DIAGONALISATION

Plan

I : Polynômes d'endomorphisme

1- Sous-espaces stables

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par u si $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$. La restriction $u|_{\mathrm{F}}$ de l'endomorphisme u à F définit alors un endomorphisme de F, appelé endomorphisme sur F **induit** par u.

On rencontre usuellement les cas suivants en dimension finie :

❑ Soit F stable par u. Si on choisit une base de F que l'on complète en une base de E, la matrice de u a la forme suivante $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{O} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$ où A est une matrice carrée de dimension la dimension de F, O une matrice nulle, B et C des matrices quelconques.

❑ Plus généralement, $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_p = E$ suite croissante de sous-espaces vectoriels stables pqr u, donne, dans une base adaptée, une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & ... & * \\ O & A_2 & ... & * \\ ... & & ... & \\ O & O & ... & A_p \end{pmatrix}$$

La matrice est dite triangulaire par blocs.

❑ En particulier si $\dim F_i = i$, la matrice est triangulaire :

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & ... & * \\ 0 & a_2 & ... & * \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & a_p \end{pmatrix}$$

On dit que l'endomorphisme est **trigonalisable**.

❑ $E = F \oplus G$ avec F et G stables par u :
La matrice de u dans une base de E obtenue en réunissant une base de F et une base de G est alors de la forme $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$. L'intérêt est de scinder l'étude d'une application linéaire en deux études sur deux sous-espaces plus petits, et peut-être plus maniables.

❑ Plus généralement, si $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$, avec tous les E_i stables par u, alors la matrice de u dans une base adaptée est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & O & ... & O \\ O & A_2 & ... & O \\ ... & & ... & \\ O & O & ... & A_p \end{pmatrix}.$$

Inversement, un endomorphisme ayant cette matrice stabilise chacun des E_i. La matrice est dite diagonale par blocs.

❑ L'idéal est d'obtenir une matrice diagonale, pour laquelle $u_{|E_i}$ est une homothétie. On dit que l'endomorphisme est **diagonalisable**, de matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & a_p \end{pmatrix}.$$

(les a_i étant distincts ou non).

On dispose de la proposition suivante, permettant parfois d'obtenir des sous-espaces vectoriels stables par u :

PROPOSITION
Soit v un endomorphisme de E commutant avec l'endomorphisme u. Alors $\mathrm{Ker}(v)$ *et* $\mathrm{Im}(v)$ *sont stables par u.*

Démonstration :
❑ $x \in \mathrm{Ker}(v) \Rightarrow v(x) = 0 \Rightarrow u(v(x)) = 0 = v(u(x)) \Rightarrow u(x) \in \mathrm{Ker}(v)$

❑ $x \in \mathrm{Im}(v) \Rightarrow \exists\, z,\ x = v(z) \Rightarrow \exists\, z,\ u(x) = u(v(z)) = v(u(z)) \Rightarrow u(x) \in \mathrm{Im}(v)$

Pour trouver des sous-espaces stables par u, il suffit donc de trouver des endomorphismes v commutant avec u. La difficulté est de trouver un tel v qui ne soit pas injectif ou surjectif, pour éviter les exemples triviaux $\{0\}$ et E de sous-espace vectoriel stable.
Comme endomorphisme commutant avec u, il y a par exemple u lui-même, mais aussi u^2, u^3, ... et leurs combinaisons linéaires $\sum_{i\geq 0} a_i\, u^i$. On est ainsi amené à introduire les polynômes d'endomorphisme, étudiés un peu plus loin.

2- Matrices par blocs

On a vu apparaître ci-dessus des matrices par blocs. Nous donnons ci-dessous un exemple de produit de matrices par blocs : il suffit pour cela de réfléchir à ce qu'est la définition du produit de deux matrices, l'ordre dans lequel se font les choses, les dimensions de chaque bloc pour rendre possible les produits :

A est une matrice $p \times q$ E est une matrice $q \times t$
B est une matrice $p \times r$ F est une matrice $q \times u$
C est une matrice $s \times q$ G est une matrice $r \times t$
D est une matrice $s \times r$ H est une matrice $r \times u$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \mathrm{G} & \mathrm{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{AE+BG} & \mathrm{AF+BH} \\ \mathrm{CE+DG} & \mathrm{CF+DH} \end{pmatrix}$$

avec AE+BG matrice $p \times t$
AF+BH matrice $p \times u$
CE+DG matrice $s \times t$
CF+DH matrice $s \times u$

Signalons le calcul des déterminants triangulaires (ou diagonaux par blocs) :
Soit D = $\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \mathrm{O}_{n-p,p} & \mathrm{B} \end{vmatrix}$ où A est une matrice carrée $p \times p$, B une matrice carrée $(n-p) \times (n-p)$, C une matrice $p \times (n-p)$ et $\mathrm{O}_{n-p,p}$ la matrice nulle à $n-p$ lignes et p colonnes. Montrons par récurrence sur p que D = det(A) $\times$ det(B).
Si $p = 1$, le développement par rapport à la première colonne donne le résultat. Supposons le résultat vrai au rang $p - 1$ et montrons-le au rang p. Le développement par rapport à la première colonne donne :

$$\mathrm{D} = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1}\, a_{i1}\, \mathrm{M}_{i1}$$

où M_{i1} est le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne 1 du déterminant complet. Il n'est autre que $\begin{vmatrix} \mathrm{A}_{i1} & \mathrm{C}_i \\ \mathrm{O}_{n-p,p-1} & \mathrm{B} \end{vmatrix}$ où A_{i1} est la matrice A dont on a supprimé la ligne i et la colonne 1 et C_i est la matrice C dont on a supprimé la ligne i. L'hypothèse de récurrence donne :

$$\mathrm{M}_{i1} = \det(\mathrm{A}_{i1})\ \det(\mathrm{B})$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{D} = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1}\, a_{i1} \det(\mathrm{A}_{i1}) \det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{B})$$

puisque $\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} a_{i1} \det(A_{i1})$ n'est autre que le développement de det(A) par rapport à sa première colonne.

Plus généralement, on aura :

$$\begin{vmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ O & A_2 & \dots & * \\ \dots & & \dots & \\ O & O & \dots & A_n \end{vmatrix} = \det(A_1)\dots\det(A_n)$$

où les A_i sont des blocs carrés sur la diagonale, les $*$ désignent des blocs de termes quelconques et les O désignent des blocs nuls. Cela se montre par récurrence sur n.

3- Polynômes d'endomorphisme

Soit P un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[X]$ et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Si $P = \sum_i a_i X^i$, on pose $P(u) = \sum_i a_i u^i$ avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$. On définit de même $P(M) = \sum_i a_i M^i$ pour une matrice carrée M, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $M^0 = I_n$.

On vérifie que les applications $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[X] \to L(E)$, qui à P associe P(M) ou P(u), sont compatibles avec les opérations dans chaque espace. Ainsi, en notant :

$+$, $.$ et $\times$ la somme de polynômes, le produit par un scalaire et le produit de polynômes,

$+$, $.$ et $\times$ le produit de matrices,

et $+$, $.$, et $\circ$ la somme d'endomorphismes, le produit par un scalaire et le produit de composition des endomorphismes, nous avons :

$(P + Q)(M) = P(M) + Q(M)$ $\qquad$ $(P + Q)(u) = P(u) + Q(u)$

$(\lambda.P)(M) = \lambda.P(M)$ $\qquad$ $(\lambda.P)(u) = \lambda.P(u)$

$(P \times Q)(M) = P(M) \times Q(M)$ $\qquad$ $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou tout $u \in L(E)$, on dit que les fonctions $P \in \mathbb{K}[X] \to P(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X] \to P(u) \in L(E)$ sont des **morphismes d'algèbres**.

En effet, si $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_i b_i X^i$, alors $P + Q = \sum_i (a_i + b_i) X^i$, $\lambda.P = \sum_i \lambda a_i X^i$ et $P \times Q = \sum_m \sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i} X^m$. De sorte que :

$$(P + Q)(M) = \sum_i (a_i + b_i) M^i = \sum_i a_i M^i + \sum_i b_i M^i = P(M) + Q(M)$$

$$(\lambda.P)(M) = \sum_i \lambda a_i M^i = \lambda.\sum_i a_i M^i = \lambda.P(M)$$

$(P \times Q)(M) = \sum_m \sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i} M^m = \sum_i a_i M^i \times \sum_j b_j M^j$ en développant le membre de droite et en regroupant les termes M^{i+j} tels que $i + j = m$. Les formules sont identiques pour les endomorphismes, sauf que le produit des endomorphismes est noté $\circ$. Dans ce dernier cas, on a donc :

$$(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$$

ou, plus brièvement :

$$\boxed{(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)}$$

ou encore, pour tout x de E :

$$\boxed{(PQ)(u)(x) = (P(u) \circ Q(u))(x) = P(u)(Q(u)(x))}$$

En particulier, on a $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ puisque PQ = QP.

Comme, pour tout polynôme P, $P(u)$ commute avec u, on en déduit que, pour tout polynôme P, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

Malheureusement, si on prend n'importe quel polynôme P, il y a toutes les chances que l'on obtienne des sous-espaces stables triviaux, à savoir $\mathrm{Im}(P(u)) = E$ et $\mathrm{Ker}(P(u)) = \{0\}$ ou l'inverse. Le cas $\mathrm{Im}(P(u)) = E$ et $\mathrm{Ker}(P(u)) = \{0\}$ s'obtient lorsque $P(u)$ est un endomorphisme inversible. Le cas $\mathrm{Im}(P(u)) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(P(u)) = E$ s'obtient lorsque $P(u) = 0$. On dit alors que P est un **polynôme annulateur** de u. Ce second cas peut cependant parfois donner des situations intéressantes.

On définit de même un polynôme annulateur P d'une matrice carrée M comme étant tel que $P(M) = 0$.

4- Polynômes annulateurs d'un endomorphisme

a) Définition

Soit u un endomorphisme de E de dimension finie n. L(E) est lui-même de dimension finie n^2. Il en résulte que $(\mathrm{Id}, u, u^2, ..., u^{n^2})$, constitué de $n^2 + 1$ éléments d'un espace de dimension n^2 forme un système lié. Il existe donc des a_k non tous nuls tels que $\sum_k a_k u^k = 0$. Autrement dit, il existe au moins un polynôme $P = \sum_k a_k X^k$ non nul tel que $P(u) = 0$.

PROPOSITION

Tous les polynômes annulateurs de l'endomorphisme u sont multiples d'un même et unique polynôme unitaire annulateur de u. Ce dernier polynôme s'appelle le **polynôme (annulateur) minimal** *de u.*

Démonstration :

❑ Prenons P_0 un polynôme unitaire annulateur de u, non nul et de degré minimal. Montrons que tout polynôme P annulateur de u est un multiple de P_0. On effectue la division euclidienne de P par P_0. Il existe deux polynômes Q et R tels que $P = P_0Q + R$ et $\deg(R) < \deg(P_0)$. Appliquant cette égalité sur u, on a :

$$0 = P(u) = Q(u) \circ P_0(u) + R(u) = R(u) \qquad \text{puisque } P(u) = P_0(u) = 0$$
R est donc un polynôme annulateur de u. Puisque $\deg(R) < \deg(P_0)$ et que P_0 est de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non nuls de u, R est le polynôme nul, et P est un multiple de P_0.

❑ P_0 est unique car si P_1 est un autre polynôme unitaire annulateur de u qui divise tout autre polynôme annulateur, alors P_0 divise P_1 et P_1 divise P_0. Donc P_0 est le produit de P_1 par un scalaire. Etant tous deux unitaires, ce scalaire vaut 1 et $P_0 = P_1$.

EXEMPLE :

❑ Dans $E = \mathbf{R}^3$, le polynôme annulateur minimal de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $(X - 2)(X - 1)$. On vérifiera en effet que $(M - 2I_3)(M - I_3) = 0$ alors que $M - 2I_3 \neq 0$ et $M - I_3 \neq 0$. Donc $(X - 2)(X - 1)$ est annulateur de M, mais ni $X - 2$ ni $X - 1$.

THEOREME DE CAYLEY-HAMILTON

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E *de dimension finie. Le polynôme* $\chi_u(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - u)$ *s'appelle* **polynôme caractéristique** *de u. Il s'agit d'un polynôme annulateur de u.*

Ce théorème est admis. Trois démonstrations en sont données dans une annexe en fin de chapitre. Le théorème de Cayley-Hamilton peut aussi s'exprimer sous la forme suivante : *le polynôme caractéristique est un multiple du polynôme annulateur minimal*. Comme $\deg(\chi_u) = \dim(E)$, cela montre que le polynôme annulateur minimal a au plus pour degré dim(E).

EXEMPLES :

❑ Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est : $X^2 - 3X + 2$, et on vérifiera que l'on a effectivement $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$. $X^2 - 3X + 2$ est aussi le polynôme minimal de M car aucun polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 1 n'annule M.

❑ Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique vaut $(X - 2)^2(X - 1)$. Le polynôme caractéristique est ici différent du polynôme minimal $(X - 2)(X - 1)$.

<u>b) Utilisation d'un polynôme annulateur pour rechercher des sous-espaces stables</u>

Soit P un polynôme annulateur de l'endomorphisme u. Supposons que ce polynôme soit tel qu'il se factorise en deux facteurs $P = P_1P_2$ avec $\deg P_1 \geq 1$ et $\deg P_2 \geq 1$, avec $P_1(u) \neq 0$ et $P_2(u) \neq 0$. Donc $\mathrm{Ker}(P_1(u)) \neq E$ et $\mathrm{Im}(P_1(u)) \neq \{0\}$, et de même pour P_2.

En outre, $P_1(u)$ ne peut être inversible, sinon on aurait $0 = P(u) = P_1(u) \circ P_2(u) \Rightarrow P_2(u) = 0$ en composant à gauche par l'inverse de $P_1(u)$. Et de même, $P_2(u)$ n'est pas inversible. Donc $\mathrm{Ker}(P_1(u)) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Im}(P_1(u)) \neq E$, et de même pour P_2.

$\mathrm{Ker}(P_1(u))$ et $\mathrm{Im}(P_1(u))$ sont alors des sous-espaces vectoriels stables non triviaux de u.

Dans le premier exemple précédent, $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ donc on pourra chercher par exemple $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ ou $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$. Ce type de recherche intervient de manière plus systématique dans la diagonalisation des endomorphismes.

c) Utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer une puissance de matrice

Donnons deux exemples :

EXEMPLE 1 :

❑ Reprenons l'exemple $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ dont un polynôme annulateur est $X^2 - 3X + 2$ et considérons la division euclidienne de X^n par ce polynôme :

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + R \qquad \text{où } \deg(R) < 2$$

donc il existe a_n et b_n tels que :

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + a_nX + b_n$$

Pour X = 1 et X = 2, racines du polynôme annulateur, on obtient respectivement :

$$\left[\begin{array}{l} 1 = a_n + b_n \\ 2^n = 2a_n + b_n \end{array}\right.$$

d'où :

$$\left[\begin{array}{l} a_n = 2^n - 1 \\ b_n = 2 - 2^n \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$$

Pour X = M, et sachant que $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$, on obtient :

$$M^n = (2^n - 1)M + (2 - 2^n)I_2$$

EXEMPLE 2 :

❑ Considérons $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ qui donc également un polynôme annulateur de M. Considérons la division euclidienne de X^n par ce polynôme. Comme ci-dessus, il existe a_n et b_n tels que :

$$X^n = (X - 1)^2Q + a_nX + b_n$$

Pour X = 1 racine du polynôme annulateur, on obtient :

$$1 = a_n + b_n$$

Mais ici, 1 est racine double. On obtient une autre relation en prenant la dérivée des polynômes :

$$nX^{n-1} = (X - 1)S + a_n \qquad \text{où } S = 2Q + (X - 1)Q'$$

Pour X = 1, on obtient :

$$n = a_n$$

d'où :

$$\left[\begin{array}{l} a_n = n \\ b_n = 1 - n \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$X^n = (X - 1)^2Q + nX + 1 - n$$

Pour X = M, et sachant que $(M - I)^2 = 0$, on obtient :

$$M^n = nM + (1 - n)I_2$$

d) Utilisation d'un polynôme annulateur pour trouver l'inverse d'une matrice

Si on dispose d'un polynôme annulateur $a_0 + a_1X + ... + a_pX^p$ d'une matrice M avec $a_0 \neq 0$, alors on peut conclure que M est inversible et trouver facilement son inverse. En effet :

$$a_0\mathrm{I} + a_1\mathrm{M} + ... + a_p\mathrm{M}^p = 0$$

donc $\mathrm{I} = \dfrac{-a_1\mathrm{M} - ... - a_p\mathrm{M}^p}{a_0} = \mathrm{M} \times \dfrac{(-a_1\mathrm{I} - a_2\mathrm{M} - ... - a_p\mathrm{M}^{p-1})}{a_0}$

donc l'inverse de M est $-\dfrac{(a_1\mathrm{I} + a_2\mathrm{M} + ... + a_p\mathrm{M}^{p-1})}{a_0}$.

EXEMPLE 1 :

❑ Pour $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ vérifiant $\mathrm{M}^2 - 3\mathrm{M} + 2\mathrm{I}_2 = 0$, on a $\mathrm{M} \times \dfrac{(\mathrm{M} - 3\mathrm{I}_2)}{-2} = \mathrm{I}$ donc $\mathrm{M}^{-1} = \dfrac{3\mathrm{I}_2 - \mathrm{M}}{2}$. Il est intéressant de noter que cette expression correspond à l'expression $\mathrm{M}^n = (2^n - 1)\mathrm{M} + (2 - 2^n)\mathrm{I}_2$ trouvée plus haut pour $n = -1$, alors qu'a priori, cette expression n'a été prouvée que pour $n \geq 0$.

EXEMPLE 2 :

❑ Pour $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ vérifiant $\mathrm{M}^2 - 2\mathrm{M} + \mathrm{I}_2 = 0$, on a $\mathrm{M} \times (2\mathrm{I}_2 - \mathrm{M}) = \mathrm{I}_2$ donc $\mathrm{M}^{-1} = 2\mathrm{I}_2 - \mathrm{M}$. Ici aussi, on constate qu'on obtient cette expression en posant $n = -1$ dans la relation $\mathrm{M}^n = n\mathrm{M} + (1 - n)\mathrm{I}_2$ valide a priori pour $n \geq 0$.

II : Diagonalisation

1- Exemples de problèmes

Considérons les problèmes suivants :

i) Calculer M^n, où M est une matrice carrée, par exemple :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

ii) Trouver les suites vérifiant les relations suivantes :

x_0, y_0 et z_0 sont donnés

$$\text{pour tout } k : \begin{cases} x_{k+1} = 8x_k + 9z_k \\ y_{k+1} = -3x_k - y_k - 3z_k \\ z_{k+1} = -6x_k - 7z_k \end{cases}$$

iii) Trouver les fonctions vérifiant le système différentiel suivant :

$x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ sont donnés

$$\text{pour tout } t \text{ réel} : \begin{cases} x'(t) = 8x(t) + 9z(t) \\ y'(t) = -3x(t) - y(t) - 3z(t) \\ z'(\mathrm{t}) = -6x(t) - 7z(t) \end{cases}$$

Les problèmes i) et ii) sont équivalents. En effet, dans ii), on peut poser :

$$\mathrm{X}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} \text{ élément de } \mathbf{R}^3.$$

On a alors la relation de récurrence suivante entre X_{k+1} et X_k :

$$\mathrm{X}_{k+1} = \mathrm{M}\mathrm{X}_k, \text{ M étant la matrice du i),}$$

d'où il est facile de tirer, par récurrence, que : $\mathrm{X}_k = \mathrm{M}^k\mathrm{X}_0$.

La difficulté de ces problèmes tient au fait que la matrice utilisée n'est pas diagonale. Comparons en effet les trois problèmes précédents aux trois problèmes suivants :

ibis) Calculer D^k, où D est une matrice diagonale, par exemple :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

iibis) Trouver les suites vérifiant les relations suivantes :

x_0, y_0 et z_0 sont donnés ;

$$\text{pour tout } k : \left[\begin{array}{l} x_{k+1} = -x_k \\ y_{k+1} = -y_k \\ z_{k+1} = 2z_k \end{array} \right.$$

iiibis) Trouver les fonctions vérifiant le système différentiel suivant :

$x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ sont donnés ;

$$\text{pour tout } t \text{ réel} : \left[\begin{array}{l} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = -y(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{array} \right.$$

La résolution est immédiate ; on a respectivement :

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} x_k = (-1)^k x_0 \\ y_k = (-1)^k y_0 \\ z_k = 2^k z_0 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x(t) = e^{-t}\, x(0) \\ y(t) = e^{-t}\, y(0) \\ z(t) = e^{2t}\, z(0) \end{array} \right.$$

Le principe de la diagonalisation consiste à passer, si possible, d'une matrice quelconque (et d'un problème général) à une matrice diagonale (et à un problème plus simple).

2- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

DEFINITION :

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E *de dimension finie est dit* **diagonalisable** *s'il existe une base de* E *dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

Une matrice carrée M *est dite* **diagonalisable** *si elle est semblable à une matrice diagonale* D.

On rappelle que M est semblable à D s'il existe P inversible telle que $M = PDP^{-1}$ (voir le chapitre L1/LINEF.PDF). M et D représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, la matrice de passage d'une base à l'autre étant P. En pratique, M est donnée, et on cherche D, si c'est possible. Si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est la base (si elle existe) dans laquelle la matrice de u est D, diagonale, de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & & \dots & \\ \dots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a $u(e_i) = \lambda_i e_i$. On est donc amené à s'intéresser aux vecteurs transformés en un multiple d'eux-même par u.

DEFINITION

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. *On appelle* **vecteur propre** *v de u tout vecteur non nul de* E *pour lequel il existe un scalaire λ tel que :*

$$u(v) = \lambda v$$

λ s'appelle **valeur propre** *relative au vecteur propre v. λ est une valeur propre de u.*

λ étant une valeur propre, on appelle **sous-espace propre** *associé à λ le sous-espace*

$$E_\lambda = \{v \in E \mid u(v) = \lambda v\}$$

Si v est vecteur propre, λ est unique. En effet :

$u(v) = \lambda v$ et $u(v) = \lambda' v \Rightarrow \lambda v = \lambda' v \Rightarrow \lambda = \lambda'$ car v est non nul.

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme u s'appelle le **spectre** de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$.
E_λ est bien un sous-espace vectoriel. Il suffit de constater que $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$

On remarque que l'ensemble des vecteurs propres associés à λ n'est autre que $E_\lambda - \{0\}$. λ est donc une valeur propre associée à un vecteur propre non nul si et seulement si $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$, ce qui est vérifié si et seulement si $u - \lambda \mathrm{Id}$ est non inversible, et donc si et seulement si $\det(u - \lambda \mathrm{Id}) = 0$. Il s'agit d'un polynôme en λ dont on peut montrer que le degré vaut $n = \dim E$ (voir en fin de chapitre la section trigonalisation). Ainsi, les valeurs propres se trouvent en cherchant les racines du polynôme $\det(u - X\mathrm{Id})$, polynôme qu'on a déjà rencontré plus haut.

PROPOSITION
$\det(X\mathrm{Id} - u) = \chi_u(X)$ *s'appelle* **polynôme caractéristique** *de l'endomorphisme u. Ses racines sont les valeurs propres de u. L'ordre de multiplicité de cette valeur en tant que racine de* χ_u *s'appelle ordre de multiplicité d'une valeur propre.*

EXEMPLES :
Cherchons les valeurs propres de quelques applications classiques :

❑ Les homothéties $\lambda \mathrm{Id}$: La seule valeur propre est λ. L'espace tout entier est sous-espace propre.

❑ Les projecteurs : Les valeurs propres sont 0 et 1, le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 étant le noyau du projecteur (la direction parallélement à laquelle on projette). Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est l'image du projecteur (le sous-espace sur lequel on projette).

❑ Les symétries : Les valeurs propres sont –1 et 1, le sous-espace propre associé à la valeur propre –1 étant la direction parallèlement à laquelle on effectue la symétrie. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est le sous-espace par rapport auquel s'effectue la symétrie.

3- Méthode pratique

Pour diagonaliser, si possible, une matrice ou un endomorphisme, on procède comme suit :

a) Recherche des valeurs propres

On calcule $\chi_u(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - u)$ ou, plus commodément, $\det(u - X\,\mathrm{Id})$ puis on cherche les racines de ce polynôme. Ce sont les valeurs propres. Pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on calcule $\det(M - XI_n)$. Le calcul est facile pour les matrices 2×2, mais devient rapidement aride quand n augmente. De plus, il n'existe pas de méthode générale de détermination des racines exactes pour un polynôme de degré quelconque. On aura donc recours à des logiciels de calcul numérique donnant des valeurs approchées de ces racines. Dans la plupart des exercices, le concepteur de l'exercice s'arrange généralement pour qu'il y a ait une ou des racines évidentes, permettant de factoriser le polynôme caractéristique.

EXEMPLE :

❑ Soit M = $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. On a :

$$\det(M - XI) = \begin{vmatrix} 8-X & 0 & 9 \\ -3 & -1-X & -3 \\ -6 & 0 & -7-X \end{vmatrix} = ... = -X^3 + 3X + 2 = -(X-2)(X+1)^2$$

Les valeurs propres sont –1 valeur propre double, et 2 valeur propre simple.

<u>b) Recherche des sous-espaces propres</u>

Pour chaque valeur propre λ trouvée, on résout le système $(u - \lambda \mathrm{Id})v = 0$. L'ensemble des vecteurs v solutions est le sous-espace propre E_λ associé à λ.

EXEMPLE :

❑ Soit M = $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont –1 et 2.

- Sous-espace propre associé à la valeur propre –1. On résout le système :

$$(M + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 9z = 0 \\ -3x - 3z = 0 \\ -6x - 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + z = 0$$

Il s'agit du plan vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Sous-espace propre associé à la valeur propre 2. On résout le système :

$$(M - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9z = 0 \\ -3x - 3y - 3z = 0 \\ -6x - 9z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, t, \begin{cases} x = 3t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases}$$

Il s'agit de la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

<u>c) Recherche d'un base de vecteurs propres</u>

Dans chaque E_λ, on choisit une base. Nous verrons dans la section suivante que la réunion des vecteurs ainsi obtenus forme un système libre, les sous-espaces propres étant en somme directe. Dans le cas précédent, les trois vecteurs trouvés forment notre base de vecteurs propres. Donc M est diagonalisable, semblable à la matrice diagonale D = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage est P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a $M = PDP^{-1}$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut maintenant résoudre les questions du II-1).

i) Calculer M^k avec M = $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Comme M = PDP^{-1}, avec D = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et P^{-1} = $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$M^k = PD^kP^{-1}$. D'où :

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1)^{k+1} + 3.2^k & 0 & 3(-1)^{k+1} + 3.2^k \\ (-1)^k - 2^k & (-1)^k & (-1)^k - 2^k \\ 2(-1)^k - 2^{k+1} & 0 & 3(-1)^k - 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

On vérifie que, pour $k = 0$, on trouve bien $M^k = I_3$, et pour $n = 1$, on trouve $M^k = M$.

ii) Les solutions du problème II-1-ii) sont :

$x_k = (2(-1)^{k+1} + 3.2^k)\, x_0 + (3(-1)^{k+1} + 3.2^k)\, z_0$
$y_k = ((-1)^k - 2^k)\, x_0 + (-1)^k\, y_0 + ((-1)^k - 2^k)\, z_0$
$z_k = (2(-1)^k - 2^{k+1})\, x_0 + (3(-1)^k - 2^{n+1})\, z_0$

iii) Résolvons le problème du II-1-iii). Soit X(t) = $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

$X'(t) = MX(t)$
$\Leftrightarrow$ $X'(t) = PDP^{-1}X(t)$
$\Leftrightarrow$ $P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t)$
$\Leftrightarrow$ $Y'(t) = DY(t)$ où l'on a posé $Y(t) = P^{-1}Y(t)$

On a donc $Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x(0) - 3z(0) \\ x(0) + y(0) + z(0) \\ x(0) + z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

En outre, si on pose Y(t) = $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, l'équation Y' = DY conduit au système $\begin{cases} u' = -u \\ v' = -v \\ w' = 2w \end{cases}$ qui conduit aux solutions Y(t) = $\begin{pmatrix} e^{-t}u_0 \\ e^{-t}v_0 \\ e^{2t}w_0 \end{pmatrix}$. D'où $X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t}u_0 \\ e^{-t}v_0 \\ e^{2t}w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}u_0 + 3e^{2t}w_0 \\ e^{-t}v_0 - e^{2t}w_0 \\ -e^{-t}u_0 - 2e^{2t}w_0 \end{pmatrix}$

D'où :

$x(t) = (-2e^{-t} + 3e^{2t})\, x(0) + (-3e^{-t} + 3e^{2t})\, z(0)$
$y(t) = (e^{-t} - e^{2t})\, x(0) + e^{-t}\, y(0) + (e^{-t} - e^{2t})\, z(0)$
$z(t) = (2e^{-t} - 2e^{2t})\, x(0) + (3e^{-t} - 2e^{2t})\, z(0)$

4- Propriétés des sous-espaces propres et des valeurs propres

PROPOSITION :

Soit λ *une valeur propre de u, de vecteur propre x. Alors, pour tout polynôme* P, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

<u>Démonstration</u> :

❑ Le lecteur vérifiera que, par récurrence sur k, on a pour tout k, $u^k(x) = \lambda^k x$. Il en résulte que, si $P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$, alors :

$$P(u)(x) = \sum_{k\geq 0} a_k\, u^k(x) = \sum_{k\geq 0} a_k\, \lambda^k\, x = P(\lambda)x$$

Tout polynôme annulateur de u permet d'avoir une idée des valeurs propres de u :
PROPOSITION :
Soit u un endomorphisme (ou M *une matrice carrée) et* P *un polynôme annulateur de u* (*ou de* M). *Alors les valeurs propres* λ *de u* (*ou de* M) *sont nécessairement racines de* P.

<u>Démonstration</u> :
❑ Soit λ une valeur propre de u, de vecteur propre x (non nul, donc). On a alors :

$$P(u)(x) = P(\lambda)x$$

Or $P(u) = 0$, donc $P(\lambda)x = 0$, et comme $x \neq 0$, $P(\lambda) = 0$

Le spectre de u est donc inclus dans l'ensemble des racines de P. Il ne lui est pas forcément égal.

EXEMPLE :
❑ Si $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id} = 0$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{1, 2\}$. Il est possible cependant qu'une seule de ces deux valeurs soit valeur propre de u (par exemple, si $u = \mathrm{Id}$).

PROPOSITION :
Soient λ_1, λ_2,... , λ_m m valeurs propres distinctes. Alors la somme des sous-espaces vectoriels $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + ... + E_{\lambda_m}$ *est directe.*

<u>Démonstration 1</u> :
❑ Elle se fait par récurrence sur m.
Montrons cette proposition pour $m = 2$. Il suffit de montrer que $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$. Soit v élément de $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$. On a alors :

$$u(v) = \lambda_1 v \text{ et } u(v) = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v = \lambda_2 v$$
$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$$
$$\Rightarrow v = 0 \text{ car } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont distincts.}$$

Supposons la propriété vraie pour $m - 1$ sous-espaces propres, montrons la pour m.
Il suffit de montrer que 0 se décompose de manière unique en somme d'éléments de E_{λ_i}, autrement dit, que l'on a :

$$\forall\ i \in [\![1, m]\!],\ v_i \in E_{\lambda_i} \text{ et } 0 = v_1 + ... + v_m \Rightarrow \text{pour tout } i,\ v_i = 0$$

Pour cela, on applique u. On obtient :

$$0 = u(v_1) + ... + u(v_m)$$
$$\Rightarrow \quad 0 = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m \quad (*)$$

On a, par ailleurs, en multipliant par λ_m :

$$0 = v_1 + ... + v_m$$
$$\Rightarrow \quad 0 = \lambda_m v_1 + ... + \lambda_m v_m \quad (**)$$

En retranchant (*) et (**), on obtient :

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + ... + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1}$$

$\Rightarrow$ $\forall\ i \in [\![1, m - 1]\!]$, $(\lambda_i - \lambda_m)v_i = 0$ car les $m - 1$ sous-espaces E_{λ_i} sont en somme directe (hypothèse de récurrence)
$\Rightarrow$ $\forall\ i \in [\![1, m - 1]\!]$, $v_i = 0$ car les valeurs propres sont distinctes.

En reportant dans $0 = v_1 + ... + v_m$, on en tire aussi que $v_m = 0$

Démonstration 2 :

❑ Considérons une relation

$$0 = v_1 + ... + v_m$$

avec v_i élément de E_{λ_i}. Si on applique $m - 1$ fois l'endomorphisme u, on obtient successivement :

$$0 = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m$$
$$0 = \lambda_1^2 v_1 + ... + \lambda_m^2 v_m$$
$$0 = \lambda_1^3 v_1 + ... + \lambda_m^3 v_m$$
$$...$$
$$0 = \lambda_1^{m-1} v_1 + ... + \lambda_m^{m-1} v_m$$

Cherchons les valeurs possibles des v_i en raisonnant composante par composante sur une base quelconque. Les coefficients du système obtenu sont $\begin{pmatrix} 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & ... & \lambda_m \\ ... & & ... \\ \lambda_1^{m-1} & ... & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}$ qui est une matrice de Vandermonde, de rang m, car les coefficients λ_i sont distincts. Les seules solutions au système sont donc les solutions nulles, et tous les v_i sont nuls.

Démonstration 3 :

❑ Considérons une relation

$$0 = v_1 + ... + v_m$$

avec v_i élément de E_{λ_i}. Soit P le polynôme $(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)...(X - \lambda_m)$ et appliquons l'endomorphisme $P(u)$ aux deux membres de l'égalité. Compte tenu du fait que v_i est vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, on a :

$$P(u)(v_1) = P(\lambda_1)v_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)...(\lambda_1 - \lambda_m)v_1$$
$$P(u)(v_2) = P(\lambda_2)v_2 = 0$$
$$...$$
$$P(u)(v_m) = P(\lambda_m)v_m = 0$$

Donc, en sommant tous les termes :

$$0 = P(u)(v_1 + ... + v_m)$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)...(\lambda_1 - \lambda_m)v_1$$

Comme les λ_i sont distincts entre eux, on a $(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)...(\lambda_1 - \lambda_m) \neq 0$ et donc $v_1 = 0$.
On procèdera de même pour montrer que $v_i = 0$ en appliquant cette fois l'endomorphisme $P(u)$ avec :

$$P(X) = (X - \lambda_2)(X - \lambda_3) ... (X - \lambda_{i-1})(X - \lambda_{i+1}) ... (X - \lambda_m)$$

Le polynôme P est inspiré des polynômes interpolateurs de Lagrange. Voir le chapitre L1/POLYNOME.PDF.

Le théorème n'affirme pas que la somme des sous-espaces propres donne E tout entier. C'est d'ailleurs un obstacle à la diagonalisation. Les conditions de diagonalisation sont étudiées au II-6.

COROLLAIRE

Toute famille de m vecteurs propres associés à m valeurs propres deux à deux distinctes forme une famille libre.

EXEMPLE :

❑ Pour tout n, la famille $(1, \cos(x), \cos(2x), ..., \cos(nx))$ forme une famille libre. En effet, chaque fonction est vecteur propre de l'opérateur D^2 (dérivée seconde) avec des valeurs propres distinctes.

PROPOSITION

❑ *Tout sous-espace propre* E_λ *d'un endomorphisme u est stable par u. Si v commute avec u, alors* E_λ *est stable également par v.*

Démonstration :

❑ E_λ est stable par u :

$$x \in E_\lambda \Rightarrow u(x) = \lambda x \text{ et } \lambda x \in E_\lambda$$
$$\Rightarrow u(x) \in E_\lambda$$

❑ E_λ est stable par v si $v \circ u = u \circ v$:

$$x \in E_\lambda \Rightarrow u(x) = \lambda x$$
$$\Rightarrow v(u(x)) = \lambda v(x) = u(v(x))$$
$$\Rightarrow v(x) \in E_\lambda$$

5- Propriétés du polynôme caractéristique

On a appelé polynôme caractéristique d'un endomorphisme u le polynôme $\chi_u(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - u)$. Le polynôme caractéristique d'une matrice M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$. Les racines de ces polynômes sont les valeurs propres de u ou de M. Deux matrices semblables ont évidemment mêmes valeurs propres, puisque le déterminant de deux matrices semblables est le même. Si M est semblable à N, on a :

$$\det(M - XI_n) = \det(P(N - XI_n)P^{-1}) = \det(P)\det(N - XI_n)\det(P^{-1}) = \det(N - XI_n)$$

Le déterminant d'une matrice étant égal à celui de sa transposée, on déduit également la proposition suivante :

PROPOSITION :

La transposée d'une matrice possède les mêmes valeurs propres que la matrice elle–même.

Il y a un rapport entre l'ordre de multiplicité des valeurs propres en tant que racine du polynôme caractéristique et la dimension du sous-espace propre correspondant :

PROPOSITION

L'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à la dimension q du sous-espace propre.

Démonstration :

❑ Si on choisit une base de E en prenant une base du sous-espace propre, complétée en une base de E, la matrice de u possèdera q λ sur la diagonale. On aura, par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda I_q & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est alors égal à $(\lambda - X)^q \det(C - XI)$. Il se peut que λ soit également racine de $\det(C - XI)$, de sorte que son ordre de multiplicité est au moins q.

PROPOSITION

Si F *est un sous-espace vectoriel stable par u, alors le polynôme caractéristique de la restriction de u à* F *divise le polynôme caractéristique de u.*

Démonstration :

❑ Si on prend une base de F que l'on complète en une base de E, la matrice de u dans cette base est, en raison de la stabilité de F par u, triangulaire par blocs, de la forme M = $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de u est $\det(XI_n - M)$, celui de $u_{|F}$ est $\det(XI_q - A)$, où $q = \dim(F)$, et ce dernier divise le premier puisque :

$$\det(XI_n - M) = \det(XI_q - A)\det(XI_{n-q} - C)$$

6- Conditions de diagonalisation

Nous étudions dans ce chapitre des conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

PROPOSITION

Soit u un endomorphisme de E. *Il y a équivalence entre :*

(i) *u est diagonalisable*

(ii) E *est la somme des sous-espaces propres*

(iii) *Le polynôme caractéristique est scindé, et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre.*

(iv) *Il existe un polynôme annulateur de u, scindé à racines simples.*

(v) *Le polynôme* $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ *est le polynôme annulateur minimal de u.*

Un polynôme est scindé s'il se factorise en facteurs du premier degré (éventuellement avec multiplicité des racines).

Démonstration :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii), (iv), (v). Supposons u diagonalisable. Alors il existe une base de vecteurs propres. Si l'on regroupe côte à côte les vecteurs propres ayant même valeur propre, et si la valeur propre λ_i apparaît k_i fois, la matrice de u dans cette base est diagonale par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{k_2} & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p I_{k_p} \end{pmatrix}$$

où I_{k_i} est une matrice identité $k_i \times k_i$. On peut alors vérifier par le calcul les points suivants :

- La recherche du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id})$ donne précisément le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de base de valeur propre λ_i. Cet espace est donc de dimension k_i, et comme $k_1 + k_2 + \dots + k_p$ est égal à l'ordre de la matrice et donc à la dimension de E, on a :

  $\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p})$

  et donc $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$
- Le polynôme caractéristique vaut $\det(X\mathrm{Id} - u) = (X - \lambda_1)^{k_1}(X - \lambda_2)^{k_2}\dots(X - \lambda_p)^{k_p}$, donc le polynôme caractéristique est scindé et l'ordre de multiplicité k_i de la valeur propre λ_i est égal à la dimension du sous-espace propre.

- On vérifiera enfin que $\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme. En effet, chaque matrice $M - \lambda_i I_n$ possède des 0 à la place des λ_i. Ce polynôme annulateur est scindé à racines simples. Si on enlève le i-ème facteur, il cesse d'être annulateur car son application sur M gardera une diagonale non nulle dans le i-ème bloc. $\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ est donc bien le polynôme annulateur minimal de u.

Réciproquement :

❑ (ii) ⇒ (i) Si E est somme des sous-espaces propres, il suffit de prendre dans chaque sous-espace propre une base pour obtenir ainsi une base de E.

❑ (iii) ⇒ (ii) Si n est la dimension de E et si le polynôme caractéristique s'écrit $(X - \lambda_1)^{k_1}...(X - \lambda_p)^{k_p}$, on a $n = k_1 + ... + k_p$ car le degré de $\det(XId - u)$ est égal au nombre de X sur la diagonale du déterminant et est donc égal à la dimension de l'espace E. Si on suppose en outre que $\dim E_{\lambda_i} = k_i$ alors $\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + ... + \dim(E_{\lambda_p})$ donc $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}$ et on obtient (ii).
Il y a donc équivalence entre (i), (ii) et (iii)

❑ (v) ⇒ (iv) est trivial puisque $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ est scindé à racines simples.

❑ (iv) ⇒ (v). Soit $P = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_p)$ un polynôme annulateur de u, à racines distinctes. On a donc :

$$0 = P(u) = (u - \lambda_1 Id) \circ (u - \lambda_2 Id) \circ ... \circ (u - \lambda_p Id)$$

Si l'un des λ_i n'est pas une valeur propre, alors $u - \lambda_i Id$ est inversible, et en composant par son inverse, on obtient un autre polynôme annulateur sans le facteur $X - \lambda_i$. En procédant ainsi pour tout λ_i qui n'est pas une valeur propre, on se ramène à un polynôme annulateur dont toutes les racines sont des valeurs propres. Le produit $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ est alors un multiple de ce dernier polynôme et est donc a fortiori annulateur de u.
Par ailleurs, toute valeur propre λ soit nécessairement figurer parmi les racines de tout polynôme annulateur P. En effet, si x est vecteur propre (non nul) de u pour la valeur propre λ, on a :

$$0 = P(u)(x) = P(\lambda)x$$

donc $P(\lambda) = 0$

On ne peut donc enlever le moindre facteur à $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$, qui est donc bien le polynôme annulateur minimal de u.
Il y a donc équivalence entre (iv) et (v).

❑ v) $\Rightarrow$ ii). C'est l'implication la plus délicate. Nous donnons trois démonstrations possibles. On utilise seulement le fait que $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathrm{X} - \lambda)$ est annulateur de u :

Démonstration 1 :

❑ Montrons d'abord le lemme suivant : soit A un polynôme de la forme $(\mathrm{X} - \lambda)\mathrm{B}(\mathrm{X})$ avec $\mathrm{B}(\lambda) \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}(u)) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{B}(u))$.

La somme est en effet directe : si x appartient à $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{B}(u))$ alors $u(x) = \lambda x$ et $\mathrm{B}(u)(x) = \mathrm{B}(\lambda)x$. Par ailleurs x appartient à $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}(u))$ donc $\mathrm{B}(u)(x) = 0$ donc $\mathrm{B}(\lambda)x = 0$, et puisque $\mathrm{B}(\lambda) \neq 0$, $x = 0$.

La somme est incluse dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}(u))$. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{B}(u))$, alors $\mathrm{B}(u)(x) = 0$ et, a fortiori, $((u - \lambda\mathrm{Id}) \circ \mathrm{B}(u))(x) = 0$, donc $\mathrm{A}(u)(x) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}(u)) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{A}(u))$. Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})$, alors $(u - \lambda\mathrm{Id})(x) = 0$, a fortiori, $(\mathrm{B}(u) \circ (u - \lambda\mathrm{Id}))(x) = 0$, donc $\mathrm{A}(u)(x) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}((u - \lambda\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{A}(u))$. Puisque $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}(u)) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{A}(u))$ et $\mathrm{Ker}((u - \lambda\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{A}(u))$, il en est de même de la somme.

$\mathrm{Ker}(\mathrm{A}(u))$ est incluse dans la somme. En effet, la division euclidienne de $\mathrm{B}(\mathrm{X})$ par $\mathrm{X} - \lambda$ donne $\mathrm{B}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \lambda)\mathrm{Q}(\mathrm{X}) + \mathrm{B}(\lambda)$, donc, $\mathrm{B}(u) = (u - \lambda\mathrm{Id}) \circ \mathrm{Q}(u) + \mathrm{B}(\lambda)\mathrm{Id}$. Pour tout vecteur x de $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}(u))$, on a donc :

$$\mathrm{B}(u)(x) = ((u - \lambda\mathrm{Id}) \circ \mathrm{Q}(u))(x) + \mathrm{B}(\lambda)x$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{1}{\mathrm{B}(\lambda)}(\mathrm{B}(u)(x) - ((u - \lambda\mathrm{Id}) \circ \mathrm{Q}(u))(x))$$

Or on a $\mathrm{A}(u)(x) = 0 = ((u - \lambda\mathrm{Id}) \circ \mathrm{B}(u))(x))$. Donc $\mathrm{B}(u)(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})$. De même $((u - \lambda\mathrm{Id}) \circ \mathrm{Q}(u))(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}(u))$ car :

$$(\mathrm{B}(u) \circ (u - \lambda\mathrm{Id}) \circ \mathrm{Q}(u))(x) = (\mathrm{Q}(u) \circ \mathrm{A}(u))(x) = 0$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}\,\mathrm{B}(u)$, donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}(u)) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}\,\mathrm{B}(u)$.

Finalement, $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}(u)) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{B}(u)$.

❑ Considérons maintenant un polynôme $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \lambda_1)...(\mathrm{X} - \lambda_p)$, les λ_i étant distincts, et montrons par récurrence sur p que $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(u)) = \bigoplus_{i=\mathrm{i}}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i\mathrm{Id})$. Pour $p = 1$, $\mathrm{P}(u) = u - \lambda_1\mathrm{Id}$ et l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(u)) = \mathrm{Ker}(u - \lambda_1\mathrm{Id})$ est triviale. Si la relation est vraie au rang $p - 1$, prenons $\mathrm{A} = \mathrm{P}$, $\lambda = \lambda_p$, $\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \lambda_1)...(\mathrm{X} - \lambda_{p-1})$ (avec donc $\mathrm{B}(\lambda) \neq 0$) et appliquons le lemme précédent. On a :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(u)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{B}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - \lambda_p\mathrm{Id})$$

Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence sur B pour conclure.

Une démonstration plus générale de ce résultat est donné dans le III sous le nom de théorème de décomposition des noyaux.

Si P est de plus un polynôme annulateur de u, alors $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(u)) = \mathrm{E}$. Cela montre que, si $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathrm{X} - \lambda)$ est un polynôme annulateur P de u alors $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})$, somme directe de sous-espaces propres.

Démonstration 2 :

❑ On remarque que, u et v étant deux endomorphismes, alors :

$$\dim(\mathrm{Ker}(v \circ u)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(v))$$

En effet, notons $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le théorème du rang donne appliqué à la restriction $u|_{\mathrm{F}}$ de u à F donne :

$$\dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{Im}(u|_{\mathrm{F}})) + \dim(\mathrm{Ker}(u|_{\mathrm{F}}))$$

Or $\mathrm{Im}(u|_{\mathrm{F}})$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(v)$, et $\mathrm{Ker}(u|_{\mathrm{F}})$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(u)$, d'où le résultat. Par récurrence, on a :

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}(f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_p)) &\leq \dim(\mathrm{Ker}(f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_{p-1})) + \dim(\mathrm{Ker}(f_p)) \\ &\leq \dim(\mathrm{Ker}(f_1)) + ... + \dim(\mathrm{Ker}(f_p))\end{aligned}$$

Appliquons ce résultat à $(u - \lambda_1\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_p\mathrm{Id}) = 0$, où les λ_i sont les valeurs propres de u. On a alors :

$$\dim(\mathrm{Ker}((u - \lambda_1\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_p\mathrm{Id}))) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda_1\mathrm{Id})) + ... + \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda_p\mathrm{Id}))$$

mais comme $(u - \lambda_1\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_p\mathrm{Id}) = 0$ par hypothèse, $\mathrm{Ker}((u - \lambda_1\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_p\mathrm{Id})) = \mathrm{E}$, et par ailleurs, les $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i\mathrm{Id})$ sont les sous-espaces propres E_{λ_i}. On obtient donc :

$$\dim(\mathrm{E}) \leq \dim(\mathrm{E}_{\lambda_1}) + ... + \dim(\mathrm{E}_{\lambda_p})$$

mais on sait par ailleurs que ces sous-espaces propres sont en somme directe, et donc leur somme est de dimension inférieure ou égale à dim(E). Les deux membres sont donc égaux, et u est diagonalisable.

Démonstration 3 :

❑ Montrons que tout x se décompose en une somme $x = x_1 + ... + x_p$, $x_i \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i\mathrm{Id})$, les λ_i étant les valeurs propres distinctes de u. Cherchons d'abord quelle forme doivent nécessairement prendre les x_i, en supposant que la décomposition existe. Si on applique la fonction

$$(u - \lambda_1\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_{i-1}\mathrm{Id}) \circ (u - \lambda_{i+1}\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_n\mathrm{Id})$$

aux deux membres, on obtient (revoir la troisième démonstration du fait que les sous-espaces propres sont en somme directe) :

$$((u - \lambda_1\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_{i-1}\mathrm{Id}) \circ (u - \lambda_{i+1}\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_n\mathrm{Id}))(x) = (\lambda_i - \lambda_1)...(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})...(\lambda_i - \lambda_n)\, x_i$$

donc nécessairement :

$$x_i = \frac{(u - \lambda_1\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_{i-1}\mathrm{Id}) \circ (u - \lambda_{i+1}\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_p\mathrm{Id})}{(\lambda_i - \lambda_1)...(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})...(\lambda_i - \lambda_p)}(x)$$

Réciproquement, posons donc $\mathrm{L}_i(\mathrm{X}) = \dfrac{(\mathrm{X} - \lambda_1)...(\mathrm{X} - \lambda_{i-1})(\mathrm{X} - \lambda_{i+1})...(\mathrm{X} - \lambda_p)}{(\lambda_i - \lambda_1)...(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})...(\lambda_i - \lambda_p)}$, et prenons $x_i = \mathrm{L}_i(u)(x)$. On a bien $x_i \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i\mathrm{Id})$ car :

$$(u - \lambda_i\mathrm{Id})(x_i) = ((u - \lambda_i\mathrm{Id}) \circ \frac{(u - \lambda_1\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_{i-1}\mathrm{Id}) \circ (u - \lambda_{i+1}\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_p\mathrm{Id})}{(\lambda_i - \lambda_1)...(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})...(\lambda_i - \lambda_p)})(x_i)$$

et au numérateur, on reconnaît l'endomorphisme $(u - \lambda_1\mathrm{Id}) \circ (u - \lambda_2\mathrm{Id}) \circ ... \circ (u - \lambda_p\mathrm{Id})$ qui, par hypothèse, est nul.

Il reste à vérifier que, pour tout x, la somme des x_i vaut x, ou que $\sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{L}_i(u)(x) = x$, ou que $\sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{L}_i(u) = \mathrm{Id}$

. Il suffit pour cela de montrer que $\sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{L}_i(\mathrm{X}) = 1$. On remarque que $\mathrm{L}_i(\lambda_i) = 1$ et que $\mathrm{L}_i(\lambda_j) = 0$ si $j \neq i$.

Le polynôme $\sum_{i=1}^{p} L_i(X) - 1$ admet donc les p racines distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_p$ et est de degré au plus $p - 1$,

donc il est nul. Donc $\sum_{i=1}^{p} L_i(X) = 1$.

La propriété (iv) est très puissante. Soit u un endomorphisme tel que $u^3 - 7u + 6\text{Id} = 0$. u annule le polynôme $X^3 - 7X + 6$ qui se factorise sous la forme $(X - 2)(X - 1)(X + 3)$. On sait donc que u est diagonalisable, l'ensemble des valeurs propres étant une partie de $\{-3, 1, 2\}$.

EXEMPLE :

❑ $M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. On pourra vérifier que M annule le polynôme $(X - 2)(X + 1)$. Donc M est diagonalisable.

On insistera sur le fait que la propriété (iv) exige que le polynôme soit ***scindé à racines simples***. Si le polynôme est seulement ***scindé***, l'endomorphisme n'est pas nécessairement diagonalisable. On peut cependant montrer qu'il est trigonalisable, i.e. il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire. Pour cela, voir la section II-7 et la section III-5.

La négation de la propriété (iii) indique pour quelles raisons un endomorphisme n'est pas diagonalisable :

- Sur $\mathbb{R}$, il se peut que u ait des valeurs propres complexes et non réelles, autrement dit, le polynôme caractéristique n'est pas scindé. Par exemple, si $u^2 + \text{Id} = 0$, alors les valeurs propres vérifient nécessairement $\lambda^2 + 1 = 0$, ce qui prouve qu'il n'y a pas de valeurs propres réelles. Si on se place sur $\mathbb{C}$, alors il y a deux valeurs propres potentielles : i et $-i$. u est d'ailleurs diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puisqu'il y possède un polynôme annulateur scindé à racines simples. Ainsi, la possibilité de diagonalisation dépend du corps de base sur lequel on se place. Il est clair que le spectre de u dans $\mathbb{R}$, ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ du polynôme $\det(X\,\text{Id} - u) = 0$, est inclus dans le spectre de u dans $\mathbb{C}$, ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ du même polynôme.

EXEMPLES :

❑ Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\theta \neq k\pi$.

Le polynôme caractéristique vaut $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. Il ne possède pas de racine sur $\mathbb{R}$. Il n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Si on se place sur $\mathbb{C}$, les racines sont $e^{\pm i\theta}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $e^{i\theta}$ est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $e^{-i\theta}$ est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, semblable à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ et la matrice de passage est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

❑ Diagonaliser la matrice M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique vaut $\det(M - XI) = -X^3 + 3X^2 - 3X + 2 = -(X - 2)(X^2 - X + 1)$

Si le corps de base est $\mathbb{R}$, alors seule 2 est valeur propre, avec seulement une droite de vecteurs propres. M n'est donc pas diagonalisable.

Si on se place sur $\mathbb{C}$, les valeurs propres sont 2, $\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ donnant chacune une droite comme sous-espace propre. Disposant de trois vecteurs propres, l'endomorphisme est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

- Supposons maintenant que le polynôme caractéristique soit scindé, et admette donc n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité, où $n = \dim(E)$. Pour chaque valeur propre, son ordre de multiplicité est supérieur ou égal à la dimension du sous-espace propre correspondant. Il est possible qu'il lui soit strictement supérieur, auquel cas u n'est pas diagonalisable. Ainsi, si λ est valeur propre double, on souhaite trouver un plan de vecteurs propres. Mais si on ne trouve qu'une droite, il manquera au moins un vecteur pour former une base de vecteurs propres.

EXEMPLE :

❑ Diagonaliser la matrice M = $\begin{pmatrix} 7 & -11 & -2 \\ -3 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique vaut : $\det(M - XI_3) = -X^3 + 12X^2 - 256 = -(X + 4)(X - 8)^2$

Sous-espace propre associé à la valeur propre 8. On résout le système :

$$(M - 8I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x - 11y - 2z = 0 \\ -3x - 9y - 6z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{array}\right.$$

Il s'agit de la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La valeur propre étant double, il manquera un vecteur.

Sous-espace propre associé à la valeur propre -4. On résout le système :

$$(M + 4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11x - 11y - 2z = 0 \\ -3x + 3y - 6z = 0 \\ -x + y + 10z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Il s'agit de la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La somme des sous-espaces propres étant de dimension 2, la matrice n'est pas diagonalisable.

Voici, pour terminer ce paragraphe des conditions ***suffisantes*** (et non plus nécessaires et suffisantes) pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

PROPOSITION :
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Démonstration :
❑ Il existe n sous-espaces propres, tous de dimension supérieure ou égale à 1. La dimension de la somme est donc supérieure ou égale à n. Comme elle ne peut excéder celle de E, la dimension de la somme est exactement égale à n, chaque sous-espace étant de dimension 1. La somme est donc bien égale à E et u est diagonalisable.

La formulation de la proposition précédente est évidemment équivalente à la suivante :
PROPOSITION :
Si le polynôme caractéristique de u est scindé et ne possède que des racines simples, alors u est diagonalisable.

On a enfin :
PROPOSITION

(i) *Soit u diagonalisable et* F *un sous-espace vectoriel de* E *stable par u. Alors la restriction de u à* F *est diagonalisable.*

(ii) *Soient u et v deux endomorphismes de* E *diagonalisables et qui commutent. Alors il existe une base commune de vecteurs propres.*

Démonstration :
❑ (i) : u annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples. Il en est a fortiori de même de $u|_F$ qui annule le même polynôme.

❑ (ii) : On décompose E en la somme des sous-espaces propres de u. Comme u et v commutent, chacun de ces sous-espaces vectoriels est stable par v. D'après le (i) appliqué à v, la restriction de v à chacun de ces sous-espaces propres est diagonalisable. On prend dans chaque sous-espace propre de u une base de vecteurs propres de la dite restriction. La réunion de ces bases forme une base de E qui est constituée de vecteurs propres à la fois de u et de v.

7- Condition de trigonalisation

PROPOSITION :
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration :
❑ Si u est trigonalisable, il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire. Si sa diagonale porte les coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_n$, alors $\chi_u(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)...(X - \lambda_n)$ qui est scindé (éventuellement à racines multiples si plusieurs λ_i coïncident).

❑ Montrons la réciproque par récurrence sur la dimension de l'espace E. Si dim(E) = 1, il n'y a rien à montrer. Supposons que la proposition est montrée pour les espaces vectoriels de dimension $n - 1$. Soit E de dimension n et u un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé. Il possède donc au moins une valeur propre λ_1. Soit e_1 un vecteur propre associé. Complétons e_1 en une base $(e_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$. Soit $F = \text{Vect}(\varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ et p le projecteur sur F parallèlement à la droite $\text{Vect}(e_1)$. Soit enfin $v = p \circ u_{|F} \in L(F)$. La matrice de u dans la base $(e_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où B est une ligne de $n - 1$ coefficients, C n'est autre que la matrice de v dans la base $(\varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$, à gauche de laquelle se trouve une colonne de 0. On a donc :

$$\chi_u(X) = (X - \lambda_1)\chi_v(X)$$

et comme χ_u est scindé, χ_v l'est également. D'après l'hypothèse de récurrence, v est trigonalisable et il existe une base $(e_2, ..., e_n)$ de F dans laquelle la matrice T de v est triangulaire. Pour tout $i \geq 2$, on décompose ensuite $u(e_i)$ sur $\text{Vect}(e_1) \oplus F$:

$$\exists\, \alpha_i,\ u(e_i) = \alpha_i e_1 + (p \circ u)(e_i) = \alpha_i e_1 + v(e_i)$$

La matrice de u dans la base $(e_1, ..., e_n)$ est alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & T \end{pmatrix}$ où α est la ligne $(\alpha_2 \ ... \ \alpha_n)$, et cette matrice est bien triangulaire.

Dans le III-5, on montre un résultat plus général : s'il existe un polynôme annulateur scindé de u, alors u est trigonalisable. En particulier, u est trigonalisable si et seulement si son polynôme annulateur minimal est scindé.

CONSEQUENCES :

❑ Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé, donc tout endomorphisme sur un espace vectoriel complexe est trigonalisable.

❑ De même, toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$. Comme le polynôme caractéristique ou la trace sont invariants par changement de base, en raisonnant sur la matrice trigonalisée T, on voit que :

$$\chi_M(X) = \chi_T(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

où les λ_i sont les coefficients sur la diagonale de T. Ces coefficients étant les racines de χ_M sont les valeurs propres de M.

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{où Tr désigne la trace.}$$

$$\det(M) = \det(T) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\deg(\chi_M) = n$$

En développant le polynôme caractéristique, on a en particulier :

$$\chi_M(X) = X^n - \text{Tr}(M)X^{n-1} + ... + (-1)^n \det(M)$$

Dans le cas où M est réelle, les formules précédentes sont valides à condition de calculer ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$. Plus généralement :

$$\text{Tr}(M^2) = \text{Tr}(T^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \qquad \text{car la matrice } T^2 \text{ a pour coefficients diagonaux les } \lambda_i^2$$

$$\mathrm{Tr}(M^3) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3 \qquad \text{etc...}$$

III : Réduction des endomorphismes

La lecture de cette partie nécessite de connaître les notions arithmétiques des polynômes, données dans le chapitre L1/ARITHMTQ.PDF : PGCD de deux ou de plusieurs polynômes, l'identité de Bézout, ce que signifie le fait que deux polynômes sont premiers entre eux, et que plusieurs polynômes sont premiers entre eux deux à deux ou premiers entre eux dans leur ensemble.

EXEMPLE :

❑ $P = (X - 2)^2(X - 1)$ et $Q = (X + 3)(X - 2)(X - 1)$. Le PGCD de P et Q est $D = (X - 2)(X - 1)$. L'identité de Bézout énonce qu'il existe A et B tels que :

$$D = AP + BQ$$

$$\Leftrightarrow \quad (X - 2)(X - 1) = (X - 2)^2(X - 1)A + (X + 3)(X - 2)(X - 1)B$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = (X - 2)A + (X + 3)B$$

Il suffit de prendre $A = -\dfrac{1}{5}$ et $B = \dfrac{1}{5}$.

On s'intéresse dans cette partie au moyen de réduire un endomorphisme en décomposant l'espace vectoriel en une somme de sous-espaces vectoriels stables, en particulier lorsque le polynôme annulateur n'est pas scindé. En prenant une base compatible avec cette décomposition, on obtiendra une matrice de l'endomorphisme diagonale par blocs.

1- Théorème de décomposition des noyaux

Nous avons vu dans la section I-1 que, pour tout polynôme P, $\mathrm{Ker}(P(u))$ est stable par u, puisque $P(u)$ commute avec u.

THEOREME

Si un polynôme P *se factorise sous la forme* $P = P_1P_2...P_k$ *avec les* P_i *premiers entre eux deux à deux, alors* :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u)) \oplus ... \oplus \mathrm{Ker}(P_k(u))$$

On obtient ainsi une décomposition de $\mathrm{Ker}(P(u))$ en la somme de sous-espaces vectoriels stables plus petits. Ce théorème est particulièrement intéressant lorsqu'on l'applique à un polynôme annulateur de u puisque $\mathrm{Ker}(P(u))$ donne alors E tout entier.

<u>Démonstration 1</u> :

On procède par récurrence sur k. Commençons par le cas $k = 2$, avec $P = P_1P_2$. On utilise l'identité de Bézout. Puisque $P_1 \wedge P_2 = 1$, il existe A et B tels que $1 = AP_1 + BP_2$.

❑ La somme $\mathrm{Ker}(P_1(u)) + \mathrm{Ker}(P_2(u))$ est directe. En effet, si x est élément de $\mathrm{Ker}(P_1(u)) \cap \mathrm{Ker}(P_2(u))$. L'identité de Bézout, appliquée à u donne :

$$\mathrm{Id} = (AP_1)(u) + (BP_2)(u) = A(u) \circ P_1(u) + B(u) \circ P_2(u)$$

Puis appliquée à x, on obtient :

$$x = A(u)(P_1(u)(x)) + B(u)(P_2(u)(x)) = 0 \text{ car } P_1(u)(x) = P_2(u)(x) = 0$$

❑ $\mathrm{Ker}(P_1(u))$ et $\mathrm{Ker}(P_2(u))$ sont inclus dans $\mathrm{Ker}(P(u))$. En effet, soit $x \in \mathrm{Ker}(P_1(u))$, alors :

$P_1(u)(x) = 0$

donc $0 = (P_2(u) \circ P_1(u))(x) = (P_2P_1)(u)(x) = P(u)(x)$

donc $x \in \text{Ker}(P(u))$.

De même si $x \in \text{Ker}(P_2(u))$.

Puisque chacun des deux sous-espaces vectoriels est inclus dans Ker(P(u)), il en est de même de la somme.

❑ Ker(P(u)) est inclus dans Ker(P$_1$(u)) + Ker(P$_2$(u)). Soit x élément de Ker(P(u)). L'égalité

$$\text{Id} = A(u) \circ P_1(u) + B(u) \circ P_2(u)$$

donne cette fois :

$$x = A(u)(P_1(u)(x)) + B(u)(P_2(u)(x))$$

avec $A(u)(P_1(u)(x))$ élément de $\text{Ker}(P_2(u))$ et $B(u)(P_2(u)(x))$ élément de $\text{Ker}(P_1(u))$. En effet :

$$P_2(u)(A(u)(P_1(u)(x))) = A(u)((P_1P_2)(u)(x)) = A(u)(P(u)(x)) = 0 \text{ car } P(u)(x) = 0$$

On procède de même pour $B(u)(P_2(u)(x))$

❑ Supposons maintenant la propriété vraie pour $k - 1$ facteurs P_i et montrons-le pour $P = P_1P_2...P_k$. Remarquons s'abord que, si les P_i sont premiers entre eux deux à deux, alors P_k est premier avec $P_1...P_{k-1}$. En effet :

$$P_1 \wedge P_k = 1 \Rightarrow \exists\ A_1 \text{ et } B_1,\ B_1P_1 = 1 - A_1P_k$$

$$P_2 \wedge P_k = 1 \Rightarrow \exists\ A_2 \text{ et } B_2,\ B_2P_2 = 1 - A_2P_k$$

...

$$P_{k-1} \wedge P_k = 1 \Rightarrow \exists\ A_{k-1} \text{ et } B_{k-1},\ B_{k-1}P_{k-1} = 1 - A_{k-1}P_k$$

$\Rightarrow$ $B_1...B_{k-1}P_1...P_{k-1} = (1 - A_1P_k)...(1 - A_{k-1}P_k)$ de la forme $1 - AP_k$ en développant

$\Rightarrow$ $P_1...P_{k-1} \wedge P_k = 1$

puisque $P_1...P_{k-1}$ et P_k vérifient l'identité de Bézout $AP_k + B_1...B_{k-1}P_1...P_{k-1} = 1$.

Dès lors :

$\text{Ker}(P(u)) = \text{Ker}((P_1...P_{k-1}(u)) \oplus \text{Ker}(P_k(u))$

en appliquant le cas du produit des deux polynômes premiers entre eux $P_1...P_{k-1}$ et P_k.

$= \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u)) \oplus ... \oplus \text{Ker}(P_k(u))$

en appliquant l'hypothèse de récurrence.

<u>Démonstration 2</u> :

❑ Soit $P = P_1...P_k$ avec les P_i premiers entre eux deux à deux. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, posons :

$$\Pi_i = P_1...P_{i-1}P_{i+1}...P_k$$

Les Π_i sont premiers entre eux dans leur ensemble. En effet, dans le cas contraire, un polynôme irréductible D divisant $\Pi_1, ..., \Pi_k$ devra diviser l'un des P_i, mais dans ce cas, il ne peut diviser Π_i qui ne possède pas le facteur P_i et dont les autres facteurs P_j, $j \neq i$, sont premiers avec D. D'où une contradiction. D'après l'identité de Bézout, il existe des polynômes $Q_1, ..., Q_k$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{k} Q_i\Pi_i = 1$.

❑ Soit p_i l'endomorphisme $Q_i(u) \circ \Pi_i(u)$ restreint à Ker(P(u)). p_i étant un polynôme en u commute avec P(u), donc laisse Ker(P(u)) stable. On a :

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = \text{Id}_{\text{Ker}(P(u))}$$

$$p_i \circ p_j = 0 \text{ si } i \neq j$$

$p_i^2 = p_i$ pour tout i,

En effet :

- $\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ker(P}(u))}$ résulte de $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Q}_i\Pi_i = 1$ et donc de $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Q}_i(u) \circ \Pi_i(u) = \mathrm{Id}$.

$p_i \circ p_j = 0$ car, pour $i \neq j$, $\mathrm{Q}_j\Pi_j\mathrm{Q}_i\Pi_i$ est divisible par P car il contient tous les facteurs P_1, ..., P_k. Donc il existe R tel que $\mathrm{Q}_j\Pi_j\mathrm{Q}_i\Pi_i = \mathrm{PR}$, donc $p_i \circ p_j$ est la restriction à $\mathrm{Ker(P}(u))$ de $(\mathrm{Q}_i\Pi_i\mathrm{Q}_j\Pi_j)(u)$ qui est égal à $\mathrm{R}(u) \circ \mathrm{P}(u)$, et qui est donc nul sur $\mathrm{Ker(P}(u))$.

- Enfin, en composant $\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ker(P}(u))}$ par p_i, on obtient $p_i^2 = p_i$, puisque $p_j \circ p_i = 0$ si $j \neq i$.

❑ On en déduit que $\mathrm{Ker(P}(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i)$.

La somme des $\mathrm{Im}(p_i)$ est directe car si on a une somme $p_1(x_1) + ... + p_k(x_k) = 0$, alors, en composant par p_i, on obtient $p_i^2(x_i) = 0$ (les autres termes s'annulant du fait que $p_j \circ p_i = 0$ si $i \neq j$), donc $p_i(x_i) = 0$ car $p_i^2 = p_i$.

L'inclusion $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker(P}(u))$ est triviale du fait de la stabilité de $\mathrm{Ker(P}(u))$ par les p_i.

Réciproquement, $\mathrm{Ker(P}(u)) \subset \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i)$ car $\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ker(P}(u))}$. En appliquant cette égalité à tout vecteur x de $\mathrm{Ker(P}(u))$, on obtient $x = \sum_{i=1}^{k} p_i(x)$ donc $x \in \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(p_i)$.

❑ Enfin, on obtient le théorème de décomposition des noyaux en vérifiant que $\mathrm{Im}(p_i) = \mathrm{Ker(P}_i(u))$.

De fait, pour tout x de $\mathrm{Ker(P}(u))$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}_i(u) \circ p_i)(x) &= (\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i\Pi_i)(u)(x) \\ &= (\mathrm{Q}_i\mathrm{P})(u)(x) \qquad \text{car } \mathrm{P}_i\Pi_i = \mathrm{P} \\ &= \mathrm{Q}_i(u)(\mathrm{P}(u)(x)) = 0\end{aligned}$$

donc $\forall\, x,\ p_i(x) \in \mathrm{Ker(P}_i(u))$

donc $\mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker(P}_i(u))$.

Inversement, si $x \in \mathrm{Ker(P}_i(u))$, alors $\Pi_j(u)(x) = 0$ pour tout $j \neq i$ car Π_j possède le facteur P_i, et pour la même raison $\mathrm{P}(u)(x) = 0$. Donc $(\mathrm{Q}_j(u) \circ \Pi_j(u))(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker(P}(u))$, ce qui signifie que $p_j(x) = 0$. Donc, puisque $\sum_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ker(P}(u))}$:

$$x = \sum_{j=1}^{k} p_j(x) = p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_i)$$

Donc $\mathrm{Ker(P}_i(u)) \subset \mathrm{Im}(p_i)$.

EXEMPLES :

❑ Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ associé à l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$.

Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} + 8 = (\mathrm{X} - 2)(\mathrm{X} - 4)$. On vérifiera que $\mathrm{P(M)} = 0$.

$\mathrm{Ker(P}(u)) = \mathbb{K}^2$

Ker(u – 2Id) est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ker(u – 4Id) est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les deux sous-espaces sont en somme directe. Dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice de u est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

❑ Soit M = $\begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \\ -13 & 6 & -3 \\ 14 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ associé à l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

Le polynôme caractéristique de M est $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X - 2)(X - 1)^2$. P est donc annulateur de M d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On vérifiera que ce n'est pas le cas du polynôme $(X - 2)(X - 1)$. Prenons $P_1 = X - 2$ et $P_2 = (X - 1)^2$.

Ker(P(u)) = $\mathbb{K}^3$ puisque P(u) = 0.

Ker(u – 2Id) est l'ensemble des $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant $\begin{cases} -9x + 3y - 2z = 0 \\ -13x + 4y - 3z = 0 \\ 14x - 5y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3x \\ x = y \end{cases}$. Il s'agit de la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. On a $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ker((u – Id)^2) est le plan d'équation $-3x + y - z = 0$, de base par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de u dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a réduit la matrice de u en une matrice diagonale par blocs. En fait, comme le polynôme caractéristique est scindé, on sait que M est trigonalisable. Ici on peut choisir une base plus judicieuse de Ker((u – Id)^2) pour rendre le bloc 2×2 inférieur droit triangulaire, comme on le verra dans le III-5.

2- Décomposition de E en sous-espaces stables

Une méthode pour décomposer E en sous-espaces stables par l'endomorphisme u est donc la suivante :

i) Déterminer un polynôme P annulateur de l'endomorphisme u, par exemple en calculant $P(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - u)$ (théorème de Cayley-Hamilton)

ii) Factoriser ce polynôme en produit de facteurs irréductibles distincts $R_1, ..., R_m$ de sorte que $P = R_1^{p_1} \times R_2^{p_2} \times ... R_m^{p_m}$

iii) Poser $P_1 = R_1^{p_1}$, $P_2 = R_2^{p_2}$, ... $P_m = R_m^{p_m}$. Les P_i sont premiers entre eux deux à deux, et :

$$E = \mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(P_1(u)P_2(u)... P_m(u))$$

de sorte que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(P_i(u))$.

Cette méthode échoue si $m = 1$, autrement dit si P est puissance d'un facteur irréductible. C'est par exemple le cas des endomorphismes v nilpotents, pour lesquels il existe une puissance p telle que $v^p = 0$.

3- Diagonalisation

Nous retrouvons un premier résultat sur la diagonalisation. S'il existe un polynôme annulateur de u ***scindé à racines simples***, $P = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_k)$, alors u est diagonalisable. En effet, la méthode précédente conduit directement à :

$$E = \text{Ker}(u - \lambda_1 I) \oplus \text{Ker}(u - \lambda_2 I) \oplus ... \oplus \text{Ker}(u - \lambda_m I)$$

et si on prend une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels, alors la matrice de u sera de la forme $\begin{pmatrix} \Lambda_1 & O & ... & O \\ O & \Lambda_2 & ... & O \\ ... & & ... & \\ O & ... & O & \Lambda_m \end{pmatrix}$ où les Λ_k sont des blocs diagonaux ayant des λ_k sur la diagonale.

4- Cas des endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme nilpotent v vérifie $v^p = 0$ pour une certaine puissance de p. Un polynôme annulateur est donc X^p. La méthode du III-2 ne permet donc pas de décomposer E en somme directe de sous-espaces vectoriels stables. Cependant, il existe une suite croissante de sous-espaces vectoriels stables. Soit p la plus petite puissance de v qui s'annule. On vérifiera facilement que :

$$\{0\} \subset \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(v^2) \subset ... \subset \text{Ker}(v^p) = E$$

En fait, les inclusions précédentes sont strictes. En effet, si jamais on a :

$$\text{Ker}(v^k) = \text{Ker}(v^{k+1}) \text{ avec } k < p$$

alors :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(v^{k+2}) &\Rightarrow v^{k+2}(x) = 0 \\ &\Rightarrow v^{k+1}(v(x)) = 0 \\ &\Rightarrow v(x) \in \text{Ker}(v^{k+1}) \\ &\Rightarrow v(x) \in \text{Ker}(v^k) \\ &\Rightarrow v^{k+1}(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in \text{Ker}(v^{k+1}) \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(v^{k+2}) \subset \text{Ker}(v^{k+1})$, et donc $\text{Ker}(v^{k+2}) = \text{Ker}(v^{k+1}) = \text{Ker}(v^k)$, puis, par récurrence $\text{Ker}(v^k) = \text{Ker}(v^p) = E$, ce qui contredit la minimalité de p.

On prend alors une base de $\text{Ker}(v)$, complétée en une base de $\text{Ker}(v^2)$, ... complétée en une base de $\text{Ker}(v^p)$. Du fait que, si x appartient à $\text{Ker}(v^k)$, son image par v appartient à $\text{Ker}(v^{k-1})$, on obtient donc une matrice par blocs ayant la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} O & A & ... & \\ O & O & B & ... \\ ... & & ... & \\ O & ... & O & C \\ O & O & ... & O \end{pmatrix}$$

Inversement, on vérifie facilement que toute matrice de cette forme est nilpotente.

Dans la section Exercices, on définit la **décomposition de Jordan**, où la matrice de l'endomorphisme nilpotent est constituée uniquement de 0, sauf sur la diagonale immédiatement au-dessus de la diagonale principale, où l'on trouve des 0 ou des 1.

5- Trigonalisation

PROPOSITION

Soit u un endomorphisme possédant un polynôme annulateur (*par exemple son polynôme caractéristique ou son polynôme minimal*) *scindé.*

(i) *Alors u est trigonalisable.*

(ii) *De plus, u est la somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent, ces deux endomorphismes commutant l'un avec l'autre. Cette décomposition est unique.* (**décomposition de Dunford** *ou de* **Jordan-Chevalley**).

Le (i) généralise une proposition comparable vue plus haut, prouvée seulement dans le cas où le polynôme annulateur était le polynôme caractéristique.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : Soit $P(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{k_i}$ un polynôme annulateur de u, où les λ_i sont distincts. Posons $P_i = (X - \lambda_i)^{k_i}$ et $E_i = \mathrm{Ker}(P_i(u))$. Les P_i étant premiers entre eux deux et le produit des P_i s'annulant sur E, on en déduit que E est la somme directe des E_i, en appliquant le théorème de décomposition des noyaux.

Notons v la restriction de $u - \lambda_i\mathrm{Id}$ à l'un de ces sous-espaces E_i. Alors $v^{k_i} = 0$, donc v est nilpotent. Or nous avons vu dans le III-4 qu'il existe une base de E_i dans laquelle la matrice de v est triangulaire supérieure, avec des 0 sur la diagonale. Il en résulte que, dans cette base, la matrice de u restreinte à E_i est triangulaire supérieure avec des λ_i sur la diagonale, ou encore s'écrit $\lambda_i I_{n_i} + T_i$, où n_i est la dimension de E_i. Quand on regroupe les bases des divers E_i pour obtenir une base de E, on obtient une base dans laquelle la matrice N de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme précédente.

On a ainsi montré que tout endomorphisme ayant un polynôme annulateur ***<u>scindé</u>*** est trigonalisable.

❑ (ii) Existence : De plus, comme T_i commute avec $\lambda_i I_{n_i}$, la matrice N est la somme de la matrice diagonale D dont les blocs diagonaux sont les $\lambda_i I_{n_i}$ et de la matrice T dont les blocs diagonaux sont les T_i. T est alors une matrice nilpotente commutant avec D puisque chaque bloc T_i commute avec le bloc $\lambda_i I_{n_i}$. Cette décomposition permet de calculer relativement aisément les puissances de N.

❑ (iii) Unicité : Supposons que $u = v + w$ avec v diagonalisable, w nilpotente et $v \circ w = w \circ v$. Il en résulte que v et w commutent avec u. En effet :

$$u \circ v = (v + w) \circ v = v^2 + w \circ v = v^2 + v \circ w = v \circ (v + w) = v \circ u$$

et de même pour w. Donc v et w commutent avec tout polynôme en u, et donc commutent avec les $(u - \lambda_i\mathrm{Id})^{k_i}$. Donc le sous-espace vectoriel $E_i = \mathrm{Ker}((u - \lambda_i\mathrm{Id})^{k_i})$ est stable par v et w. Si on se restreint à ce sous-espace vectoriel, $u - \lambda_i\mathrm{Id}$ y est nilpotent puisque sa puissance k_i-ème s'y annule. La restriction de $v - \lambda_i\mathrm{Id}$ à E_i y est la somme $(u - \lambda_i\mathrm{Id}) - w$ des deux endomorphismes nilpotents restrictions de $u - \lambda_i\mathrm{Id}$ et w à E_i. Ces deux endomorphismes nilpotents commutent entre eux. Or la somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent dans un espace vectoriel de dimension finie est nilpotente (voir les exercices de L1/MATRICES.PDF). Donc la restriction de $v - \lambda_i\mathrm{Id}$ à E_i est nilpotente, et donc admet comme seule valeur propre 0 (son polynôme caractéristique est une puissance de X). Par ailleurs, l'endomorphisme de E $v - \lambda_i\mathrm{Id}$ étant diagonalisable et E_i étant stable par $v - \lambda_i\mathrm{Id}$, sa restriction à E_i est diagonalisable. Cette restriction étant à la fois diagonalisable et n'admettant que 0 comme valeur propre, il s'agit de l'endomorphisme nul. Donc la restriction de v à E_i est $\lambda_i\mathrm{Id}$. D'où l'unicité de v en raisonnant de même sur chaque E_i. v étant unique, il en est de même de $w = u - v$.

EXEMPLES :

❑ On reprend l'exemple de $M = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \\ -13 & 6 & -3 \\ 14 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ vu plus haut, associé à l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On a vu que $\chi_M = (X-2)(X-1)^2$ et que $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$ est la droite de vecteur directeur $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2)$ est le plan d'équation $-3x + y - z = 0$. On vérifiera que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ est la droite de vecteur directeur $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. ε_2 est a fortiori un élément du plan $\mathrm{Ker}((u - \mathrm{Id})^2)$. Prenons ε_3 dans le plan, non colinéaire à ε_2, par exemple $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$u(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1$$
$$u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$$
$$u(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \\ -13 & 6 & -3 \\ 14 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

La matrice de u dans la nouvelle base est $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est diagonale par blocs, chaque bloc étant la somme d'une matrice scalaire et d'une matrice triangulaire supérieure nilpotente. On a $N = D + T$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $DT = TD$ (= T).

Revevant dans la base initiale en appliquant comme il convient la matrice de passage sur D et T, on vérifiera que M est la somme $M = A + B$ de la matrice diagonalisable $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et de la matrice nilpotente $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -10 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et que $AB = BA$.

❑ Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice $M = \begin{pmatrix} -9 & -1 & -8 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & -1 \\ 18 & 1 & 16 & -6 \\ 16 & 0 & 14 & -5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Appliquons la méthode de décomposition précédemment décrite. On vérifiera que le polynôme caractéristique de la matrice vaut $(X-2)(X-1)^3$ et que :

Ker(u – 2Id) est la droite de vecteur directeur $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ker($(u - \mathrm{Id})^3$) est l'hyperplan d'équation $4x + y + 3z - t = 0$. Plus précisément :

Ker(u – Id) est la droite de vecteur directeur $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc M n'est pas diagonalisable puisque la dimension du sous-espace propre est strictement inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre.

Ker($(u - \mathrm{Id})^2$) est le plan engendré par ε_2 et par $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $u(\varepsilon_3) = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

Ker($(u - \mathrm{Id})^3$) est l'hyperplan engendré par ε_2, ε_3 et par $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $u(\varepsilon_4) = 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4$.

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ forme une base de $\mathbf{R}^4$.

Dans cette base, la nouvelle matrice est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut faire un effort supplémentaire en cherchant ε_3 vérifiant $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 + \varepsilon_2$, par exemple $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, puis ε_4 vérifiant $u(\varepsilon_4) = \varepsilon_4 + \varepsilon_3$, par exemple $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Les quatre vecteurs forment une base, et dans cette base, la matrice de u est $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est la matrice la plus simple qu'on puisse trouver pour u. On a :

$N = D + T$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonale, $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente, et $DT = TD$

$M = A + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 6 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & 1 \\ -8 & -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisable, $B = \begin{pmatrix} -10 & -1 & -8 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ 22 & 2 & 18 & -7 \\ 24 & 2 & 20 & -8 \end{pmatrix}$ nilpotente et $AB = BA$.

❑ Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ de matrice $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 1 \\ 17 & -2 & 10 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \\ -34 & 13 & -15 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Le polynôme caractéristique de u est $(X-2)^2(X-3)^2$

Ker(u – 2Id) est la droite de vecteur $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ donc M n'est pas diagonalisable car la dimension du sous-espace propre est strictement inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre.

Ker((u – 2Id)^2) est le plan engendré par ε_1 et par $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $u(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$.

Ker(u – 3Id) est la droite de vecteur $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix}$.

Ker((u – 3Id)^2 est le plan engendré par ε_3 et par $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ -17 \end{pmatrix}$, et $u(\varepsilon_4) = 3\varepsilon_4 - 3\varepsilon_3$.

Dans la nouvelle base, la matrice de u est $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Annexe : Le théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème de Cayley-Hamilton énonce que :

Si $\chi_u(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - u)$, *alors* $\chi_u(u) = 0$.

Ce théorème est facile à vérifier en dimension 2. En effet, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de u, alors :

$$\chi_u(X) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + ad - bc$$

Il est alors facile de vérifier que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$.

Le cas général en dimension n est plus délicat. Il convient d'abord de prendre conscience que, si on définit le polynôme $\chi(X) = \det(XI_n - A)$, il est incorrect de dire que :

$$\chi(A) = \det(AI_n - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$$

ne serait-ce que parce que le résultat final 0 est le scalaire 0, alors que le membre de gauche $\chi(A)$ est une matrice. Mais il y a une erreur plus profonde. Dans $\det(XI_n - A)$, le produit de X par I_n est un produit externe de la matrice I_n par l'élément X de $\mathbf{K}[X]$. Il représente donc la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix}$. Remplacer X par A ne revient donc absolument pas à calculer AI_n qui est un produit interne de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le remplacement de X par A dans XI_n pourrait à la rigueur s'interpréter comme définissant une matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$, mais cette dernière matrice est un élément de $\mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{K})$ et non de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment alors la retrancher de la matrice $A = (a_{ij})$ qui, elle, est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$? On peut enfin remarquer que A et sa transposée A^T ont le même polynôme caractéristique (car le déterminant est le même pour une matrice et sa transposée) et donc qu'on a aussi bien $\chi(A) = 0$ que $\chi(A^T) = 0$. Or si on calcule $\chi(A^T)$ en remplaçant de façon erronée X par A^T dans $\det(XI_n - A)$, on obtient non pas $\chi(A^T) = 0$, mais $\det(A^T - A)$ qui est non nul en général.

Dans tous les cas, ces tentatives ne traduisent pas ce que veut dire le théorème de Cayley-Hamilton. Celui-ci énonce que l'on calcule d'abord le déterminant $\det(XI_n - A)$, puis, ayant obtenu une expression polynomiale, que l'on remplace X par A. Le calcul matriciel que l'on effectue alors conduit à la matrice nulle.

Nous donnons dans cette annexe trois démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton

Démonstration 1 :

❑ On s'appuie sur le théorème de trigonalisation du III-5 (éventuellement en se plaçant sur $\mathbb{C}$). Toute matrice A est semblable, au moyen d'une matrice de passage P, à une matrice triangulaire complexe T de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & O & \dots & O \\ O & T_2 & \dots & O \\ \dots & & \dots & \\ O & \dots & O & T_m \end{pmatrix}$$

avec $T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_i & \dots & * \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$, matrice d'ordre k_i.

Le polynôme caractéristique de T, et donc de A, est $(X - \lambda_1)^{k_1}(X - \lambda_2)^{k_2}\dots(X - \lambda_m)^{k_m}$. Il s'agit donc de montrer que :

$$(A - \lambda_1 I)^{k_1}(A - \lambda_2 I)^{k_2}\dots(A - \lambda_m I)^{k_m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad P(T - \lambda_1 I)^{k_1}(T - \lambda_2 I)^{k_2}\dots(T - \lambda_m I)^{k_m}P^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (T - \lambda_1 I)^{k_1}(T - \lambda_2 I)^{k_2}\dots(T - \lambda_m I)^{k_m} = 0.$$

Or $T_i - \lambda_i I = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente, chaque puissance décalant le triangle supérieur d'un rang. Il en résulte que $(T_i - \lambda_i I)^{k_i} = O$. On en déduit que :

$$(T-\lambda_1 I)^{k_1} \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ O & (T_2-\lambda_1 I)^{k_1} & \dots & O \\ \dots & & \dots & \\ O & \dots & O & (T_m-\lambda_1 I)^{k_1} \end{pmatrix}$$

$$(T-\lambda_2 I)^{k_2} \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} (T_1-\lambda_2 I)^{k_2} & O & \dots & O \\ O & O & \dots & O \\ \dots & & \dots & \\ O & \dots & O & (T_m-\lambda_2 I)^{k_2} \end{pmatrix}$$

...

$$(T-\lambda_m I)^{k_m} \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} (T_1-\lambda_m I)^{k_m} & O & \dots & O \\ O & (T_2-\lambda_m I)^{k_m} & \dots & O \\ \dots & & \dots & \\ O & \dots & O & O \end{pmatrix}$$

Quand on multiplie ces matrices, on obtient la matrice nulle.

Démonstration 2 :

❑ On utilise la notion de comatrice, vue dans le chapitre L1/DETERMNT.PDF. Soit A la matrice de u. Considérons la matrice $B(X) = XI_n - A$, à coefficients polynomiaux ou même, si on le souhaite à coefficients dans le corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles. Considérons également la transposée de la comatrice de $XI_n - A$, que nous appellerons $C(X)$, de sorte que $B(X)C(X) = \det(B(X))I$, où $\det(B(X))$ n'est autre que $\chi_u(X)$. Rappelons que les coefficients de $C(X)$ étant formés à partir de sous-déterminants $(n-1) \times (n-1)$ de $B(X)$, ces coefficients sont donc des polynômes en X. Ainsi :

$$B(X)C(X) = \chi_u(X)I$$

Regroupons dans $C(X)$ les termes constants, puis les termes en X, etc..., ce qui revient à écrire $C(X)$ sous forme de combinaison linéaire de matrices C_i :

$$C(X) = C_0 + XC_1 + \dots + X^{n-1}C_{n-1}$$

On a alors, en développant le produit $B(X)C(X)$:

$$\begin{aligned} \chi_u(X)I &= (XI_n - A)(C_0 + XC_1 + \dots + X^{n-1}C_{n-1}) \\ &= -AC_0 + X(C_0 - AC_1) + \dots + X^{n-1}(C_{n-2} - AC_{n-1}) + X^nC_{n-1} \end{aligned}$$

Justifions maintenant le résultat suivant :

Si $T_0 + XT_1 + \dots + X^nT_n = U_0 + XU_1 + \dots + X^nU_n$, où les T_i et les U_i sont des matrices carrés, alors pour tout i, $T_i = U_i$. En effet, l'égalité précédente implique l'égalité formelle des polynômes constituant les termes (i,j) de chacun des deux membres. Les coefficients de ces polynômes sont donc égaux, ce qui signifie que $T_0 = U_0$, ... $T_n = U_n$.

Supposons que $\chi_u(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$. On a donc, d'après l'identification ci-dessus entre les coefficients de $\chi_u(X)I_n$ et ceux de $B(X)C(X)$

$$\begin{aligned} a_0I_n &= -AC_0 \\ a_1I_n &= C_0 - AC_1 \\ &\dots \\ a_{n-1}I_n &= C_{n-2} - AC_{n-1} \\ a_nI_n &= C_{n-1} \end{aligned}$$

Si on multiplie a_1I_n par A, a_2I_n par A^2, ..., a_nI_n par A^n et si on ajoute membre à membre, on obtient :

$$a_0I_n + a_1A + \dots + a_nA^n = 0$$

ce qui est le résultat cherché.

Démonstration 3 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique. On montre que $\chi_A(A) = 0$ en montrant que, pour tout V de $\mathbb{K}^n$, $\chi_A(A)V = 0$.
Pour un tel V, soit k le plus petit entier tel que $(V, AV, A^2V,..., A^kV)$ soit lié.

❑ Il existe des coefficients a_0, ... a_{k-1} tels que : $A^kV + a_{k-1}A^{k-1}V + ... + a_0V = 0$.
En effet, $(V, AV, A^2V,..., A^kV)$ est lié donc il existe une relation de liaison entre ces vecteurs. Mais $(V, AV, A^2V,..., A^{k-1}V)$ est libre. On en déduit que le coefficient de A^kV dans cette relation de liaison est nécessairement non nul. On peut le supposer égal à 1 en divisant la relation de liaison par ce coefficient.

❑ Soit une base de $\mathbb{K}^n$ dont les k premiers vecteurs sont V, AV, ..., $A^{k-1}V$. On note P la matrice de passage de la base canonique à cette base, et on pose $B = P^{-1}AP$. Alors B est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} R & T \\ O & U \end{pmatrix} \text{ avec } R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

En effet, pour $p < k - 1$, $u(A^pV) = A^{p+1}V$, et pour $p = k - 1$:

$$u(A^{k-1}V) = A^kV = - a_0V - ... - a_{k-1}A^{k-1}V$$

d'où la forme de B, matrice de u dans la nouvelle base.

❑ Le polynôme caractéristique de R est : $\chi_R(X) = \det(XI_k - R) = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + ... + a_1X + a_0$. On le montre par récurrence, en développant par rapport à la dernière ligne, ou bien en rendant la matrice $XI_k - R$ triangulaire supérieure par des opérations sur les lignes. R s'appelle **matrice compagnon** du polynôme $X^k + a_{k-1}X^{k-1} + ... + a_1X + a_0$. Ce résultat montre en outre que tout polynôme est le polynôme caractéristique de sa matrice compagnon.

❑ On a donc :

$$\chi_A(X) = \chi_B(X) \qquad \text{car A et B sont semblables}$$
$$= \chi_U(X)\chi_R(X) \qquad \text{déterminant d'une matrice trianglaire par blocs}$$

donc :

$$\chi_A(A) = \chi_U(A)\chi_R(A)$$

donc :

$$\chi_A(A)V = \chi_U(A)\chi_R(A)V$$

mais :

$$\chi_R(A)V = (A^k + a_{k-1}A^{k-1} + ... + a_0I_n)V = A^kV + a_{k-1}A^{k-1}V + ... + a_0V = 0$$

donc :

$$\chi_A(A)V = 0$$

Ceci étant vrai pour toute vecteur V, on a $\chi_A(A) = 0$.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$, et si oui, les diagonaliser :

a) $\begin{pmatrix} -9 & 17 & -4 \\ -4 & 9 & -2 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & -14 & 5 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & 10 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -18 & 14 & -12 \\ -9 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 7 & 14 & -8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 6 & 15 & -7 \end{pmatrix}$

Exo.2) Soit A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner quatre méthodes pour calculer A^n.

Exo.3) Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) Déterminer une matrice A telle que $A^2 = M$.

b) Déterminer toutes les matrices A telles que $A^2 = M$

Exo.4) Soit A = $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Diagonaliser A.

b) Déterminer deux matrices M et N telles que $M^2 = M$, $N^2 = N$, $MN = NM = 0$ et $A = 2M + 4N$.

c) Déduire du b) l'expression de A^n.

Exo.5) Peut-on trouver une matrice M telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exo.6) Soit A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Exo.7) On considère la suite récurrente $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant : $\forall\, n \geq 0$, $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice M telle que, $\forall\, n \geq 0$, $X_{n+1} = MX_n$

b) Diagonaliser M.

c) En déduire l'expression générale de a_n.

Exo.8) On considère la suite récurrente $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant : $\forall\, n \geq 0$, $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice M telle que, $\forall\, n \geq 0$, $X_{n+1} = MX_n$

b) Trigonaliser M sous la forme $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) En déduire l'expression générale de a_n.

Exo.9) Soit A matrice 2×2 à coefficients réels, de valeurs propres complexes $a \pm ib$ avec a réel, et b réel non nul. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Exemple : A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Exo.10) Diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exo.11) Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension 4 et u un élément de L(E,F). E est muni d'une base $(e_1, ..., e_4)$ et F d'une base $(f_1, ..., f_4)$. Dans ces bases, u possède la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ -1 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer rg(u), une base de Ker(u), une base de Im(u).

b) Montrer qu'il existe des bases de E et F telles que la matrice de u relativement à ces bases soit diagonale et ne comprenne que des 0 et des 1.

c) Peut-on en conclure que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exo.12) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 3 & 0 \\ 7 & 12 & -4 & 0 \\ 13 & 17 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une base dans laquelle la matrice de f est N = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer deux matrices A et B telles que M = A + B, A diagonalisable et B nilpotente, A et B commutant.

Exo.13) Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espace propres de A. A est-elle diagonalisable ?

b) Calculer Ker($(A - I_4)^2$). En déduire une matrice semblable à A, diagonale par blocs, chaque bloc étant la somme d'une matrice scalaire et d'une matrice triangulaire supérieure nilpotente.

c) Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ formé des matrices commutant avec A ?

Exo.14) Soit $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$ terme général de la matrice A, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

a) Calculer A^2.

b) Quelles sont les valeurs propres de A ? Ses sous-espaces propres ? A est-elle diagonalisable ?

c) Mêmes questions pour une matrice A de terme général $a_{ij} = b_i c_j$, les b_i et les c_j étant des complexes quelconques, les b_i étant non tous nuls de même que les c_j.

Exo.15) Diagonaliser la matrice $n \times n$ suivante : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. (Dans le chapitre L2/PREHILB.PDF, on montre que toute matrice réelle symétrique est diagonalisable. Tel est le cas de M).

Exo.16) Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ & \dots & & & \dots & \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$ de taille $n \times n$, où $b \neq 0$.

Exo.17) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on considère $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$. A s'appelle une **matrice circulante**.

a) Calculer J^k pour $0 < k \leq n$. J est-elle diagonalisable ?

b) A est-elle diagonalisable ? En déduire une expression de det(A).

Exo.18) Soient A et B deux matrices $p \times n$ et $n \times p$ respectivement, avec $n \geq p$.

a) Vérifier que l'on a :

$$\begin{pmatrix} XI_n - BA & B \\ O & XI_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & O \\ A & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O \\ A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n & B \\ O & XI_p - AB \end{pmatrix}$$

(X désigne le symbole $\mathbf{K}$[X] des polynômes)

b) En déduire que le polynôme caractéristique de AB divise le polynôme caractéristique de BA, et que, si $n = p$, les deux polynômes sont égaux.

c) On peut donner une autre démonstration du b) de la façon suivante. Soit r le rang de A. Montrer qu'il existe P élément de $GL_p(\mathbf{K})$ et Q élément de $GL_n(\mathbf{K})$ telle que $A = PJ_rQ^{-1}$, où J_r est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{p-r,r} & O_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$. Soit $C = Q^{-1}BP$. Comparer les polynômes caractéristiques de AB et BA en utilisant J_r et C.

d) Montrer que les valeurs propres non nulles de AB et de BA sont identiques, par deux démonstrations différentes.

e) Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB, BA et leurs valeurs propres.

Exo.19) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que toute matrice réelle M carrée d'ordre 2 telle que $M^2 = -I_2$ est semblable à J

b) Soit $n \geq 2$. Soit M une matrice d'ordre n telle que $M^2 = -I_n$. Montrer que n est pair. Montrer que M est semblable à une matrice diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant tous égaux à J.

Exo.20) Soit M une matrice $n \times n$ de rang inférieur ou égal à 1. Tr(M) désigne la trace de M.

a) Montrer que, pour tout réel x, $\det(M - xI_n) = (\mathrm{Tr}(M) - x)(-x)^{n-1}$

b) En déduire $\det(M + I_n)$

c) En déduire que, pour A inversible, et X élément de $\mathbf{K}^n$, on a :

$$\det(A + XX^T) = \det(A)(1 + X^TA^{-1}X)$$

Exo.21) On se donne A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose $\varphi(M) = M + \mathrm{Tr}(AM)\,B$, où Tr désigne la trace.

a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (A, B) pour que φ soit diagonalisable. Quels sont alors les éléments propres de φ ?

b) Montrer que φ est inversible si et seulement si $\mathrm{Tr}(AB) \neq -1$ et donner son inverse.

Exo.22) Soit A une matrice carrée d'ordre n diagonalisable. $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exo.23) Soit A une matrice élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \ldots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$, où Tr désigne la trace. Montrer que A est nilpotente.

Exo.24) Si M est une matrice carrée, on note exp(M) la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$.

a) Pour $M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 \\ -3 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, calculer exp(M).

b) Soit θ un réel, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer exp(A + B) et exp(A)exp(B). Que remarque-t-on ?

Exo.25) Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent. Soit p la valeur minimale pour laquelle $f^p = 0$.

a) Montrer que $p \leq n$.

b) Supposons $p = n$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Supposons $p < n$. Soit x tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $(f^{p-1}(x), f^{p-2}(x), \dots, f(x), x)$. Quelle est la dimension de F ? Montrer qu'il existe une forme linéaire u définie sur E telle que, $\forall\, i \in [\![1, p-1]\!]$, $u(f^i(x)) \neq 0$. Soit φ l'application de E dans $\mathbb{K}^p$ définie par :

$$\varphi(y) = \begin{pmatrix} u(y) \\ u(f(y)) \\ u(f^2(y)) \\ \dots \\ u(f^{p-1}(y)) \end{pmatrix}$$

Soit G = Ker(φ). Montrer que E = F $\oplus$ G et que G est stable par f. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de F est formée de blocs diagonaux de même forme que la matrice donnée en b). (**Décomposition de Jordan d'une matrice nilpotente**).

d) Appliquer une décomposition de Jordan à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 11 & 5 & 1 & 1 \\ -17 & -8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2- Solutions

Sol.1) a) La matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique vaut $(X + 1)(X^2 + 1)$ et il n'est pas scindé.

Elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car le polynôme caractéristique est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.

Le théorème de décomposition des noyaux donne la possibilité d'une réduction de la matrice en une matrice diagonale par blocs. Pour cela, si on nomme u l'endomorphisme associé à la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on prend une base de Ker(u + Id), qui est la droite engendrée par $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et une base de Ker($u^2$ + Id), qui est le plan d'équation $7x - 14y + 3z = 0$, engendré par $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ et par $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$. On a :

$$u(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1$$

$$u(\varepsilon_2) = A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \frac{2}{3}\varepsilon_3$$

$$u(\varepsilon_3) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{5}{3}\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\varepsilon_3$$

Dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la nouvelle matrice de u est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b) La matrice est diagonalisable. Le polynôme caractéristique vaut $(X - 1)(X - 2)(X + 1)$. Il est scindé à racines simples. On trouvera, par exemple, comme matrice de passage P vers une base de vecteurs propres, et comme matrice diagonale :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) La matrice est diagonalisable. Le polynôme caractéristique vaut $(X + 1)(X - 2)^2$, et le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 est bien de dimension 2. Il s'agit du plan $-3x + 2y - 2z = 0$. On trouvera, par exemple, comme matrice de passage P vers une base de vecteurs propres, et comme matrice diagonale :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) La matrice n'est pas diagonalisable. On a le même polynôme caractéristique que ci-dessus, mais E_2 est ici de dimension 1. On peut trigonaliser la matrice en prenant $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur propre associé à la valeur propre -1, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, vecteur propre associé à la valeur propre 2, et $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur indépendant des deux premiers. L'image de ε_3 est :

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 & -8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 6 & 15 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$$

d'où la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Sol.2) ❑ On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + A$. Par récurrence, $\forall\, n$, $\exists\, (a_n, b_n)$, $A^n = a_nI_3 + b_nA$ avec :

$$A^{n+1} = a_nA + b_nA^2 = 2b_nI_3 + (a_n + b_n)A$$

donc $\left[\begin{array}{l} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{array}\right.$, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$

Ce système entraîne que $\dfrac{a_{n+2}}{2} = b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + \dfrac{a_{n+1}}{2}$, relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et d'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ dont les racines sont -1 et 2. Donc il existe λ et μ tel que, pour tout n, $a_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$. Avec les valeurs initiales, on trouve $a_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$, puis $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{2} = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$. Ainsi :

$$A^n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} A$$

❑ On peut diagonaliser A.

$$\det(A - XI_3) = -X^3 + 3X + 2 = -(X + 1)^2(X - 2).$$

Valeur propre X = –1 : le sous-espace propre associé est le plan $x + y + z = 0$ de vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Valeur propre X = 2 : le sous-espace propre associé est la droite $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & 2^n \\ -(-1)^n & 0 & 2^n \\ 0 & -(-1)^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} A \end{aligned}$$

❑ Puisque $A^2 - A - 2I_3 = 0$, $X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$ est polynôme annulateur minimal de A. On effectue la division euclidienne de X^n par $(X - 2)(X + 1)$:

$$\forall n, \exists (r_n, s_n) \in \mathbb{R}^2, \exists Q_n \in \mathbb{R}[X], X^n = (X - 2)(X + 1)Q_n + r_nX + s_n$$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} (-1)^n = -r_n + s_n \\ 2^n = 2r_n + s_n \end{array}\right. \quad \text{en prenant } X = -1 \text{ et } X = 2$$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} r_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} \\ s_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3 \text{ en prenant } X = A.$$

❑ $A = J - I_3$ avec J matrice uniquement constituée de 1. Par récurrence, on a $J^n = 3^{n-1} J$ pour $n > 0$, et en développant $(J - I_3)^n$ par le binôme de Newton (compte tenu du fait que J et I_3 commutent) :

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k = (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1} J \\ &= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^k\right) J \end{aligned}$$

$= (-1)^n \, I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \, 3^k - (-1)^n\right) J$

on reconnaît un binôme de Newton

$= (-1)^n \, I_3 + \frac{1}{3}\left((3-1)^n - (-1)^n\right) J$

$= (-1)^n \, I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} J$

$= \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3$

Sol.3) a) Diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ en $P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}P^{-1}$ et prendre $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$. On a par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ 1+\sqrt{3} & 4-2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$.

b) La question est de savoir si les racines carrées de $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ sont $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$ ou s'il y en a d'autres.

Or si B est telle que $B^2 = D$, alors $BD = B^3 = DB$ donc D commute avec B, donc les sous-espaces propres de D sont stables par B. Comme chaque sous-espace propre de D est une droite, si v est un vecteur directeur d'une telle droite, on doit avoir $Bv \in \text{Vect}(v)$ donc v est vecteur propre de B. Donc B est diagonale comme D et nécessairement de la forme ci-dessus. En prenant toutes les combinaisons possibles de ± 1 comme valeurs de α, β, γ, on trouvera les huit matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \frac{\alpha - \beta\sqrt{3}}{2} & \beta\sqrt{3} & 0 \\ -3\alpha+\beta\sqrt{3}+4\gamma & -2\beta\sqrt{3}+4\gamma & 2\gamma \end{pmatrix}$$

Sol.4) a) A est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ avec par exemple la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Il suffit ensuite de prendre :

$$M = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

et $\quad N = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A^n = 2^nM + 4^nN = \begin{pmatrix} \dfrac{2^n + 4^n}{2} & \dfrac{3.2^n - 3.4^n}{2} & -2^n + 4^n \\ \dfrac{2^n - 4^n}{2} & \dfrac{-2^n + 3.4^n}{2} & 2^n - 4^n \\ \dfrac{2^n - 4^n}{2} & \dfrac{-3.2^n + 3.4^n}{2} & 2.2^n - 4^n \end{pmatrix}$.

Sol.5) On se place dans $\mathbb{C}$ pour disposer de toutes les valeurs propres de M. On a $M^6 = 0$ donc X^6 est un polynôme annulateur de M. Or toute valeur propre est racine de tout polynôme annulateur, donc la seule valeur propre de M est 0. Par conséquent, le polynôme caractéristique de M est X^3. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, il s'agit aussi d'un polynôme annulateur de M, donc $M^3 = 0$. Or on vérifiera que $M^4 \neq 0$. Contradiction. Donc M n'existe pas.

On peut aussi chercher M sous la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de façon que M commute avec son hypothétique carré $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient un système linéaire qui, une fois résolu, montre que M est nécessairement de la forme $\alpha I_3 + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifiera qu'aucune de ces matrices n'a un carré égal à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol.6) A admet la valeur propre simple $\alpha = 1$ de vecteur propre $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, et la valeur propre double $\beta = 2$. Cependant, le sous-espace propre associé à 2 est une droite engendrée par $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche un troisième vecteur ε_3 tel que $A\varepsilon_3 = 2\varepsilon_3 + \varepsilon_2$, ce qui conduit au système linéaire $\begin{cases} -y + 2z = 1 \\ -2y + 4z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ dont une solution est par exemple $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,. On vérifiera que ε_3 est bien linéairement indépendant de ε_1 et ε_2. La matrice de passage cherchée est $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.7) a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$

b) Le polynôme caractéristique vaut $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$. On peut diagonaliser M. Par exemple :

Pour $\lambda = 1$, prendre $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda = 2$, prendre $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda = 3$, prendre $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

Donc $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

c) On a alors :

$$X_n = M^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ en posant } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 2^n\beta \\ 3^n\gamma \end{pmatrix}$$

donc $a_n = \alpha + \beta 2^n + \gamma 3^n$. On remarque que l'on obtient pour les suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 3 une expression comparable à ce qu'on obtient pour les suites récurrentes d'ordre 2. L'équation caractérisque est $r^3 - 6r^2 + 11r - 6$, de racines 1, 2, 3, et (a_n) est combinaison linéaire des trois suites géométriques (1^n), (2^n) et (3^n).

Sol.8) a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

b) Le polynôme caractéristique vaut $X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X - 1)^2(X - 2)$.

Pour $\lambda = 2$, prendre par exemple $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda = 1$, valeur propre double, le sous-espace propre n'est qu'une droite engendrée par exemple par $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cherchons ε_3 tel que $M\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, ce qui donne le système $\left[\begin{array}{l} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ 2x - 5y + 3z = 1 \end{array}\right.$ donc par exemple $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc $M = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) On vérifiera par récurrence que $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta+n\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

donc $a_n = 2^n\alpha + \beta + n\gamma$. Comme pour les suites récurrentes d'ordre 2, dans le cas d'une racine double 1, on complète les suites géométriques (2^n) et (1^n) par la suite $(n1^n)$ pour obtenir une base des solutions. On laisse le lecteur chercher ce qu'il en sera dans le cas d'une racine triple.

Sol.9) Soit $Z \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre associé à la valeur propre $a + ib$. On a $AZ = (a + ib)Z$ et, par conjugaison, $A\overline{Z} = (a - ib)\overline{Z}$, où $\overline{Z}$ est le vecteur dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de Z. Notons Re(Z) (respectivement Im(Z)) le vecteur dont les coefficients sont les parties réelles (respectivement imaginaires) de Z. On a alors :

$$A(\mathrm{Re}(Z)) = \frac{1}{2} A(Z + \overline{Z}) = a\,\frac{Z + \overline{Z}}{2} + ib\,\frac{Z - \overline{Z}}{2} = a\mathrm{Re}(Z) - b\mathrm{Im}(Z)$$

et $$A(\mathrm{Im}(Z)) = \frac{1}{2i} A(Z - \overline{Z}) = a\,\frac{Z - \overline{Z}}{2i} + b\,\frac{Z + \overline{Z}}{2} = b\mathrm{Re}(Z) + a\mathrm{Im}(Z)$$

De plus (Im(Z), Re(Z)) forme une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, considérons une relation de liaison $\lambda\mathrm{Re}(Z) + \mu\mathrm{Im}(Z) = 0$, avec λ et μ réels. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 &= A(\lambda\mathrm{Re}(Z) + \mu\mathrm{Im}(Z)) = \lambda(a\mathrm{Re}(Z) - b\mathrm{Im}(Z)) + \mu(b\mathrm{Re}(Z) + a\mathrm{Im}(Z)) \\ &= a(\lambda\mathrm{Re}(Z) + \mu\mathrm{Im}(Z)) + b(-\lambda\mathrm{Im}(Z) + \mu\mathrm{Re}(Z)) \\ &= b(-\lambda\mathrm{Im}(Z) + \mu\mathrm{Re}(Z)) \end{aligned}$$

donc $-\lambda\mathrm{Im}(Z) + \mu\mathrm{Re}(Z) = 0$. Mais les deux équations vectorielles $\left[\begin{array}{l} \lambda\mathrm{Re}(Z) + \mu\mathrm{Im}(Z) = 0 \\ -\lambda\mathrm{Im}(Z) + \mu\mathrm{Re}(Z) = 0 \end{array}\right.$ peuvent aussi s'écrire $(\mathrm{Im}(Z)\ \mathrm{Re}(Z))\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = 0$ et $(\mathrm{Im}(Z)\ \mathrm{Re}(Z))\begin{pmatrix} -\lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0$, où $P = (\mathrm{Im}(Z)\ \mathrm{Re}(Z))$ est la matrice formée des colonnes Im(Z) et Re(Z). Cette matrice n'est pas nulle car $Z \neq 0$. Donc son noyau est de dimension inférieur ou égal à 1. Donc $\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, tous deux éléments de ce noyau, sont colinéaires, donc le déterminant de ces deux vecteur est nul, donc $\lambda^2 + \mu^2 = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$.

Dans la base (Im(Z), Re(Z)), la nouvelle matrice de l'endomorphisme associé à A a la forme voulue.

Dans l'exemple, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$, $a + ib = 1 + i$, donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.10) Le polynôme caractéristique vaut $(X + 2)(X - 2)^3$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est l'hyperplan d'équation $-x + y + z + t = 0$, de dimension 3, donc la matrice est diagonalisable puisque l'autre valeur propre, simple, donnera une droite de vecteurs propres.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -2 est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice de passage est par exemple $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et la matrice diagonale est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Sol.11) a) On vérifiera que M est de rang 3. Son noyau est engendré par le vecteur $e_4' = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, son image est engendrée par les vecteurs dont les composantes sont données par les trois premières colonnes (qui sont libres).

b) Compléter e_4' en une base (e_1', e_2', e_3', e_4') de E. Prendre $f_1' = u(e_1')$, $f_2' = u(e_2')$, $f_3' = u(e_3')$ dont on vérifiera qu'ils forment une famille libre, quel que soit la façon dont on choisi e_1', e_2' et e_3'. Compléter (f_1', f_2', f_3') en une base de F. La matrice de u dans les nouvelles bases de E et F est alors :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On ne peut rien conclure. On a seulement prouvé qu'il existe deux matrices inversibles P et Q (de changement de base respectivement dans E et F) telles que $M = QDP^{-1}$, mais il n'y a aucune raison pour que P = Q.

De fait, on pourra vérifier que M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Elle n'admet que deux racines réelles simples. M est équivalente à une matrice diagonale D, mais pas semblable à elle (revoir au besoin le chapitre L1/LINEF.PDF pour la notion de matrices équivalentes).

Sol.12) a) Notons $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ la base cherchée.

ε_1 est tel que $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$. On trouve par exemple $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ε_2 est tel que $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 + \varepsilon_1$. On trouve par exemple $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

ε_3 est tel que $f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$. On trouve par exemple $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ε_4 est tel que $f(\varepsilon_4) = 2\varepsilon_4 + \varepsilon_3$. On trouve $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple.

On vérifiera que les vecteurs ainsi trouvés sont bien linéairement indépépendants.

b) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base ε: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$N = D + T$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonale, $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et DT = TD.

Puisque $M = PNP^{-1}$, il suffit de prendre :

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -9 & 2 & -1 \\ 14 & 16 & -3 & 2 \\ 24 & 24 & -3 & 4 \\ -6 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -7 & -4 & -1 & -2 \\ -11 & -7 & -1 & -3 \\ 9 & 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol.13) a) Le polynôme caractéristique est $(X-1)^2(X-4)X$. Les valeurs propres sont :

4 valeur propre simple de vecteur propre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_1$

0 valeur propre simple de vecteur propre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \varepsilon_2$

1 valeur propre double de vecteur propre $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_3$

A n'est pas diagonalisable.

b) $\mathrm{Ker}((A - I_4)^2)$ est le plan d'équations $\begin{cases} -2x + 2y + 7z + 2t = 0 \\ y + 2z + t = 0 \end{cases}$. Il est engendré par ε_3 et par $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, par exemple. On a $A\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \varepsilon_4 + 9\varepsilon_3$, donc, dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, la matrice de l'endomorphisme vaut $T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Une matrice M commutant avec A doit être telle que l'endomorphisme associé transforme les vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de la façon suivante :

$\varepsilon_1 \to \lambda\varepsilon_1$, car, M commutant avec A, le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est stable par M. Etant une droite, ε_1 doit être un vecteur propre de M.

$\varepsilon_2 \to \mu\varepsilon_2$, pour une raison identique.

$\varepsilon_3 \to \nu\varepsilon_3$, pour une raison identique.

$\varepsilon_4 \to \alpha\varepsilon_3 + \beta\varepsilon_4$, car M commutant avec $(A - I_4)^2$, $\mathrm{Ker}((A - I_4)^2)$ est stable par M.

et inversement, une matrice vérifiant ces propriétés commute avec A si et seulement si $AM\varepsilon_4 = MA\varepsilon_4$ (seul vecteur à vérifier, les égalités analogues portant sur les autres ε_i étant facilement vérifiées), ce qui conduit à la condition :

$$\alpha\varepsilon_3 + \beta(9\varepsilon_3 + \varepsilon_4) = M(9\varepsilon_3 + \varepsilon_4) = 9\nu\varepsilon_3 + \alpha\varepsilon_3 + \beta\varepsilon_4$$

donc $\beta = \nu$. Ainsi, M commute avec A si et seulement si :

$\varepsilon_1 \to \lambda\varepsilon_1$

$\varepsilon_2 \to \mu\varepsilon_2$

$\varepsilon_3 \to \nu\varepsilon_3$

$\varepsilon_4 \to \alpha\varepsilon_3 + \nu\varepsilon_4$

Autrement dit, l'endomorphisme associé à M dans la base canonique a, dans la base (ε_1, ε_2, ε_3, ε_4) la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimension cherchée est donc 4.

Sol.14) a) $(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{k}\frac{k}{j} = na_{ij}$ donc $A^2 = nA$.

b) Il résulte du a) que $X^2 - nX = X(X - n)$ est un polynôme annulateur de A. Etant à racines simples, A est diagonalisable. Par ailleurs, les valeurs propres de A sont éléments de $\{0, n\}$. Ces deux valeurs sont en fait des valeurs propres, chacune d'elles donnant un sous-espace propre non réduit à $\{0\}$:

Pour la valeur propre 0, le sous-espace propre associé est l'hyperplan $x_1 + \frac{x_2}{2} + ... + \frac{x_n}{n} = 0$, de dimension $n - 1$.

Pour la valeur propre n, le sous-espace propre associé est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ ... \\ n \end{pmatrix}$.

c) Si on note B la colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ et C la ligne $(c_1\ ...\ c_n)$, alors A = BC. Notons λ le réel $CB = \sum_{k=1}^{n} b_kc_k$.

On a alors :

$$A^2 = BCBC = B\lambda C = \lambda BC = \lambda A$$

Si $\lambda \neq 0$, $X^2 - \lambda X = X(X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A, scindé à racines simples, donc A est diagonalisable. Comme dans le b), les valeurs propres sont 0 et λ. Le sous-espace propre associé à 0 est l'hyperplan $c_1x_1 + ... + c_nx_n = 0$, et le sous-espace propre associé à λ est la droite engendrée par B.

On peut aussi remarquer que A est de rang 1, donc son noyau est de dimension $n - 1$, ce qui signifie que 0 est valeur propre avec une multiplicité au moins égale à $n - 1$. On trouve la dernière valeur propre sachant que $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} b_ic_i$ ne dépend pas de la base choisie, et dans une base où A est semblable à une matrice triangulaire, Tr(A) est la somme des valeurs propres. Donc la dernière valeur propre est $\lambda = \sum_{i=1}^{n} b_ic_i$.

Si $\lambda = 0$, le polynôme annulateur de A trouvé précédemment est X^2. Par ailleurs X n'est pas annulateur de A car $A \neq 0$. X^2 est donc le polynôme annulateur minimal de A. N'étant pas à racine simple, A n'est pas diagonalisable. Il n'y a que 0 comme valeur propre avec l'hyperplan $c_1x_1 + ... + c_nx_n = 0$ comme sous-espace propre. Remarquons que, si f est l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique, Im(f) est la droite engendrée par B et que, si $\lambda = 0$, B est élément de Ker(f). Ou encore, si $\lambda = 0$, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Si on prend $\varepsilon_n \notin \mathrm{Ker}(f)$, alors $\varepsilon_{n-1} = A\varepsilon_n$ est non nul et élément de Ker(f). Complétons ε_{n-1} par des vecteurs $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-2}$ pour obtenir une base de Ker(f). Dans la base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & & ... & & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sol.15) Considérons le polynôme caractéristique de M : $D_n = \det(M - XI_n) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & ... \\ & & ... & & & \\ 0 & 0 & ... & & 1 & x \end{vmatrix}$ avec $x = 2 - X$. Voyons plutôt D_n comme une fonction polynomiale de la variable x. En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$D_n - xD_{n-1} + D_{n-2} = 0$$

qui donne une récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - xr + 1 = 0$. Les valeurs initiales de la suite (D_n) sont $D_1 = x$ et $D_2 = x^2 - 1$, ou même $D_0 = 1$.

Donnons à x des valeurs réelles éléments de $[-2, 2]$, et pour cela, posons $x = 2\cos(\theta)$. Les solutions complexes de l'équation caractéristique sont :

$$\cos(\theta) \pm i\sin(\theta) = \exp(\pm i\theta)$$

Pour $\theta \neq 0$ ou π, $(D_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est combinaison linéaire de $(\exp(in\theta))_{n\in\mathbf{Z}}$ et $(\exp(-in\theta))_{n\in\mathbf{Z}}$. En utilisant les valeurs initiales $D_0 = 1$ et $D_1 = 2\cos(\theta)$, on trouve que $D_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

Pour $\theta = 0$, $x = 2$, $D_n = n + 1$.
Pour $\theta = \pi$, $x = -2$, $D_n = (-1)^n(n + 1)$.
Donc $D_n = 0$ si et seulement si $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$, $1 \leq k \leq n$. Les valeurs propres λ de M vérifient donc :

$$x = 2 - \lambda = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

donc $\lambda = 2 - 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, ce qui donne n valeurs distinctes. Il n'y a donc pas d'autres valeurs propres.

On peut vérifier que les cas $x < -2$ ou $x > 2$ ne donne aucune valeur propre. Poser par exemple $x = \pm 2\mathrm{ch}(u)$ et en faire un calcul analogue au précédent pour voir que dans ce cas, D_n ne peut s'annuler.

Les éléments $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2 - 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} 2\cos(\frac{k\pi}{n+1})x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2\cos(\frac{k\pi}{n+1})x_2 + x_3 = 0 \\ \ldots \\ x_{m-1} + 2\cos(\frac{k\pi}{n+1})x_m + x_{m+1} = 0 \\ \ldots \\ x_{n-1} + 2\cos(\frac{k\pi}{n+1})x_n = 0 \end{cases}$$

On peut considérer que les équations définissent une suite récurrente linéaire d'ordre 2 en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$. L'équation caractéristique associé est $r^2 + 2\cos(\frac{k\pi}{n+1})r + 1 = 0$, dont les racines sont $-\exp(\pm i\frac{k\pi}{n+1})$, i étant ici le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$. Donc il existe α et β tels que, pour tout m :

$$x_m = \alpha\,(-1)^m \exp(i\frac{mk\pi}{n+1}) + \beta\,(-1)^m \exp(-i\frac{mk\pi}{n+1})$$

La condition $x_0 = 0$ (ou $x_{n+1} = 0$) donne $\alpha + \beta = 0$. Donc $\beta = -\alpha$ donc :

$$\forall m,\ x_m = \alpha\,(-1)^m (\exp(i\frac{mk\pi}{n+1}) - \exp(-i\frac{mk\pi}{n+1}))$$

$$= 2i\alpha\,(-1)^m \sin(\frac{mk\pi}{n+1})$$

Ainsi, les vecteurs propres trouvés sont éléments de la droite vectorielle engendrée par le vecteur directeur de composantes $(-1)^m \sin(\frac{mk\pi}{n+1})$, $1 \leq m \leq n$.

La matrice M intervient dans plusieurs domaines des sciences physiques. Par exemple en chimie, elle sert à déterminer les états d'énergie des molécules de polyènes linéaires de formule C_nH_{n+2}, telles que l'éthylène $H_2C{=}CH_2$ ($n = 2$) ou le butadiène $CH_2{=}CH{-}CH{=}CH_2$ ($n = 4$). Pour $n = 4$, les valeurs de $2\cos(\frac{k\pi}{n+1})$ sont $\frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ce qui conduisit Richard Feynman (Mécanique quantique, Interéditions (1979), p.310-311) à écrire : « Ah ! Que de merveilles dans les mathématiques ! Le nombre d'or des Grecs nous donne l'état d'énergie minimum de la molécule de butadiène dans le cadre de cette théorie ! ».

Sol.16) ❑ On suppose b non nul. Le polynôme caractéristique $\det(M - \lambda I_n)$ vaut :

$$(a - \lambda + (n-1)b)(a - \lambda - b)^{n-1}$$

en additionnant toutes les colonnes à la première puis en retranchant la première ligne à toutes les autres. Les valeurs propres sont :

$\lambda = a - b$, le sous-espace propre étant l'hyperplan $x_1 + \ldots + x_n = 0$

$\lambda = a + (n-1)b$, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$.

❑ On peut aussi remarquer que la matrice est égale à $(a - b)I_n + bJ$ avec J matrice dont tous les termes valent 1. Il suffit de diagonaliser J. Or J est de rang 1 donc 0 est valeur propre avec comme sous-espace propre un hyperplan (d'équation $x_1 + ... + x_n = 0$). Par ailleurs, $\mathrm{Tr}(J) = n$, donc la dernière valeur propre est n, associé au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$.

REMARQUE : La matrice précédente intervient par exemple dans la situation suivante. On considère n variables aléatoires centrées réduites X_i associées à la taille de n parties diverses du corps humain (avant-bras, bras, cuisse, jambe, tronc, tour de taille, pointure, etc...). On constate que le coefficient de corrélation $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$ entre les mesures X_i et X_j de deux parties différentes du corps varie peu en fonction des deux parties choisies. On peut donc considérer ce coefficient comme constant égal à un nombre ρ. La matrice de corrélation, de terme général $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$, est alors de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & ... & \rho \\ \rho & 1 & \rho & ... & \rho \\ ... & & ... & & ... \\ \rho & \rho & \rho & ... & 1 \end{pmatrix}$. La plus grande valeur propre de cette matrice est $1 + (n-1)\rho$ correspondant au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$. La composante principale des mesures X_i est alors égale à la composante du projeté orthogonal de $\begin{pmatrix} X_1 \\ ... \\ X_n \end{pmatrix}$ sur la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$. A un facteur près, c'est la somme $X_1 + ... + X_n$ des mesures centrées réduites de chaque partie. On l'appelle *facteur taille*[1].

Sol.17) a) $(e_1, ..., e_n)$ étant la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a :

$$J(e_i) = e_{i-1 \bmod n},\ J^k(e_i) = e_{i-k \bmod n}$$

de sorte que $J^k = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ I_k & O \end{pmatrix}$ et $J^n = I_n$. J est diagonalisable puisque $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de J, scindé à racines simples. Si $\omega = \exp(\dfrac{2i\pi}{n})$, alors ω^k est valeur propre de J avec comme vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ ... \\ \omega^{k(n-1)} \end{pmatrix} = \varepsilon_k$.

b) $A = a_0 I_n + a_1 J + a_2 J^2 + ... + a_{n-1} J^{n-1}$. Donc A est diagonalisable dans la même base ε que celle de J. Si u est l'endomorphisme associé à J et v celui associé à A, alors :

$$v = a_0 \mathrm{Id} + a_1 u + ... + a_{n-1} u^{n-1}$$
$$v(\varepsilon_k) = (a_0 + a_1 \omega^k + ... + a_{n-1} \omega^{k(n-1)})\ \varepsilon_k$$

donc $\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} (a_0 + a_1 \omega^k + ... + a_{n-1} \omega^{k(n-1)})$, produit des valeurs propres simples de A.

Une autre démonstration est donnée dans les exercices du chapitre L1/DETERMNT.PDF.

Sol.18) a) On trouve $\begin{pmatrix} XI_n & B \\ XA & XI_p \end{pmatrix}$.

[1] Didier Dacunha-Castelle et Marie Duflo, Probabilités et statistiques, Masson (1982), tome I, p.11.

b) On prend le déterminant des deux membres de l'égalité a) :

$$X^p \det(XI_n - BA) = X^n \det(XI_p - AB) \Rightarrow \det(XI_n - BA) = X^{n-p} \det(XI_p - AB)$$

c) Si A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$, Q est la matrice de changement de base dans $\mathbb{K}^n$ et P dans $\mathbb{K}^p$ consistant à prendre, dans l'espace de départ, une base d'un supplémentaire du noyau complétée avec une base du noyau, et dans l'espace d'arrivée, l'image de la base du supplémentaire (donc une base de l'image) complétée en une base d'un supplémentaire de l'image. Dans les deux nouvelles bases, la matrice de l'application linéaire est J_r (revoir au besoin la notion de matrices équivalentes dans le chapitre L1/LINEF.PDF).

On a alors :

$$AB = PJ_rQ^{-1}QCP^{-1} = PJ_rCP^{-1}$$
$$BA = QCP^{-1}PJ_rQ^{-1} = QCJ_rQ^{-1}$$

Remarquons que $C \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $CJ_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $J_rC \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Il suffit donc de comparer les polynômes caractéristiques de CJ_r et J_rC. Si on utilise une décomposition par blocs de $C = \begin{pmatrix} U & V \\ W & Z \end{pmatrix}$ avec $U \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $V \in \mathcal{M}_{r,p-r}(\mathbb{K})$, $W \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$, $Z \in \mathcal{M}_{n-r,p-r}(\mathbb{K})$, compatible pour effectuer un produit avec J_r, on obtient :

$$CJ_r = \begin{pmatrix} U & O_{r,n-r} \\ W & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \text{ de polynôme caractéristique } X^{n-r} \det(U - XI_n)$$
$$J_rC = \begin{pmatrix} U & V \\ O_{p-r,r} & O_{p-r,p-r} \end{pmatrix} \text{ de polynôme caractéristique } X^{p-r}\det(U - XI)$$

donc les deux polynômes caractéristisques sont identiques à une puissance de X près.

d) La première démonstration résulte directement du b).

On également peut faire directement :

λ valeur propre non nulle de BA

$\Rightarrow$ $\exists\, V \neq 0$ tel que $BAV = \lambda V$

$\Rightarrow$ $ABAV = \lambda AV$

$\Rightarrow$ λ est valeur propre de AB avec AV pour vecteur propre (qui est bien non nul sinon $BAV = 0$).

On montre de même que, si μ est une valeur propre non nulle de AB de vecteur propre W, alors μ est une valeur propre de BA de vecteur propre BW.

Cependant, le b) montre de plus que les valeurs propres non nulles de AB et BA ont même ordre de multiplicité.

e) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ de valeur propre double 1.

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de valeur propre double 1, et de valeur simple propre 0.

Sol.19) a) Soit u vecteur non nul et $v = Mu$. On a alors $Mv = M^2u = -u$. (u, v) est libre. En effet, dans le cas contraire, il existe α tel que $v = \alpha u$, donc, en appliquant M, $-u = \alpha v = \alpha^2 u$, d'où $\alpha^2 = -1$, ce qui est absurde dans $\mathbb{R}$. L'endomorphisme de matrice M dans la base canonique a pour matrice J dans la base (u, v).

Géométriquement, J est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$. L'application de J à un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est analogue à la multiplication d'un complexe par i.

b) Si n était impair, M admettrait au moins une valeur propre réelle λ (car son polynôme caractéristique serait de degré impair et tout polynôme de degré impair admet une racine réelle), et dans ce cas, on devrait avoir λ racine du polynôme annulateur $X^2 + 1$ de M, ce qui est impossible pour un réel. Donc n est pair, égal à $2p$.

❑ Dans $\mathbb{C}$, M est diagonalisable car le polynôme annulateur $X^2 + 1$ se scinde à racines simples. Si X est vecteur propre complexe pour la valeur propre i, son conjugué est vecteur propre de valeur propre $-i$. Il en résulte que les deux sous-espaces propres ont même dimension p, les vecteurs de l'un étant conjugués des vecteurs de l'autre. Soient $(X_1, ..., X_p)$ une base du sous-espace vectoriel propre de valeur propre i. Pour $1 \leq k \leq p$, soit $Y_k = \mathrm{Re}(X_k)$ et $Z_k = \mathrm{Im}(X_k)$ (i.e. on prend la partie réelle ou imaginaire de chaque composante du vecteur X_k), de sorte que $X_k = Y_k + iZ_k$. On vérifiera que la famille des $2p$ vecteurs $(Z_k, Y_k)_{1\leq k\leq p}$ est libre sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$. Elle forme donc une base de $\mathbb{R}^n$. Par ailleurs :

$$MX_k = iX_k$$
$$\Rightarrow \quad MY_k + iMZ_k = iY_k - Z_k$$
$$\Rightarrow \quad MZ_k = Y_k \text{ et } MY_k = -Z_k$$

Dans cette nouvelle base, l'endomorphisme associé à M a une matrice de la forme voulue.

❑ On peut aussi procéder comme suit. Soit e_1 vecteur non nul, et $e_2 = Me_1$. On a $Me_2 = -e_1$ et les deux vecteurs sont indépendants sur $\mathbb{R}$, comme on l'a vu dans le a).

Supposons que l'on ait construit $(e_1, ..., e_{2q})$ qui formeront les q premiers blocs J. Soit e_{2q+1} non élément du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_{2q})$ et $e_{2q+2} = Me_{2q+1}$. On a $Me_{2q+2} = -e_{2q+1}$. Par ailleurs, les vecteurs $(e_1, ..., e_{2q+2})$ forment un système libre. En effet :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_{2q+1} e_{2q+1} + \lambda_{2q+2} e_{2q+2} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1 + ... + \lambda_{2q+1} e_{2q+2} - \lambda_{2q+2} e_{2q+1} = 0 \qquad \text{en appliquant M}$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_{2q+1}(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_{2q+1} e_{2q+1}) - \lambda_{2q+2}(\lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1 + ... - \lambda_{2q+2} e_{2q+1}) = 0$$

en effectuant une combinaison linéaire des deux lignes précédentes pour éliminer e_{2q+2}

$$\Rightarrow \quad ...\, e_1 + ... + (\lambda_{2q+1}^2 + \lambda_{2q+2}^2) e_{2q+1} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_{2q+1}^2 + \lambda_{2q+2}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{2q+1} = \lambda_{2q+2} = 0, \text{ puis } \lambda_1 = ... = \lambda_{2q} = 0.$$

On itère jusqu'à ce que $q = p$. Dans la base $(e_1, ..., e_{2p})$ obtenue, la matrice a la forme voulue.

Sol.20) a) Si M est nul, le résultat est trivial. Si M est non nulle, le noyau de l'endomorphisme associé est de dimension $n - 1$, donc 0 est valeur propre de multiplicité $n - 1$. La dernière valeur propre est donnée par la trace puisque la somme des valeurs propres est égale à la trace.

b) Prendre $x = -1$, d'où $\det(M + I_n) = \mathrm{Tr}(M) + 1$.

c) $\det(A + XX^T) = \det(A) \det(I + A^{-1}XX^T) = \det(A)(1 + \mathrm{Tr}(A^{-1}XX^T)) = \det(A)(1 + \mathrm{Tr}(X^TA^{-1}X))$

$= \det(A)(1 + X^TA^{-1}X)$ car $X^TA^{-1}X$ est une matrice 1×1, donc réduit à sa trace.

Une autre démonstration du c) est donnée dans les exercices de L1/DETERMNT.PDF.

Sol.21) a) $\varphi(M) = M + \mathrm{Tr}(AM)\, B$

donc $\varphi^2(M) = \varphi(M) + \mathrm{Tr}(AM)\, \varphi(B)$

$= M + 2\,\mathrm{Tr}(AM)\, B + \mathrm{Tr}(AM)\, \mathrm{Tr}(AB)\, B$

$= (\mathrm{Tr}(AB) + 2)\varphi(M) - (\mathrm{Tr}(AB) + 1)M$

$\Rightarrow \quad \varphi^2 - (\mathrm{Tr}(AB) + 2)\, \varphi + (\mathrm{Tr}(AB) + 1)\, \mathrm{Id} = 0$

Un polynôme annulateur de φ est $X^2 - (\mathrm{Tr}(AB) + 2)X + \mathrm{Tr}(AB) + 1$, de racines 1 et $\mathrm{Tr}(AB) + 1$.

Si $\mathrm{Tr}(AB) \neq 0$, alors on dispose d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc φ est diagonalisable, avec comme sous-espace propre associé à la valeur propre 1 l'hyperplan d'équation $\mathrm{Tr}(AM) = 0$, et pour sous-espace propre associé à $\mathrm{Tr}(AB) + 1$ la droite engendrée par B.

Si Tr(AB) = 0, alors la seule valeur propre est 1, mais comme $\varphi \neq \mathrm{Id}$, φ n'est pas diagonalisable (la droite B est incluse dans l'hyperplan).
b) Si Tr(AB) $\neq -1$, alors :

$$(\mathrm{Tr(AB)} + 2)\, \varphi - \varphi^2 = (\mathrm{Tr(AB)} + 1)\, \mathrm{Id}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi \circ \frac{1}{\mathrm{Tr(AB)} + 1} ((\mathrm{Tr(AB)} + 2)\, \mathrm{Id} - \varphi) = \mathrm{Id}$$

φ est inversible d'inverse $\dfrac{1}{\mathrm{Tr(AB)} + 1} ((\mathrm{Tr(AB)} + 2)\, \mathrm{Id} - \varphi)$.
Si Tr(AB) = – 1 alors $\varphi^2 = \varphi$. φ est un projecteur différent de Id, donc il n'est pas inversible.

Sol.22) Il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n$, valeurs propres de A, et $X_1, ..., X_n$, vecteurs propres associés, tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $AX_i = \lambda_i X_i$. Cherchons à quelle condition $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M de valeur propre λ, avec X et Y éléments de $\mathbb{R}^n$. Cette condition s'écrit :

$$\left[\begin{array}{l} AX + Y = \lambda X \\ X + AY = \lambda Y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (A - \lambda I_n)X + Y = 0 \\ X + (A - \lambda I_n)Y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Y = -(A - \lambda I_n)X \\ X - (A - \lambda I_n)^2 X = 0 \end{array} \right.$$

Pour qu'il existe une solution $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ non nulle, il faut et il suffit qu'il y ait une solution X soit non nulle à la deuxième équation. On veut donc que $I_n - (A - \lambda I_n)^2$ soit non inversible, soit $(A - (\lambda + 1)I_n)(A - (\lambda - 1)I_n)$ non inversible, et donc ou bien $A - (\lambda + 1)I_n$ non inversible ou bien $A - (\lambda - 1)I_n$ non inversible, ou encore : $\exists\, i, \lambda = \lambda_i \pm 1$.
Pour $\lambda = \lambda_i + 1$, on prend $X = X_i = Y$.
Pour $\lambda = \lambda_i - 1$, on prend $X = X_i = -Y$
M est diagonalisable, une base de vecteurs propres étant donnée par les $\begin{pmatrix} X_i \\ \pm X_i \end{pmatrix}$.

Sol.23) Dans $\mathbb{C}$, A est trigonalisable. Soient $\lambda_1, ... \lambda_n$ ses valeurs propres. On a :

$$\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + ... + \lambda_n = 0$$
$$\mathrm{Tr}(A^2) = \lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2 = 0$$
$$...$$
$$\mathrm{Tr}(A^n) = \lambda_1^n + ... + \lambda_n^n = 0$$

Pour montrer que A est nilpotente, il suffit de montrer que tous les λ_i sont nuls. En effet, son polynôme caractéristique vaudra X^n et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$ et A sera nilpotente.

❑ Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $\sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_i^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = na_0 = nP(0)$.

Notons $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les hypothétiques valeurs propres non nulles et donc $\lambda_{r+1} = ... = \lambda_n = 0$ et supposons par l'absurde que $0 < r \leq n$. Prenons $P(X) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_r)$. On a alors :

$$nP(0) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) + \sum_{i=r+1}^{n} P(\lambda_i) = 0 + (n - r)P(0)$$

donc $rP(0) = 0$ et donc $P(0) = 0$, mais $P(0) = (-1)^r \lambda_1...\lambda_r \neq 0$, ce qui est contradictoire.
Donc $r = 0$ et toutes les valeurs propres de A sont nulles.
❑ On peut aussi regrouper les valeurs propres de même valeur, λ_1 apparaissant k_1 fois, λ_2 apparaissant k_2 fois, ..., λ_p apparaissant k_p fois. On a alors le système :

$k_1\lambda_1 + ... + k_p\lambda_p = 0$
$k_1\lambda_1^2 + ... + k_p\lambda_p^2 = 0$
...
$k_1\lambda_1^{p-1} + ... + k_p\lambda_p^{p-1} = 0$
$k_1\lambda_1^p + ... + k_p\lambda_p^p = 0$

Si on note M la matrice de Vandermonde de terme général λ_j^{i-1}, on obtient MX = 0 avec $X = \begin{pmatrix} k_1\lambda_1 \\ ... \\ k_p\lambda_p \end{pmatrix}$. Comme M est inversible, on obtient X = 0 et donc tous les λ_i sont égaux à 0.

Sol.24) a) $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. On en déduit que :

$$\exp(M) = P \exp(D) P^{-1} = \begin{pmatrix} -2e^{-t}+3e^{2t} & 0 & -3e^{-t} + 3e^{2t} \\ e^{-t}-e^{2t} & e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{2t} & 0 & 3e^{-t}-2e^{2t} \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = 0$ donc $\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$. De même, $B^2 = 0$ donc $\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \theta J \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (A + B)^2 = -\theta^2 I_2.$$

Donc $(A + B)^{2n} = (-1)^n \theta^{2n} I_2$ et $(A + B)^{2n+1} = (-1)^n \theta^{2n+1} J$

Donc, en utilisant les séries entières $\sin(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\theta^{2n}}{(2n)!}$ (voir le chapitre L2/SERIENTR.PDF) :

$$\exp(A + B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

alors que :

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1-\theta^2 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\exp(A + B) \neq \exp(A)\exp(B)$. La raison en est que les matrices A et B ne commutent pas. En effet, les premiers termes du produit de Cauchy de exp(A) par exp(B) sont $I + A + B + \dfrac{A^2}{2} + AB + \dfrac{B^2}{2} + ...$ alors que ceux de exp(A + B) sont $I + A + B + \dfrac{(A+B)^2}{2} + ...$, mais $\dfrac{(A+B)^2}{2} = \dfrac{A^2 + AB + BA + B^2}{2}$. On peut montrer qu'on retrouve exp(A)exp(B) si les matrices commutent.

Sol.25) a) Le polynôme minimal a un degré inférieur ou égal à n.
b) Prendre x tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et vérifier que $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), ..., f(x), x)$ est libre, donc est une base de E. Dans cette base, f a une matrice de la forme demandée.
c) Vérifier comme ci-dessus que $(f^{p-1}(x), ..., f(x), x)$ est libre, donc $\dim(F) = p < n$. Compléter $(f^{p-1}(x), ..., f(x), x)$ en une base de E et prendre u prenant une valeur non nulle sur chaque vecteur de ce système libre et n'importe quoi sur les autres vecteurs de base. Etendre u à E par linéarité.
❑ $G \cap F = \{0\}$ car $y \in G \cap F \Rightarrow \exists\ \alpha_0, ..., \alpha_{p-1}, y = \alpha_0 x + ... + \alpha_{p-1}f^{p-1}(x)$ et $\varphi(y) = 0$. En appliquant successivement $u \circ f^{p-1}$, $u \circ f^{p-2}$, ..., $u \circ f$ et u à y, on obtient $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, ..., $\alpha_{p-1} = 0$. Donc $y = 0$.

❑ φ est surjective. S'il ne l'est pas, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est incluse dans un hyperplan de $\mathbb{K}^p$ d'équation $\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_p = 0$, avec les β_i non tous nuls, donc, pour tout y de E, $\beta_1 u(y) + ... + \beta_p u f^{p-1}(y) = 0$. En posant successivement $y = f^{p-1}(x)$, $y = f^{p-2}(x)$, ..., $y = x$, on obtient successivement $\beta_1 = 0$, ..., $\beta_p = 0$. Contradiction.
Donc $\mathrm{rg}(\varphi) = p$ et, d'après le théorème du rang, $\dim(G) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n - p$.
Donc $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = p + n - p = n = \dim(E)$.
Donc $E = F \oplus G$.
❑ G est stable par f : Si y appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi)$, il faut montrer que $f(y)$ aussi, ce qui est facile.
Une fois après avoir décomposé $E = F \oplus G$, itérer sur G.
On peut montrer que la décomposition de Jordan d'une matrice nilpotente est unique, même si la base dans laquelle cette décomposition est obtenue ne l'est pas. On peut également montrer que deux matrices nilpotentes sont semblables si et seulement si elles ont même décomposition de Jordan. Ainsi, chaque décomposition de Jordan caractérise une classe d'équivalence de matrices nilpotentes semblables.
d) Vérifier que :

$A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$, donc $n = 4$ et $p = 3$.

On peut prendre $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. F est engendré par $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \\ -17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Il s'agit de l'hyperplan d'équation $3y - 2z - 2t = 0$.

On peut prendre $u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = x + t$. On a alors $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + t \\ -15x - 7y - z - t \\ 4x + 2y \end{pmatrix}$. G = $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

Dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \\ -17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

◆