CONIQUES ET QUADRIQUES

PLAN

I : Coniques

1- Equation cartésienne

Soit (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$) un repère orthonormé du plan. Les courbes algébriques les plus simples que l'on trouve après les droites, sont les courbes (C) de degré 2, qui vérifient une équation du type :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$$

avec α, β, γ non tous nuls. Il s'agit de **coniques**. Notre première tâche est d'obtenir, par translation et rotation, une équation réduite beaucoup plus simple.

❑ Par changement de repère, on peut se ramener à une équation où $\gamma = 0$. En effet, choisissons un nouveau repère se déduisant de l'ancien par une rotation d'angle θ. Soit x' et y' les nouvelles coordonnées des points. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

D'où $\left[\begin{array}{l} x = \cos(\theta)x' - \sin(\theta)y' \\ y = \sin(\theta)x' + \cos(\theta)y' \end{array}\right.$

L'équation devient :

$$\alpha(\cos(\theta)x'-\sin(\theta)y')^2 + \beta(\sin(\theta)x'+\cos(\theta)y')^2 + \gamma(\cos(\theta)x'-\sin(\theta)y')(\sin(\theta)x'+\cos(\theta)y') + \text{etc.} = 0$$

Le terme en $x'y'$ vaut :

$$-2\alpha\cos(\theta)\sin(\theta) + 2\beta\cos(\theta)\sin(\theta) + \gamma(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = (\beta - \alpha)\sin(2\theta) + \gamma\cos(2\theta)$$

Si γ est non nul, on peut annuler ce coefficient en choisissant θ tel que :

$$\text{cotan}(2\theta) = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$$

On peut donc supposer que l'équation est du type (en renommant les coefficients et les variables) :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0$$

avec α et β non tous deux nuls.

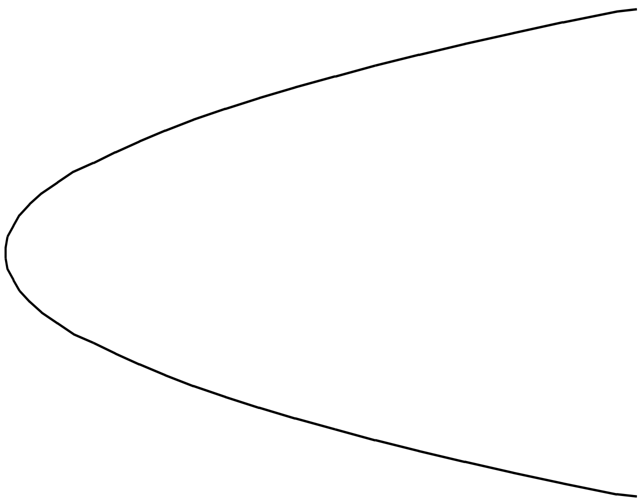
❑ Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$:
Quitte à diviser par β, on peut se ramener à une équation du type :

$$y^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0$$

Donc :

si $\gamma \neq 0$, il s'agit d'une **parabole** d'axe parallèle à Ox, x étant une fonction du second degré en y.

si $\gamma = 0$, il s'agit d'un cas dit dégénéré (deux droites parallèles à Ox, ou deux droites confondues parallèles à Ox ou $\varnothing$)



exemple de parabole d'axe parallèle à Ox

❑ Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$:
Ce cas se traite comme précédemment en inversant les rôles de x et y. Hors cas dégénéré, on obtient une parabole d'axe parallèle à l'axe des ordonnées.
Toutes les paraboles sont semblables entre elles. Par rotation et translation, on peut se ramener à une parabole d'équation $y = ax^2$. Par symétrie, on peut supposer $a > 0$. Par l'homothétie de rapport a, on obtient $y = x^2$.

❑ Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$:
On peut supprimer les termes γx et δy de la façon suivante :

$$\alpha(x + \frac{\gamma}{2\alpha})^2 + \beta(y + \frac{\delta}{2\beta})^2 + \text{Cte} = 0$$

En prenant comme origine du repère le point de coordonnées $(-\frac{\gamma}{2\alpha}, -\frac{\delta}{2\beta})$ et en renommant les coordonnées, on se ramène à une équation du type :

$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0$

si $\gamma = 0$, alors (C) se réduit à un point si α et β sont de même signe, et à deux droites sécantes si α et β sont de signe contraire (cas dégénéré)

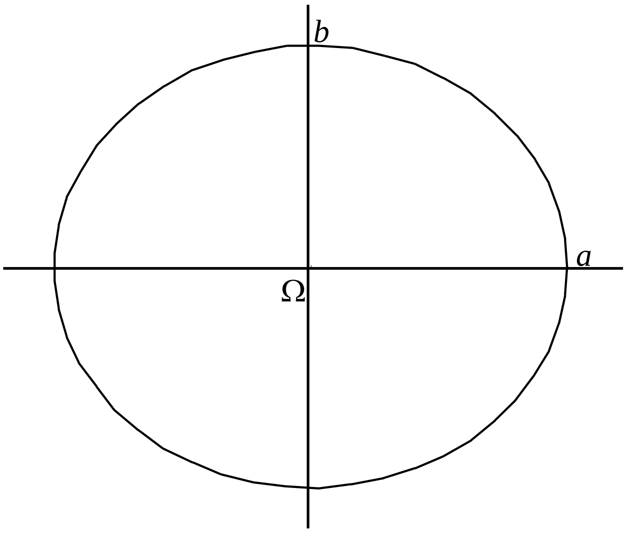
si $\gamma \neq 0$, quitte à changer les signes, on peut supposer $\alpha > 0$, et quitte à diviser par $|\gamma|$, on peut supposer $\gamma = \pm 1$. D'où trois équations finales possibles donnant un ensemble non vide, suivant le signe de β. En posant $\alpha = \dfrac{1}{a^2}$ et $\beta = \pm \dfrac{1}{b^2}$, on obtient les **équations réduites** :

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **ellipse**

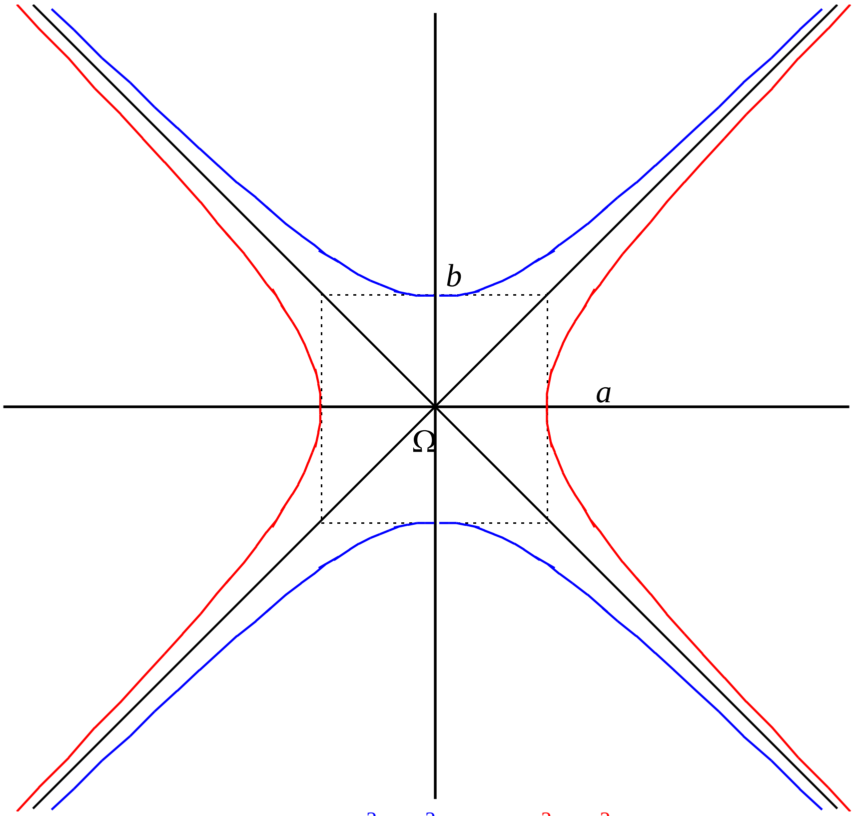
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **hyperbole**

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ **hyperbole**

Notons Ω l'origine du repère final :



ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



hyperboles $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

On passe d'une hyperbole à l'autre en intervertissant les axes x et y.

Les droites $y = \pm \frac{b}{a} x$ (autrement dit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$) sont asymptotes aux deux hyperboles. Pour un point (x, y) de la première hyperbole avec $x > a$ et $y > 0$, par exemple, écrivons que :

$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

$$\Rightarrow \qquad y - \frac{b}{a}x = b\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{x}{a}\right) = -\frac{b}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{x}{a}}$$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Il en est de même pour l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

Si $a = b$, les deux asymptotes sont perpendiculaires. Dans ce cas, on dit que l'hyperbole est **équilatère**.

REMARQUES :

❑ Le terme conique provient du fait que l'une des premières définitions des coniques, dans l'Antiquité, consistait en l'intersection d'un cône et d'un plan. En effet, soit h un réel non nul et θ un réel quelconque. Dans un repère de l'espace $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$:

$z^2 = x^2 + y^2$ est l'équation d'un cône (on a pris un angle de 45° au sommet pour simplifier)

$\cos(\theta)y + \sin(\theta)z = h$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $(0, \cos(\theta), \sin(\theta)) = \boldsymbol{K}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{J}$ de composantes $(0, \sin(\theta), -\cos(\theta))$. La matrice de passage à la nouvelle base $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Posons $x = X$, $y = \sin(\theta)Y + \cos(\theta)Z$ et $z = -\cos(\theta)Y + \sin(\theta)Z$. Les équations deviennent :

plan : $Z = h$

cône : $\cos^2(\theta)Y^2+\sin^2(\theta)Z^2-2\cos(\theta)\sin(\theta)YZ = X^2+\sin^2(\theta)Y^2+\cos^2(\theta)Z^2+2\sin(\theta)\cos(\theta)YZ$

L'intersection a donc pour équation :

$Z = h$

$X^2 - \cos(2\theta)Y^2 + 2\sin(2\theta)Yh = \text{Cte}$

ce qui donne une ellipse si $\theta \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ (le plan est faiblement incliné par rapport au plan Oxy)

une parabole si $\theta = \frac{\pi}{4}$ (le plan est parallèle à une génératrice du cône)

une hyperbole si $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[$ (le plan est fortement incliné par rapport à Oxy)

On remarquera que la parabole occupe une position intermédiaire entre l'ellipse et l'hyperbole. Le passage de l'ellipse à l'hyperbole peut se visualiser par la limite du cône de lumière sur un mur éclairé par une lampe de bureau plus ou moins inclinée par rapport à ce mur.

❑ On donne le nom d'hyperbole à la courbe d'équation $xy = \text{Cte}$ car, par le changement de variable :

$x = \dfrac{X + Y}{\sqrt{2}}$

$y = \dfrac{X - Y}{\sqrt{2}}$

on se ramène à $X^2 - Y^2 = \text{Cte}$.

❑ Les points (x, y) de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ s'obtiennent également par le paramétrage :

$$\left[\begin{array}{l} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{array}\right.$$

où t décrit un intervalle de longueur 2π.

Les points (x, y) de la branche d'hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x > 0$, s'obtiennent par le paramétrage :

$$\left[\begin{array}{l} x = a\,\text{ch}(t) \\ y = b\,\text{sh}(t) \end{array}\right.$$

où t décrit $\mathbb{R}$, et ch et sh sont les cosinus et sinus hyperboliques.

EXEMPLE :

❑ Donner la nature, le centre et les axes de la conique d'équation :

$11x^2 + 2y^2 - 12xy + 26x - 10y + 10 = 0$

Appliquant une rotation d'angle θ au repère initial, notons x' et y' les nouvelles coordonnées. On a :

$$\left[\begin{array}{l} x = \cos(\theta)x' - \sin(\theta)y' \\ y = \sin(\theta)x' + \cos(\theta)y' \end{array}\right.$$

Remplaçant dans l'équation, le terme en $x'y'$ vaut $-18\cos(\theta)\sin(\theta) - 12\cos^2(\theta) + 12\sin^2(\theta)$. On choisit θ de façon à annuler ce terme. Cela donne l'équation :

$-9\sin(2\theta) - 12\cos(2\theta) = 0$

$\Leftrightarrow \qquad \tan(2\theta) = -\dfrac{12}{9} = -\dfrac{4}{3}$

On prend par exemple θ tel que $\theta = \dfrac{1}{2}\arctan(-\dfrac{4}{3})$. Cet angle donne la direction des axes. On a alors :

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(2\theta)}} = \frac{3}{5} = 2\cos^2(\theta) - 1$$

$$\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

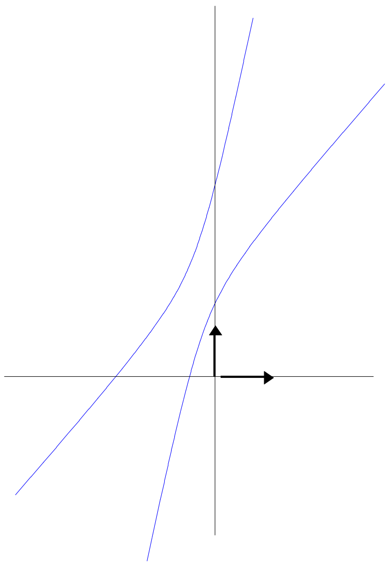
L'équation dans le nouveau repère est alors :

$$14x'^2 - y'^2 + \frac{62}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 14(x' + \frac{31}{14\sqrt{5}})^2 - (y' - \frac{3}{\sqrt{5}})^2 = \frac{27}{14}$$

Il s'agit d'une hyperbole. Son centre dans le nouveau repère est $(x', y') = (-\dfrac{31}{14\sqrt{5}}, \dfrac{3}{\sqrt{5}})$. Dans le repère initial, il vaut $(x, y) = (-\dfrac{2}{7}, \dfrac{23}{14})$. On peut paramétrer l'hyperbole par :

$$\left[\begin{array}{l} x' = -\dfrac{31}{14\sqrt{5}} \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{14}\,\mathrm{ch}(t) \\ y' = \dfrac{3}{\sqrt{5}} + \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{14}}\,\mathrm{sh}(t) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' \end{array}\right.$$



2- Foyer, directrice, excentricité

Les coniques ont aussi une définition géométrique. Soit F un point du plan, D une droite ne contenant pas F et e un réel strictement positif. On s'intéresse à l'ensemble $\{M \mid e \times d(M,D) = MF\}$, où MF représente la distance de M à F et d(M, D) représente la distance de M à la droite D, i.e. la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur D. F s'appelle **le foyer**, D **la directrice** et e **l'excentricité**.

On choisit F comme origine du repère, et on oriente ce repère de façon que D ait pour équation $x = -h$ ($h > 0$). Alors :

$e \times d(M,D) = MF$

$\Leftrightarrow \quad e\,|x + h| = \sqrt{x^2 + y^2}$

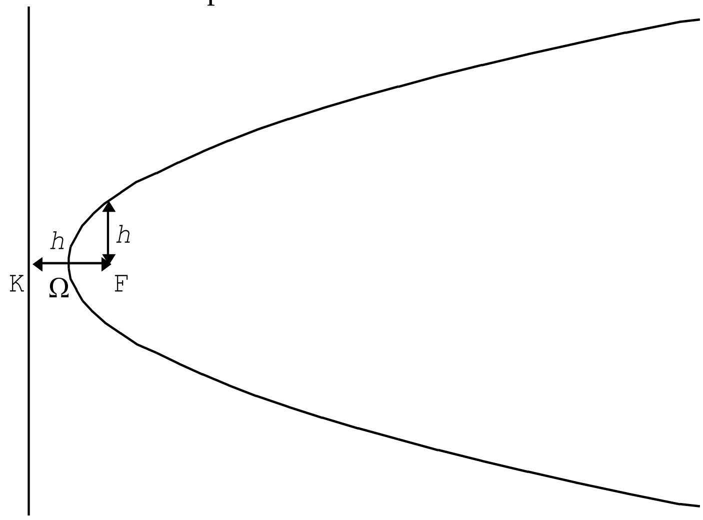
$\Leftrightarrow \quad e^2(x + h)^2 = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow \quad (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2e^2hx - e^2h^2 = 0$

Il s'agit donc de coniques.

a) cas e = 1 :

L'équation se limite à $y^2 - h^2 = 2hx$. Il s'agit d'une parabole d'axe orthogonal à D, dont le sommet Ω est le milieu de [F, K], où K est le projeté de F sur D. Relativement à l'origine Ω, l'équation se réduit à $Y^2 = 2hX$. h s'appelle **paramètre** de la parabole.



b) cas e < 1 :

Il s'agit d'une ellipse : $(1 - e^2)(x - \dfrac{e^2h}{1 - e^2})^2 + y^2 - \dfrac{e^2h^2}{1 - e^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x - \frac{e^2h}{1 - e^2})^2}{\frac{e^2h^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{e^2h^2}{1 - e^2}} = 1$$

Soit Ω le centre de l'ellipse. Ω a pour abscisse $\dfrac{e^2h}{1 - e^2}$. Si on prend Ω comme centre d'un nouveau repère, l'équation réduite est $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ avec :

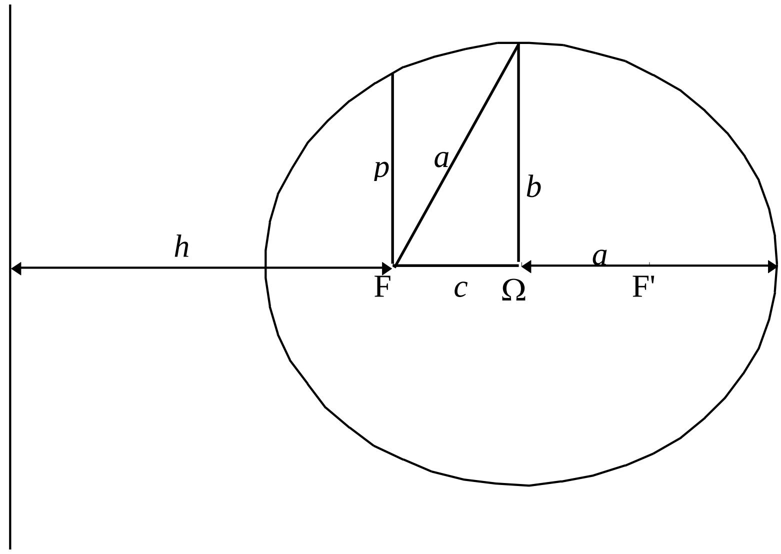
$X = x - \dfrac{e^2h}{1 - e^2}$, $Y = y$

demi-grand axe $a = \dfrac{eh}{1 - e^2} = \dfrac{p}{1 - e^2}$ avec $p = eh$, **paramètre de l'ellipse**

demi-petit axe $b = \dfrac{eh}{\sqrt{1 - e^2}} = \dfrac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = a\sqrt{1 - e^2}$

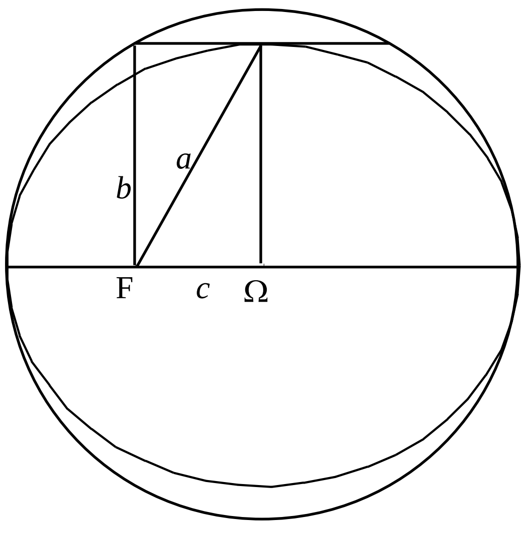
distance FΩ = $c = \dfrac{e^2h}{1-e^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$

excentricité $e = \dfrac{c}{a}$



La figure étant symétrique par rapport à Ω, on définit un deuxième sommet F', symétrique de F. L'ellipse s'obtient à partir d'un cercle par une affinité (voir L1/GEOMAFF.PDF) : il s'agit d'une application effectuant une variation d'échelle sur une seule coordonnée. Considérons le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ et considérons l'affinité $(x, y) \to (X, Y) = (x, \dfrac{by}{a})$. L'image vérifie l'équation $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$. C'est une ellipse.

La relation $a^2 = b^2 + c^2$ permet de construire géométriquement le petit axe d'une ellipse dont on connaît le grand axe et un foyer. Tracer le cercle de diamètre le grand axe de l'ellipse, tracer la perpendiculaire au grand axe passant par le foyer. Les intersections de cette perpendiculaire se trouvent à une distance b du grand axe.



Lorsque l'excentricité e de l'ellipse tend vers 0 et h vers l'infini de façon que $p = eh$ tende vers une quantité R, on obtient comme cas limite le cercle de rayon R. L'équation $\dfrac{(x - \frac{e^2h}{1-e^2})^2}{\frac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}} + \dfrac{y^2}{\frac{e^2h^2}{1-e^2}} = 1$ devient alors, à la limite $\dfrac{x^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{R^2} = 1$. Le cercle est donc considéré comme une conique d'excentricité nulle.

c) cas e > 1 :

Il s'agit d'une hyperbole :

$$(1 - e^2)(x - \frac{e^2h}{1-e^2})^2 + y^2 - \frac{e^2h^2}{1-e^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x - \frac{e^2h}{1-e^2})^2}{\frac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{e^2h^2}{e^2-1}} = 1$$

Soit Ω le centre de l'hyperbole. Ω a pour abscisse $\dfrac{e^2h}{1-e^2}$. Si on prend Ω comme centre d'un nouveau repère, l'équation réduite est $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ avec :

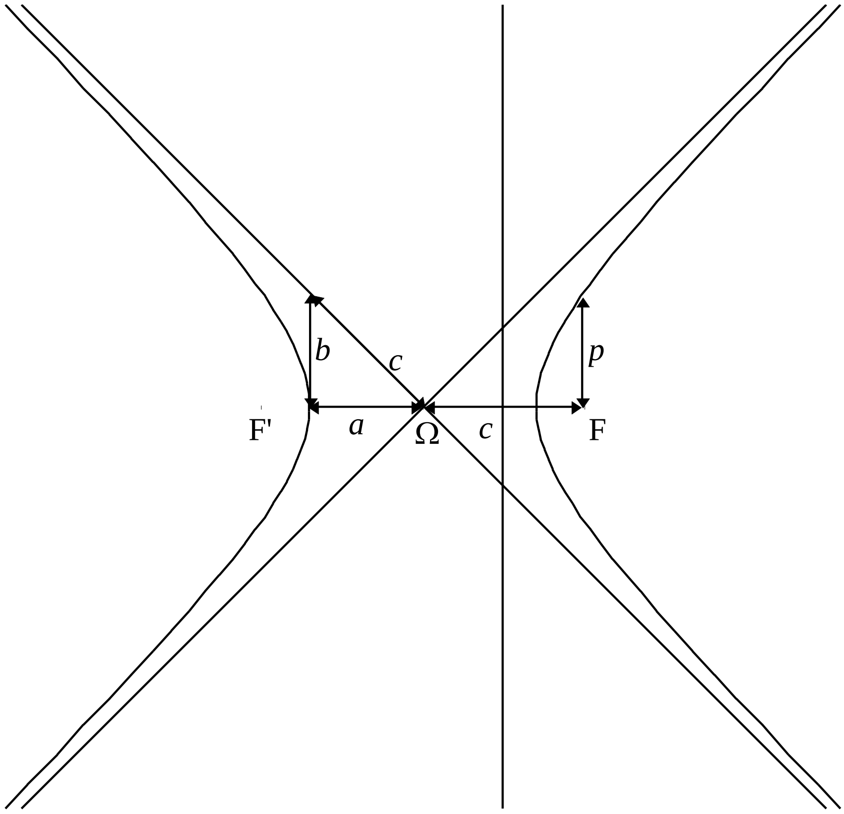
$$X = x - \frac{e^2h}{1-e^2}, \ Y = y$$

$a = \dfrac{eh}{e^2-1} = \dfrac{p}{e^2-1}$ avec $p = eh$, **paramètre de l'hyperbole**

$b = \dfrac{eh}{\sqrt{e^2-1}} = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}$. On a aussi $b^2 = a^2(e^2 - 1)$.

distance FΩ = $c = \dfrac{e^2h}{e^2-1} = \sqrt{a^2+b^2}$

excentricité $e = \dfrac{c}{a}$



La figure étant symétrique par rapport à Ω, on définit un deuxième sommet F', symétrique de F.

3- Equation polaire

La définition par foyer et directrice permet de déterminer l'équation polaire de la conique, le pôle étant le foyer F (voir *Coordonnées polaires* dans L1/GEOMELEM.PDF). On préfère généralement orienter l'axe d'origine des angles du foyer F vers la directrice *D*.

$$e \times \mathrm{d}(M,D) = MF \Leftrightarrow e \times |r\cos(\theta) - h| = r$$

$$\Leftrightarrow r = e(r\cos(\theta) - h) \quad \text{ou} \quad r = -e(r\cos(\theta) - h)$$

$$\Leftrightarrow r_1 = -\frac{eh}{1 - e\cos(\theta)} \quad \text{ou} \quad r_2 = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta)}$$

On obtient deux équations différentes, mais il s'agit en fait de la même courbe. On remarquera en effet que :

$$r_1(\theta + \pi) = -r_2(\theta)$$

de sorte que les points de coordonnées polaires $(r_1, \theta + \pi)$ et (r_2, θ) coïncident.

$p = eh$ est le paramètre de la conique. L'équation usuelle est :

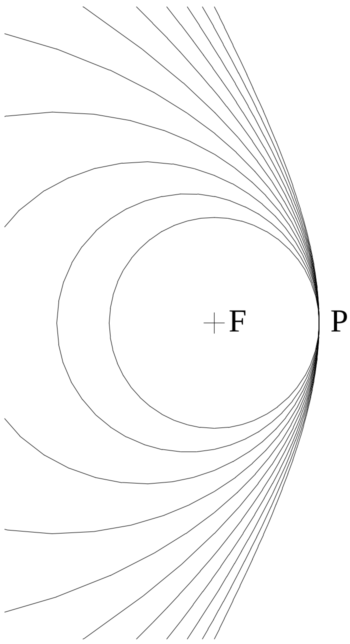
$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}}$$

Dans le cas général, *D* fait un angle quelconque avec l'axe des angles polaires, et l'équation générale est $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$.

L'équation polaire montre aisément que c'est l'excentricité qui est caractéristique de la forme d'une conique, à similitude près. En effet, par rotation et translation, on se ramène au cas où l'équation polaire de la conique est de la forme $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta)}$, et par homothétie, on peut se ramener au cas où $p = 1$. L'équation ne dépend plus alors que de e.

Dans l'équation $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta)}$, pour $e = 0$, on obtient $r = p$ et on retrouve le fait qu'une conique d'excentricité nulle est un cercle.

Si, dans la même équation, on pose $p = \text{Cte} \times (1 + e)$, et qu'on fait varier e, on obtient une famille de coniques de même foyer F passant toutes par le même sommet P pour $\theta = 0$. Cette famille peut représentrer par exemple les diverses trajectoires possibles d'un corps autour du Soleil F passant par un périhélie P donné, en fonction des vitesses de ce corps au périhélie. Dans la représentation ci-dessous, on notera la difficulté à distinguer où se trouve la parabole (correspondant à la plus petite vitesse au périhélie permettant au corps de s'échapper jusqu'à l'infini). Lorsque e varie, les coniques se déforment continûment depuis les ellipses jusqu'aux hyperboles.



EXERCICE :

❑ Tracer les coniques d'équation polaire ci-dessous. Le lecteur est invité à trouver les moyens de tracer manuellement les coniques sur une feuille de papier, avant de regarder la solution. Puis il comparera le résultat avec le tracé fourni par un outil graphique, calculatrice ou ordinateur, utilisant les coordonnées polaires.

a) $r = \dfrac{2}{2 + \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}$

L'équation s'écrit aussi $r = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}$, donc $e = \dfrac{1}{2}$. Il s'agit donc d'une ellipse. Son grand-axe fait un angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ avec l'axe origine des angles. Les deux sommets sur ce grand axe sont obtenus d'une part pour $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ et $r = \frac{2}{3}$, d'autre part pour $\theta = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ et $r = 2$. Le demi-grand axe a pour longueur $a = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$. Le centre de l'ellipse, milieu des deux sommets trouvés, se situe à une distance de $\frac{2}{3}$ de l'origine, dans la direction $\theta = \frac{\pi}{3}$. La demi-longueur du petit axe est :

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.15$$

Connaissant cette longueur, on peut tracer les deux sommets situés sur le petit axe de l'ellipse. Les quatre sommets sont suffisants pour tracer convenablement l'ellipse à la main. On peut bien entendu en déterminer d'autres points en prenant des valeurs particulières de θ.

b) $r = \dfrac{3}{1 - \cos(\theta)}$

On a $e = 1$ et $\theta_0 = \pi$. Il s'agit d'une parabole dont le sommet se situe à $r = \frac{3}{2}$ pour $\theta = \pi$. Quand θ tend vers 0, r tend vers l'infini. On obtient deux autres points facilement pour $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ et $r = 3$. Connaissant l'axe de la parabole et ces trois points, on est en mesure d'en tracer l'allure générale.

c) $r = \dfrac{4}{1 + 2\sin(\theta - \frac{\pi}{3})}$

On a $e = 2$, donc il s'agit d'une hyperbole. En prenant garde au fait que le dénominateur fait intervenir $\sin(\theta - \frac{\pi}{3}) = \cos(\theta - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta - \frac{5\pi}{6})$, on en déduit que son axe fait un angle $\frac{5\pi}{6}$ avec l'axe origine des angles. Ses sommets sont obtenus d'une part pour $\theta = \frac{5\pi}{6}$ et $r = \frac{4}{3}$, d'autre part pour $\theta = \frac{5\pi}{6} - \pi = -\frac{\pi}{6}$ et $r = -4$. r étant négatif, on peut aussi considérer que ce dernier sommet se situe à la distance $r = 4$ dans la direction $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Le centre de l'hyperbole se situe donc aussi dans la direction $\frac{5\pi}{6}$, à la distance $\frac{1}{2}(4 + \frac{4}{3}) = \frac{8}{3}$. La direction des asymptotes sont celles pour lesquelles r tend vers l'infini. Elles sont donc données par les angles θ tels que :

$$1 + 2\sin(\theta - \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\theta - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{7\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} \bmod 2\pi, \text{ ou } \theta - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \bmod 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6} \bmod 2\pi, \text{ ou } \theta = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \bmod 2\pi$$

ce qui donne la direction des deux asymptotes. On peut remarquer qu'une des bissectrices fait un angle $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} + \frac{9\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6}$, direction de l'axe, ce qui assure la cohérence des calculs. Chaque asymptote fait un angle $\pm \dfrac{2\pi}{3}$ avec l'axe. On tracera les deux asymptotes à partir du centre. Une fois les deux asymptotes tracées et les deux sommets placés, il n'est pas difficile de tracer l'hyperbole.

4- Propriété des coniques bifocales

Ellipse et hyperbole sont appelées coniques **bifocales** car elles sont dotées de deux foyers. La droite contenant les deux foyers s'appelle axe **focal**.

Soient F et F' deux points distincts, et a un réel positif. Soit (E) l'ellipse de foyers F et F' et de demi-axe focal a (si $2a > FF'$) et (H) l'hyperbole de foyers F et F' et de demi-axe focal a (si $2a < FF'$). Alors :

a) $\boxed{M \in (E) \Leftrightarrow MF + MF' = 2a}$

En effet, soit M tel que $MF + MF' = 2a$. Choisissons un repère orthonormé d'origine le milieu de [FF'] et d'axe des abscisse dirigé par $\boldsymbol{F'F}$. Il existe $c > 0$ tel que :

F est de coordonnées $(c, 0)$ F' est de coordonnées $(-c, 0)$

Posons (x, y) les coordonnées de M. On a alors :

$$MF^2 = (x - c)^2 + y^2$$
$$MF'^2 = (x + c)^2 + y^2$$

donc $MF^2 - MF'^2 = -4cx = (MF + MF')(MF - MF')$

or $MF + MF' = 2a$

donc $MF - MF' = -\dfrac{2cx}{a}$

D'où :

$$\left[\begin{array}{l} MF = a - \dfrac{cx}{a} \\ MF' = a + \dfrac{cx}{a} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} MF^2 = (a - \dfrac{cx}{a})^2 = (x - c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (a + \dfrac{cx}{a})^2 = (x + c)^2 + y^2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ $x^2(1 - \dfrac{c^2}{a^2}) + y^2 = a^2 - c^2$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $b^2 = a^2 - c^2$

$\Leftrightarrow$ $M \in (E)$

Réciproquement, si M appartient à (E), on peut remonter la démonstration jusqu'à :

$$\left[\begin{array}{l} MF^2 = (a - \dfrac{cx}{a})^2 = (x - c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (a + \dfrac{cx}{a})^2 = (x + c)^2 + y^2 \end{array}\right.$$

Il suffit alors d'observer que :

$M \in (E) \Rightarrow \left|\dfrac{cx}{a}\right| = |ex| < |x| \leq |a|$ pour conclure que :

$$\left[\begin{array}{l} MF = a - \dfrac{cx}{a} \\ MF' = a + \dfrac{cx}{a} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \quad MF + MF' = 2a$

b) $\boxed{M \in H \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2a}$

Soit M tel que $|MF - MF'| = 2a$. Dans le même repère que précédemment, on a, par exemple pour $x > 0$:

$$MF^2 = (x - c)^2 + y^2$$
$$MF'^2 = (x + c)^2 + y^2$$

donc $MF^2 - MF'^2 = -4cx = (MF + MF')(MF - MF')$

or $MF - MF' = -2a$ avec le signe – car $x > 0$ implique $MF < MF'$

donc $MF + MF' = \dfrac{2cx}{a}$

D'où :

$$\left[\begin{array}{l} MF = -a + \dfrac{cx}{a} \\ MF' = a + \dfrac{cx}{a} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} MF^2 = (a - \dfrac{cx}{a})^2 = (x - c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (a + \dfrac{cx}{a})^2 = (x + c)^2 + y^2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \quad x^2(1 - \dfrac{c^2}{a^2}) + y^2 = a^2 - c^2$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $b^2 = c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow \quad M \in (H)$

Réciproquement, si M appartient à (H), on peut remonter la démonstration jusqu'à :

$$\left[\begin{array}{l} MF^2 = (a - \dfrac{cx}{a})^2 = (x - c)^2 + y^2 \\ MF'^2 = (a + \dfrac{cx}{a})^2 = (x + c)^2 + y^2 \end{array}\right.$$

Il suffit alors d'observer que :

$M \in (H) \Rightarrow \left|\dfrac{cx}{a}\right| = |ex| > |x| \geq |a|$ pour conclure que, dans le cas $x > 0$:

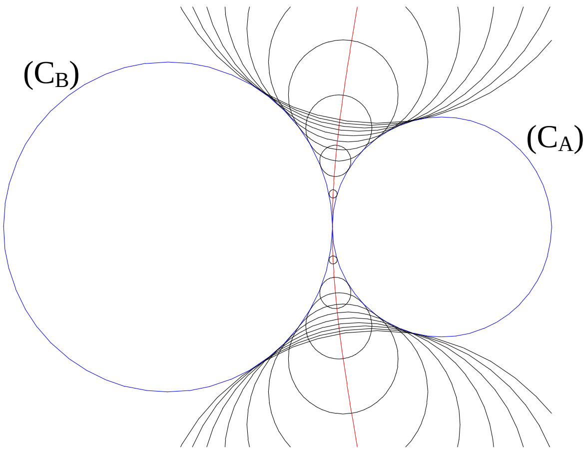
$$\left[\begin{array}{l} MF = -a + \dfrac{cx}{a} \\ MF' = a + \dfrac{cx}{a} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \quad MF - MF' = -2a$

Le cas $x < 0$ s'obtient par symétrie.

EXEMPLE :

❑ Considérons dans le plan deux cercles donnés (C_A) et (C_B) de centre respectifs A et B, et de rayon respectifs R_A et R_B, tangents entre eux. Tracer les cercles tangents aux deux cercles précédents.



Notons (D_M) un tel cercle, M son centre et R son rayon. (D_M) est tangent à (C_A) si et seulement si $AM = R_A + R$, et il est tangent à (C_B) si et seulement si $BM = R_B + R$. Donc on doit avoir $BM - AM = R_B - R_A$. Réciproquement, si M est tel que cette relation est vérifiée, posons $R = AM - R_A = BM - R_B$. On a $R \geq 0$ car dans le cas contraire, on aurait $AM < R_A$, $BM < R_B$ et $AB \leq AM + BM < R_A + R_B$. Or $AB = R_A + R_B$ car (C_A) et (C_B) sont tangents. Le cercle (D_M) est donc bien défini et il sera tangent à (C_A) (car $AM = R_A + R$) et à (C_B) (car $BM = R_B + R$). Pour $R = 0$, il se réduit au point commun à (C_A) et (C_B). L'ensemble des centres M des (D_M) est donc l'ensemble des points vérifiant $BM - AM = R_B - R_A$.

Supposons par exemple $R_B \geq R_A$. Si $R_A = R_B$, on a $AM = BM$ et l'ensemble des points M est la médiatrice de [AB]. Si $R_B > R_A$, posons $a = \dfrac{R_B - R_A}{2}$, $c = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{R_A + R_B}{2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{R_A R_B}$.

D'après l'étude précédente, l'ensemble des points M vérifiant $BM - AM = 2a$ est la branche d'hyperbole de foyer A et B et de demi-axe a, celle des deux branches qui est la plus proche de A (car $BM > AM$). L'équation de cette branche d'hyperbole dans le repère de centre le milieu de [AB] et d'axe des abcisses dirigé par $\boldsymbol{BA}$ est $\dfrac{4x^2}{(R_B - R_A)^2} - \dfrac{y^2}{R_A R_B} = 1$, $x \geq 0$. Une représentation paramétrique est donnée par :

$$M : \begin{cases} x = \dfrac{R_B - R_A}{2} \operatorname{ch}(t) \\ y = \sqrt{R_A R_B} \operatorname{sh}(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

En prenant t quelconque, on obtient un centre M quelconque. Le rayon R de (D_M) vérifie :

$$R = AM - R_A = -a + \frac{cx}{a} - R_A = -\frac{R_A + R_B}{2} + \frac{R_A + R_B}{R_B - R_A} x.$$

5- Tangentes

❑ Soit une ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) appartenant à cette ellipse. Cherchons une équation de la tangente à l'ellipse en ce point M_0.

Si $x_0 = \pm a$, M_0 est un sommet de l'ellipse et l'équation de la tangente est $x = \pm a$. Sinon, on peut exprimer localement l'équation de l'ellipse sous la forme y comme fonction de x. Nous supposerons par exemple $y_0 > 0$. On a alors $y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$. La pente de la tangente en M_0 vaut :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{bx_0}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

de sorte que l'équation de la tangente est :

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

On voit que l'équation de la tangente s'obtient à partir de l'équation initiale de l'ellipse en fixant dans chacun des carrés x^2 ou y^2 l'une des variables à la valeur de la coordonnée du point M_0.
Cette équation a également été déterminée dans le chapitre L1/CALCDIF1.PDF en utilisant le gradient de la fonction $(x, y) \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

On vérifiera de même que l'équation de la tangente à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ au point M_0 est :

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

En ce qui concerne une parabole $y^2 = 2hx$, avec $h > 0$, la tangente au sommet a pour équation $x = 0$. Sinon on peut procéder comme précédemment. Si $y_0 > 0$ par exemple, on a :

$$y = \sqrt{2hx}$$

donc $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{h}{2x_0}}$

donc l'équation de la tangente est :

$$y - y_0 = \sqrt{\frac{h}{2x_0}}(x - x_0) = \frac{h}{\sqrt{2hx_0}}(x - x_0) = \frac{h}{y_0}(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad yy_0 - y_0^2 = hx - hx_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{yy_0 = hx + hx_0}$$

On voit qu'on a aussi un "dédoublement" des variables, le y^2 de l'équation initiale étant remplacé par yy_0 et le $2x$ par $x + x_0$.

❑ Si l'équation est donnée en polaire $r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$, le point M de la conique vérifie $\boldsymbol{OM} = r\boldsymbol{e}_r$. r et $\boldsymbol{e}_r$ sont fonctions de θ et $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \boldsymbol{e}_\theta$. Donc le vecteur directeur de la tangente en un point repéré par son angle θ_0 est :

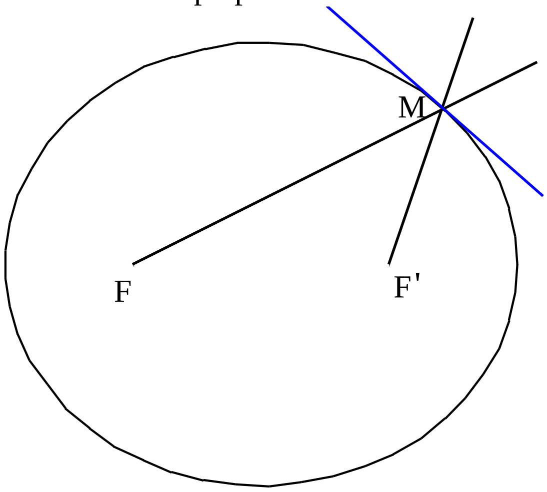
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0) = r_0'\boldsymbol{e}_r + r_0\boldsymbol{e}_\theta$$

avec $r_0 = \frac{p}{1 + e\cos(\theta_0)}$ et $r_0' = \frac{pe\sin(\theta_0)}{(1 + e\cos(\theta_0))^2}$.

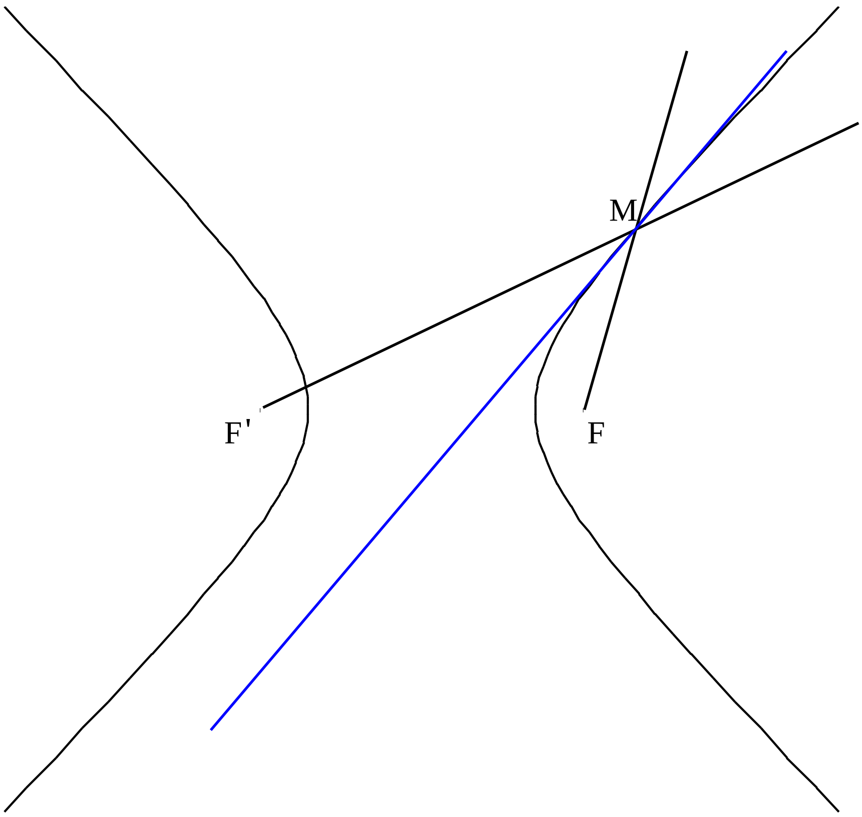
❑ Dans le cas des coniques bifocales de foyer F ou F', la tangente en un point M à la conique est **bissectrice** des droites (MF) et (MF').

Prenons le cas des ellipses. Les ellipses de foyer F et F' sont les lignes de niveau de la fonction MF + MF'. Le gradient de cette fonction est orthogonale à la tangente en M à la ligne de niveau (voir L1/CALCDIF1.PDF). Or le gradient de MF est $\frac{1}{\text{MF}} \times \boldsymbol{FM}$, vecteur unitaire allant de F vers M.

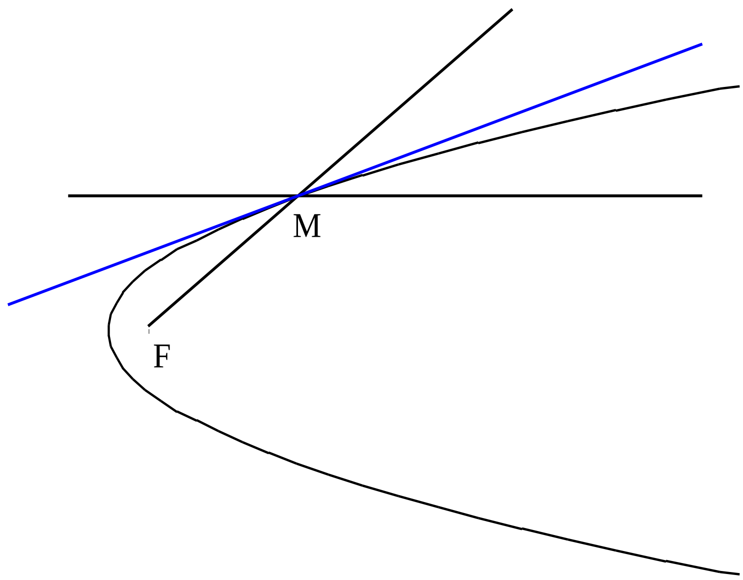
Le gradient est donc somme de deux vecteurs unitaires portés par les droites (MF) et (MF'). C'est un vecteur directeur de l'une des bissectrices. Sa perpendiculaire est l'autre bissectrice.



On procède de même pour l'hyperbole, les hyperboles de foyer F et F' étant les lignes de niveau de la fonction MF – MF'.



En ce qui concerne les paraboles, la tangente en un point M à la parabole est bissectrice des droites (MF) et (MH), (MH) étant la droite passant par M et parallèle à l'axe. Ce résultat peut être obtenu en considérant la parabole comme un cas limite d'ellipse, lorsque l'un des foyers est rejeté à l'infini. On peut également considérer les paraboles de foyer F comme les lignes de niveau de la fonction $M \rightarrow MF - \overline{HM} = \sqrt{x^2 + y^2} - x$, H étant la projection orthogonale de M parallèlement à l'axe de la parabole (qu'on peut supposer coïncider avec l'axe des abscisses) sur la droite passant par F (placé à l'origine du repère) et orthogonale à cet axe (cette droite étant alors l'axe des ordonnées), MF la distance de M à F, $\overline{HM}$ la composante du vecteur ***HM*** selon l'axe des abscisses. Le gradient de MF est le vecteur unitaire dirigé de F vers M. Le gradient de $\overline{HM}$ est le vecteur unitaire dirigeant l'axe des abscisses. Celui de $MF - \overline{HM}$ est la différence de ces deux vecteurs, dirigeant l'une des bissectrices de (FM) et de (HM). La perpendiculaire à cette première bissectrice est la tangente cherchée à la parabole en M, et sera l'autre bissectrice.



II : Quadriques

1- Définition et réduction

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, une **quadrique** est une surface d'équation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + k = 0$$

On suppose qu'au moins un des coefficients a, b, c, d, e, f est non nul, sinon on obtient une équation affine $gx + hy + iz + k = 0$, donnant un plan si l'un des coefficients g, h, i est non nul. Les quadriques sont à l'espace ce que les coniques sont au plan.

La réduction de l'équation d'une quadrique consiste à effectuer un changement de repère de façon à simplifier son équation.

Dans un premier temps, on cherche à éliminer les termes croisés xy, xz et yz. On s'occupe donc d'abord de la partie $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fxy$, appelée forme **quadratique** associée à l'équation de la quadrique.

Si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X^T = (x\ y\ z)$ et $M = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}$, on a :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fxy = X^TMX$$

Or M est une matrice symétrique. Dans le chapitre L2/DIAGONAL.PDF, on montre qu'une telle matrice est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telle que $M = PDP^{-1}$. Si on pose $X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, nouvelles coordonnées des points après le changement de base défini par la matrice de passage P, on a $X = PX'$ et :

$$\begin{aligned} X^TMX &= (PX')^T(PDP^{-1})(PX') \\ &= X'^TP^TPDP^{-1}PX' \\ &= X'^TDX' \end{aligned}$$

car $P^TP = I_3$, P étant une matrice orthogonale. Si $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$, alors :

$$X'^TDX' = \lambda x'^2 + \mu y'^2 + \nu z'^2$$

et il n'y a plus de termes croisés.

Par ailleurs, le changement de repère va transformer l'expression du premier degré $gx + hy + iz$ en une expression du premier degré en x', y', z'. Quitte à renommer les coefficients et les coordonnées, on peut donc se ramener au cas où l'équation d'une quadrique est :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + gx + hy + iz + k = 0$$

Dans un second temps, si l'un des coefficient du second degré est non nul, on peut effectuer un changement d'origine du repère de façon à supprimer un terme du premier degré. Par exemple, pour $a \neq 0$:

$$ax^2 + dx = a(x + \frac{d}{2a})^2 + \text{Cte}$$

donc, si on translate l'origine selon l'axe des abscisses en $-\frac{d}{2a}$, la nouvelle équation verra intervenir le carré de l'abscisse, mais plus son terme de degré 1.

On peut donc se ramener aux équations suivantes, à permutation près des noms des coordonnées :

$ax^2 + by^2 + cz^2 + k = 0$	trois coefficients du second degré non nuls
$ax^2 + by^2 + iz + k = 0$	deux coefficients du second degré non nuls
$ax^2 + hy + iz + k = 0$	un coefficient du second degré non nul

Dans le second cas, si i est non nul, on peut translater l'origine du repère parallèlement à l'axe z pour se ramener au cas où $k = 0$.
Dans le troisième cas, en effectuant une rotation d'axe x, on peut supposer que $hy + iz + k$ est en fait une fonction du premier degré en y, et si le coefficient de y est non nul, on peut se ramener au cas où la constante est nulle en translatant l'origine du repère. D'où les différentes équations :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + k = 0$$
$$ax^2 + by^2 + iz = 0$$
$$ax^2 + by^2 + k = 0$$
$$ax^2 + iy = 0$$
$$ax^2 + k = 0$$

On élimine les cas triviaux. Par exemple, la dernière équation $ax^2 + k = 0$ (avec $a \neq 0$) donne deux plans parallèles $x = \pm$ Cte (si k est de signe contraire à a), ou deux plans confondus $x = 0$ (si $k = 0$) ou l'ensemble vide (si k est du même signe que a).
Ou encore, dans la première équation $ax^2 + by^2 + cz^2 + k = 0$ (avec a, b, c non nuls) donne l'ensemble vide si les quatre coefficients sont de même signe, ou bien le point (0, 0, 0) si $k = 0$ et si les trois autres coefficients sont de même signe.
Dans la troisième équation, si $k = 0$ et a et b sont de signe contraire, on a deux plans sécants selon l'axe des z. Si $k = 0$ et si a et b sont de même signe, on a juste l'axe des z.

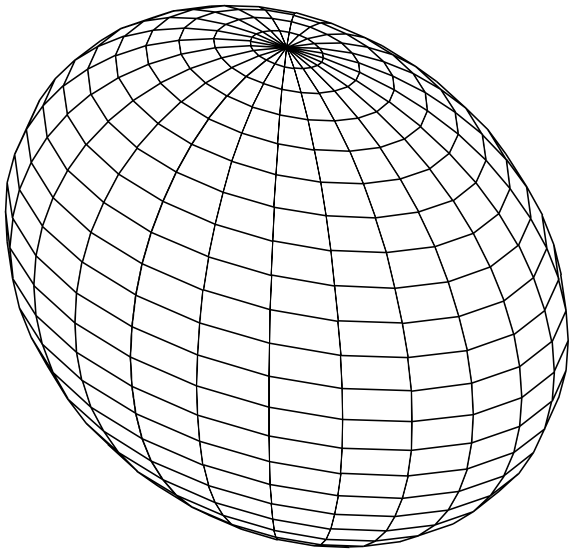
Si k est non nul, on divise par k ou $-k$ pour obtenir une constante ± 1. Enfin, on écrit le produit d'un coefficient positif par x^2 sous la forme $\frac{x^2}{a^2}$ plutôt que ax^2, et $-\frac{x^2}{a^2}$ si le coefficient est négatif. De même pour les autres coordonnées.

2- Equations réduites

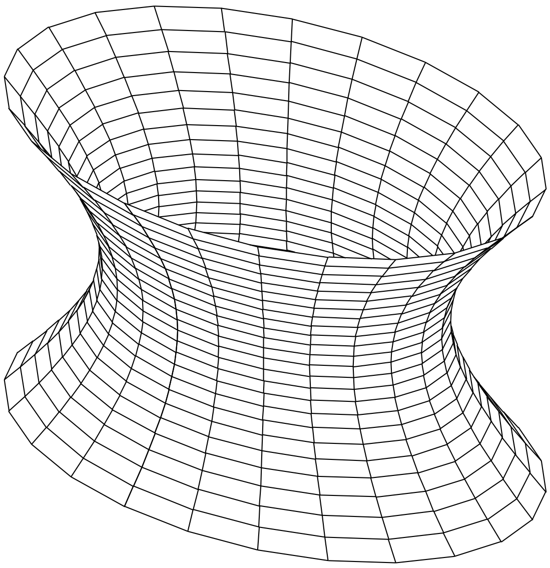
Une fois toutes ces simplifications effectuées, les équations réduites non triviales des quadriques se classent selon les catégories suivantes (à permutation près des coordonnées) :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	ellipsoïde
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	hyperboloïde à une nappe
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	hyperboloïde à deux nappes
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	cône
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	paraboloïde elliptique
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	paraboloïde hyperbolique
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	cylindre elliptique
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	cylindre hyperbolique
$y = ax^2$	cylindre parabolique

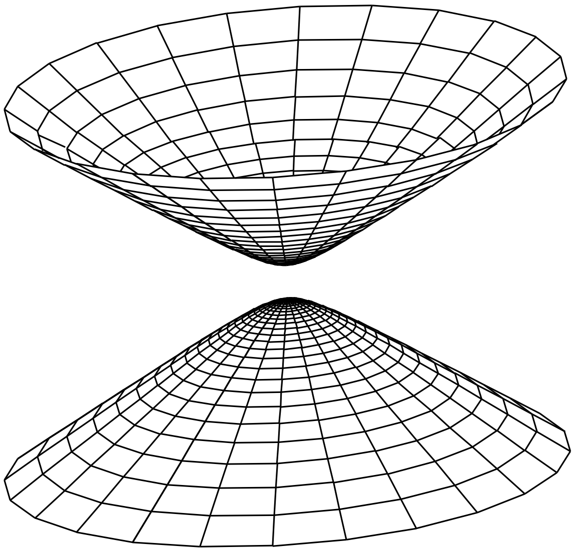
Les figures possédant dans leur équation une expression $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ possède une symétrie de révolution d'axe z lorsque $a = b$. Leur intersection avec des plans $z =$ Cte donne des cercles au lieu d'ellipses. Voici des représentations de ces surfaces respectives.



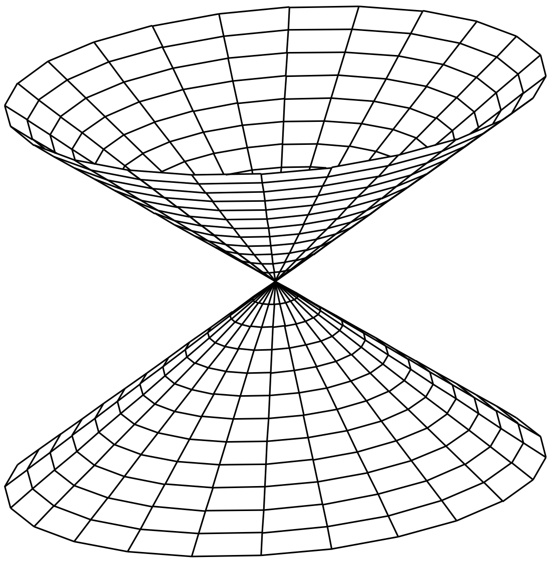
Ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



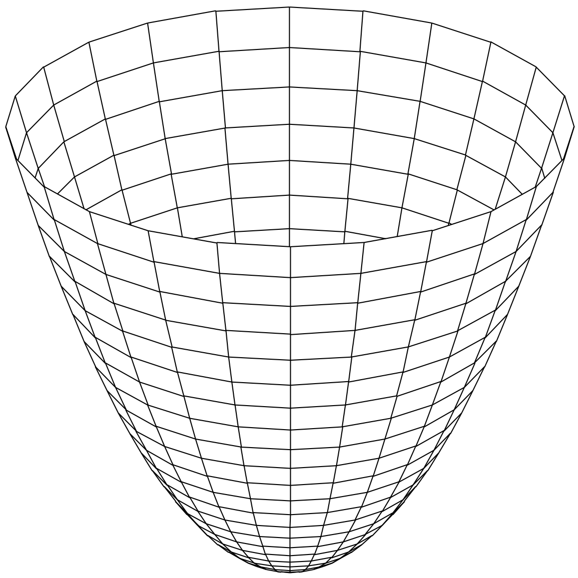
Hyperboloïde à une nappe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



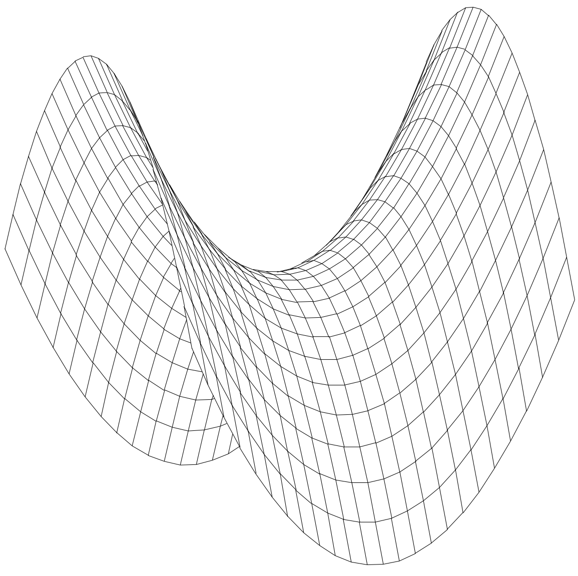
Hyperboloïde à deux nappes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



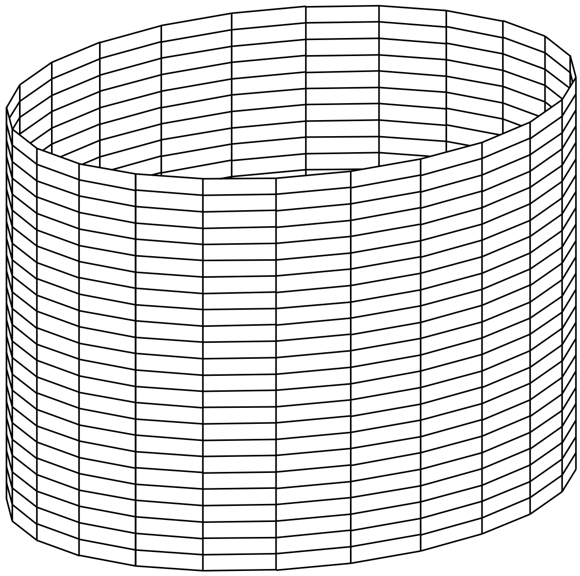
Cône $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



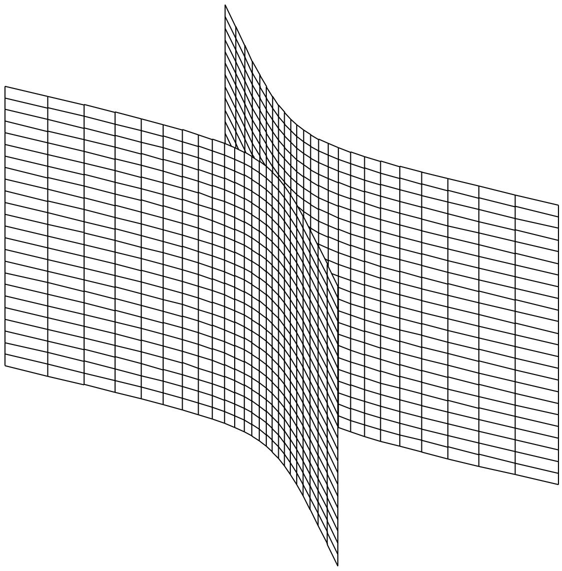
Paraboloïde elliptique $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



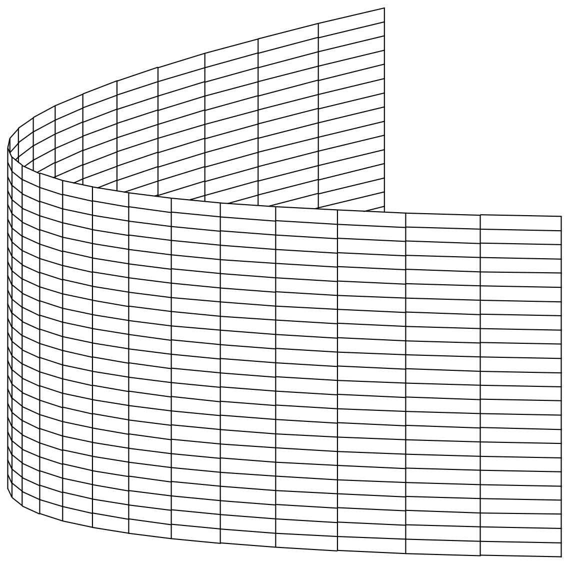
Paraboloïde hyperbolique $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$



Cylindre elliptique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Cylindre hyperbolique $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$



Cylindre parabolique $y = ax^2$

L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique ont la particularité d'être engendré par une famille de droites.

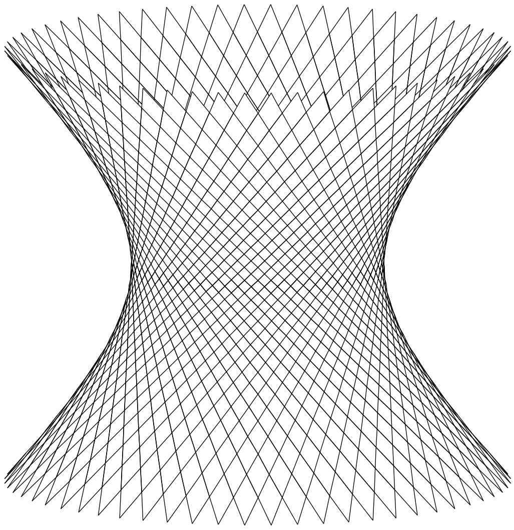
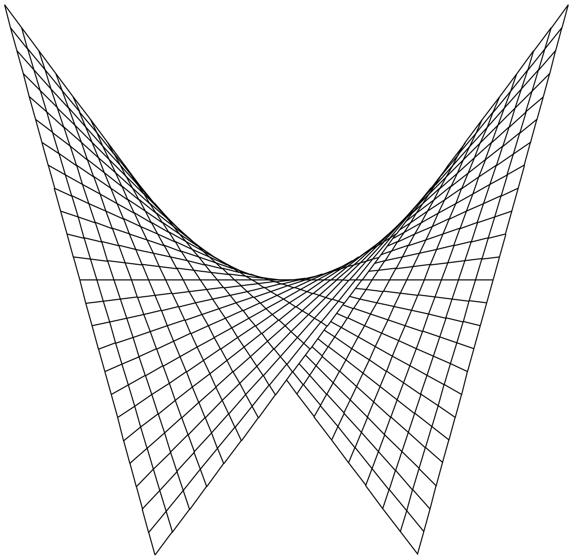
❑ Pour l'hyperboloïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, on factorise l'équation sous la forme PQ – RS = 0, par exemple $(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c})(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}) - (1 - \dfrac{y}{b})(1 + \dfrac{y}{b}) = 0$. On l'interprète comme un déterminant $\begin{vmatrix} P & R \\ S & Q \end{vmatrix}$ nul. Ainsi, $\begin{vmatrix} x/a - z/c & 1 - y/b \\ 1 + y/b & x/a + z/c \end{vmatrix} = 0$. Cela signifie que les deux colonnes (ou les deux lignes) sont liées, ce qui donne :

$$\left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{y}{b} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \end{array}\right. \quad \text{ou } \exists\, \lambda, \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \lambda(1 - \dfrac{y}{b}) \\ 1 + \dfrac{y}{b} = \lambda(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}) \end{array}\right.$$

ainsi que
$$\left[\begin{array}{l} 1 + \dfrac{y}{b} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \end{array}\right. \quad \text{ou } \exists\, \mu, \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \mu(1 + \dfrac{y}{b}) \\ 1 - \dfrac{y}{b} = \mu(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}) \end{array}\right.$$

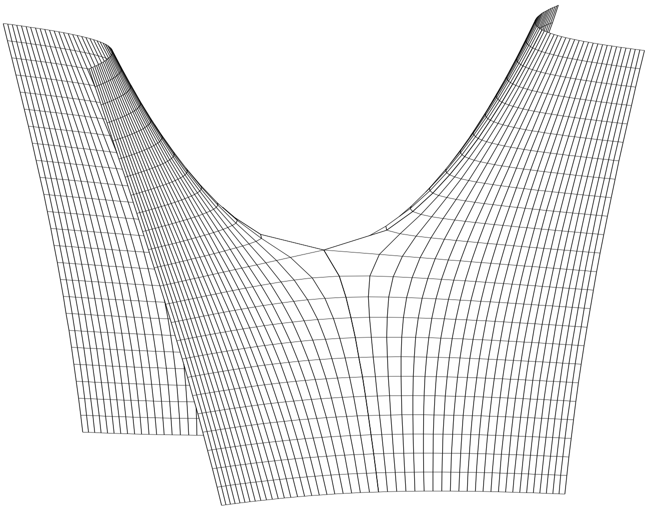
ce qui donne deux familles de droites.

❑ Pour le paraboloïde hyperbolique, $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = (\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b})(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b})$, un changement de repère non orhonormé nous amène à une équation du type Z = XY. En coupant par des plans X = Cte ou Y = Cte, on obtient des droites.

Ces deux surfaces font partie de toute une famille de surfaces pouvant être engendrées par des droites, les surfaces dites réglées. Cette caractéristique en fait des surfaces de choix pour l'architecture (châteaux d'eau, tours de réfrigération, toitures...).

Voici une dernière représentation du paraboloïde hyperbolique, les courbes horizontales correspondant à des lignes de niveau z = Cte, et les autres courbes à des lignes xy = Cte.



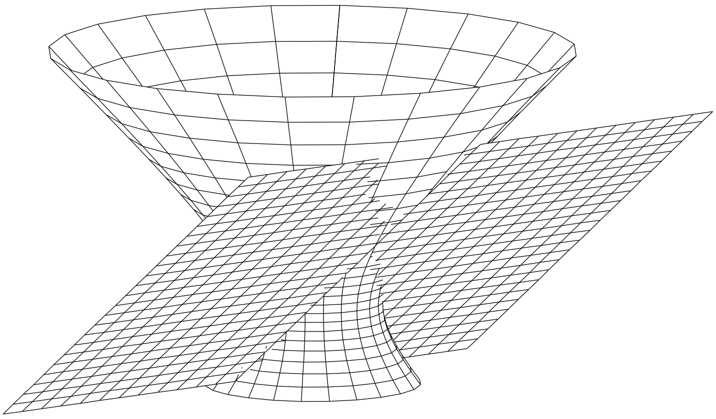
EXEMPLES :

❑ Donnons, en fonction du paramètre a, la nature de la quadrique d'équation $xy + yz + zx = a$. La forme quadratique $xy + yz + zx$ a pour matrice $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont $-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$ et 1. M est semblable à la matrice $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice de passage étant constituée des vecteurs

propres associés aux valeurs propres précédentes. Dans la nouvelle base, l'équation réduite est $-X^2 - Y^2 + 2Z^2 = 2a$.
Si $a = 0$, il s'agit d'un cône.
Si $a < 0$, il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe
Si $a > 0$, il s'agit d'un hyperboloïde à deux nappes.

❑ Dans le chapitre L2/PREHILB.PDF, on montre que l'image de la sphère unité d'un espace euclidien (de dimension 3) par une application linéaire injective est un ellipsoïde.

❑ Pour la détermination d'un plan tangent à une surface en général, et donc à une quadrique en particulier, voir le chapitre L1/CALCDIF1.PDF. Ci-dessous, on représente l'hyperboloïde de révolution d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et son plan tangent au point (1, 1, 1). Le plan coupe la quadrique :



III : Mouvement des planètes

1- Kepler et Newton

A la suite de ses observations astronomiques, Kepler (1571-1630) a énoncé trois lois relatives au mouvement des planètes :

- **Première loi** : (K1) chaque planète P décrit une ellipse dont l'un des foyers est occupé par le Soleil S. On notera (K1a) la sous-propriété suivante : la trajectoire de la planète est contenue dans un plan contenant S.
- **Deuxième loi** : (K2) L'aire balayée par le segment [SP] pendant un intervalle de temps donné est proportionnelle à cet intervalle (**loi des aires**).
- **Troisième loi** : (K3) Le carré T^2 de la période de révolution est proportionnel au cube a^3 du demi-grand axe de l'ellipse (i.e le quotient $\dfrac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes).

Newton (1643-1727) prouva ces trois lois à partir du principe de la gravitation universelle :

(N1) La planète P, de masse m, est soumise à une force $\boldsymbol{F}$ colinéaire au vecteur $\boldsymbol{SP}$ (le mouvement est dit **à force centrale** de centre S).

(N2) Cette force est dirigée de P vers S et son intensité est de la forme $\frac{K}{r^2}$, où r est la distance SP, K étant une valeur indépendante de la position de la planète.

(N3) K est proportionnelle à la masse m de la planète (et à celle du Soleil).

Nous montrons dans ce paragraphe (N1) et (N2) $\Leftrightarrow$ (K1) et (K2), en supposant le Soleil suffisamment massif[1] par rapport à la planète pour pouvoir le prendre comme origine d'un référentiel galiléen. On rappelle que, dans un tel référentiel, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, où $\boldsymbol{a}$ est l'accélération instantanée de la planète. Cette relation peut être mathématiquement vue comme une définition de $\boldsymbol{F}$. On néglige également l'influence des autres planètes sur la planète P. On raisonne sur P comme si on pouvait le considérer comme une masse ponctuelle. La plupart des ouvrages de physique se bornent à montrer l'implication (N1) et (N2) $\Rightarrow$ (K1) et (K2).

(K3) n'intervient pas dans cette équivalence. C'est une conséquence des autres propriétés.

2- Notations

S désignant le Soleil et P la planète, on pose :

t	le temps
$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{SP}$	
$r = \mathrm{SP}$	distance de S à P
$\boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$	vecteur unitaire dirigé de S vers P
$\boldsymbol{V} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	vitesse vectorielle
V	module de la vitesse
$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}$	accélération vectorielle
m	masse de la planète
$\boldsymbol{F} = -\dfrac{K}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r$	force appliquée à P sous les hypothèses (N1) et (N2)
$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{V}$	moment cinétique de P par rapport à S
L	module de L
$C = \dfrac{L}{m}$	

On supposera qu'à chaque instant P $\neq$ S, i.e. $r \neq 0$, et que $\boldsymbol{V}$ n'est jamais colinéaire à $\boldsymbol{r}$, i.e. $\boldsymbol{L}$ ne s'annule pas.

Dans le cas d'un mouvement dans un plan orienté, en coordonnées polaire (r, θ) de pôle S :

$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \boldsymbol{e}_\theta$	vecteur unitaire directement orthogonal à $\boldsymbol{e}_r$
$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\,\boldsymbol{e}_r$	vecteur unitaire directement orthogonal à $\boldsymbol{e}_\theta$
$\dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$	

[1] Un modèle plus précis consisterait à prendre comme origine du référentiel galiléen le centre de masse de la planète et du Soleil.

$$\dot\theta = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_r}{d\theta} = \dot\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{d\theta} = -\dot\theta\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{SP} = r\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d(r\boldsymbol{e}_r)}{dt} = \dot r\boldsymbol{e}_r + r\dot\theta\boldsymbol{e}_\theta$$ en dérivant le produit $r\boldsymbol{e}_r$

$$V^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\,\boldsymbol{e}_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\,\boldsymbol{e}_\theta$$ en dérivant $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{V} = mr^2\dot\theta\,(\boldsymbol{e}_r\wedge\boldsymbol{e}_\theta)$$

$$L = mr^2\dot\theta$$

$$C = \frac{L}{m} = r^2\dot\theta$$

3- Equivalence entre les lois de Kepler et le principe de gravitation universelle

Certaines relations sont vérifiées pour tout mouvement plan, repéré par ses coordonnées polaires par rapport à un pôle S.

PROPOSITION

Pour tout mouvement plan ne passant par par S*, on dispose des relations suivantes* :

(i) $\dfrac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dfrac{1}{mr^3}\boldsymbol{L}\wedge\boldsymbol{r}$

(ii) $<\boldsymbol{r} \mid \dfrac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}> = 0$

Démonstration :

❑ (i) $\boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ et $\boldsymbol{V} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot r\boldsymbol{e}_r + r\dot\theta\boldsymbol{e}_\theta$, donc :

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = -\frac{\dot r}{r^2}\boldsymbol{r} + \frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\frac{\dot r}{r^2}\boldsymbol{r} + \frac{1}{r}\boldsymbol{V}$$

Or $\boldsymbol{L}\wedge\boldsymbol{r} = (m\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{V})\wedge\boldsymbol{r}$

$= -m<\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{V}>\boldsymbol{r} + mr^2\boldsymbol{V}$ en utilisant la formule du double produit vectoriel.
$(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})\wedge\boldsymbol{w} = -<\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}>\boldsymbol{u} + <\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}>\boldsymbol{v}$
Voir L1/DETERMN.PDF

$= -mr\dot r\boldsymbol{r} + mr^2\boldsymbol{V}$

d'où le résultat.

❑ (ii) résulte directement du (i) puisque $\boldsymbol{r}$ est orthogonal à $\boldsymbol{L}\wedge\boldsymbol{r}$. On peut aussi écrire que :

$\dfrac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot\theta\boldsymbol{e}_\theta$ et $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$, donc $<\boldsymbol{r} \mid \dfrac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}> = 0$.

La première hypothèse (N1) de Newton suffit à entrainer que le mouvement se déroule dans un plan (propriété (K1a)).

PROPOSITION
Considérons le mouvement d'une masse ponctuelle P *dans un référentiel galiléen, et soit* S *un point fixe dans ce référentiel, différent de* P *à chaque instant. Il y a équivalence entre* :

(i) (N1) *Le mouvement est à force centrale de centre* S.
(ii) *Le moment cinétique* ***L*** *de* P *par rapport à* S *est constant*.
(iii) *Le mouvement se situe dans un plan contenant* S (K1a) *et vérifie* (K2) (*loi des aires*).

Autrement dit, (N1) ⇔ $\boldsymbol{L}$ constant ⇔ (K1a) et (K2).

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) ⇔ (ii) : Soit $\boldsymbol{F}$ la force exercée sur P. On a $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{V}$ donc :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V} + m\boldsymbol{r} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}$$

donc $\boldsymbol{L}$ est constant ⇔ $\forall\, t, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0$

⇔ $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{r}$ sont colinéaires à chaque instant
⇔ le mouvement est à force centrale de centre S.

❑ (ii) ⇒ (iii) : $\boldsymbol{L}$ étant supposé non nul et $\boldsymbol{r}$ étant perpendiculaire à $\boldsymbol{L}$, le point P est dans le plan passant par S orthogonal à $\boldsymbol{L}$. Donc (K1a) est satisfait. Plaçons-nous dans ce plan en repérant P par des coordonnées polaires $(\theta, r(\theta))$ de pôle S. Un secteur angulaire Δ de la trajectoire, balayé par le segment [SP] à partir d'un angle initial θ_0, est constitué des points de coordonnées polaires (ρ, φ), $0 \leq \rho \leq r(\varphi)$, $\theta_0 \leq \varphi \leq \theta$, et a pour aire (voir L2/INTMULT.PDF) :

$$\mathrm{A} = \iint_\Delta \rho\, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = \int_{\theta_0}^{\theta} \int_0^{r(\varphi)} \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} r(\varphi)^2\, \mathrm{d}\varphi$$

Sa dérivée par rapport à θ vaut $\dfrac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{1}{2} r(\theta)^2$. Sa dérivée par rapport au temps vaut :

$$\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta} \frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}\theta} = r^2\dot{\theta} = \frac{\mathrm{L}}{m} = \mathrm{C}$$

donc $\boldsymbol{L}$ constant ⇒ L constant

⇔ $\mathrm{C} = r^2\dot{\theta}$ constant
⇔ $\dfrac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}t}$ constant
⇔ l'aire balayée entre les instants t_0 et t_1 est proportionnel à $t_1 - t_0$
⇔ (K2)

Dans ce contexte, C s'appelle **constante des aires**.

❑ (iii) ⇒ (ii) : Si la trajectoire est dans un plan contenant S, alors $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{V}$ sont constamment éléments du plan vectoriel direction du plan de la trajectoire. $\boldsymbol{L}$ est donc constamment orthogonal à ce plan. Par ailleurs, son module L est constant d'après l'équivalence prouvée ci-dessus : L constant ⇔ (K2). Ayant une norme et une direction constante, $\boldsymbol{L}$ est constant.

Ainsi, la trajectoire des planètes est plane, que ce soit selon le point de vue (K1a) de Kepler ou celui (N1) de Newton. On se place donc désormais en coordonnées polaires dans le plan, le pôle étant le Soleil S.

PROPOSITION

On considère une particule de masse m dans un plan affine d'origine S *et de direction vectorielle* (Π), *pour lequel le moment cinétique* ***L*** *ne s'annule pas. Il y a équivalence entre* :

(i) (K1) : $\exists\, p, \exists\, e \geq 0, \exists\, \theta_0, r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$ (**première loi de Kepler**)

(ii) $\exists\, \boldsymbol{e} \in (\Pi)$, $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}$ *ne s'annule pas, et* $<\boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}> = 0$

(iii) $\exists\, p \neq 0, \exists\, \boldsymbol{e} \in (\Pi)$, $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}$ *ne s'annule pas, et* $\boldsymbol{V} = \dfrac{1}{mp}\boldsymbol{L} \wedge (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r})$

Si, de plus, le mouvement vérifie la loi des aires (K2) (**deuxième loi de Kepler**), *alors il y a aussi équivalence avec* :

(iv) (N1) et (N2) : $\exists\, \mathrm{K}, \boldsymbol{a} = -\dfrac{\mathrm{K}}{mr^2}\boldsymbol{e_r}$

On montre donc que :

(K1) ⇔ (ii) ⇔ (iii)

(K1) et (K2) ⇔ (N1) et (N2)

Puisque ***r*** est constamment élément de (Π), il en est de même de sa dérivée ***V***. Donc ***L*** est orthogonal à (Π). N'ayant pas supposé a priori que (N1) est vérifié, on ignore a priori si ***L*** est constant.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) ⇒ (ii) : Posons $\boldsymbol{e} = e\boldsymbol{u}$ où $\boldsymbol{u}$ est le vecteur unitaire dirigeant l'axe $\theta = \theta_0$ dans le plan (Π) L'équation (K1) est équivalente à :

$$re\cos(\theta - \theta_0) + r = p$$

$$\Leftrightarrow \quad <\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}> = p$$

$$\Rightarrow \quad <\boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}> + <\boldsymbol{r} \mid \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e_r}}{\mathrm{d}t}> = 0 \qquad \text{en dérivant}$$

$$\Leftrightarrow \quad <\boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}> = 0 \qquad \text{car } <\boldsymbol{r} \mid \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e_r}}{\mathrm{d}t}> = 0$$

p est non nul car on a supposé que r ne s'annule pas. Il résulte alors de l'égalité $<\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}> = p$ que $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}$ ne s'annulle pas.

❑ (ii) ⇒ (i) : Posons θ_0 l'angle que fait ***e*** avec l'axe d'origine des angles (ou un angle quelconque si $\boldsymbol{e} = 0$), et e le module de ***e***. On lit la démonstration précédente de bas en haut, et on inverse l'implication dans cette démonstration en intégrant, p étant la constante d'intégration.

❑ (i) ⇒ (iii) : ***V*** est orthogonal à ***L***, et, d'après (ii), est aussi orthogonal à $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}$. Donc ***V*** est colinéaire à leur produit vectoriel. Or les vecteurs ***L*** et $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}$ sont non nuls et orthogonaux car $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}$ est élément de (Π) et ***L*** est orthogonal à (Π). Donc $\boldsymbol{L} \wedge (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r})$ est non nul, et il existe une fonction λ telle que :

$$\boldsymbol{V} = \lambda\boldsymbol{L} \wedge (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r})$$

or $\quad \boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{V}$

donc $\quad \boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \wedge (\lambda\boldsymbol{L} \wedge (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}))$

$\quad = \lambda m <\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}> \boldsymbol{L} - \lambda m <\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{L}> (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r})$ en utilisant la formule du double produit vectoriel :

$\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}> \boldsymbol{v} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> \boldsymbol{w}$

or $\quad <\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{L}> = 0$ et $<\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r}> = p$, d'après (i)

donc $\quad \boldsymbol{L} = \lambda mp\, \boldsymbol{L}$

donc $\quad \lambda = \dfrac{1}{mp}$, valeur constante.

et $\quad \boldsymbol{V} = \dfrac{1}{mp} \boldsymbol{L} \wedge (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e_r})$

Cette implication montre que le p et le $\boldsymbol{e}$ sont les mêmes en (i) et en (iii)

❑ (iii) ⇒ (ii) est trivial.

❑ (iii) et (K2) ⇒ (iv) : Puisque la trajectoire est plane et vérifie (K2), on sait que (N1) est vérifié et que $\boldsymbol{L}$ est constant. Donc, en dérivant (iii) par rapport au temps et en utilisant la relation $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{mr^3} \boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{r}$ prouvée plus haut, on obtient :

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{mp} \boldsymbol{L} \wedge \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e_r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{mp} \boldsymbol{L} \wedge (\frac{1}{mr^3} \boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{r})$$

$$= -\frac{\mathrm{L}^2}{m^2pr^3} \boldsymbol{r}$$

en utilisant la formule du double produit vectoriel :

$\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}> \boldsymbol{v} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> \boldsymbol{w}$

et le fait que $\boldsymbol{L}$ est orthogonal à $\boldsymbol{r}$

$$= -\frac{\mathrm{L}^2}{m^2pr^2} \boldsymbol{e_r}$$

qui résulte bien d'une force en $-\dfrac{\mathrm{K}}{r^2}$ avec $\mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{L}^2}{mp}$, ce qui prouve (N2).

❑ (iv) ⇒ (iii) et (K2). On a déjà vu que (N1) implique que le mouvement est plan et que (K2) est vérifié. Il reste à montrer (iii). On reprend la démonstration précédente, en effectuant les calculs de bas en haut. En effet (N1) et (N2) signifie qu'il existe une constante K telle que, à chaque instant :

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\mathrm{K}}{mr^2} \boldsymbol{e_r}$$

donc $\quad \boldsymbol{a} = -\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}^2} \dfrac{\mathrm{L}^2}{mr^3} \boldsymbol{r}$

$$= \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}^2} \boldsymbol{L} \wedge (\frac{1}{mr^3} \boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{r})$$

donc $\quad \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}^2} \boldsymbol{L} \wedge \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e_r}}{\mathrm{d}t}$

or (N1) ⇔ $\boldsymbol{L}$ est constant. Donc, en intégrant la dernière égalité, on en déduit que:

$$\exists\, \boldsymbol{H} \text{ constant}, \boldsymbol{V} = \boldsymbol{H} + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}^2} \boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{e_r}$$

$\boldsymbol{H} \in (\Pi)$ car c'est le cas de $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{e_r}$. Par ailleur, $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{e_r}$ étant orthogonaux à $\boldsymbol{L}$, il en est de même de $\boldsymbol{H}$ et il existe donc $\boldsymbol{e}$ constant élément de (Π) tel que $\boldsymbol{H} = \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}^2} \boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{e}$, ce qui donne :

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}^2} \boldsymbol{L} \wedge (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}_r)$$

On prend p tel que $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}^2} = \frac{1}{mp}$.

On en déduit une conséquence intéressante sur l'**hodographe** du mouvement, c'est-à-dire sur l'ensemble décrit par le vecteur $\boldsymbol{V}$ au cours du mouvement. $\boldsymbol{e}_r$ décrit un cercle dans le plan de la trajectoire, et $\boldsymbol{L}$ étant constant orthogonal à $\boldsymbol{e}_r$, il en est de même de la norme de $\boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{e}_r$. $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}^2} (\boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{e}_r)$ parcourt donc un cercle de rayon $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}$, et il en est de même de $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{H} + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}^2} (\boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{e}_r)$, obtenu par translation du cercle précédent par le vecteur $\boldsymbol{H}$.

Sous les hypothèses précédentes, montrons comment on déduit (K3) de (N3).

PROPOSITION

Sous l'hypothèse d'une force centrale en $-\frac{\mathrm{K}}{r^2}$*, et dans le cas d'une trajectoire elliptique, la période de révolution* T *est liée à la demi-longueur du grand axe a par la relation* :

$$\mathrm{T}^2 = \frac{4\pi^2 m}{\mathrm{K}} a^3$$

Démonstration :

❑ On utilise le fait que $\mathrm{C} = r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ est constant, en prenant pour simplifier comme équation polaire de l'ellipse $r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$:

$$\mathrm{T} = \int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2}{\mathrm{C}} \,\mathrm{d}\theta \qquad \text{car } \mathrm{d}t = \frac{r^2}{\mathrm{C}} \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\mathrm{C}} \frac{p^2}{(1 + e\cos(\theta))^2} \,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2 \int_{0}^{\pi} \frac{1}{\mathrm{C}} \frac{p^2}{(1 + e\cos(\theta))^2} \,\mathrm{d}\theta \qquad \text{posons } u = \tan(\frac{\theta}{2}). \text{ On a } \cos(\theta) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

$$= \frac{4p^2}{\mathrm{C}} \int_{0}^{\infty} \frac{1 + u^2}{(1 + e + (1 - e)u^2)^2} \,\mathrm{d}u \qquad \text{posons } u = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan(\varphi)$$

$$= \frac{4p^2}{\mathrm{C}} \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \frac{1}{(1 + e)^2} (\cos^2(\varphi) + \frac{1 + e}{1 - e} \sin^2(\varphi)) \,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{4p^2}{\mathrm{C}} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \frac{1}{(1 + e)^2} (\frac{\pi}{4} + \frac{1 + e}{1 - e} \frac{\pi}{4}) = \frac{2\pi p^2}{\mathrm{C}} \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

or la demi-longueur du grand axe vaut $a = \frac{1}{2} (\frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e}) = \frac{p}{1 - e^2}$, et l'on a $p = \frac{\mathrm{L}^2}{m\mathrm{K}} = \frac{m\mathrm{C}^2}{\mathrm{K}}$.

donc $\quad \mathrm{T}^2 = \frac{4\pi^2 p^4}{\mathrm{C}^2} \frac{a^3}{p^3} = \frac{4\pi^2 m}{\mathrm{K}} a^3$.

Selon (N3), K est proportionnel à m, donc $\frac{T^2}{a^3}$ est une constante indépendante de la planète considérée, ce qui est la loi (K3) de Kepler.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Dans $\mathbb{R}^2$, tracer l'ensemble des points M de coordonnées (x, y), tels que :

$$16x|x| + 36y|y| = 576$$

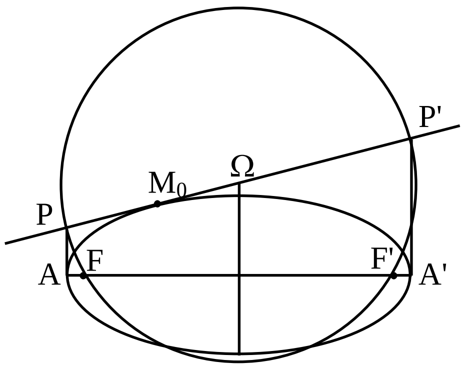
Exo.2) Soit f la fonction de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ qui, à z associe $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

a) Donner l'image par f du cercle de centre O de rayon R.
b) Donner l'image par f de la demi-droite partant de O et d'angle polaire θ.
c) Montrer que les coniques obtenues ont toutes mêmes foyers.

Exo.3) Soit (H) une hyperbole et (D) une droite sécante à (H) en M et M', et à ses asymptotes en P et P'. Montrer que [MM'] a même milieu que [PP']. Que se passe-t-il si (D) est tangente à H ? En déduire un procédé géométrique permettant de construire une hyperbole point par point connaissant un point et les deux asymptotes.

Exo.4) Soit une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$. Soient A et A' les points de coordonnées $(-a, 0)$ et $(a, 0)$, et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de cette ellipse autre que A ou A'. Soient P et P' les intersections de la tangente à l'ellipse en M_0 avec les droites d'équations $x = -a$ et $x = a$.

a) Montrer que AP $\times$ A'P' est indépendant de M_0.
b) Montrer que le cercle de diamètre [PP'] passe par les foyers de l'ellipse.



Exo.5) On considère trois points distincts A, O, B tels que OA = OB. Soit (H) l'hyperbole équilatère de centre le milieu de [OB], d'axe parallèle à la bissectrice des axes [OA) et [OB) et passant par B. Montrer que cette hyperbole coupe le cercle (C) de centre O de rayon OB en trois autres points B_i tels que $(\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OB}) = 3(\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OB_i})$.
Le problème de la trisection de l'angle est un problème datant de l'Antiquité grecque, consistant à déterminer un angle égal au tiers d'un angle AOB donné. Il a été prouvé au XIXème qu'une telle construction est impossible si on se sert uniquement d'une règle et d'un compas. L'exercice donne une solution géométrique si on se sert d'une hyperbole comme courbe auxiliaire.

Exo.6) Soient A et B deux complexes. On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \mathrm{A}z + \mathrm{B}\bar{z}$.

a) A quelle condition sur A et B cette application est-elle bijective ?

b) Dans le cas où f est bijective, montrer que l'image du cercle unité par f est l'ellipse centrée en 0, dont les demi-axes ont pour longueur $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|$ et $\big||\mathrm{A}| - |\mathrm{B}|\big|$ et dont les foyers ont pour affixes les complexes $\pm w$ avec $w^2 = 4\mathrm{AB}$.

Exo.7) Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère la parabole (P) d'équation $y = x^2 + \dfrac{1}{4}$.

a) Quels sont le foyer et la directrice de cette parabole ?

b) Soit M un point de coordonnées (x_0, y_0), situé hors du domaine convexe limité par la parabole. On considère les tangentes à la parabole issues de M. Soit R et S leur point de contact avec la parabole. Donner une expression de l'angle α entre les vecteurs $\boldsymbol{MR}$ et $\boldsymbol{MS}$ en fonction de x_0 et y_0.

c) α étant donné, quelle est la nature de l'ensemble des points M pour lesquels l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{MR}$ et $\boldsymbol{MS}$ est égal à α ?

Exo.8) On considère dans l'espace euclidien muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2$ contenu dans le plan $z = 0$. On le projette orthogonalement sur le plan $z = \tan(\theta)x$, θ étant un élément de $[0, \dfrac{\pi}{2}[$. Montrer que le projeté est une ellipse. Cette propriété illustre le fait qu'un cercle, vu en perspective cavalière, est une ellipse.

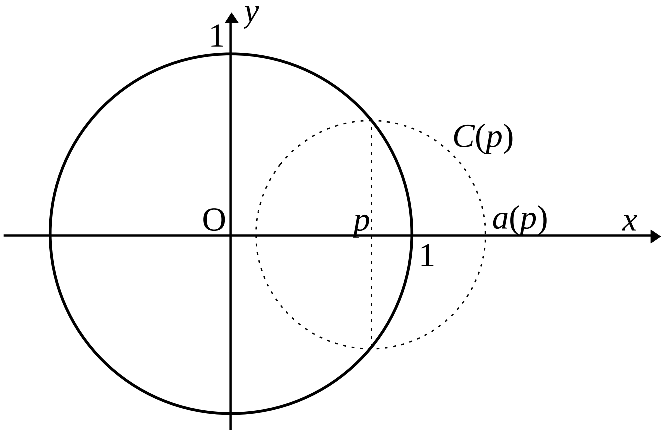
Exo.9) Soit y_0 un réel. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la parabole vérifiant $\left[\begin{array}{l} y = x^2 + y_0 \\ z = 0 \end{array}\right.$. Soit Ω le point de coordonnées $(0,-1,1)$.

a) Déterminer une équation du cône de sommet Ω et dont les génératrices passent par les points de la parabole.

b) Quelle est la nature de la conique intersection du cône avec le plan $y = 0$?

Cet exercice détermine ce qu'est le projeté d'une parabole horizontale sur un plan vertical, selon une projection centrale de centre Ω.

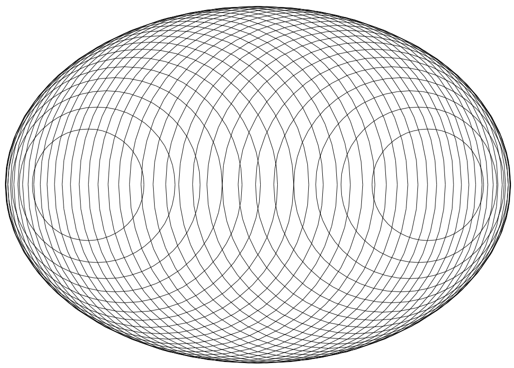
Exo.10) On se donne un cercle de rayon 1 dont le centre se trouve à l'origine O d'un repère orthonormal Oxy. Pour chaque abscisse p élément de $]-1, 1[$, on considère la corde de ce cercle parallèle à Oy située à cette abscisse. On note $C(p)$ le cercle dont cette corde est le diamètre.



a) Donner une équation du cercle C(p), ainsi qu'une représentation paramétrique de ce cercle sous la forme $t \in [0, 2\pi] \to \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, où x et y sont deux fonctions de t dépendant de p.

b) On considère le point de $C(p) \cap Ox$ ayant une abscisse supérieure à p et on note $a(p)$ son abcsisse. Déterminer le nombre M = Sup $\{a(p), p \in [0, 1[\}$.

c) Ci-dessous, on représente plusieurs cercles C(p) (le lecteur est obtenir un tel graphique par progammation). Ces cercles sont enveloppés par une courbe (Γ) qu'on cherche à déterminer. Par symétrie, on se limite au demi-plan $y \geq 0$ et on cherche (Γ) par son équation $y = f(x)$.



Pour chaque x élément de]– M, M[, et pour tout p élément de]–1, 1[, on note $y_p(x)$ l'ordonnée du point de C(p) ayant une abscisse x et une ordonnée positive si un tel point existe, sinon on pose $y_p(x) = 0$. Au vu du graphique, il semble naturel de définir :

$$f(x) = \text{Sup } \{y_p(x), p \in]-1, 1[\}.$$

Déterminer une expression de $f(x)$. Quelle est la nature de (Γ) ? Vérifier que, pour le f ainsi défini, et pour tout x_0 élément de]– M, M[, il existe un cercle C(p) tangent au point (x_0, $f(x_0)$) à la courbe $y = f(x)$. Quel intervalle décrit p lorsque x_0 varie ?

A titre indicatif, le jeune Albert Einstein a dû résoudre un énoncé analogue à la question c) lors de son examen du *Maturitätsprüfung* [équivalent du baccalauréat] en 1896, canton de Zurich.

Exo.11) On utilise les notations de la partie III, et on considère une force centrale de la forme $-\dfrac{K}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ s'appliquant depuis le Soleil S sur une planète P de masse m. On note r_0 la distance SP au périhélie (passage de la planète au plus proche du Soleil), et V_0 le module de la vitesse de la planète lors de ce passage. En utilisant la valeur de la constante des aires C calculée au périhélie ainsi que des expressions du paramètre p et de la vitesse $\boldsymbol{V}$ issues de ce paragraphe III, répondre aux questions suivantes :

a) Exprimer l'excentricité e de l'orbite elliptique en fonction de m, K, r_0, V_0.

b) Quelle doit être la vitesse V_0 au périhélie en fonction de K, m, r_0 pour que la trajectoire soit circulaire. On notera cette vitesse V_c.

c) Quelle doit être la vitesse V_0 au périhélie en fonction de K, m, r_0 pour que la trajectoire soit parabolique. On notera cette vitesse V_l (vitesse de libération). Quelle relation y a-t-il entre V_l et V_c, valide pour toute planète ?

d) Montrer que, si $V_0 > V_l$, la trajectoire est hyperbolique.

e) Montrer que, si $V_c < V_0 < V_l$, la trajectoire est elliptique.

f) Que se passe-t-il si $V_0 < V_c$?

Exo.12) Donner une équation réduite de la quadrique d'équation :

$$4xy - 4xz - y^2 + z^2 + x + 2y + 2z = 0$$

De quelle type de quadrique s'agit-il ?

Exo.13) Les résultats suivants (sauf le c) étaient connus d'Archimède. Voir le chapitre L2/INTMULT.PDF pour le calcul de volume.

a) Dans le plan, on considère le domaine parabolique égal à $\{(x, y), y \geq x^2, y \leq 1\}$ et le triangle égal à $\{(x, y\}, y \geq |x|, y \leq 1\}$. Montrer que l'aire du premier vaut $\frac{4}{3}$ l'aire du second.

b) Dans l'espace de dimension 3, on considère le domaine paraboloïdal égal à $\{(x, y, z), z \geq x^2 + y^2, z \leq 1\}$ et le domaine conique égal à $\{(x, y, z\}, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \ z \leq 1\}$. Montrer que le volume du domaine paraboïdal vaut $\frac{3}{2}$ le volume du domaine conique.

c) Généraliser les résultats ci-dessus à la dimension n.

d) On considère le domaine hyperboloïdal égal à $\{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq z^2 - 1, 1 \leq z \leq h + 1\}$ et le domaine conique égal à $\{(x, y, z\}, x^2 + y^2 \leq (z - 1)^2\ (1 + \frac{2}{h}), 1 \leq z \leq h + 1\}$, pour $h > 0$. Comment sont disposées ces deux parties l'une par rapport à l'autre ? Calculer le rapport du volume de l'hyperboloïde sur le volume du cône.

e) Mêmes questions pour la partie de sphère $\{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, - 1 \leq z \leq h - 1\}$ et la partie conique correspondante, pour $0 < h < 2$.

f) Mêmes questions pour la partie de paraboloïde $\{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq h\}$ et la partie conique correspondante, pour $h > 0$. Vérifier que le rapport calculé dans le e) est égal à la limite des rapports calculés en d) et en e) lorsque h tend vers 0.

Exo.14) Soit (E) l'ensemble $\{(x, y, z) \mid z^2 = y^3 \text{ et } z = xy\}$.

a) Déterminer toutes les droites parallèles au plan Oxz et ayant au moins deux points en commun avec (E).

b) Vérifier que la réunion de ces droites est une partie d'une quadrique dont on donnera la nature.

2- Solutions

Sol.1) On a $576 = 16 \times 36$. D'où les équations suivantes selon le quadrant dans lequel se trouve (x, y) :

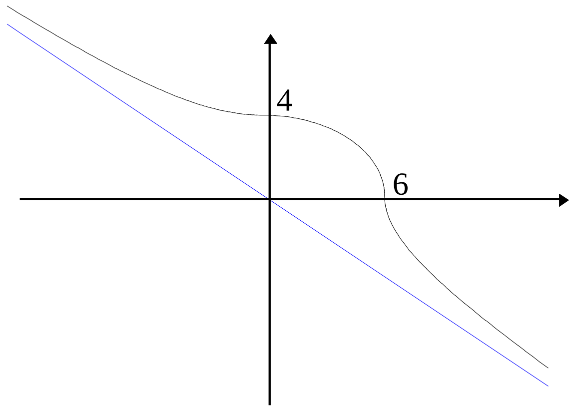
Pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$, quart d'ellipse de sommets (6, 0) et (0, 4).

Pour $x \geq 0$ et $y \leq 0$, $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$, quart d'hyperbole de sommet (6, 0) et d'asymptote $y = -\frac{2x}{3}$

Pour $x \leq 0$ et $y \geq 0$, $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = -1$, quart d'hyperbole de sommet (0, 4) et d'asymptote $y = -\frac{2x}{3}$

Pour $x < 0$ et $y < 0$, il n'y a pas de solution.

Ci-dessous le graphe de la courbe, avec son asymptote en bleu.



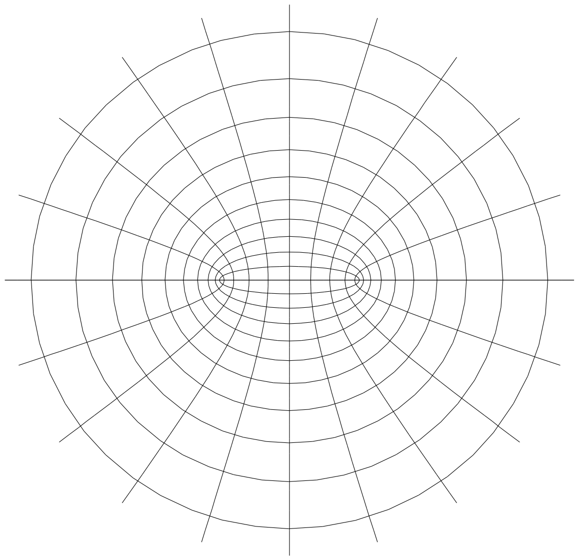
Sol.2) Si on prend $z = \mathrm{R}e^{i\theta}$ alors $f(\mathrm{R}e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(\mathrm{R}e^{i\theta} + \frac{1}{\mathrm{R}e^{i\theta}}) = \frac{1}{2}(\mathrm{R}e^{i\theta} + \frac{1}{\mathrm{R}}e^{-i\theta})$ de partie réelle et imaginaire respectives $x = \frac{1}{2}(\mathrm{R} + \frac{1}{\mathrm{R}})\cos(\theta)$ et $y = \frac{1}{2}(\mathrm{R} - \frac{1}{\mathrm{R}})\sin(\theta)$. Si on pose $\mathrm{R} = e^t$, $t \in \mathbf{R}$, on obtient :

$$x = \mathrm{ch}(t)\cos(\theta) \text{ et } y = \mathrm{sh}(t)\sin(\theta)$$

a) z décrit le cercle de centre O de rayon R en faisant varier θ, t étant fixé. $f(z)$ décrit l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a = \mathrm{ch}(t)$ et $b = |\mathrm{sh}(t)|$, avec le cas particulier $t = 0$ (correspondant à R = 1), pour lequel on obtient le segment $[-1, 1]$. Les cercles de rayon R et $\frac{1}{\mathrm{R}}$ ont même image.

b) z décrit la demi-droite partant de O et d'angle polaire θ en faisant varier t, θ étant fixé. Pour θ différent de 0 mod $\frac{\pi}{2}$, $f(z)$ décrit la branche d'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a = |\cos(\theta)|$, $b = |\sin(\theta)|$ et x du signe de $\cos(\theta)$. Pour $\theta = 0$ ou π, on obtient les demi-axes réels issus de O, et pour $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, on obtient l'axe imaginaire pur. Les droites d'angle θ et $-\theta$ ont même image.

On peut noter qu'en tout point, l'hyperbole et l'ellipse passant par ce point sont orthogonales. En effet, la tangente à l'hyperbole est donnée par la dérivée de $t \to \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t)\cos(\theta) \\ \mathrm{sh}(t)\sin(\theta) \end{pmatrix}$ et la tangente à l'ellipse est donnée par la dérivée de $\theta \to \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t)\cos(\theta) \\ \mathrm{sh}(t)\sin(\theta) \end{pmatrix}$ (voir L2/ARCPARAM.PDF). Ces deux dérivées valent respectivement $\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(t)\cos(\theta) \\ \mathrm{ch}(t)\sin(\theta) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\mathrm{ch}(t)\sin(\theta) \\ \mathrm{sh}(t)\cos(\theta) \end{pmatrix}$ et leur produit scalaire est nul.



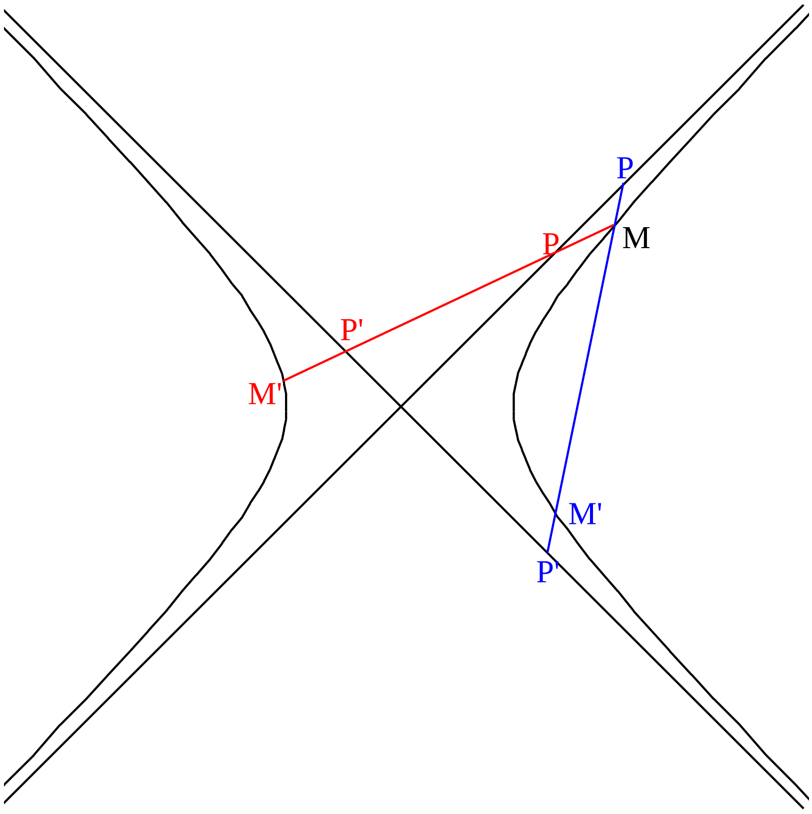
On retrouvera cette figure dans les exercices du chapitre L3/HOLOMRPH.PDF.
c) Les ellipses ont des foyers situés sur l'axe Ox, symétrique de O, à une distance 1. En effet :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\text{ch}^2(t) - \text{sh}^2(t)} = 1$$

Il en est de même pour les hyperboles. En effet, dans ce cas :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$$

Sol.3) Dans un repère bien choisi, (H) a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ses asymptotes $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. Le cas où (D) est parallèle à Oy est trivial. Sinon (D) est une droite d'équation $y = \alpha x + \beta$. Le calcul des coordonnées de (D) $\cap$ (H) conduit à l'équation du second degré $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(\alpha x + \beta)^2}{b^2} = 1$ dont la demi-somme des racines (abscisse du milieu de [MM']) fait intervenir le coefficient en x^2 et le coefficient en x, mais nullement le coefficient constant.
Le calcul du milieu de [PP'] conduira à l'équation du second degré $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(\alpha x + \beta)^2}{b^2} = 0$, identique à la précédente en dehors du terme constant, donc le calcul du milieu de [PP'] sera identique à celui de [MM'].
Si (D) est tangente à (H), alors le point de contact est le milieu de [PP']. Ce cas correspond au fait que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(\alpha x + \beta)^2}{b^2} = 1$ admet une racine double.
Pour construire l'hyperbole point par point connaissant un point M de l'hyperbole et ses asymptotes, tracer une droite quelconque (D) passant par M, coupant les asymptotes en P et P'. Déterminer le milieu de [PP'], puis le symétrique M' de M par rapport à ce milieu. Lorsque (D) varie, M' décrit l'hyperbole.



Sol.4) a) L'équation de la tangente est $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. Elle coupe les droites $x = -a$ et $x = a$ aux points d'ordonnée $y = \frac{b^2}{y_0}(1 + \frac{x_0}{a})$ de valeur absolue AP et $y = \frac{b^2}{y_0}(1 - \frac{x_0}{a})$ de valeur absolue A'P'. Donc :

$$\mathrm{AP} \times \mathrm{A'P'} = \frac{b^4}{y_0^2}(1 - \frac{x_0^2}{a^2}) = \frac{b^4}{y_0^2} \times \frac{y_0^2}{b^2} = b^2$$

b) Le cercle a pour centre Ω milieu de [PP'], donc de coordonnées $(0, \frac{b^2}{y_0})$. Son rayon vaut :

$$R = \Omega P = \Omega P' = \sqrt{a^2 + \frac{b^4 x_0^2}{y_0^2 a^2}} = \sqrt{a^2 + \frac{b^4}{y_0^2}(1 - \frac{y_0^2}{b^2})}$$

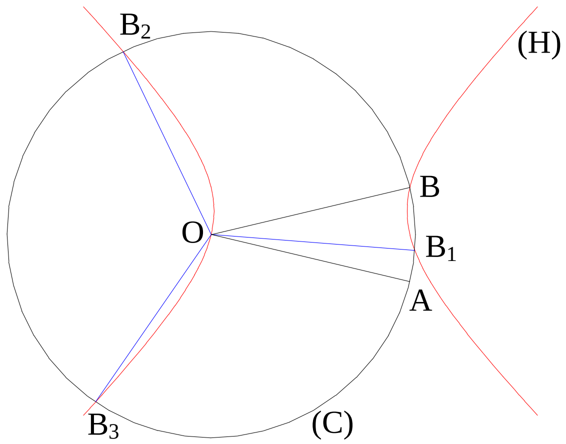
$$= \sqrt{a^2 + \frac{b^4}{y_0^2} - b^2}$$

$$= \sqrt{c^2 + \frac{b^4}{y_0^2}}$$ avec c distance des foyers au centre de l'ellipse

$$= \Omega F = \Omega F'$$

donc F et F' appartiennent au cercle.

Sol.5) Prenons un repère d'origine O et d'axe des abscisses la bissectrice de (***OA***, ***OB***). Par homothétie, on peut supposer que les unités de longueur sont telles que OB = 1 (ce qui simplifie les notations).



Soit alors t un réel tel que, dans ce repère :

$A = (\cos(t), -\sin(t))$

$B = (\cos(t), \sin(t))$

Le centre de l'hyperbole est $\Omega = (\dfrac{\cos(t)}{2}, \dfrac{\sin(t)}{2})$.

L'hyperbole (H) a pour équation :

$$(x - \frac{\cos(t)}{2})^2 - (y - \frac{\sin(t)}{2})^2 = \text{Cte}$$

La Cte est choisie de façon à ce que $B \in$ (H), ce qui donne :

$$\text{Cte} = \frac{\cos^2(t)}{4} - \frac{\sin^2(t)}{4}$$

L'équation de (H) est donc :

$$(x - \frac{\cos(t)}{2})^2 - (y - \frac{\sin(t)}{2})^2 = \frac{\cos^2(t)}{4} - \frac{\sin^2(t)}{4}$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x\cos(t) - y^2 + y\sin(t) = 0$

Cherchons les points de (C) $\cap$ (H) sous la forme $(x, y) = (\cos(u), \sin(u))$, d'inconnue u. On obtient :

$\cos^2(u) - \sin^2(u) - \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos(2u) = \cos(t + u)$

$\Leftrightarrow \quad 2u \equiv t + u \bmod 2\pi$ ou $2u \equiv - t - u \bmod 2\pi$

$\Leftrightarrow \quad u \equiv t \bmod 2\pi$ (qui donne le point B)

ou $3u \equiv - t \bmod 2\pi \Leftrightarrow 3(u + t) = 2t \bmod 2\pi$ qui répond à la question.

Sol.6) a) f étant un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire sur l'espace $\mathbb{C}$ de dimension finie sur $\mathbb{R}$, f est bijective si et seulement si f est injective. Il suffit de chercher son noyau. Or :

$Az + B\overline{z} = 0$

$\Rightarrow \quad \overline{B}z + \overline{A}\overline{z} = 0$

Le système obtenu, où l'on considère z et $\overline{z}$ comme inconnues, conduit à $z = \overline{z} = 0$ si son déterminant $|A|^2 - |B|^2$ est non nul, i.e. $|A| \neq |B|$.

Si $|A| = |B|$, écrivons l'équation $Az + B\overline{z} = 0$ sous la forme $Az = -B\overline{z}$, les deux membres étant alors de même module. Les deux membres sont égaux si et seulement s'ils ont même argument, si et seulement si $\arg(A) + \arg(z) \equiv \pi + \arg(B) - \arg(z) \mod 2\pi$ ce qui impose la valeur de $\arg(z) \mod \pi$ sans contrainte sur le module. Le noyau est alors une droite et f n'est pas injective.

Conclusion, f bijective $\Leftrightarrow |A| \neq |B|$.

b) L'image du cercle unité par f est une conique. En effet, soit u l'image de $z = e^{i\theta}$. Alors :

$$Az + B\bar{z} = u$$

$$\Rightarrow \quad \bar{B}z + \bar{A}\bar{z} = \bar{u}$$

donc, en considérant là aussi z et $\bar{z}$ comme solution d'un système, z et $\bar{z}$ peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire de u et $\bar{u}$. Donc $1 = |z|^2$ conduira à une équation du second degré au plus en les composantes de u, donc à une conique. L'image d'un fermé borné par une application continue en dimension finie étant un fermé borné, cette conique ne peut être qu'une ellipse. Par ailleurs, f étant impaire, l'image est symétrique par rapport à 0 qui est donc le centre de l'ellipse. On obtient la longueur des axes en cherchant le maximum et le minimum de $|u|$. En multipliant membre à membre les deux égalités précédentes, on obtient :

$$|u|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2\mathrm{Re}(A\bar{B}z^2)$$

Si $z = e^{i\theta}$ et si $\psi = \arg(A) - \arg(B)$, on obtient :

$$|u|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B| \cos(\psi + 2\theta)$$

Donc, lorsque θ varie, $|u|$ varie entre $b = \big||A| - |B|\big|$ et $a = |A| + |B|$. La distance focale est donnée par $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{|A||B|}$.

L'argument des affixes w des foyers est égal à l'argument des sommets sur le grand axe, obtenu lorsque $\psi + 2\theta = 0$, soit $\theta = -\dfrac{\psi}{2} = \dfrac{\arg(B) - \arg(A)}{2} \mod \pi$. Un tel sommet a pour affixe :

$$u = Az + B\bar{z} = \pm (|A| + |B|) \exp(i\,\frac{\arg(A) + \arg(B)}{2})$$

Donc $w = \pm\, 2 \sqrt{|A||B|} \exp(i\,\dfrac{\arg(A) + \arg(B)}{2})$ soit $w^2 = 4|A||B|\exp(i\,(\arg(A) + \arg(B)) = 4AB$.

Sol.7) a) On a $x^2 = y - \dfrac{1}{4}$ du type $X^2 = 2hY$ avec $X = x$, $Y = y - \dfrac{1}{4}$ et $2h = 1$, où h est le paramètre de la parabole. On a donc $h = \dfrac{1}{2}$. Le foyer se trouve à une distance $\dfrac{h}{2} = \dfrac{1}{4}$ du sommet $(0, \dfrac{1}{4})$, dans le domaine convexe limité par la parabole, donc ses coordonnées sont $(0, \dfrac{1}{2})$. La directrice est à une distance $\dfrac{h}{2}$ du même sommet, mais extérieure au domaine convexe, donc son équation est $y = 0$.

b) Considérons une tangente à la parabole issue de M et soit $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ son vecteur directeur, dirigé de M vers le point de contact de la tangente avec la parabole. Une droite passant par M a pour représentation paramétrique $\left[\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\cos(\theta) \\ y = y_0 + \lambda\sin(\theta) \end{array}\right.$. En un point commun entre la droite et la parabole, ces coordonnées vérifient également l'équation de la parabole. L'équation vérifiée par λ est donc :

$$y_0 + \lambda\sin(\theta) = (x_0 + \lambda\cos(\theta))^2 + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2(\theta)\lambda^2 + (2x_0\cos(\theta) - \sin(\theta))\lambda + x_0^2 - y_0 + \frac{1}{4} = 0$$

Il s'agit d'une tangente si et seulement si la racine est double donc si et seulement si le discriminant est nul, ce qui donne :

$$(2x_0\cos(\theta) - \sin(\theta))^2 - 4\cos^2(\theta)(x_0^2 - y_0 + \frac{1}{4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2(\theta) - 4x_0\cos(\theta)\sin(\theta) + 4\cos^2(\theta)y_0 - \cos^2(\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos(2\theta) - 2x_0\sin(2\theta) + 2(1 + \cos(2\theta))y_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 2y_0)\cos(2\theta) + 2x_0\sin(2\theta) = 2y_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - 2y_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}}\cos(2\theta) + \frac{2x_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}}\sin(2\theta) = \frac{2y_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}}$$

(le dénominateur est non nul car le seul point où il s'annule est $(x_0, y_0) = (0, \frac{1}{2})$ est le foyer, qui est dans le domaine convexe limité par la parabole).

$$\Leftrightarrow \quad \cos(2\theta - \varphi) = \frac{2y_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}}$$

$$\text{avec } \cos(\varphi) = \frac{1 - 2y_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}} \text{ et } \sin(\varphi) = \frac{2x_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}}$$

On obtient $2\theta - \varphi = \pm \arccos(\frac{2y_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}}) \bmod 2\pi$. Cette quantité est bien définie si et seulement si $\left|\frac{2y_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}}\right| \leq 1 \Leftrightarrow 4y_0^2 \leq (1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2 \Leftrightarrow y_0 \leq x_0^2 + \frac{1}{4}$ ce qui correspond au fait que M n'appartient pas au domaine convexe limité par la parabole. On a alors en général deux valeurs possibles de θ :

$$\theta_1 = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\arccos(\frac{2y_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}}) \bmod \pi$$

et $$\theta_2 = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\arccos(\frac{2y_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}}) \bmod \pi$$

La différence entre ces deux angles est l'angle α cherché :

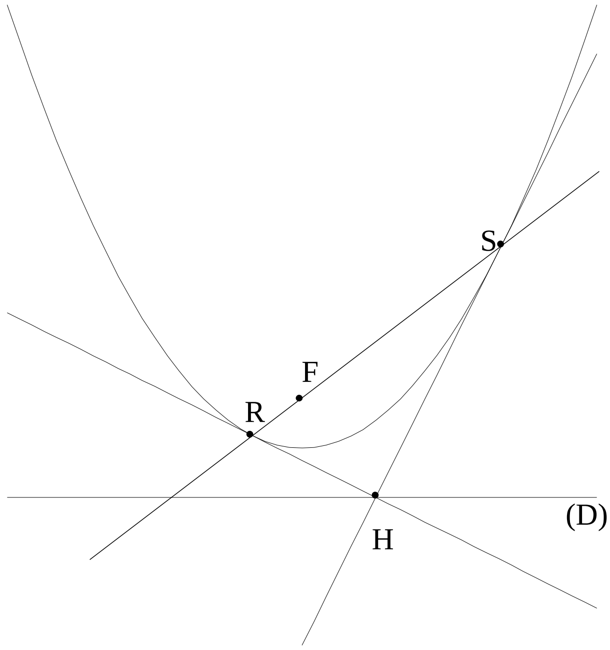
$$\alpha = \arccos(\frac{2y_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}}) \bmod \pi$$

Par ailleurs, en reprenant l'équation vérifiée par λ, la racine double λ est positive ou nulle si et seulement si $2x_0\cos(\theta) - \sin(\theta) \leq 0$, ce qui signifie que $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ appartient au demi-plan d'équation $2x_0X - Y \leq 0$. Les valeurs possibles θ_1 et θ_2 de θ appartiennent donc au même intervalle de longueur π, donc $\alpha \in [0, \pi]$. On a donc simplement :

$$\alpha = \arccos(\frac{2y_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}})$$

Si M appartient à la parabole, les deux tangentes sont confondues. Cela correspond au cas limite $\left|\frac{2y_0}{\sqrt{(1 - 2y_0)^2 + 4x_0^2}}\right| = 1$, $\alpha = 0$ ou π. Dans la suite, noux excluons ce cas.

c) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ correspond au cas $y_0 = 0$. On obtient comme lieu de M la directrice de la parabole. On pourra vérifier que, dans ce cas, les points de contact des tangentes avec la parabole sont alignés avec le foyer F.



Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\cos(\alpha) = \frac{2y_0}{\sqrt{(1-2y_0)^2 + 4x_0^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2(\alpha) = \frac{4y_0^2}{1 - 4y_0 + 4y_0^2 + 4x_0^2} \quad \text{et } \cos(\alpha) \text{ est du même signe que } y_0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4y_0^2\sin^2(\alpha) + 4y_0\cos^2(\alpha) - 4x_0^2\cos^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) \quad \text{et } \cos(\alpha)\, y_0 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2(\alpha)\left(y_0 + \frac{1}{2\tan^2(\alpha)}\right)^2 - 4x_0^2\cos^2(\alpha) = \frac{1}{\tan^2(\alpha)} \quad \text{et } \cos(\alpha)\, y_0 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4\sin^4(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\left(y_0 + \frac{1}{2\tan^2(\alpha)}\right)^2 - 4x_0^2\sin^2(\alpha) = 1 \quad \text{et } \cos(\alpha)\, y_0 > 0$$

L'ensemble des points (x_0, y_0) vérifiant cette équation est une branche d'une hyperbole dont le centre est $(0, -\frac{1}{2\tan^2(\alpha)})$, d'axe focal O$y$. On a $a = \frac{|\cos(\alpha)|}{2\sin^2(\alpha)}$, $b = \frac{1}{2\sin(\alpha)}$, $c = \frac{1}{2\sin^2(\alpha)}$. L'excentricité est $e = \frac{1}{|\cos(\alpha)|}$. Les valeurs α et $\pi - \alpha$ donnent le même centre et la même valeur de a, b, c, e, et correspondent aux deux branches d'une même hyperbole.

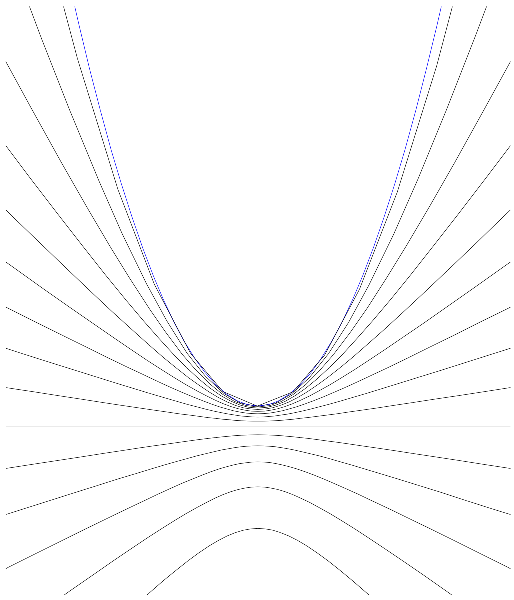
Le foyer supérieur a pour ordonnée $\frac{1}{2\sin^2(\alpha)} - \frac{1}{2\tan^2(\alpha)} = \frac{1}{2}$. Il s'agit du foyer de la parabole, et ceci pour tout α.

Vérifions que les hyperboles ont également même directrice que la parabole. Le sommet supérieur a pour coordonnées $\dfrac{|\cos(\alpha)|}{2\sin^2(\alpha)} - \dfrac{1}{2\tan^2(\alpha)}$. Sa distance au foyer est :

$$\frac{1}{2} - \frac{|\cos(\alpha)|}{2\sin^2(\alpha)} + \frac{1}{2\tan^2(\alpha)} = \frac{1 - |\cos(\alpha)|}{2\sin^2(\alpha)}$$

Sa distance à la directrice est $\dfrac{1 - |\cos(\alpha)|}{2\sin^2(\alpha)} \times \dfrac{1}{e} = \dfrac{|\cos(\alpha)| - \cos(\alpha)^2}{2\sin^2(\alpha)}$.

La distance entre le foyer et la directrice est $\dfrac{1 - |\cos(\alpha)|}{2\sin^2(\alpha)} + \dfrac{|\cos(\alpha)| - \cos(\alpha)^2}{2\sin^2(\alpha)} = \dfrac{1}{2}$, indépendante de α. La directrice de toutes les hyperboles est donc bien la même que la directrice de la parabole. Les lignes de niveaux de la fonction α sont donc les branches d'hyperbole de foyer et de directrice donnés.



Sol.8) Cherchons d'abord l'image d'un point M quelconques de coordonnées (x, y, z) de l'espace par cette projection. le vecteur $\boldsymbol{n}$ de composantes ($\sin(\theta)$, 0, $-\cos(\theta)$) est normal au plan de projection et unitaire. Le point H projeté de M est tel que $\boldsymbol{HM} = \langle \boldsymbol{OM}, \boldsymbol{n} \rangle\, \boldsymbol{n}$. Si ($x'$, y', z') sont les coordonnées de H, on a donc :

$$\begin{cases} x - x' = (x\sin(\theta) - z\cos(\theta))\sin(\theta) \\ y - y' = 0 \\ z - z' = -(x\sin(\theta) - z\cos(\theta))\cos(\theta) \end{cases}$$

soit : $\begin{cases} x' = x - (x\sin(\theta) - z\cos(\theta))\sin(\theta) \\ y' = y \\ z' = z + (x\sin(\theta) - z\cos(\theta))\cos(\theta) \end{cases}$

Pour M élément du cercle, on a $z = 0$, donc son image H vérifie $\begin{cases} x' = x - x\sin^2(\theta) = x\cos^2(\theta) \\ y' = y \\ z' = x\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$.

Considérons le repère orthonormée du plan de projection (O, $\cos(\theta)\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}$) = (O, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$). On a :

$\boldsymbol{OH} = x\cos^2(\theta)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + x\sin(\theta)\cos(\theta)\boldsymbol{k} = x\cos(\theta)\boldsymbol{I} + y\boldsymbol{J} = \mathrm{X}\boldsymbol{I} + \mathrm{Y}\boldsymbol{J}$

avec X = $x\cos(\theta)$, Y = y. On a $x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{X}^2}{\cos^2(\theta)} + \mathrm{Y}^2 = \mathrm{R}^2$.

Il s'agit d'une ellipse de demi-axes $\mathrm{R}\cos(\theta)$ et R.

Sol.9) a) M = $(t, t^2 + y_0, 0)$ étant un point quelconque de la parabole, la génératrice passant par ce point et par Ω a pour représentation paramétrique :

$$\lambda \mathrm{M} + (1-\lambda)\Omega = \begin{pmatrix} \lambda t \\ \lambda(t^2 + y_0) - (1-\lambda) \\ 1-\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Quand λ et t varient, on obtient des points (x, y, z) du cône :

$$\begin{cases} x = \lambda t \\ y = \lambda(t^2 + y_0 + 1) - 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - z \\ t = \dfrac{x}{1-z} \\ y = (1-z)(\dfrac{x^2}{(1-z)^2} + y_0 + 1) - 1 \end{cases}$$

On obtient l'équation $(1 - z)y = x^2 + (1 - z)^2(y_0 + 1) + z - 1$. Le cas particulier $z = 1$, $x = 0$ donne la seule génératrice du cône, parallèle à Oxy (et à l'axe de la parabole), qui ne coupe pas la parabole. Elle est obtenue comme cas limite quand t tend vers l'infini et $\lambda = \dfrac{\mathrm{Cte}}{t^2}$. A noter que, réciproquement, si on se donne l'équation $(1 - z)y = x^2 + (1 - z)^2(y_0 + 1) + z - 1$, on peut obtenir son équation réduite de la façon suivante. Prenons Ω comme nouvelle origine du repère. En remplaçant $z - 1$ par z, et $y + 1$ par y, on obtient comme nouvelle équation :

$$x^2 + z^2(y_0 + 1) + zy = 0$$

La forme quadratique associée a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & y_0 + 1 \end{pmatrix}$, dont on pourra vérifier que deux valeurs propres sont positives et une est négative. Puisqu'il n'y a pas de terme constant, l'équation réduite sera bien celle d'un cône.

b) Pour $y = 0$, on obtient $x^2 + (1 - z)^2(y_0 + 1) + z - 1 = 0$. La nature de la conique dépend du signe du coefficient de z^2. Si $y_0 + 1 > 0$, c'est une ellipse. Pour $y_0 + 1 = 0$, c'est une parabole. Pour $y_0 + 1 < 0$, c'est une hyperbole. Ainsi, selon que le sommet $(0, y_0, 0)$ de la parabole est devant Ω dans la direction Oy, ou bien au niveau de Ω, ou bien derrière Ω, la parabole se projette sur le plan vertical en une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Sol.10) a) La demi-longueur de la corde est $\sqrt{1-p^2}$. C'est le rayon du cercle C(p), dont le centre est $(p, 0)$. L'équation cherchée est donc $(x - p)^2 + y^2 = 1 - p^2$, ou bien :

$$x(t) = p + \sqrt{1-p^2}\cos(t)$$
$$y(t) = \sqrt{1-p^2}\sin(t)$$

b) $a(p) = p + \sqrt{1-p^2}$ (obtenu pour $t = 0$ ci-dessus). Il suffit d'étudier la fonction a. Sa dérivée a le même signe que $1 - \dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}$ ou que $\sqrt{1-p^2} - p$. Pour $p \geq 0$, elle est positive si et seulement si

$1 - p^2 > p^2$ soit $p < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, lorsque p varie de 0 à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, a croît de 1 à $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, puis lorsque p croît de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 1, a décroît de $\sqrt{2}$ à 1. La borne supérieure cherchée, qui est un maximum est $\sqrt{2}$.

c) Comme l'équation de $C(p)$ est $(x - p)^2 + y^2 = 1 - p^2$, on a $y_p = \sqrt{1 - p^2 - (x - p)^2}$ ou encore $y_p = \sqrt{1 - x^2 + 2xp - 2p^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - 2(p - \frac{x}{2})^2}$ pour les p tels que $\left|p - \frac{x}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$, sinon $y_p = 0$. y_p est maximal quand $p = \frac{x}{2}$ et $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$. L'équation de (Γ) est $y^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$. Il s'agit d'une ellipse de demi-axes 1 et $\sqrt{2}$.

Plaçons-nous à l'abscisse x_0. Pour $p = \frac{x_0}{2}$, on a $y_p(x_0) = f(x_0) = \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{2}}$. Vérifions que les tangentes au point d'abcisse x_0 à $C(p)$ et à la courbe (Γ) sont les mêmes.

La tangente à la courbe (Γ) en x_0 a pour pente $f'(x_0) = -\dfrac{x_0}{2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{2}}}$.

La tangente à $C(p)$ a pour pente $\dfrac{dy_p}{dx}(x_0) = \dfrac{-x_0 + p}{y_p(x_0)} = -\dfrac{x_0}{2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{2}}} = f'(x_0)$

Le cercle $C(p)$ est bien tangent à la courbe.

Puisque $-\sqrt{2} < x_0 < \sqrt{2}$, on a $-\frac{1}{\sqrt{2}} < p < \frac{1}{\sqrt{2}}$. En dehors de ces valeurs, les cercles $C(p)$ sont ceux situés "à l'intérieur" de la figure. Ils sont trop petits pour toucher le graphe de f.

Sol.11) a) Au périhélie, r passe par le minimum r_0 donc sa dérivée $\dot{r}$ s'annule en ce point. Donc, au périhélie :

$$\boldsymbol{V} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta = r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

donc $\quad V_0 = r_0\dot{\theta}$

donc la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$, calculée au périhélie, vaut $C = r_0V_0$.

On a également :

$$\boldsymbol{V} = \frac{K}{L^2}\boldsymbol{L} \wedge (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}_r)$$

où $\boldsymbol{e} = e\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}$ étant le vecteur unitaire dirigeant l'axe faisant un angle θ_0 avec l'axe origine des angles, et θ_0 est le terme intervenant dans l'équation de l'ellipse $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$. Le périhélie correspond justement à la valeur $\theta = \theta_0$, ce qui signifie que $\boldsymbol{u}$ est le vecteur unitaire dirigé du Soleil S vers le périhélie. Lorsque P passe au périhélie, on a donc $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{u}$ et, en prenant e module de $\boldsymbol{V}$:

$$V_0 = \frac{K}{L^2} \times L(e + 1) = \frac{K}{L}(e + 1) = \frac{K}{mC}(e + 1)$$

donc $\quad e + 1 = \dfrac{m}{K}CV_0 = \dfrac{m}{K}r_0V_0^2$

b) La trajectoire est circulaire $\Leftrightarrow e = 0 \Leftrightarrow V_0 = \sqrt{\dfrac{K}{mr_0}}$ notée V_c

c) La trajectoire est parabolique $\Leftrightarrow e = 1 \Leftrightarrow V_0 = \sqrt{\dfrac{2K}{mr_0}}$ notée V_l. On a donc $V_l = \sqrt{2}\, V_c$.

d) Pour $V_0 > V_l$, $e + 1 > 2$ donc $e > 1$. La trajectoire est hyperbolique.

e) Pour $V_c < V_0 < V_l$, $1 < e + 1 < 2$ donc $0 < e < 1$. La trajectoire est elliptique.

f) Pour $0 < V_0 < V_c$, $0 < e + 1 < 1$ donc $-1 < e < 0$. Il convient d'inverser le vecteur $\boldsymbol{u}$ pour se ramener à une valeur positive de e. On a une trajectoire elliptique, mais le point (r_0, θ_0) est l'aphélie.

Sol.12) La forme quadratique vaut $4xy - 4xz - y^2 + z^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres λ sont :

$\lambda = 0$ de vecteur propre $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ de vecteur propre $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda = -3$ de vecteur propre $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dans le nouveau repère constitué des vecteurs propres ci-dessus, la nouvelle matrice de la forme quadratique est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, avec comme matrice de passage orthogonale $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, de sorte que $M = PDP^{-1} = PDP^{T}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, où X, Y et Z désignent les composantes dans la nouvelle base. La partie quadratique devient donc $3Y^2 - 3Z^2$. La partie linéaire vaut $x + 2y + 2z = 3X$ d'où l'équation $Y^2 - Z^2 + X = 0$ dans la nouvelle base. Il s'agit d'un paraboloïde hyperbolique.

Sol.13) a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 1 - x^2 \,dx = \frac{4}{3}$ alors que $\displaystyle\int_{-1}^{1} 1 - |x| \,dx = 1$

b) On découpe les volumes en tranches de hauteur z, d'épaisseur dz, l'aire de la section étant πz pour le paraboloïde et πz^2 pour le cône. On obtient les volumes respectifs suivants :

$\displaystyle\int_{0}^{1} \pi z \,dz = \frac{\pi}{2}$ alors que $\displaystyle\int_{0}^{1} \pi z^2 \,dz = \frac{\pi}{3}$

c) On compare $\{(x_1, ..., x_n),\ 1 \geq x_n \geq x_1^2 + ... + x_{n-1}^2\}$ et $\{(x_1, ..., x_n),\ 1 \geq x_n \geq \sqrt{x_1^2 + ... + x_{n-1}^2}\}$. Dans le premier cas, on calcule :

$\displaystyle\int_{0}^{1} V(\sqrt{x_n}) \,dx_n$ et dans le second $\displaystyle\int_{0}^{1} V(x_n) \,dx_n$

où $V(r)$ est la mesure de la boule en dimension $n - 1$ de rayon r. Celle-ci vaut $r^{n-1}\, V(1)$ (peu importe ce que vaut $V(1)$). On obtient donc respectivement :

$$V(1) \int_0^1 x_n^{(n-1)/2}\, dx_n = \frac{2V(1)}{n+1} \qquad \text{et} \qquad V(1) \int_0^1 x_n^{n-1}\, dx_n = \frac{V(1)}{n}$$

Le quotient des deux volumes est donc $\frac{2n}{n+1} = \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \ldots$

d) Le sommet du cône est le sommet de l'hyperboloïde et les deux cercles finissant sont les mêmes. Les deux volumes ont même hauteur h. On les découpent en tranche de hauteur z et d'épaisseur dz :

$$V_{\text{Hyp}} = \int_1^{h+1} \pi(z^2 - 1)\, dz = \pi(\frac{(h+1)^3 - 1}{3} - h) = \pi\, \frac{h^3 + 3h^2}{3}$$

$$V_{\text{Cone}} = \int_1^{h+1} \pi(z-1)^2 \left(1 + \frac{2}{h}\right) dz = \pi\, \frac{h^3}{3} \left(1 + \frac{2}{h}\right) = \pi\, \frac{h^3 + 2h^2}{3}$$

donc $\frac{V_{\text{Hyp}}}{V_{\text{Cone}}} = \frac{3+h}{2+h}$

e) La partie de cône est égale à $\{(x, y, z\}, x^2 + y^2 \leq (z+1)^2 \left(\frac{2}{h} - 1\right), -1 \leq z \leq h - 1\}$.

$$V_{\text{Sph}} = \int_{-1}^{h-1} \pi(1 - z^2)\, dz = \pi(h - \frac{(h-1)^3 + 1}{3}) = \pi\, \frac{3h^2 - h^3}{3}$$

$$V_{\text{Cone}} = \int_{-1}^{h-1} \pi(z+1)^2 \left(\frac{2}{h} - 1\right) dz = \pi\, \frac{h^3}{3} \left(\frac{2}{h} - 1\right) = \pi\, \frac{2h^2 - h^3}{3}$$

donc $\frac{V_{\text{Sph}}}{V_{\text{Cone}}} = \frac{3-h}{2-h}$

f) La partie de cône est égale à $\{(x, y, z\}, x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{h}, 0 \leq z \leq h\}$.

$$V_{\text{Para}} = \int_0^h \pi z\, dz = \frac{\pi h^2}{2}$$

$$V_{\text{Cone}} = \int_0^h \frac{\pi z^2}{h}\, dz = \frac{\pi h^3}{3}$$

donc $\frac{V_P}{V_C} = \frac{3}{2}$

Sol.14) L'ensemble (E) est constitué des points suivants :

Si $y = 0$, alors $z = 0$ et x est quelconque, il s'agit d'une droite (D)

Si $y \neq 0$, $\left[\begin{array}{l} z^2 = y^3 \\ z = xy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = y^3 \\ z = xy \\ z^2 = x^2y^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = y^3 \\ z = xy \\ y^3 = x^2y^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = x^3 \\ y = x^2 \end{array}\right.$. Il s'agit d'une courbe (C°, privé de l'origine.

a) Si une droite est parallèle au plan Oxz, les ordonnées de ces points sont constantes.

Si cette ordonnée est nulle, elle aura deux points communs avec (E) si et seulement si il s'agit de la droite (D).

Si cette ordonnée est non nulle, la droite aura deux points communs avec (E) si et seulement si elle rencontre la courbe (C) en les deux points (x, x^2, x^3) et $(-x, x^2, -x^3)$, $x \neq 0$. Une représentation paramétrique de cette droite est, pour $x > 0$, $\begin{cases} X = tx \\ Y = x^2 \\ Z = tx^3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, ou encore, en remplaçant tx par u : $\begin{cases} X = u \\ Y = x^2 \\ Z = ux^2 \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$. Dans cette dernière représentation, pour $x = 0$, on retrouve la droite (D).

Ainsi, les droites cherchées ont pour représentation paramétrique $\begin{cases} X = u \\ Y = x^2 \\ Z = ux^2 \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$, x décrivant $[0, +\infty[$.

b) On a alors $Z = XY$, $Y \geq 0$. Réciproquement, si $Z = XY$ avec $Y \geq 0$, on prend $x = \sqrt{Y}$ et $u = X$ et on retrouve la représentation précédente. On a aussi $Z = \frac{(X + Y)^2}{4} - \frac{(X - Y)^2}{4}$, ce qui montre que la surface est la moitié (en raison du signe de Y) d'un paraboloïde hyperbolique.

◆