante, on a, par récurrence, $\Phi(n) \geq n$ pour tout n. Or :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}, \forall n > \mathrm{N}, |x_n - l| < \varepsilon$$

Comme $\Phi(n) \geq n$, on a, a fortiori :

$$\forall n > \mathrm{N}, |x_{\Phi(n)} - l| < \varepsilon$$

On se sert couramment de la contraposée pour montrer qu'une suite ne converge pas. On extrait deux sous-suites convergeant vers des limites différentes. Par exemple : $(-1)^n$ pour laquelle la sous-suite de rang pair converge vers 1 et celle de rang impair vers -1. La suite complète ne converge pas.

4- Opérations sur les limites

Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :

Montrer l'efficacité de notre définition de limite.
Justifier la validité de notre intuition.
Servir de modèle de démonstration pouvant être utilisé dans des cas plus complexes.

a) SOMME :

PROPOSITION

Soient (a_n) *et* (b_n) *deux suites.*

(i) *Si* (a_n) *converge vers* α *et* (b_n) *vers* β, *alors* $(a_n + b_n)$ *converge vers* $\alpha+\beta$.
(ii) *Si* (a_n) *est bornée et* (b_n) *tend vers* ∞, *alors* $(a_n + b_n)$ *tend vers* ∞
(iii) *Dans* $\mathbf{R}$, *si* (a_n) *est minorée et* (b_n) *tend vers* $+\infty$, *alors* $(a_n + b_n)$ *tend vers* $+\infty$
(iv) *Dans* $\mathbf{R}$, *si* (a_n) *est majorée et* (b_n) *tend vers* $-\infty$, *alors* $(a_n + b_n)$ *tend vers* $-\infty$

Démonstration :

❑ (i) $\forall\ \varepsilon > 0$, $|a_n + b_n - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$

Or, $\exists$ N, $\forall\ n >$ N, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ et $\exists$ M, $\forall\ n >$ M, $|b_n - \beta| < \varepsilon$.

Donc $\forall\ n > \text{Max(N,M)}$, $|a_n + b_n - (\alpha + \beta)| < 2\varepsilon$.

ε étant quelconque, on aurait pu partir de $\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour majorer $|a_n + b_n - (\alpha + \beta)|$ par ε à partir d'un rang n assez grand.

En particulier, pour toute constante C, $\lim\limits_{n\to\infty} (\text{C} + a_n) = \text{C} + \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

❑ (ii) $\forall$ A, $|a_n + b_n| \geq |b_n| - |a_n|$

Or, $\exists$ M, $\forall\ n$, $|a_n| \leq$ M et $\exists$ N, $\forall\ n >$ N, $|b_n| >$ A + M

Donc, $\forall\ n >$ N, $|a_n + b_n| >$ A.

Les démonstrations pour (iii) et (iv) sont analogues à celles de (ii).

On obtient une forme indéterminée lorsque l'une des suites tend vers $+\infty$, et l'autre vers $-\infty$.

b) PRODUIT :

PROPOSITION

Soient (a_n) *et* (b_n) *deux suites.*

(i) *Si* (a_n) *converge vers* α *et* (b_n) *vers* β, *alors* (a_nb_n) *converge vers* $\alpha\beta$.
(ii) *Si* (a_n) *est bornée et* (b_n) *converge vers* 0, *alors* (a_nb_n) *tend vers* 0
(iii) *Si* $(|a_n|)$ *est minoré par un réel strictement positif et si* (b_n) *tend vers* ∞, *alors* (a_nb_n) *tend vers* ∞.

Démonstration :

❑ (i) $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} |a_nb_n - \alpha\beta| &= |a_n(b_n - \beta) + (a_n - \alpha)\beta| \\ &\leq |a_n||b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta| \\ &\leq M|b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta| \end{aligned}$$

où M est un majorant de la suite bornée (a_n).

Or, $\exists$ N, $\forall n >$ N, $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$

$\exists$ K, $\forall n >$ K, $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$

Donc, $\forall n > \mathrm{Max}(K,N)$, $|a_nb_n - \alpha\beta| < \varepsilon$.

En particulier, pour toute constante C, $\lim\limits_{n\to\infty} Ca_n = C \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

❑ (ii) Soit M un majorant de $(|a_n|)$. On a, $\forall \varepsilon > 0$:

$\forall n$, $|a_nb_n| \leq M|b_n|$

Or, $\exists$ N, $\forall n >$ N, $|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$

Donc, $\forall n >$ N, $|a_nb_n| < \varepsilon$.

❑ iii) Soit $m > 0$ minorant $(|a_n|)$. On a, $\forall$ A > 0 :

$\forall n$, $|a_nb_n| \geq |b_n|m$

Or, $\exists$ N, $\forall n >$ N, $|b_n| > \dfrac{A}{m}$

Donc, $\forall n >$ N, $|a_nb_n| > A$

On obtient une forme indéterminée lorsque l'une des suites tend vers 0, et l'autre vers ∞.

c) INVERSE :

Dans ce paragraphe et le suivant, on supposera que les suites se trouvant au dénominateur ne s'annulent pas.

PROPOSITION

Soit (a_n) *une suite.*

(i) *Si* (a_n) *converge vers* α *non nul, alors* $(\dfrac{1}{a_n})$ *converge vers* $\dfrac{1}{\alpha}$.

(ii) *Si* (a_n) *tend vers* 0, *alors* $(\dfrac{1}{a_n})$ *tend vers* ∞.

(iii) *Si* (a_n) *tend vers* ∞, *alors* $(\dfrac{1}{a_n})$ *tend vers* 0.

Démonstration :

❑ (i) $\forall \varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n \alpha|}$$

Or $\exists$ N, $\forall n >$ N, $|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$ et donc $|a_n| > \frac{|\alpha|}{2}$

Donc, $\forall n >$ N, $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| < \mathrm{C}|a_n - \alpha|$, avec $\mathrm{C} = \frac{2}{\alpha^2}$

Or $\exists$ M, $\forall n >$ M, $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{C}}$

Donc, $\forall n >$ Max(N,M), $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| < \varepsilon$

❑ (ii) $\forall$ A > 0, $\exists$ N, $\forall n >$ N, $|a_n| < \frac{1}{\mathrm{A}}$ donc $\left|\frac{1}{a_n}\right| > \mathrm{A}$

❑ La démonstration de (iii) est analogue à celle de (ii)

<u>d) QUOTIENT</u> :

PROPOSITION

Soient (a_n) et (b_n) deux suites.

i) *Si (a_n) converge vers α et (b_n) vers β non nul, alors $(\frac{a_n}{b_n})$ converge vers $\frac{\alpha}{\beta}$.*

ii) *Si (a_n) est bornée et (b_n) converge vers ∞, alors $(\frac{a_n}{b_n})$ tend vers 0.*

iii) *Si $(|a_n|)$ est minoré par un réel strictement positif et si (b_n) tend vers 0, alors $(\frac{a_n}{b_n})$ tend vers ∞.*

iv) *Si (a_n) converge vers ∞ et si (b_n) est bornée, alors $(\frac{a_n}{b_n})$ converge vers ∞.*

v) *Si (a_n) converge vers 0 et si $(|b_n|)$ est minorée par un réel strictement positif, alors $(\frac{a_n}{b_n})$ converge vers 0.*

<u>Démonstration</u> :

❑ Il suffit d'utiliser les résultats démontrés pour le produit et l'inverse

On obtient une forme indéterminée lorsque les deux suites tendent vers ∞, ou vers 0.

5- Inégalités et limites

Ce paragraphe n'est valable que sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION :

Soit (x_n) une suite qui converge vers l. Alors :

(i) $l > a \Rightarrow \exists$ N, $\forall n >$ N, $x_n > a$

(ii) $\exists$ N, $\forall n >$ N, $x_n \geq a \Rightarrow l \geq a$

On a des résultats analogues avec < et $\leq$.

Démonstration :
❑ (i) résulte de la définition de la convergence en prenant $\varepsilon = l - a$.

❑ (ii) : Si $l < a$, alors il existe M tel que, pour tout n supérieur à M, $|x_n - l| < a - l$ et donc $x_n < a$.
Alors, pour $n >$ Max(N,M) on devrait avoir simultanément $x_n \geq a$ et $x_n < a$, ce qui est impossible.
Ce résultat s'appelle passage à la limite dans une inégalité. On remarquera qu'elle se pratique avec des inégalités larges.

PROPOSITION

(i) *Si* (a_n) *converge vers* α, (b_n) *vers* β, *alors :*

$$\alpha < \beta \Rightarrow \exists \text{ N}, \forall n > \text{N}, a_n < b_n$$

(ii) *Si* (a_n) *converge vers* α, (b_n) *vers* β, *alors :*

$$\exists N, \forall n > \text{N}, a_n \leq b_n \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

(iii) *Si* (a_n) *et* (c_n) *convergent vers l, et si :*

$$\exists N, \forall n > \text{N}, a_n \leq b_n \leq c_n$$

alors (b_n) *converge vers l.*

(iv) *Si* (b_n) *tend vers* $+\infty$, *alors :*

$$\forall n, a_n \geq b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Démonstration :
❑ (i) et (ii) se montrent en appliquant la proposition précédente à la suite $a_n - b_n$.

❑ (iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists$ M, $\forall n >$ M, $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$. $\exists$ K, $\forall n >$ K, $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$.
Donc, $\forall n >$ Max(N,M,K), $l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$

❑ Le (iv) est laissé en exercice.

6- Suites monotones

Ce paragraphe n'est valable que sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION

Soit (x_n) *une suite croissante. Alors :*

(i) *Ou bien* (x_n) *est majorée et alors* (x_n) *converge.*

(ii) *Ou bien* (x_n) *n'est pas majorée et alors* (x_n) *tend vers* $+\infty$.

Démonstration :
❑ (i) Soit $l = \text{Sup}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nous allons montrer que (x_n) converge vers l. On a :

(*) $\forall n, x_{n+1} \geq x_n$
(**) $\forall n, x_n \leq l$
(***) $\forall \varepsilon > 0, \exists$ N, $l - \varepsilon < x_\text{N}$

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons le N donné par (***). Par récurrence, (*) permet de montrer que :

$$\forall\, n > \mathrm{N},\ x_n \geq x_\mathrm{N}$$

Donc, en utilisant (**) $\forall\, n > \mathrm{N},\ l - \varepsilon < x_\mathrm{N} \leq x_n \leq l < l + \varepsilon$.

❑ (ii) On a :

(*) $\forall\, n,\ x_{n+1} \geq x_n$

(**) $\forall\, \mathrm{A},\ \exists\, \mathrm{N},\ x_\mathrm{N} > \mathrm{A}$

Soit A donné, et considérons le N donné par (**). Par récurrence, (*) permet de montrer que :

$$\forall\, n > \mathrm{N},\ x_n \geq x_\mathrm{N}$$

Donc, $\forall\, n > \mathrm{N},\ \mathrm{A} < x_\mathrm{N} \leq x_n$.

On a évidemment la proposition duale :

PROPOSITION :

Soit (x_n) *une suite décroissante. Alors :*

(i) *Ou bien* (x_n) *est minorée et alors* (x_n) *converge.*

(ii) *Ou bien* (x_n) *n'est pas minorée et alors* (x_n) *tend vers* $-\infty$.

Dans le cas (i), la limite est la borne inférieure de la suite.

EXEMPLE 1 :

❑ Soit $x_n = 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{n!}$. (x_n) est évidemment croissante. On prouve par récurrence que $(n + 1)! > 2^n$ pour $n \geq 1$. Donc la suite est majorée par :

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2\,(1 - \frac{1}{2^n}) < 3$$

Etant croissante majorée, elle converge. (On prouvera ultérieurement qu'elle converge vers e). Nous donnerons une autre démonstration de cette convergence un peu plus bas.

EXEMPLE 2 :

❑ Soit $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$. La suite est croissante. On a :

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2^{n-1} + 1} + ... + \frac{1}{2^n})$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + ... + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2}$$

$$\geq 1 + \frac{n}{2}$$

Donc la suite n'est pas majorée. Elle tend vers $+\infty$.

7- Suites adjacentes

Ce paragraphe n'est valable que sur $\mathbf{R}$.

Avant de définir les suites adjacentes, nous allons d'abord étudier les suites vérifiant les propriétés suivantes.

PROPOSITION :

Soit (a_n) *et* (b_n) *deux suites vérifiant :*

(a_n) *est croissante*

(b_n) *est décroissante*

$\forall\ n,\ a_n \leq b_n$

Alors ces deux suites convergent vers des limites α *et* β *telles que* $\alpha \leq \beta$.

<u>Démonstration</u> :

❑ Montrons d'abord que : $\forall\ n, \forall\ m,\ a_n \leq b_m$. En effet :

Si $n \leq m$, on a $a_n \leq a_m \leq b_m$

Si $n > m$, on a $a_n \leq b_n \leq b_m$

Donc (a_n) est une suite croissante majorée par n'importe quel terme de la suite (b_m). Elle converge donc vers une limite α. α étant la borne supérieure de la suite (a_n), elle est inférieure à tout majorant de la suite. On a donc :

$$\forall\ m,\ \alpha \leq b_m.$$

La suite (b_m) est décroissante minorée. Elle converge donc vers une limite β vérifiant :

$$\alpha \leq \beta.$$

Cette proposition admet comme corollaire la **propriété des segments emboîtés**. Soit $(I_n) = ([a_n, b_n])$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments, alors il existe un élément commun à tous les segments. La proposition permet de montrer que l'intersection de tous les segments est égale à $[\alpha, \beta]$, où α est la limite des a_n et β la limite des b_n.

EXEMPLE : les suites babyloniennes.

❑ Les babyloniens (2000 avant JC) ont, semble-t-il, utilisé comme approximation de $\sqrt{a}$ la quantité $\frac{1}{2}(b + \frac{a}{b})$ où b est un nombre arbitraire, en pratique proche de $\sqrt{a}$. Le procédé peut être itéré. Soit a un réel strictement positif. On définit les deux suites :

b_0 est arbitraire, élément de $]\sqrt{a}\ ,+\infty[$

$$a_n = \frac{a}{b_n}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b_n} + b_n\right)$$

Montrons que les deux suites convergent vers $\sqrt{a}$.

i) $\forall\ n,\ a_n \leq \sqrt{a} \leq b_n$

Cette relation est vraie pour $n = 0$. Par ailleurs :

$$b_{n+1} \geq \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b_n} + b_n \geq 2\sqrt{a} \Leftrightarrow b_n^2 - 2b_n\sqrt{a} + a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (b_n - \sqrt{a})^2 \geq 0 \text{ qui est vrai}$$

$$a_{n+1} = \frac{a}{b_{n+1}} \leq \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

ii) (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a}{b_{n+1}} - \frac{a}{b_n} \geq 0$$

iii) Il en résulte que (a_n) converge vers une limite α et (b_n) vers une limite β. En passant à la limite dans les relations définissant a_n et b_n, on obtient :

$$\alpha = \frac{a}{\beta} \text{ et } \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha\beta = a \text{ et } \alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \beta = \sqrt{a}$$

Prenons l'exemple de $a = 2$, en partant de $b_0 = 2$. On obtient successivement :

$a_n = 1, 1.333333333, 1.411764706, 1.414211438, 1.414213562$

$b_n = 2, 1.500000000, 1.416666667, 1.414215686, 1.414213562$

La convergence est très rapide. On peut le prouver comme suit. Soit K un majorant de la suite $(\frac{1}{2b_n})$.

Quitte à oublier les premiers termes de la suite, on peut supposer que b_0 est tel que $K(b_0 - \sqrt{a}) < 1$. On a alors :

$$0 \leq b_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(\frac{a}{b_n} + b_n) - \sqrt{a} = \frac{(b_n - \sqrt{a})^2}{2b_n}$$

$$\leq K\,(b_n - \sqrt{a})^2$$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall\, n,\ 0 \leq b_n - \sqrt{a} \leq K^{2^n - 1}\,(b_0 - \sqrt{a})^{2^n} = \frac{1}{K}\,(K(b_0 - \sqrt{a}))^{2^n}$$

Le nombre p de chiffres exacts de $\sqrt{a}$ donné par b_n vérifie :

$$\frac{1}{K}\,(K(b_0 - \sqrt{a}))^{2^n} \geq \frac{1}{10^p}$$

donc $\quad -\ln(K) + 2^n \ln(K(b_0 - \sqrt{a})) \geq -p \ln(10)$

donc $\quad p \geq \text{Cte } 2^n \qquad$ en négligeant le terme $-\ln(K)$

En gros, le nombre de décimales exactes double à chaque itération.

Définissons maintenant les suites adjacentes :

DEFINITION :

On appelle **suites adjacentes** *deux suites (a_n) et (b_n) telles que :*

(i) (a_n) *est croissante*

(ii) (b_n) *est décroissante*

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

On dispose de la proposition suivante :

PROPOSITION

Soit (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes. Alors ces deux suites admettent la même limite.

<u>Démonstration</u> :

❑ Montrons que :

$$\forall\, n,\ a_n \leq b_n$$

Par l'absurde, si l'on a $a_N > b_N$ pour un certain N, et si on pose $\varepsilon = a_N - b_N > 0$, alors on a, d'après (i) et (ii) :

$$\forall\, n > N,\ a_n - b_n \geq a_N - b_N > \varepsilon$$

ce qui est contradictoire avec (iii). On peut alors appliquer la proposition précédente. La suite (an) converge vers sa borne supérieure α. La suite (b_n) converge vers sa borne inférieure β. Donc $(b_n - a_n)$ converge evrs $\beta - \alpha = 0$ par l'hypothèse (iii). Donc les deux limites sont égales.

Une formulation équivalente est la suivante :

Soit (I_n) une suite décroissante de segments dont la longueur tend vers 0. Alors l'intersection des I_n est réduite à un point.

EXEMPLE :

❑ Soit $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n \geq 1$. Montrons que (a_n) et (b_n) sont adjacentes. (a_n) est clairement croissante et on a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$. Il reste à vérifier que (b_n) décroît :

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - a_n - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \leq 0 \text{ car } 2 \leq n + 1.$$

Il en résulte que les deux suites convergent.

8- Théorème de Bolzano-Weierstrass

Nous avons vus deux théorèmes de convergence des suites :

celui des suites croissantes majorées

celui des suites adjacentes

En voici un troisième :

THEOREME DE BOLZANO-WEIERSTRASS

De toute suite bornée réelle ou complexe, on peut extraire une sous-suite convergente.

Par exemple, si $x_n = (-1)^n$, alors la suite extraite (x_{2n}) converge vers 1 et la suite extraite (x_{2n+1}) converge vers -1. En outre, si une suite n'est pas bornée, il existe une sous-suite qui tend vers ∞.

On donne la démonstration dans le cas des suites réelles. Pour le cas des suites complexes, il suffira ensuite d'extraire une première sous-suite telle que les parties réelles convergent, puis de cette première sous-suite, on extrait une deuxième sous-suite telle que les parties imaginaires convergent également.

Démonstration 1 :

❑ Nous procéderons par dichotomie. Soit (x_n) une suite bornée, contenue dans le segment $[a, b]$. On va définir une suite d'intervalles emboîtés I_n tels que :

Pour tout n, I_n contient une infinité de termes de la suite (c'est-à-dire qu'il existe une infinité d'indices p tels que x_p appartienne à I_n)

La suite (I_n) est décroissante au sens de l'inclusion.

La longueur des I_n est égale à $\dfrac{b-a}{2^n}$.

On choisit $I_0 = [a, b]$. Supposons I_n choisi, $I_n = [a_n, b_n]$. Par récurrence, I_n possède une infinité de termes de la suite. Donc il existe nécessairement une infinité de termes dans au moins l'un des deux intervalles $[a_n, \dfrac{b_n + a_n}{2}]$ ou $[\dfrac{b_n + a_n}{2}, b_n]$. On choisit pour I_{n+1} cet intervalle. Il résulte des propriétés des I_n que (a_n) et (b_n) forment deux suites adjacentes, convergeant vers la même limite l.

Définissons maintenant la sous-suite. On choisit $\Phi(0) = 0$. Si $\Phi(1)$, $\Phi(2)$, ... $\Phi(n-1)$ sont choisis, on choisit $\Phi(n)$ tel que $\Phi(n) > \Phi(n-1)$ et $x_{\Phi(n)}$ appartiennent à I_n, ce qui est possible puisque I_n contient une infinité de termes de la suite.

On en conclut que : $\forall n, a_n \leq x_{\Phi(n)} \leq b_n$ et donc que $x_{\Phi(n)}$ converge vers l. l s'appelle **valeur d'adhérence** de la suite.

Démonstration 2 :

❑ Voyons les entiers n comme des individus situés à une hauteur x_n, disposés les uns à la suite des autres :

On dit que n a "vue sur la mer" si : $\forall p > n, x_n > x_p$. (n est situé plus haut que tous les entiers qui viennent après lui).

On dit que n a "la vue bouchée" si : $\exists p > n, x_p \geq x_n$. (Il existe un entier p supérieur à n et situé plus haut que lui).

Il y a alors deux cas :

Ou bien il y a une infinité d'entiers ayant vue sur la mer. Dans ce cas, les x_n correspondant forment une sous-suite décroissante. Etant minorée, elle converge.

Ou bien il n'y a qu'un nombre fini d'entiers ayant vue sur la mer. Se plaçant au-delà de ce nombre fini, tous les entiers qui suivent ont la vue bouchée. On en choisit un de valeur p_0. Il existe un indice $p_1 > p_0$ tel que $x_{p_1} \geq x_{p_0}$ puis $p_2 > p_1$ tel que $x_{p_2} \geq x_{p_1}$, etc... On construit ainsi une sous-suite croissante. Etant majorée, elle converge. Etant bornée par a et b, la limite est dans $[a,b]$.

Démonstration 3 *:*

❑ Soit $y_n = \text{Sup } \{x_p \mid p \geq n\}$. La suite (y_n) est décroissante (car $\{x_p \mid p \geq n + 1\}$ est un ensemble inclus dans $\{x_p \mid p \geq n\}$ donc est majoré par y_n donc sa borne supérieure y_{n+1} est inférieure ou égale à ce majorant y_n). En outre, la suite (x_n) étant minorée, il en est de même des y_n. Etant décroissante minorée, la suite (y_n) converge vers une limite l. Nous allons montrer qu'il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers l.

Soit $\varepsilon = 1$. Il existe N_1 (et même une infinité de tels N_1) tel que $l - 1 < y_{N_1} < l + 1$ (définition de la limite d'une suite convergente, ici (y_n)).

Il existe donc x_{p_1}, avec $p_1 \geq N_1$, tel que $l - 1 < x_{p_1} \leq y_{N_1} < l + 1$ (définition de la borne sup, ici y_{N_1})

Supposons $x_{p_1}, x_{p_2}, ..., x_{p_{k-1}}$ définis et choisissons $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$. Il existe N_k tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $l - \dfrac{1}{k} < y_n < l + \dfrac{1}{k}$ (à nouveau définition de la convergence de la suite (y_n))

Choisissons n supérieur à p_{k-1}. Il existe alors un x_{p_k}, avec $p_k \geq n$ tel que :

$$l - \frac{1}{k} < x_{p_k} \leq y_n < l + \frac{1}{k}$$

(A nouveau, définition de la borne sup y_n)

Continuant indéfiniment, on construit une sous-suite (x_{p_k}) telle que, pour tout k, on ait :

$$l - \frac{1}{k} < x_{p_k} < l + \frac{1}{k}$$

Cette suite converge donc vers l.

EXEMPLES :

❑ On notera que la démonstration ne donne pas de construction explicite de la sous-suite. Par exemple, il existe des entiers $n_1, n_2, ..., n_k$ strictement croissant tels que $\sin(n_k)$ converge, mais on n'en possède pas d'expression. On obtiendra un joli dessin des 1000 premiers points de la suite

$\sin(n)$ (dont on montre dans la section consacrée aux exercices qu'elle n'est pas convergente) en traçant les points de coordonnées $(n, \sin(n))$.

❑ Si une suite (x_n) n'est pas bornée, alors il existe une sous-suite qui tend vers l'infini. En effet, il existe un indice n_1 tel que $|x_{n_1}| > 1$, puis, un indice n_2 qu'on peut choisir supérieur à n_1 tel que $|x_{n_2}| > 2$ (car si tous les indices $p > n_1$ sont tels que $|x_p| \leq 2$, alors la suite est bornée), etc. On construit ainsi une sous-suite (x_{n_m}) telle que, pour tout m, $|x_{n_m}| > m$.

9- Suites de Cauchy

On donne dans ce paragraphe une propriété équivalente à la convergence d'une suite réelle ou complexe, mais où la valeur de la limite n'apparaît pas.

PROPOSITION

On dit qu'une suite réelle ou complexe (a_n) est une **suite de Cauchy** *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, |a_n - a_p| < \varepsilon$$

Il est alors équivalent de dire que la suite (a_n) est convergente et qu'elle est de Cauchy.

Démonstration

❑ Supposons que la suite (a_n) soit convergente, de limite l. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |a_n - l| < \varepsilon$$

On a alors, pour $n \geq N$ et $p \geq N$:

$$|a_n - a_p| \leq |a_n - l| + |l - a_p| < 2\varepsilon$$

On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, |a_n - a_p| < 2\varepsilon$$

La conclusion étant vraie pour tout ε, on peut l'appliquer à $\dfrac{\varepsilon}{2}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, |a_n - a_p| < \varepsilon$$

La suite est donc de Cauchy.

Réciproquement, supposons que la suite est de Cauchy. Montrons d'abord que la suite est bornée. Prenons $\varepsilon = 1$. Il existe N tel que, (en prenant $p = N$), pour $n \geq N$, $|a_n - a_N| < 1$. La suite (a_n) est donc bornée par le nombre Max $\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$.Etant bornée, il existe d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass une sous-suite $(a_{\Phi(n)})$ qui converge vers une limite l. Φ est une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, de sorte que, pour tout n, $\Phi(n) \geq n$. Soit $\varepsilon > 0$. Selon la propriété de Cauchy, il existe N tel que :

$$\forall n \geq N, \forall p \geq N, |a_n - a_p| < \varepsilon$$

Pour tout $p \geq N$, on a $\Phi(p) \geq p \geq N$ donc, a fortiori :

$$\forall n \geq N, \forall p \geq N, |a_n - a_{\Phi(p)}| < \varepsilon$$

Si on passe à la limite en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall\ n \geq \mathrm{N},\ |a_n - l| \leq \varepsilon$$

Donc la suite (a_n) converge vers l.

EXEMPLE :

❑ La suite de terme général $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$ ne converge pas car elle n'est pas de Cauchy. En effet, pour $n > p$, on a :

$$a_n - a_p = \frac{1}{p+1} + ... + \frac{1}{n} \geq \frac{n-p}{n}$$

Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Pour tout N, choisissons $p = \mathrm{N}$ et n tel que $\dfrac{n-\mathrm{N}}{n} > \dfrac{1}{2}$, ce qui est possible puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-\mathrm{N}}{n} = 1$. On met alors en défaut la propriété de Cauchy.

(a_n) ne converge pas, mais elle est croissante. Donc elle tend vers l'infini.

III : Suites particulières

1- Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est donnée par son premier terme u_0 et sa raison r :

$$\forall\ n,\ u_{n+1} = u_n + r$$

On a alors par récurrence :

$$u_n = u_0 + nr$$

et $\quad u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)u_0 + r\,\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$, produit du nombre de termes par la moyenne entre le premier et le dernier terme.

2- Suites géométriques

Une suite géométrique est donnée par son premier terme u_0 et sa raison q (non nulle en général) :

$$\forall\ n,\ u_{n+1} = q\ u_n$$

On a alors par récurrence :

$$u_n = q^n\ u_0$$

et $$u_0 + u_1 + ... + u_n = \left[\begin{array}{ll} (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0\,\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{array}\right.$$

Cette somme converge si et seulement si $|q| < 1$. La limite de la somme vaut alors $\dfrac{u_0}{1-q}$ ce qu'on notera sous la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{u_0}{1-q}$

EXEMPLE :

❑ Une utilisation courante des suites géométriques intervient dans les prêts à crédit. Un prêteur dispose d'une somme M qu'il consent à prêter au taux d'intérêt mensuel t. Un emprunteur demande à recevoir cette somme M en contrepartie d'un remboursement mensuel d'une somme a, pendant n mensualités. Quelle est la valeur de a en fonction de M, t et n ?

Du point de vue de prêteur, le taux d'intérêt correspond à ce qu'il pourrait gagner par ailleurs en plaçant son argent. Ainsi, le capital M deviendrait $M(1 + t)$ au bout du premier mois, $M(1 + t)^2$ au bout du deuxième, ..., $M(1 + t)^n$ au bout de n mois. Il ne peut consentir à prêter la somme M que si les remboursements réguliers lui permettent d'obtenir un capital équivalent à $M(1 + t)^n$ au bout de n mois, en plaçant ces remboursements dans des conditions comparables. Ainsi, recevant une somme a au bout d'un mois, et plaçant cette somme au taux t, il aura $a(1 + t)^{n-1}$ au bout des $n - 1$ mois restants. Recevant une autre somme a au bout de deux mois, il aura $a(1 + t)^{n-2}$ au bout des $n - 2$ mois restants, etc... La dernière somme reçue, au $n^{\text{ème}}$ mois, est a et ne rapporte aucun intérêt. Son capital final sera donc :

$$a(1 + t)^{n-1} + a(1 + t)^{n-2} + ... + a(1 + t) + a = a\,\frac{(1 + t)^n - 1}{t}$$

qui doit être égal à $M(1 + t)^n$, d'où la relation :

$$a = \frac{Mt}{1 - (1 + t)^{-n}}$$

Une autre démonstration de cette formule sera donnée au paragraphe suivant.

Généralement, c'est le taux annuel T qui est donné. Pour calculer le taux actuariel mensuel correspondant, il suffit d'appliquer la formule :

$$1 + T = (1 + t)^{12}$$

En effet, chaque mois apporte des intérêts au taux t. Ainsi, un taux annuel de 6% correspond à un taux mensuel de 0,4868 %.
Application numérique : emprunt de 40 000 Euros au taux annuel de 6% sur 10 ans. Le montant mensuel des remboursements est de 440,91 Euros. Le montant total des remboursements est de 52 908,83 euros

3- Suites arithmético-géométriques

Une telle suite est de la forme :

$$\forall\, n,\ u_{n+1} = au_n + b$$

avec $b \neq 0$ et $a \neq 1$, sinon on retrouve les suites précédentes.
Une solution particulière est obtenue pour la suite constante l telle que $l = al + b$. Cette valeur l est d'ailleurs la limite éventuelle de la suite (u_n) si elle converge. Soit (v_n) la suite auxiliaire définie par :

$$\forall\, n,\ v_n = u_n - l.$$

On a alors : $\forall\, n,\ v_{n+1} = av_n$ autrement dit, la suite (v_n) est la solution générale de l'équation homogène. On a $v_n = a^n\, v_0$ et $u_n = l + a^n\,(u_0 - l)$
La suite converge donc si et seulement si $|a| < 1$ ou $u_0 = l$.

EXEMPLE :
❑ Un prêteur dispose d'une somme M qu'il consent à prêter au taux d'intérêt mensuel t. Un emprunteur demande à recevoir cette somme M en contrepartie d'un paiement mensuel d'une somme a, pendant n mensualités. Quelle est la valeur de a en fonction de M, t et n ?

Au moment de payer la $k^{\text{ème}}$ mensualité, l'emprunteur a déjà remboursé une partie du capital. Soit C_{k-1} le capital restant à rembourser après le $(k - 1)$-ème versement, de sorte que $C_0 = M$ et $C_n = 0$.

Le paiement de la mensualité a consiste d'une part à rembourser la partie du capital $C_{k-1} - C_k$, d'autre part à payer des intérêts sur le capital C_{k-1} pendant un mois, de sorte que :

$$a = C_{k-1} - C_k + tC_{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad C_k = (1 + t)C_{k-1} - a$$

On reconnaît dans (C_k) une suite arithmético-géométrique, de limite éventuelle $l = (1 + t)l - a$, soit $l = \frac{a}{t}$. On en tire :

$$C_k - \frac{a}{t} = (1 + t)(C_{k-1} - \frac{a}{t})$$

$$\Rightarrow \quad C_k - \frac{a}{t} = (1 + t)^k(C_0 - \frac{a}{t}) = (1 + t)^k(M - \frac{a}{t})$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{a}{t} = (1 + t)^n(M - \frac{a}{t}) \text{ puisque } C_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{Mt}{1 - (1 + t)^{-n}}$$

4- Suites récurrentes linéaires

Une telle suite est de la forme :

$$\forall\ n,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \ (*)$$

avec $b \neq 0$.

Méthode 1)

Les suites géométriques r^n de raison non nulle solutions de cette récurrence vérifient :

$$r^2 = ar + b$$

Soit r solution (éventuellement complexe). Cherchons les autres solutions sous la forme : $u_n = v_n r^n$. On obtient :

$$v_{n+2}\, r^2 = ar\, v_{n+1} + b\, v_n$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{n+2}(ar + b) = ar\, v_{n+1} + b\, v_n$$

$$\Leftrightarrow \quad (ar + b)(v_{n+2} - v_{n+1}) = -b\,(v_{n+1} - v_n)$$

Donc la suite $v_{n+2} - v_{n+1}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{b}{ar + b}$ ou $-\frac{b}{r^2}$ ou enfin $\frac{r'}{r}$ si r' est l'autre racine. On a donc :

$$v_n - v_{n-1} = C\,(\frac{r'}{r})^n\text{, où C est une constante.}$$

On en déduit que $v_n = C(\frac{r'}{r})^n + C(\frac{r'}{r})^{n-1} + ... + C(\frac{r'}{r}) + v_0$

Si $r = r'$, alors v_n est de la forme $\alpha n + \beta$, et u_n est combinaison des suites r^n et nr^n.

Si $r \neq r'$, alors v_n est de la forme $\alpha(\frac{r'}{r})^n + \beta$, et u_n est combinaison de r^n et de r'^n.

Méthode 2)

Posons $S = \{(u_n) \mid (u_n) \text{ vérifie } (*)\}$

S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites. Cet espace est de dimension 2. En effet, considérons les deux suites particulières U et V éléments de S, définies par $U_0 = 1$ et $U_1 = 0$, $V_0 = 0$ et $V_1 = 1$. On prouve facilement par récurrence que toute suite u de S s'écrit :

$$u = u_0 U + u_1 V$$

Cette décomposition est unique. Ceci prouve que (U,V) constitue une base de S. Cette base est malheureusement de peu d'utilité car elle ne permet pas de calculer le terme général de la suite. Déterminons donc une autre base. Cherchons les éléments de S qui sont des suites géométriques (r^n). r doit alors vérifier :

$$r^2 = ar + b$$

Cette équation s'appelle équation caractéristique associée à la suite.

Plusieurs cas sont à considérer :

❑ sur $\mathbb{C}$:

Si le discriminant est non nul, il y a deux suites différentes de raison r et r'. Ces deux suites forment un système libre et donc une base de S, et il en résulte que :

$\exists\ \alpha, \beta, \forall\ n, u_n = \alpha r^n + \beta r'^n$

Si le discriminant est nul, alors il y a une racine unique r, égale à $\dfrac{a}{2}$, et $b = -\dfrac{a^2}{4}$. Vérifions que (nr^n) est aussi élément de S :

$(n + 2)r^{n+2} = a(n + 1)r^{n+1} + bnr^n$

$\Leftrightarrow\quad (n + 2)r^2 = a(n + 1)r + bn$

$\Leftrightarrow\quad (n + 2)(ar + b) = a(n + 1)r + bn$

$\Leftrightarrow\quad ar + 2b = 0$ ce qui est bien vrai.

Les deux suites (r^n) et (nr^n) étant deux suites linéairement indépendantes, elles forment une base de S et :

$\exists\ \alpha, \beta, \forall\ n, u_n = \alpha r^n + \beta nr^n$

❑ sur $\mathbb{R}$.

Si le discriminant est positif ou nul, on procède comme ci-dessus.

Si le discriminant est négatif, alors, en tant que sous-espace vectoriel complexe, on peut prendre comme base les suites géométriques de raison complexe r_1 et r_2, nécessairement conjuguées si a et b sont réels. Mais on peut également prendre $\mathrm{Re}(r_1^n)$ et $\mathrm{Im}(r_2^n)$ qui, étant combinaison linéaires de r_1^n et r_2^n sont bien élément de S, sont réelles, et engendrent S.

On a donc montré la proposition suivante :

PROPOSITION

Soit la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On associe à cette relation l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$. L'ensemble des suites solutions forme un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est :

Si le discriminant est non nul : (r_1^n) et (r_2^n) où r_1 et r_2 sont solution de l'équation caractéristique. Dans le cas où a et b sont réel donnant un discriminant négatif sur $\mathbb{R}$, on prend $(\mathrm{Im}(r_1^n))$ et $(\mathrm{Re}(r_1^n))$.

Si le discriminant est nul : (r^n) et (nr^n) où r est racine double de l'équation caractéristique.

EXEMPLES :

❑ $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \quad\Rightarrow\quad \exists\ \alpha, \beta, \forall\ n, u_n = \alpha + \beta 2^n$

❑ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad\Rightarrow\quad \exists\ \alpha, \beta, \forall\ n, u_n = \alpha\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$

❑ $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \quad\Rightarrow\quad \exists\ \alpha, \beta, \forall\ n, u_n = \alpha 2^n + \beta n2^n$

5- Suites récurrentes

On s'intéresse aux suites de la forme $u_n = f(u_{n-1})$ où f est une fonction continue définie sur un intervalle I. De façon que la suite soit définie pour tout n, nous supposerons que f(I) est inclus dans I.

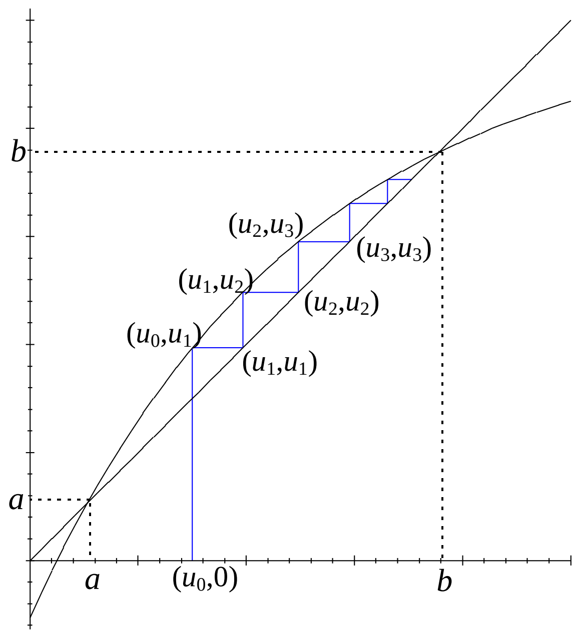
a) *limite éventuelle* :
Si l est une limite possible de la suite, alors on obtient, en passant à la limite dans la relation de récurrence, $l = f(l)$. De tels points sont appelés **points fixes** de f.

Dans toutes les études qui suivent, un graphique est de la plus grande utilité.

b) *f croissante* :
Une fois que l'on a trouvé les limites éventuelles, on partage I en intervalles de la forme $[a, b]$, où a et b sont des limites éventuelles ou $+\infty$ ou $-\infty$, ce qui est possible le plus souvent, sauf cas d'une fonction f pathologique. Commençons par supposer $[a, b]$ borné. On a alors :

$f(a) = a$
$a < x < b \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow a \leq f(x) \leq b$
$f(b) = b$
$f(x) - x$ est de signe constant sur $[a, b]$.

Traitons d'abord le cas où $f(x) - x \geq 0$ sur $]a, b[$. La construction suivante permet d'utiliser un graphique pour conjecturer le comportement de la suite. On trace le graphe de f, ainsi que la droite $y = x$. Si on porte u_n en abscisse, le graphe de f permet d'en déduire u_{n+1} en ordonnée, puis la droite $y = x$ permet de reporter u_{n+1} en abscisse :



On obtient un graphique en escalier dont les points anguleux ont leur coordonnées qui s'expriment à partir de la suite (u_n). Celle-ci apparaît aussi bien comme suite des abscisses que comme suite des ordonnées. On voit immédiatement que la suite est croissante majorée par b. Vérifions-le :

Soit u_0 élément de $]a, b[$. On a alors :

i) $\forall n, u_n \in [a, b]$.

Cette propriété est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie pour $n-1$, alors on a :

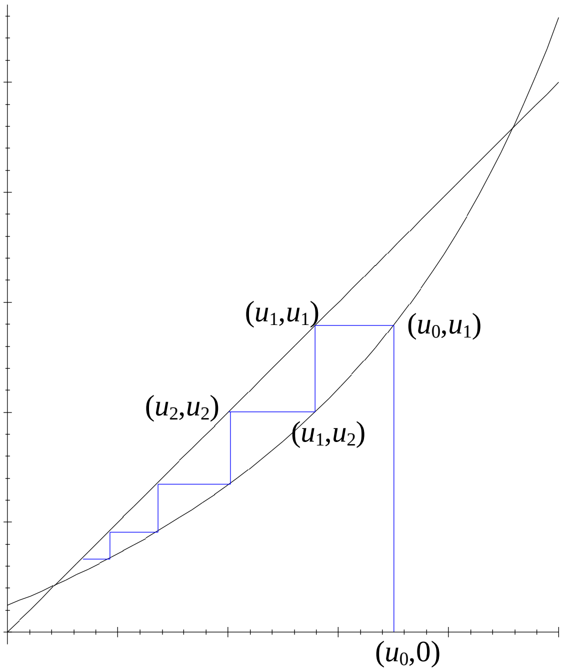
$a \leq u_{n-1} \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(u_{n-1}) \leq f(b)$ car f est croissante

$\Rightarrow a \leq u_n \leq b$ car $f(a) = a$, $f(u_{n-1}) = u_n$ et $f(b) = b$.

ii) (u_n) est croissante.
En posant $x = u_{n-1}$, on a en effet $f(x) \geq x \Rightarrow u_n \geq u_{n-1}$.

iii) (u_n) est croissante majorée par b, donc est convergente. Sa limite éventuelle est l, point fixe supérieur ou égal à u_0 et inférieur ou égal à b. Le seul qui convienne est b. Ainsi la suite converge vers b.

Dans le cas où $f(x) - x \leq 0$ sur $]a, b[$, on montre de même que la suite est décroissante, convergente vers a.



Ainsi, le sens de variation de la suite n'est pas lié à celui de f, mais seulement à la position de $f(x)$ par rapport à x. On a le résultat suivant :

f croissante sur I $\Rightarrow (u_n)$ monotone.

qui peut d'ailleurs se montrer directement par récurrence.

Considérons maintenant le cas d'un intervalle partitionnant I non borné, par exemple $[a, +\infty[$ et $f(x) - x > 0$ sur $[a, +\infty[$. On montre comme précédemment que la suite reste dans $[a, +\infty[$, et est croissante. Si elle convergeait, ce serait vers un point fixe l supérieur à a, ce qui est contraire à notre hypothèse. On en conclut donc que la suite ne converge pas, et qu'elle tend donc vers $+\infty$. Si $f(x) - x < 0$, la suite est décroissante et converge vers a. On traitera de même le cas $]-\infty, b]$.

EXEMPLE 1 :

❑ $f(x) = \sqrt{2x+3}$. Le point fixe est 3. Toutes les suites convergent vers 3.

EXEMPLE 2 :

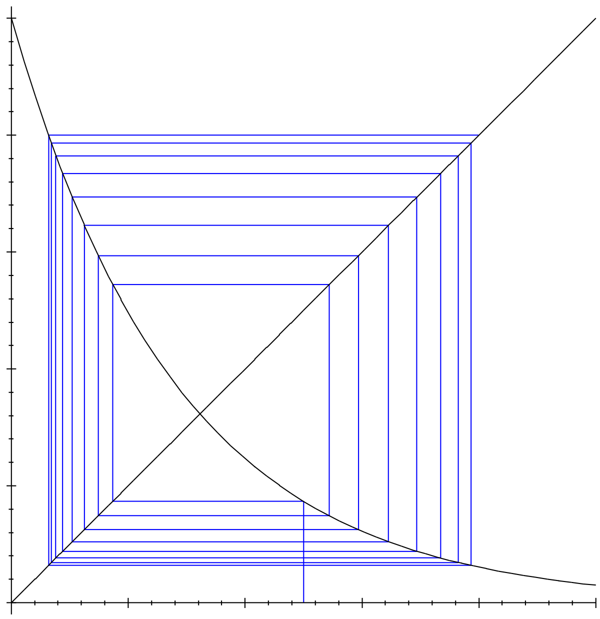
❑ $f(\mathrm{x}) = 2\exp(x - 2)$. Il existe deux points fixes, l'un attractif, l'autre répulsif.

c) *f décroissante* :

On peut distinguer le cas de la sous-suite de rang pair (u_{2n}) et de rang impair (u_{2n+1}) car :

$$u_{2n} = f \circ f(u_{2n-2}) = g(u_{2n-2})$$
$$u_{2n+1} = f \circ f(u_{2n-1}) = g(u_{2n-1})$$

avec $g = f \circ f$ croissante. On peut donc appliquer à g l'étude précédente. Chacune des deux suites est donc monotone, et de monotonie opposée car $u_{2n+1} = f(u_{2n})$, donc si (u_{2n}) croît par exemple, (u_{2n+1}) décroît. Il se peut que la suite admette une limite, mais aussi que (u_{2n}) tende vers l et (u_{2n+1}) vers l' avec $l = f(l')$ et $l' = f(l)$. C'est le cas dans l'illustration ci-dessous où $l \neq l'$:



Il peut aussi ne pas y avoir de limite, la suite (u_n) tendant vers l'infini.

On peut aussi essayer de majorer $|u_n - l|$ où l est une limite éventuelle.

D'une manière générale, on montrera par récurrence que, si l est point fixe de f, $u_n - l$ change de signe à chaque incrémentation de n.

EXEMPLE 1 :

❑ $f(x) = \sqrt{\dfrac{4 - 3x}{10}}$

On montrera que la suite n'est définie que pour $u_0 \in [-\dfrac{124}{27}, \dfrac{4}{3}]$. Le point fixe est $\dfrac{1}{2}$. On a, en multipliant par la quantité conjuguée :

$$\left|u_{n+1}-\frac{1}{2}\right| = \frac{3\left|\frac{1}{2}-u_n\right|}{10\sqrt{\frac{4-3x}{10}}+5}$$

$$\Rightarrow \qquad \left|u_{n+1}-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{5}\left|u_n-\frac{1}{2}\right|$$

donc, par récurrence $\left|u_n-\frac{1}{2}\right| \leq (\frac{3}{5})^n \left|u_0-\frac{1}{2}\right|$ et la suite converge vers $\frac{1}{2}$.

EXEMPLE 2 :

❑ $f(x) = \dfrac{3}{2x^2+1}$

Le point fixe est 1. La méthode de l'exemple 1 ne donne pas grand chose. On étudie les suites de rang pair, et de rang impair. On pose $g = f \circ f$. Le signe de $g(x) - x$ est celui de :

$$3(2x^2+1)^2 - (2x^2+1)^2x - 18x = (x-1)(2x^2+2x+3)(-2x^2+6x-1)$$

g admet deux points fixes supplémentaires : $\dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$. On a alors l'une des deux sous-suites qui tend vers l'un des points fixes, et l'autre qui tend vers l'autre, sauf dans le cas particulier où $u_0 = 1$, auquel cas la suite est constante.

d) *f quelconque* :

L'étude peut se révéler extrêmement difficile. Considérons par exemple la suite récurrente suivante.

$$x_0 = 0$$

$\forall\, n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{1+2\lfloor x \rfloor - x}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

On montre que, lorque n décrit $\mathbb{N}$, x_n prend **toutes** les valeurs rationnelles positives une fois et une seule. (*Bibliographie* : American Mathematical Monthly, vol. 110, n°7, août-septembre 2003, p.642-643)

Même dans le cas où f est continue, la situation est complexe et fait l'objet de recherches très poussées. Les suites que l'on obtient sont liées aux notions de fonctions chaotiques, de fractals, de sensibilité aux valeurs initiales, d'effet papillon... On se reportera à l'annexe *Fonctions chaotiques*.

6- Suites homographiques

Un cas particulier de suite récurrente est :

$$u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d} = f(u_n)$$

avec $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, avec $ad - bc \neq 0$. De telles suites s'appellent suites **homographiques**.

On se place sur $\mathbb{C}$. Afin d'éviter le cas de suites dont un terme est non défini à cause du dénominateur qui s'annule, on prolonge parfois la fonction à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en posant $f(\infty) = \dfrac{a}{c}$ et $f(-\dfrac{d}{c}) = \infty$. On cherche les points fixes de f, c'est-à-dire les réels x tels que $f(x) = x$ (ce sont les limites potentielles de la suite), ce qui conduit à une équation du second degré.

S'il existe deux racines distinctes (éventuellement complexes) α et β, on étudie la suite auxiliaire :

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$

On vérifie que cette suite est géométrique, ce qui permet de trouver le terme général de la suite initiale. On remarquera que si a, b, c, d sont réelles et si les racines sont non réelles, la suite initiale ne peut pas converger, puisqu'il n'existe pas de points fixes dans $\mathbf{R}$.

S'il existe une racine double α, on considère la suite auxiliaire :

$$v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$$

On vérifie que cette suite est arithmétique. On en déduit que v_n tend vers ∞ et donc que u_n tend vers α, dans tous les cas.

EXEMPLES :

❑ $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$

Les points fixes vérifient :

$$x = \frac{x}{3 - 2x} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Considérons la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$. Alors $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{u_n}{3u_n - 3} = \dfrac{1}{3} v_n$.

Donc $v_n = \dfrac{v_0}{3^n}$ et $u_n = \dfrac{v_n}{v_n - 1} = \dfrac{v_0}{v_0 - 3^n} = \dfrac{u_0}{u_0 - 3^n(u_0 - 1)}$

❑ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$

Les points fixes vérifient :

$$x = \frac{x + 1}{x - 1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Notons les deux racines $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ et $\beta = 1 - \sqrt{2}$. On a donc $\alpha = \dfrac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$, $\beta = \dfrac{\beta + 1}{\beta - 1}$, $\alpha\beta = -1$.

Considérons la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$. Alors $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \dfrac{(1 - \alpha)\, u_n + 1 + \alpha}{(1 - \beta)\, u_n + 1 + \beta} = \dfrac{1 - \alpha}{1 - \beta} v_n$

avec $\dfrac{1 - \alpha}{1 - \beta} = -1$. Donc $v_{n+1} = -v_n$ et $v_n = (-1)^n v_0$.

Donc $u_n = \dfrac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1} = \dfrac{\beta(-1)^n v_0 - \alpha}{(-1)^n v_0 - 1} = $ etc...

❑ $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{1 - u_n}$

Les points fixes vérifient :

$$x = \frac{1 + x}{1 - x} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm i.$$

Considérons la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n - i}{u_n + i}$. Alors $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - i}{u_{n+1} + i} = \dfrac{(1+i)\,u_n + 1 - i}{(1-i)\,u_n + 1 + i} = \dfrac{1+i}{1-i}\,v_n$ avec $\dfrac{1+i}{1-i} = i$. Donc $v_{n+1} = i\,v_n$ et $v_n = i^n\,v_0$.

Donc $u_n = \dfrac{iv_n + i}{1 - v_n} = \dfrac{i^{n+1}\,v_0 + i}{1 - i^n\,v_0} =$ etc...

❑ $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$

Les points fixes vérifient :

$$x = \frac{3x-2}{2x-1} \Leftrightarrow x = 1$$

Considérons la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Alors $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1} = 2 + v_n$. Donc $v_n = 2n + v_0$ et $u_n = \dfrac{1 + v_n}{v_n} = \dfrac{2n + v_0 + 1}{2n + v_0} = \dfrac{2n(u_0 - 1) + u_0}{2n(u_0 - 1) + 1}$

IV : Comparaison des suites numériques

1- Suites équivalentes

DEFINITION :

(i) *Une suite* (x_n) *est* **négligeable** *devant une suite* (y_n) *s'il existe une suite* (ε_n) *tendant vers* 0 *telle que* $x_n = y_n\varepsilon_n$ *pour tout n.*

(ii) *Une suite* (x_n) *est* **équivalente** *à une suite* (y_n) *s'il existe une suite* (ε_n) *tendant vers* 0 *telle que* $x_n = y_n(1+\varepsilon_n)$ *pour tout n.*

(iii) *Une suite* (x_n) *est* **dominée** *par une suite* (y_n) *s'il existe une constante C telle que, pour tout n,* $|x_n| \leq C\,|y_n|$.

Pour des suites ne s'annulant pas, cela signifie :

i) $\dfrac{x_n}{y_n}$ tend vers 0. On note $x_n = o(y_n)$

ii) $\dfrac{x_n}{y_n}$ tend vers 1. On note $x_n \sim y_n$.

iii) $(\dfrac{x_n}{y_n})$ est bornée. On note $x_n = O(y_n)$

Les propriétés suivantes résultent directement des définitions :

Si $x_n = y_n + z_n$ et si (z_n) est négligeable devant (y_n), alors (x_n) et (y_n) sont équivalentes.

Si $x_n \sim x_n'$ et $y_n \sim y_n'$, alors $x_n\,x_n' \sim y_n\,y_n'$, $\dfrac{x_n}{x_n'} \sim \dfrac{y_n}{y_n'}$, et pour tout α, $x_n^{\alpha} \sim x_n'^{\alpha}$

2- Suites de références

On suppose connue les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{\alpha}}$ pour tout $\alpha > 0$.

On dispose alors des comparaisons suivantes entre suites:

❑ Suites tendant vers $+\infty$: Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q > 1$, on note ci-dessous les suites par ordre de dominance. Une suite est négligeable devant les suites situées à sa droite.

$$(\ln(n))^\alpha \qquad n^\beta \qquad q^n \qquad n! \qquad q^{n^{1+\alpha}}$$

❑ Suites tendant vers 0 : Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < q < 1$

$$\frac{1}{q^{n^{1+\alpha}}} \qquad \frac{1}{n!} \qquad q^n \qquad \frac{1}{n^\beta} \qquad \frac{1}{(\ln(n))^\alpha}$$

Le cas des suites tendant vers 0 se déduit du cas des suites tendant vers l'infini par inversion. Il suffit donc de montrer le permier cas :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n^\beta} = 0 \text{ car } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\beta/\alpha}} = 0 \text{ qu'il suffit d'élever à la puissance } \alpha.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{q^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{e^{n\ln(q)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{\beta/\ln(q)}}{e^n}\right)^{\ln(q)} = 0 \text{ car } \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\beta/\ln(q)}}{e^n} = 0$$

Pour le calcul de $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!}$, posons K un entier supérieur à q, prenons n supérieur à K et écrivons :

$$\frac{q^n}{n!} = \frac{q^n}{1 \times 2 \times ... \times \mathrm{K} \times (\mathrm{K}+1) \times ... \times n} = \frac{q^\mathrm{K}}{1 \times 2 \times ... \times \mathrm{K}} \times \frac{q^{n-\mathrm{K}}}{(\mathrm{K}+1) \times (\mathrm{K}+2) \times ... \times n}$$

$\leq \frac{q^\mathrm{K}}{1 \times 2 \times ... \times \mathrm{K}} \times \left(\frac{q}{\mathrm{K}+1}\right)^{n-\mathrm{K}}$ dont la limite est nulle puisque $\left(\frac{q}{\mathrm{K}+1}\right)^{n-\mathrm{K}}$ est une suite géométrique de raison inférieure à 1.

Enfin, en prenant le logarithme de $\frac{q^{n^{1+\alpha}}}{n!}$:

$$\ln\left(\frac{q^{n^{1+\alpha}}}{n!}\right) = n^{1+\alpha}\ln(q) - \ln(n!) \geq n^{1+\alpha}\ln(q) - n\ln(n) = n\,(n^\alpha \ln(q) - \ln(n)) \to \infty \text{ quand } n \to \infty$$

Annexe : fonctions chaotiques

Les points exposés ci-dessous ont fait l'objet de recherches actives lors des dernières décennies, comme le montre la bibliographie suivante :

- A. N. Sharkovski, Coexistence of cycles of a continuing map of a line into itself, *Ukrainian Math. J.*, **16** (1964), p.61-71 (en russe)
- T. Li & J. Yorke, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, **82** (1975), p.985-992
- R. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed. Addison-Wesley, Redwood City, CA, (1989)
- B.S. Du, A simple proof of Sharkovsky's theorem, *Amer. Math. Monthly* **111** (2004) 595-599.
- B.S. Du, A simple proof of Sharkovsky's theorem revisited, *Amer. Math. Monthly* **114** (2007) 152-155.

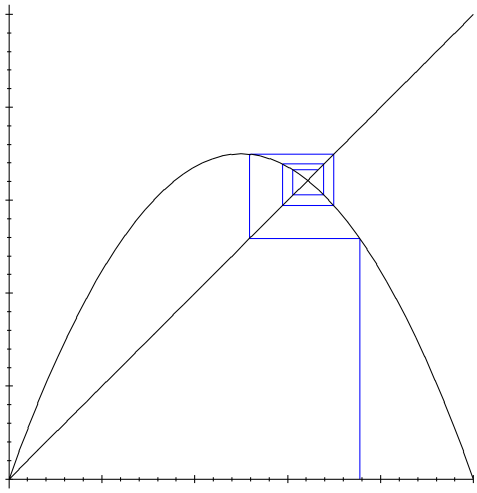
Considérons une fonction polynôme $4\mu x(1-x)$ du second degré (le type de fonction le plus simple qui soit, après les fonctions affines) et considérons la suite récurrente définie par :

$$x_{n+1} = 4\mu x_n(1 - x_n)$$

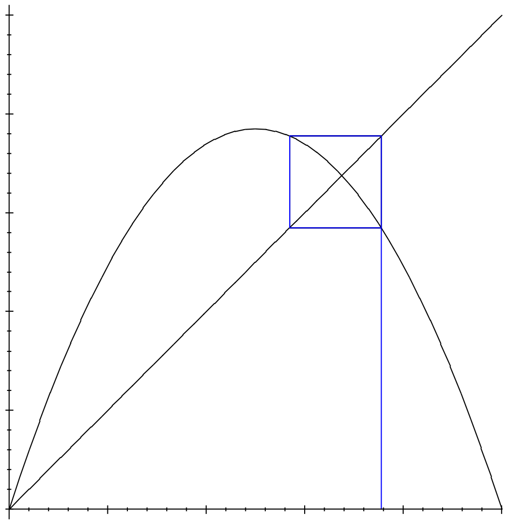
où $x_0 \in [0,1]$ et $\mu \in [0,1]$

Cette suite particulière est caractéristique de phénomènes tout à fait généraux, relatifs à de nombreuses suites, et que l'on pourra tester numériquement sur une simple calculatrice :

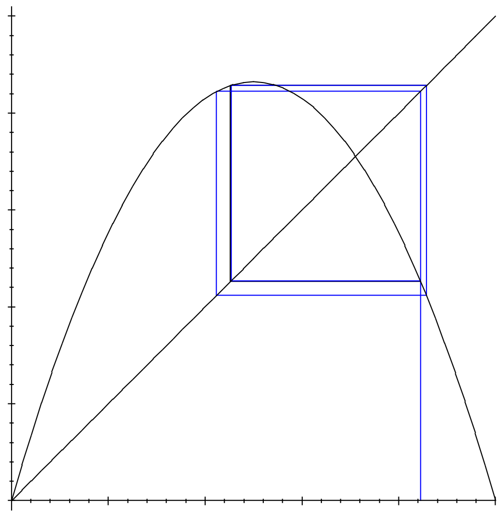
❑ Convergence vers une limite pour μ < 0,75, avec (x_n) monotone ou non. Ci-dessous, μ = 0,7. La suite converge vers l'unique point fixe positif.



❑ Bifurcation à partir de $\mu_1 = 0,75$. Dès que μ dépasse cette valeur, la suite de scinde en deux sous-suites qui convergent vers deux valeurs, ci-dessous, pour μ = 0,77, s'éloignant peu à peu du point fixe au fur et à mesure que μ augmente. On a pris x_0 proche d'une des deux valeurs.

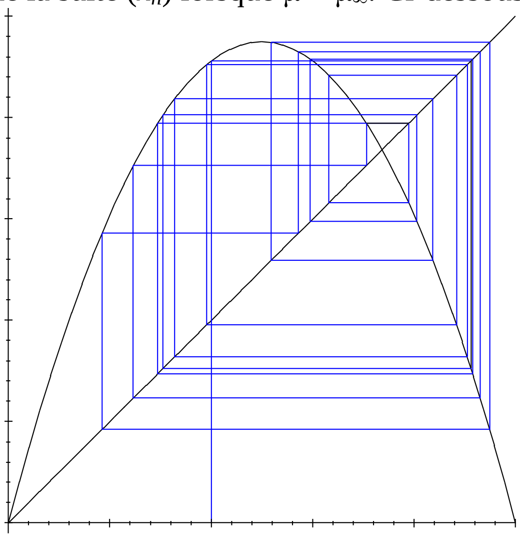


Puis, on observe une nouvelle bifurcation vers quatre limites de quatre sous-suites pour une certaine valeur du paramètre μ_2, ci-dessous pour μ = 0,865. Les limites des deux sous-suites se sont scindées en deux.



Le phénomène se poursuit avec huit sous-suites convergeant vers vers huit limites différentes pour une valeur μ_3 du paramètre, ... Les μ_i convergent vers une limite μ_∞. Feigenbaum a montré que $\dfrac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n}$ convergeait vers une limite appelée depuis nombre de Feigenbaum. Cette limite est une constante universelle dans le sens où elle n'est pas propre à la fonction $4\mu x(1 - x)$, mais s'applique également aux fonctions de même forme, telles $\mu\sin(\pi x)$.

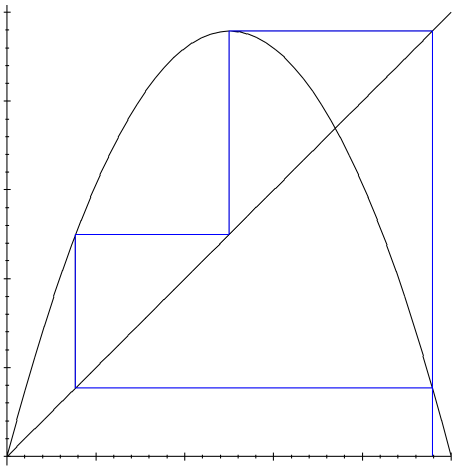
❑ Comportement chaotique de la suite (x_n) lorsque $\mu > \mu_\infty$. Ci-dessous pour $\mu = 0.95$.



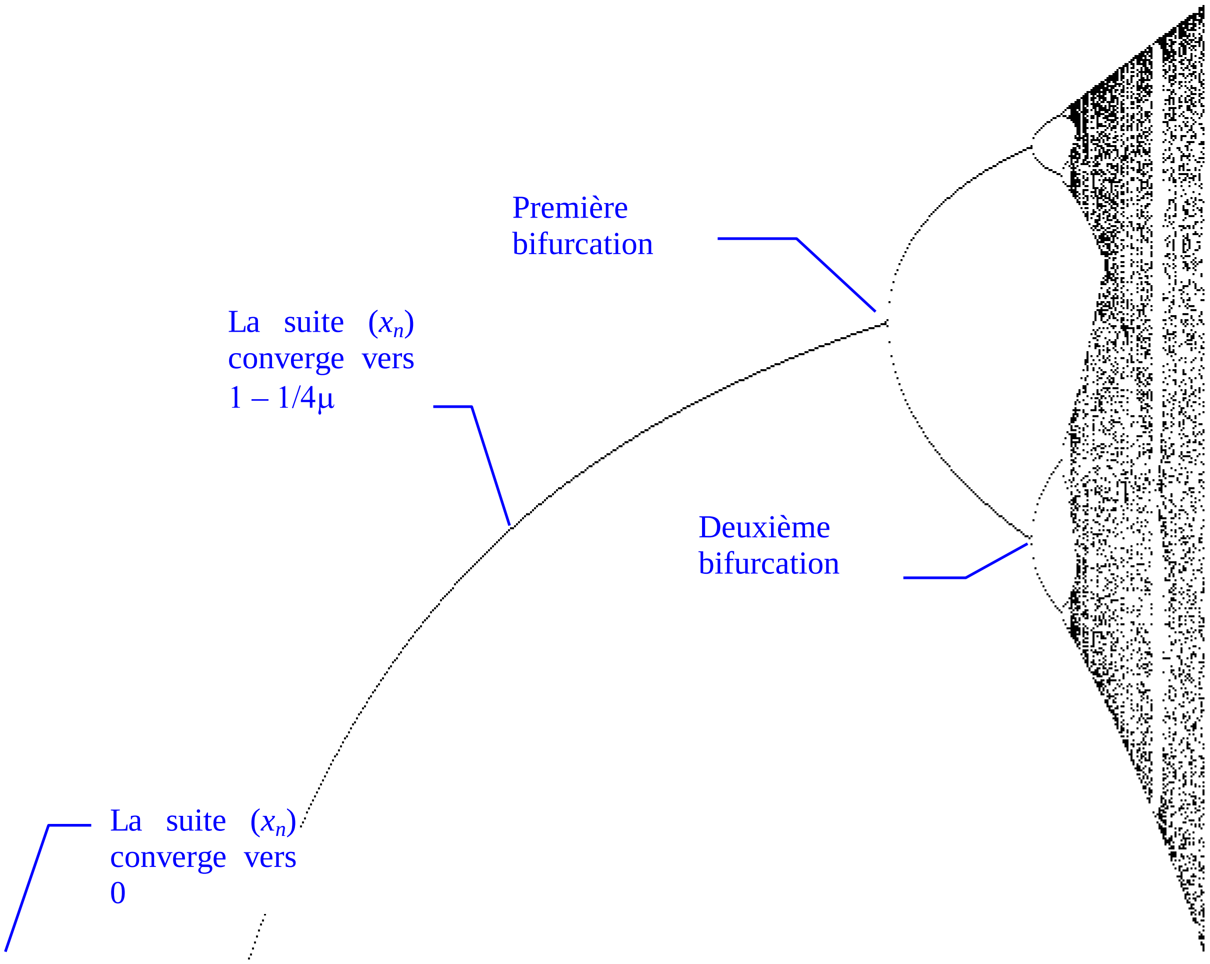
Cela ne signifie pas seulement que la suite ne converge pas, mais aussi qu'il est impossible d'être certains de la valeur de la suite au bout de quelques termes. Toujours pour $\mu = 0.95$, en partant de $x_0 = 0.4$, on obtient un résultat x_{50} différent suivant la calculatrice ou le logiciel utilisé (par exemple 0.5804900348 pour ma calculatrice, 0.2966295248 en utilisant MAPLE, 0.4340637104587618 en utilisant Python). L'itération est ici extrêmement sensible aux erreurs d'arrondis. Ainsi, en Python, x_{1000} prend la valeur 0.19474718929843357 en utilisant la récurrence $x_{n+1} = 4\mu x_n(1 - x_n)$, mais vaut 0.2308122632175027 si on effectue le calcul sous la forme $x_{n+1} = 4\mu(x_n - x_n^2)$, illustrant l'impossibilité de toute prévision pour ce modèle au-delà d'un certain rang. Une telle sensibilité a été mise en évidence dans les calculs relatifs aux prévisions météorologiques et explique la limitation actuelle à huit jours de ces prévisions. Une infime variation des données initiales donnera au bout de ce délai un temps prévu totalement différent. L'image illustrant ce phénomène est passée dans le

grand public sous le nom d'effet papillon (un battement d'aile de papillon suffira à provoquer un cyclône) et est en passe de figurer à côté du mythe de la pomme de Newton et de la baignoire d'Archimède.
A noter cependant qu'il y a trente ans, les prévisions météorologiques étaient limitées à un ou deux jours. Les progrès sont dûs d'une part à la prise en compte des données mondiales et non plus seulement des données nationales pour le calcul du climat, et à l'augmentation de vitesse des ordinateurs. Nul intérêt de prévoir le temps sur une semaine s'il faut un mois de calcul pour cela !! Il n'en reste pas moins vrai que, quels que soient les progrès techniques réalisés, il reste une barrière inhérente au problème et à son instabilité.

Revenons à notre suite récurrente. Il existe certaines valeurs de μ dans la zone $\mu > \mu_\infty$ pour laquelle le comportement redevient régulier, et en particulier des valeurs du paramètre pour lesquelles la suite (x_n) admet 3, 5, 7, ... limites possibles de sous-suites. Ci-dessous, trois valeurs pour $\mu = 0{,}9580$.

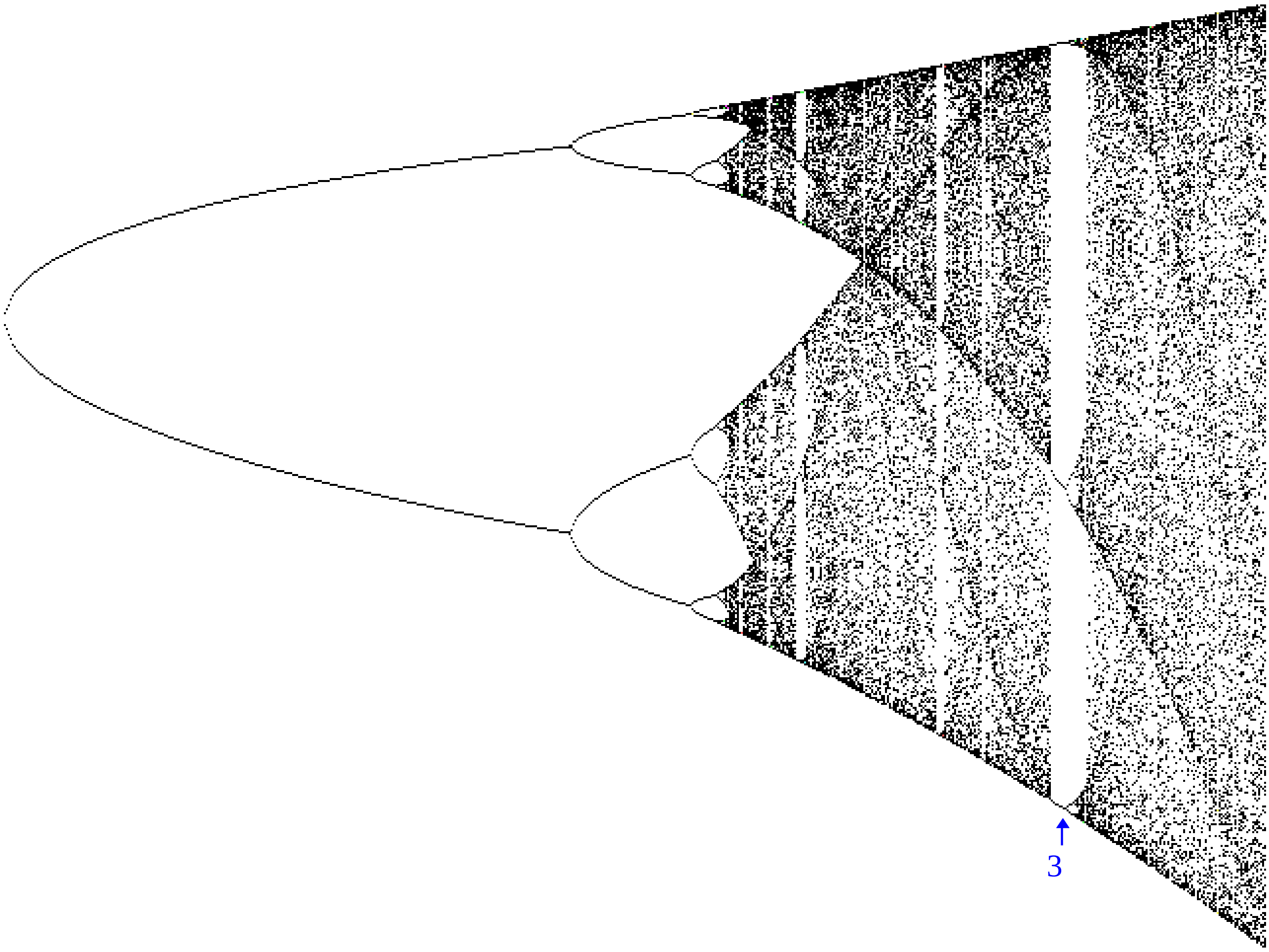


Ci-dessous, le graphe est construit de la façon suivante : en abscisse on porte μ, et en ordonnées, on porte des valeurs x_n de la suite pour n grand.



Lorsque μ est inférieur à $\frac{1}{4}$, la suite tend vers 0. Pour μ compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, la suite tend vers le point fixe $x = 4\mu x(1 - x)$, soit $x = 1 - \frac{1}{4\mu}$, ce qui correspond à la branche d'hyperbole. Ensuite, la suite se scinde en deux, la sous-suite de rang pair convergeant vers une limite et celle de rang impair vers une autre, puis chacune se scinde à nouveau en deux, etc...

Au dela de μ_∞ apparaît une nuage de points. Si on agrandit cette zone, on verra apparaître une bande de valeurs de μ où la suite admet trois valeurs d'adhérence.



D'autres bandes apparaissent, correspondant à cinq, sept... valeurs.

L' ordre dans lequel apparaissent ces valeurs lorsque μ croît est décrit de la façon suivante. Considérons la suite S d'entiers (ordre de Sarkovski) :

3 5 7 9 ... ∞ 6 10 14 18 ... ∞ 12 20 28 36 ... ∞ ... ∞ ... 16 8 4 2 1

Si un cycle de période p apparaît dans la suite (x_n) pour une valeur μ du paramètre, la suite a dû avoir, pour des valeurs du paramètre inférieures à μ, des cycles de périodes q, où q suit p dans la suite S. Ainsi, la période 7 apparaît APRES les périodes 9, 11...6...4, 2, 1. Autrement dit, les périodes apparaissent dans l'ordre :

1 2 4 8 16 ... ∞ ... ∞ ... 36 28 20 12 ∞ ... 18 14 10 6 ∞ ... 11 9 7 5 3

Ainsi, à gauche de la bande indiquée par le chiffre 3 dans le dessin précédent, ***toutes*** les périodes sont déjà apparues.

L'ordre de Sarkovski apparaît également dans le résultat suivant, démontré en 1964. Si f est une fonction continue admettant un cycle de période p, (i.e. il existe x tel que $f \circ f \circ f \dots \circ f(x) = x$ où f est composée p fois), alors f admet des cycles de période q, où q suit p dans l'ordre de Sarkovski. En particulier, si f admet un cycle de période 3, f admet des cycles de n'importe quelle période.

Par ailleurs, pour tout n, il existe une fonction continue admettant un cycle d'ordre n mais aucun cycle d'ordre m pour m précédant n.
Enfin, il existe une fonction continue admettant des cycles d'ordre 2^n et eux seulement. On peut montrer qu'un tel exemple est donné par la fonction suivante :

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2x + \frac{1}{2} && \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\
&= -2x + \frac{3}{2} && \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\
&= 2x - \frac{3}{2} && \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1
\end{aligned}
$$

Dans l'expression $f(x) = 4\mu x(1 - x)$, μ est choisi entre 0 et 1 de façon que $[0,1]$ soit stable par f. Ce n'est plus le cas si $\mu > 1$. Dans ce cas, $[0,1]$ se divise en trois intervalles, symétriques par rapport à $\frac{1}{2}$, I, J et K tels que $f(\mathrm{I}) = f(\mathrm{K}) = [0,1]$ et $f(\mathrm{J})$ soit inclus dans $]1,+\infty[$. Si on s'intéresse aux points dont les itérés restent dans $[0,1]$, il faut donc enlever J au segment $[0,1]$, mais également un segment à I et à K, etc... de sorte que l'ensemble des points dont l'orbite est dans $[0,1]$ forme un ensemble dit ensemble de Cantor.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) b étant un réel strictement positif donné, on considère la suite définie par :

$$x_0 \in \mathbf{R},\ x_{n+1} = 2x_n - bx_n^{\,2}$$

Chercher la limite éventuelle non nulle l de la suite. En considérant la suite auxiliaire $x_n - l$, donner l'expression générale de x_n. Dire à quelle condition la suite (x_n) converge effectivement vers l.

Exo.2) Calculer le terme général de la suite complexe définie par :

$u_0 = 1$

$\forall\ n \geq 0,\ u_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})u_n + 3$

Exo.3) a) Soit (u_n) une suite convergeant vers 0. On pose $v_n = \dfrac{u_0 + u_2 + ... + u_n}{n + 1}$. Montrer que (v_n) converge vers 0. En déduire un résultat plus général lorsque (u_n) converge vers une limite l **(Théorème de Cesaro)**.

b) Soit (u_n) ayant une limite nulle et (v_n) une suite bornée, et soit $w_n = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$.

Montrer que $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. En déduire un résultat plus général lorsque (u_n) converge vers une limite l et (v_n) vers une limite m.

Exo.4) a étant un paramètre réel, trouver le terme général de la suite définie par :

$$\forall\ n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = a\, u_{n+1} + (1 - a)\, u_n$$

Exo.5) Il est dit dans ce cours que, parmi les cinq affirmations suivantes, quatre sont fausses, une seule est vraie. Laquelle ?

(i) Si (x_n) est décroissante positive, (x_n) converge vers 0.
(ii) Si (x_n) tend vers $+\infty$, alors (x_n) est croissante à partir d'un certain rang.
(iii) Si (x_n) tend vers l, avec $l \geq 0$, alors (x_n) est positive à partir d'un certain rang.
(iv) Si (x_n) converge, alors (x_n) est bornée.
(v) Si $(x_{n+1} - x_n)$ tend vers 0, alors (x_n) converge.

Exo.6) Soit $S_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{p}}$

a) Montrer que : $\forall p \in [\![1, n-2]\!]$ $\binom{n}{p} \geq \binom{n}{2}$

b) En déduire un encadrement de S_n et étudier la convergence de S_n.

Exo.7) On considère les suites $(n!)$ et (a^{n^2}), avec $a > 1$. L'une de ces suites est-elle négligeable devant l'autre ?

Exo.8) Etudier la convergence de la suite définie par la récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n^2)$.

Exo.9) Soit $(u(n))$ une suite positive croissante telle que, pour tout n pair, $u(n) \leq 2u(\frac{n}{2}) + n$. Montrer que $u(n) = O(n \ln(n))$.

Exo.10) Soit $q \in]0, 1[$ et $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{q^{n-k}}{k}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exo.11) La **suite de Fibonacci** est la suite (F_n) définie de la façon suivante :

$F_0 = 0$ $\quad F_1 = 1$ $\quad \forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Ses premiers termes sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

a) Déterminer l'expression du terme général de la suite en fonction de n.

b) Montrer que : $\forall n, \sum_{k\geq 0} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$

c) Montrer que : $\forall n, \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k+1} = F_{2n}$ et $\sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k} = F_{2n+1}$.

Constater les propriétés b) et c) sur le triangle de Pascal.

Exo.12) Montrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas.

2- Solutions

Sol.1) $l = 2l - bl^2$ d'où $l = \frac{1}{b}$. On a alors $x_{n+1} - \frac{1}{b} = -b\,(x_n - \frac{1}{b})^2$ d'où, par récurrence,

$$x_n - \frac{1}{b} = -\frac{1}{b}\,(x_n - \frac{1}{b})^{2^n}$$

La suite converge vers $\frac{1}{b}$ lorsque x_0 est compris entre 0 et $\frac{2}{b}$. Cette méthode est utilisée pour calculer les inverses de nombres très grands, avec des produits, ce qu'on sait faire en O(Nln(N)) opérations, si N est le nombre de chiffres du nombre b en question.

Sol.2) Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique de limite potentielle l vérifiant :

$$l = (1 + i\sqrt{3})l + 3$$

d'où $\quad l = i\sqrt{3}$

On étudie ensuite la suite auxiliaire de terme général $v_n = u_n - i\sqrt{3}$, qui est une suite géométrique de raison $1 + i\sqrt{3}$. Donc :

$$\exists\, \lambda,\ \forall\, n,\ u_n = \lambda(1 + i\sqrt{3})^n + i\sqrt{3}$$

λ se trouve à partir de u_0 :

$$1 = \lambda + i\sqrt{3}$$

donc $\quad \lambda = 1 - i\sqrt{3}$

Sol.3) a) Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\forall\, n \geq \mathrm{N}$, $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq \mathrm{N}$, on a :

$$|v_n| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}|u_k| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n}|u_k| \leq \frac{\mathrm{C}}{n+1} + \frac{n-\mathrm{N}}{n+1}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\mathrm{C}}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

où l'on a posé $\mathrm{C} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}}|u_k|$. Pour $n \geq \mathrm{Max}(\mathrm{N}, \frac{2\mathrm{C}}{\varepsilon})$, on a $|v_n| < \varepsilon$. On a prouvé que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

Dans le cas où $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n - l = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} \frac{(u_0 - l) + ... + (u_n - l)}{n+1} = 0$ en appliquant le résultat précédent, donc $\lim_{n\to\infty} \frac{u_0 + ... + u_n - (n+1)l}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} \frac{u_0 + ... + u_n}{n+1} = l$.

b) La suite (v_n) étant bornée par un nombre M, on a $|w_n| \leq \mathrm{M} \times \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k|$, quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini d'après le a).

Soit (u_n) convergeant vers l et (v_n) vers m. On a :

$$w_n - lm = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - l)v_{n-k} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}l(v_{n-k} - m)$$

avec $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - l)v_{n-k}$ qui tend vers 0 puisque $(u_n - l)$ a une limite nulle et (v_n) est bornée,

et $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}l(v_{n-k} - m) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(v_k - m)l$ par changement d'indice. Cette quantité tend aussi vers 0 puisque la suite $(v_n - m)$ tend vers 0 et la suite constante l est bornée.

Il en résulte que $\lim_{n\to\infty} w_n = lm$.

Sol.4) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire. L'équation caractéristique est $r^2 = a + (1 - a)r$, donc :

$$r^2 + (a-1)r - a = 0$$

Les solutions en sont 1 et $-a$.

Si $a \neq -1$, $\exists\ \alpha, \beta, \forall\ n, u_n = \alpha + \beta(-a)^n$

si $a = -1$, $\exists\ \alpha, \beta, \forall\ n, u_n = \alpha + \beta n$

Si on le souhaite, on peut trouver α et β en fonction de u_0 et u_1.

Dans le premier cas, on trouvera : $u_n = \dfrac{au_0 + u_1}{1+a} + \dfrac{u_0 - u_1}{1+a}(-a)^n$

Dans le second cas, on trouvera : $u_n = u_0 + (u_1 - u_0)n$

On pourra vérifier la cohérence des résultats en prouvant que :

$$\lim_{a \to -1} \frac{au_0 + u_1}{1+a} + \frac{u_0 - u_1}{1+a}(-a)^n = u_0 + (u_1 - u_0)n$$

Sol.5) (i) est faux. Prendre $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

(ii) est faux. Prendre $x_n = n + 2(-1)^n$

(iii) est faux. Prendre $x_n = -\dfrac{1}{n}$. Par contre la conclusion est vraie si on prend $l > 0$.

(iv) est vrai, résultat démontré en II-3)

(v) est faux. Prendre $x_n = \ln(n)$ ou $\sqrt{n}$ ou $1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$. Dans ces trois exemples, x_n admet néanmoins une limite dans la droite achevée. On peut améliorer ces exemples pour que x_n n'admette aucune limite, finie ou non. Prendre $x_n = \ln(n)$ jusqu'au premier indice n_1 tel que $x_{n_1} > 1$, puis prendre $x_n = -\ln(n) + \ln(n_1) + x_{n_1}$ jusqu'au premier indice $n_2 > n_1$ tel que $x_{n_2} < -1$, puis prendre $x_n = \ln(n) - \ln(n_2) + x_{n_2}$ jusqu'au premier indice $n_3 > n_2$ tel que $x_{n_3} > 1$, puis prendre $x_n = -\ln(n) + \ln(n_3) + x_{n_3}$ jusqu'au premier indice n_4 etc...

Sol.6) a) $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{p-1} \times \dfrac{n-p+1}{p}$ donc :

pour $p \leq \dfrac{n+1}{2}$, alors $\dfrac{n-p+1}{p} \geq 1$ et $\dbinom{n}{p} \geq \dbinom{n}{p-1}$ donc la suite $p \to \dbinom{n}{p}$ est croissante donc, si $p \geq 2$, alors $\dbinom{n}{p} \geq \dbinom{n}{2}$

pour $n - 2 \geq p \geq \dfrac{n+1}{2}$, alors $2 \leq n - p \leq \dfrac{n-1}{2} \leq \dfrac{n+1}{2}$ donc, d'après le cas précédent, $\dbinom{n}{n-p} \geq \dbinom{n}{2}$ or $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

b) Il en résulte que $2 \leq S_n \leq 2 + \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{2}} \leq 2 + \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = 2 + \frac{2}{n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = 2$

Sol.7) $n!$ est négligeable devant a^{n^2}. En effet, $n! \leq n^n$ et $\ln\left(\dfrac{a^{n^2}}{n^n}\right) = n^2\ln(a) - n\ln(n) \to +\infty$

Sol.8) Soit $f(x) = \frac{1}{2}(1 + x^2)$. Le seul point fixe de f est 1. $\forall x, f(x) \geq x$, f est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$. Par ailleurs, $\forall n \geq 1, u_n \geq 0$.
On en déduit que, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ donc la suite est croissante.
Si $u_1 > 1$, alors, par récurrence, $u_n > 1$ en utilisant la croissance de f sur $[0, +\infty[$. La suite étant croissante et aucun point fixe n'existant au-delà de u_1, la suite ne peut converger. Elle tend vers $+\infty$.
Si $u_1 \leq 1$, alors, par récurrence, $u_n \in [0, 1]$ en utilisant la croissance de f sur $[0, +\infty[$. La suite est croissante majorée, donc elle converge. Sa limite est un point fixe de f et il n'y en a qu'un seul. La suite converge vers 1.

Sol.9) Pour n puissance de 2 de la forme 2^p, on a $u(2^p) \leq 2u(2^{p-1}) + 2^p$ et donc $\frac{u(2^p)}{2^p} \leq \frac{u(2^{p-1})}{2^{p-1}} + 1$ donc, par récurrence, $\frac{u(2^p)}{2^p} \leq u(1) + p$, donc $u(2^p) \leq 2^p(u(1) + p)$
Pour n quelconque, on encadre n par deux puissances de 2 successives par $2^{p-1} \leq n \leq 2^p$ de sorte que :

$$u(n) \leq u(2^p) \leq 2^p(u(1) + p) \leq 2n(u(1) + \frac{\ln(n)}{\ln(2)} + 1) = \mathrm{O}(n \ln(n))$$

Cette relation intervient dans le calcul de complexité d'un algorithme dans la méthode diviser pour régner, par exemple le tri par fusion.

Sol.10) Soit p la partie entière de $n - \sqrt{n}$. On a $u_n \geq 0$ et :

$$u_n = \sum_{k=1}^{p} \frac{q^{n-k}}{k} + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{q^{n-k}}{k}$$

$$\leq p\, q^{n-p} + (n-p)\frac{1}{p+1}$$ en majorant $\frac{q^{n-k}}{k}$ par q^{n-p} dans la première somme et par $\frac{1}{p+1}$ dans la deuxième

$$\leq n\, q^{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}+1}{n-\sqrt{n}}$$ car $n - \sqrt{n} - 1 < p \leq n - \sqrt{n}$

Le majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Sol.11) a) L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est $r^2 = r + 1$, dont les racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. (Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ s'appelle le **nombre d'or** et est usuellement noté φ). Il existe donc λ et μ tels que : $\forall n$, $\mathrm{F}_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Les valeurs de λ et μ se trouvent avec les valeurs initiales :

$$\begin{cases} \mathrm{F}_0 = 0 = \lambda + \mu \\ \mathrm{F}_1 = 1 = \lambda \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont $\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Donc :

$$\forall n, \mathrm{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

b) Posons $u_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n-k}{k}$. On a $u_0 = 1 = F_1$, $u_1 = 1 = F_2$. Vérifions que : $\forall\ n$, $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$. On utilisera le fait que $\binom{n+1-k}{k-1} + \binom{n+1-k}{k} = \binom{n+2-k}{k}$ (voir L1/DENOMBRE.PDF)) :

$$u_n + u_{n+1} = \sum_{k\geq 0} \binom{n-k}{k} + \sum_{k\geq 0} \binom{n+1-k}{k} = \sum_{k\geq 0} \binom{n+1-(k+1)}{k} + \sum_{k\geq 0} \binom{n+1-k}{k}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \binom{n+1-k}{k-1} + \sum_{k\geq 0} \binom{n+1-k}{k} \qquad \text{avec la convention } \binom{n+1}{-1} = 0$$

$$= \sum_{k\geq 0} (\binom{n+1-k}{k-1} + \binom{n+1-k}{k})$$

$$= \sum_{k\geq 0} \binom{n+2-k}{k} = u_{n+2}$$

Les suites (u_n) et (F_{n+1}) vérifiant les mêmes conditions initiales et la même relation de récurrence, il est trivial de montrer par récurrence qu'elles sont égales.

c) Posons $u_{2n} = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k+1}$ et $u_{2n+1} = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k}$ et procédons comme au b). $F_0 = 0 = u_0$ (somme vide) ou, si on préfère, $F_2 = 1 = u_2$, et $F_1 = 1 = u_1$. On a ensuite :

$$u_{2n-1} + u_{2n} = \sum_{k\geq 0} \binom{n-1+k}{2k} + \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k+1} = \sum_{k\geq 0} \binom{n-1+k}{2k} + \sum_{k\geq 0} \binom{n-1+k}{2k-1}$$

$$= \sum_{k\geq 0} (\binom{n-1+k}{2k} + \binom{n-1+k}{2k-1}) = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k} = u_{2n+1}$$

et $$u_{2n} + u_{2n+1} = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k+1} + \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k} = \sum_{k\geq 0} (\binom{n+k}{2k+1} + \binom{n+k}{2k}) = \sum_{k\geq 0} \binom{n+1+k}{2k+1} = u_{2n+2}$$

Les suites (u_n) et (F_n) vérifient les mêmes relations de récurrences et les mêmes conditions initiales, donc sont égales.

Sur le triangle de Pascal, les sommes b) sont constituées de termes situés sur les diagonales ascendantes. Par exemple, ci-dessous, la diagonale ascendante dont les termes sont encadrés a pour somme $13 = F_7$.

Les sommes c) sont constituées de termes situées sur des drotes descendantes de pente $\frac{1}{2}$. Quand on incrémente un indice de ligne d'une unité, l'indice de la colonne est incrémentée de deux unités. Par exemple, la droite descendante dont les termes sont bleus a pour somme $89 = F_{11}$, et celle dont les termes sont rouges a pour somme $55 = F_{10}$.

$$
\begin{array}{llllllllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & \boxed{1} \\
1 & 4 & \boxed{6} & 4 & 1 \\
1 & \boxed{5} & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\boxed{1} & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 \\
1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 \\
1 & 11 & 55 & 165 & 330 & 462 & 462 & 330 & 165 & 55 & 11 & 1
\end{array}
$$

Sol.12) Si $\sin(n) \to l$ quand $n \to +\infty$, alors :

$$\sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1) = \sin(n+1) \to l$$

$$\sin(n)\cos(1) - \cos(n)\sin(1) = \sin(n-1) \to l$$

donc par différence :

$$2\sin(n)\cos(1) \to 2l$$

Mais on a aussi $2\sin(n)\cos(1) \to 2l\cos(1)$. Donc $2l\cos(1) = 2l$, donc $l = 0$ car $\cos(1) \neq 1$. Mais alors, en reprenant la première limite, on a $\cos(n)\sin(1) \to 0$ et donc $\cos(n) \to 0$ ce qui incompatible avec $\sin^2 + \cos^2 = 1$

◆