ESPACES VECTORIELS NORMES

PLAN

I : Normes

1- Définition

La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ou le module sur $\mathbb{C}$ permettent de définir des distances sur ces espaces, et de pouvoir parler de limites. Nous souhaitons étendre ces notions à des espaces plus généraux. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DEFINITION :
On appelle **norme** *sur* E*, notée usuellement* $\| \ \|$ *ou* N*, une application de* E *dans* $\mathbb{R}^+$ *telle que :*

i) $\forall x \in E, \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii) $\forall x \in E, \forall y \in E, \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$
iii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$

La propriété ii) est connue sous le nom d'**inégalité triangulaire**. On en déduit la propriété suivante :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \big| \| x \| - \| y \| \big| \leq \| x + y \|$$

En effet :

$$\| x \| = \| x + y - y \| \leq \| x + y \| + \| -y \| = \| x + y \| + \| y \|$$

donc $\| x \| - \| y \| \leq \| x + y \|$

de même :

$$\| y \| - \| x \| \leq \| x + y \|$$

donc $\big| \| x \| - \| y \| \big| \leq \| x + y \|$

Les normes permettent de définir une distance.

DEFINITION :

Une **distance** *sur un ensemble* E *est une application de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *telle que :*

i) $\forall x, \forall y, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $\forall x, \forall y, \forall z, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

iii) $\forall x, \forall y, d(x, y) = d(y, x)$

La propriété ii) est connue sous le nom d'inégalité triangulaire. Un espace normé est muni d'une distance. Il suffit de poser :

$$d(x, y) = \| x - y \|$$

2- Exemples

Voici des exemples de normes :

❑ Espace $\mathbb{R}^n$. Si X est un élément de $\mathbb{R}^n$ de composantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, on pose :

- $N_2(X) = \| X \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (norme euclidienne).

Cette norme est associée au produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T \times Y$ par la relation $\| X \|_2 = \sqrt{\langle X, X \rangle}$. Plus généralement tout espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ dispose de la norme euclidienne (voir les chapitres L1/ESPEUCL.PDF, L2/PREHILB.PDF pour les espaces sur $\mathbb{R}$, et L3/HERMITN.PDF pour la définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{C}$).

- $N_1(X) = \| X \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (norme du chauffeur de taxi new–yorkais. Elle correspond en effet pour $n = 2$ à la distance parcourue par un taxi dans une ville où les rues sont à angle droit)

- $N_\infty(X) = \| X \|_\infty = \text{Max } \{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$ (norme du joueur d'échecs ou, plus classiquement, norme dite uniforme. Elle correspond au nombre minimal de coups pour déplacer un roi du jeu d'échecs d'une case à une autre. A chaque coup, le roi se déplace d'une case dans les huit directions possibles)

L'utilisation des indices provient du fait que l'on peut définir une norme $\| X \|_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^\alpha\right)^{1/\alpha}$, pour tout $\alpha \geq 1$, et que la norme uniforme s'obtient en prenant la limite de la norme α en $+\infty$.
Seule l'inégalité triangulaire n'est pas évidente. Elle est prouvée dans le cas de la norme euclidienne dans le chapitre L1/ESPEUCL.PDF.
Pour une valeur $\alpha \geq 1$ quelconque, la preuve de l'inégalité triangulaire se fait en utilisant une inégalité de convexité avec la fonction convexe $f : x \geq 0 \to x^\alpha$. (voir L1/DERIVEE.PDF) .Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $a_i = |x_i|$ et $b_i = |y_i|$, et (en abrégeant $\sum_{i=1}^{n}$ en $\sum$) :

$$\lambda = \frac{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha}}{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}}, \qquad 1 - \lambda = \frac{\sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}}{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}}$$

$$u_i = \frac{a_i}{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha}} \qquad v_i = \frac{b_i}{\sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}}$$

L'inégalité de convexité donne, pour tout i, $f(\lambda u_i + (1 - \lambda)v_i) \leq \lambda f(u_i) + (1 - \lambda)f(v_i)$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{a_i + b_i}{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}}\right]^\alpha \leq \frac{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha}}{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}} \frac{a_i^\alpha}{\sum a_i^\alpha} + \frac{\sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}}{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}} \frac{b_i^\alpha}{\sum b_i^\alpha}$$

On fait la somme des n inégalités précédentes :

$$\sum \left[\frac{a_i + b_i}{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}}\right]^\alpha \leq \frac{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha}}{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}} + \frac{\sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}}{\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}} = 1$$

donc $\quad \sum (a_i + b_i)^\alpha \leq \left[\sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}\right]^\alpha$

donc $\quad \sqrt[\alpha]{\sum (a_i + b_i)^\alpha} \leq \sqrt[\alpha]{\sum a_i^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\sum b_i^\alpha}$

ce qui exprime que $\| X + Y \|_\alpha \leq \| X \|_\alpha + \| Y \|_\alpha$.

❑ Espace $\mathbb{C}^n$. Si Z est un élément de $\mathbb{C}^n$ de composantes $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$, on note :

- $N_1(Z) = \| Z \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|$
- $N_2(Z) = \| Z \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}$. Nous admettrons qu'il s'agit d'une norme.
- $N_\infty(Z) = \| Z \|_\infty = \text{Max } \{|z_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$ (norme uniforme)

❑ Espaces de matrices $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{R})$. On peut utiliser les normes qui précèdent mais en prenant en compte tous les coefficients a_{ij} de la matrice. Le cas de la norme euclidienne des matrices carrées présente un intérêt particulier. On peut en effet remarquer que le produit scalaire de deux matrices, coefficients par coefficients, n'est autre que $\mathrm{Tr}(A^T \times B)$ où Tr est la trace (somme des éléments diagonaux) et A^T la transposée de A. La norme n'est autre que $\sqrt{\mathrm{Tr}(A^TA)}$. En effet, si A a pour terme général a_{ij} et B a pour terme général b_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, alors :

$$(A^TB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, b_{ki}$$

donc $$\mathrm{Tr}(A^TB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, b_{ki}$$

donc $$\sqrt{\mathrm{Tr}(A^TA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2}$$

❑ Espaces de dimension infinie :
Il s'agit essentiellement des espaces de fonctions. Considérons l'espace vectoriel $C^0(I)$ des fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes. On dispose de :

- $N_1(f) = \| f \|_1 = \int_I |f(t)|\, dt$. Si I n'est pas un segment, on se restreint aux fonctions continues intégrables sur I. Si f est continue par morceaux, $N_1(f)$ peut être nul alors que f est non nulle en certains points. N_1 n'est donc une norme que si on se limite aux fonctions continues.

- $N_2(f) = \| f \|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2\, dt}$. Si I n'est pas un segment, on se restreint aux fonctions continues de carrés intégrables sur I. Si f est continue par morceaux, $N_2(f)$ peut être nul alors que f est non nul en certains points. Dans le cas réel, cette norme est une norme euclidienne provenant du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)\, dt$. Dans le cas complexe, on admettra l'inégalité triangulaire.

- $N_\infty(f) = \| f \|_\infty = \mathrm{Sup}\, \{|f(t)|, t \in I\}$ (norme uniforme sur l'espace des fonctions continues). Si I n'est pas un segment, on se limite aux fonctions continues bornées sur I. Cela s'applique également aux fonctions continues par morceaux sur I.

Un exemple particulier d'espace de fonctions est constitué des espaces de suites (fonctions de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Si $u = (u_n)$ est une suite, on définit :

- $N_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ sur l'espace l^1 des suites sommables.

- $N_2(u) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2}$ sur l'espace l^2 des suites de carrés sommables. Dans le cas réel, cette norme est une norme euclidienne provenant du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. Dans le cas complexe, on admettra que l'inégalité triangulaire est vérifiée.
- $N_\infty(u) = \text{Sup } \{|u_n|, n \in \mathbf{N}\}$ sur l'espace des suites bornées l^∞.

3- Convergence d'une suite vectorielle

Une suite réelle ou complexe (u_n) converge vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$$

Une suite dans un espace normé (u_n) converge vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \| u_n - l \| < \varepsilon$$

autrement dit, $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - l \| = 0$. Par différence avec l, on se ramène donc à une suite convergeant vers 0. Pour prouver la convergence de (u_n) vers 0, il suffit de majorer $\| u_n \|$ par une suite réelle (α_n) convergeant vers 0.

Si (u_n) est une suite vectorielle et (α_n) une suite réelle positive telle que :

$$\exists C, \forall n, \| u_n \| \leq C \alpha_n \text{ (i.e. } (\frac{u_n}{\alpha_n}) \text{ est bornée)}$$

on dit que la suite (u_n) est **dominée** par la suite (α_n) et on écrit que $u_n = O(\alpha_n)$.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{\alpha_n} = 0$, on dit que la suite (u_n) est **négligeable** devant la suite (α_n) et on écrit que $u_n = o(\alpha_n)$.

Comme pour les suites réelles, on montre que, si (u_n) et (v_n) sont deux suites de vecteurs qui convergent, alors il en est de même de la somme et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. De même, si une suite de scalaires (λ_n) convergent, ainsi qu'une suite (u_n) de vecteurs, il en est de même de la suite $(\lambda_n u_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \times \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

On notera également que l'inégalité triangulaire $|\| u_n \| - \| l \|| \leq \| u_n - l \|$ permet de montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| u_n \| = \| l \|$$

Autrement dit, la norme est une application continue.

Dans un espace de dimension finie E muni d'une base $(e_1, ..., e_p)$, on peut considérer les composantes de u_n suivant cette base. Nous noterons $u_n(i)$ la $i^{\text{ème}}$ composante.

PROPOSITION

*Soit (u_n) une suite dans un espace vectoriel E **de dimension finie** muni d'une norme N, et soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de E . Il y a équivalence entre :*

i) *La suite (u_n) converge pour la norme N vers un élément l*

ii) *Pour tout i élément de* $[\![1, p]\!]$, *la suite des i-èmes composantes* $(u_n(i))$ *des* u_n *dans la base* $(e_1, ..., e_p)$ *converge vers la i-ème composante* $l(i)$ *de l.*

Autrement dit, il suffit de raisonner composante par composante, et ceci, quelle que soit la norme utilisée.

<u>Démonstration</u> :
❑ ii) ⇒ i) : Appelons N_1 la norme somme des valeurs absolues (ou des modules) des composantes.

On a, pour tout vecteur $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i\, e_i$:

$$N(x) = N(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ N(e_i) \leq C \sum_{i=1}^{n} |x_i| = CN_1(x) \text{ où } C = \text{Max } \{N(e_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

En particulier :

$$N(u_n - l) \leq CN_1(u_n - l) = C \sum_{i=1}^{p} |u_n(i) - l(i)|$$

donc si chaque suite $(|u_n(i) - l(i)|)$ tend vers 0, il en est de même de leur somme, et donc de $N(u_n - l)$.

❑ i) ⇒ ii) : La réciproque est plus délicate. Elle repose sur une inégalité inverse de celle déjà prouvée $N \leq CN_1$. Nous montrons à la fin de ce chapitre qu'**en dimension finie**, quelle que soit les normes N et N' de l'espace E, il existe des constantes C et C' telles que :

$$\forall x \in E,\ N'(x) \leq CN(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E,\ N(x) \leq C'N'(x)$$

ou plus brièvement, $N' \leq CN$ et $N \leq C'N'$. On dit que les normes sont **équivalentes**. Nous admettrons provisoirement cette réciproque et noterons en rouge les endroits on utilise cette propriété. Dans le cas présent, il existe donc une constante C' telle que $N_1 \leq C'N$. On a alors, pour tout i :

$$|u_n(i) - l(i)| \leq \sum_{i=1}^{p} |u_n(i) - l(i)| = N_1(u_n - l) \leq C'N(u_n - l)$$

Donc si $N(u_n - l)$ tend vers 0, il en est de même de chaque composante.

Ainsi, la notion de convergence dans un espace vectoriel de dimension finie ne dépend pas de la norme. Si une suite tend vers 0 pour une norme donnée, alors elle tend vers 0 pour toute autre norme.

EXEMPLES :
❑ Sur $\mathbf{R}^p$, on a :

$$\text{Max}(|x_i|) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i| \leq p\ \text{Max}(|x_i|)$$

donc $N_\infty \leq N_2 \leq N_1 \leq pN_\infty$, prouvant l'équivalence de ces normes.

❑ Il n'en est pas de même en dimension infinie. Pour n supérieur ou égal à 1, soit f_n la fonction définie sur [0, 1] par :

$$f_n(0) = \sqrt{n}$$

$$f_n(\frac{1}{n}) = 0$$

f_n est affine sur $[0, \frac{1}{n}]$, soit $f_n(x) = \sqrt{n}\,(1 - nx)$

$f_n = 0$ pour $x \geq 1$

alors, on a :

$$N_1(f_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}},\ N_2(f_n) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } N_\infty(f_n) = \sqrt{n}$$

où les normes N_1, N_2, N_∞ sur $C^0([0, 1])$ ont été définies plus haut. On voit que la suite (f_n) tend vers 0 pour la norme N_1, qu'elle ne tend pas vers 0 pour la norme N_2 mais qu'elle est bornée pour cette norme, qu'elle tend vers l'infini pour la norme N_∞. ***Dire que la suite des f_n converge n'a pas de sens, si l'on ne précise pas de quelle norme il s'agit***. En particulier, on dit que :

une suite (f_n) converge **uniformément** vers f si $\lim\limits_{n\to\infty} N_\infty(f_n - f) = 0$,

(f_n) converge vers f **en moyenne** si $\lim\limits_{n\to\infty} N_1(f_n - f) = 0$,

(f_n) converge vers f **en moyenne quadratique** si $\lim\limits_{n\to\infty} N_2(f_n - f) = 0$.

Remarquons que, pour tout f continue sur [0, 1] :

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\ dt = \langle |f(t)|, 1\rangle \qquad \text{produit scalaire}$$

$$\leq N_2(f)\, N_2(1) = N_2(f) \qquad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

et $$N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\ dt} \leq N_\infty(f)$$

mais la suite (f_n) donnée au-dessus montre qu'il est impossible de trouver des constantes C telles $N_2 \leq CN_1$ ou $N_\infty \leq CN_2$, contrairement à ce qui se passe en dimension finie.

II : Vocabulaire

Le vocabulaire qui suit permet de mieux cerner les notions relatives aux limites. On se place dans un espace E muni d'une norme notée N ou $\|\ \|$.

1- Boules

On appelle **boule** (ouverte) $B(x, R)$ de centre x de rayon R l'ensemble $\{y \mid d(x, y) < R\}$ ou $\{y \mid \| x - y \| < R\}$. Les boules de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ouverts $]a, b[$.

Un **voisinage** de x est une partie qui contient une boule de centre x et de rayon strictement positif. Nous dirons qu'une propriété est vraie au voisinage de x_0 s'il existe R tel que la propriété soit vraie dans la boule $B(x_0, R)$.

On définit aussi les **boules fermées** en prenant une inégalité large : $B_f(x_0, R) = \{y \mid \| x - y \| \leq R\}$.

La notion de voisinage dépend de la norme utilisée, sauf en dimension finie en raison de l'équivalence des normes. Dans ce dernier cas en effet, soient deux normes $\|\ \|$ et N. Un voisinage V de x pour $\|\ \|$ contient l'ensemble $\{y \mid \| x - y \| < R\}$. Mais il existe une constante C telle que $\|\ \| \leq CN$. On a alors l'inclusion :

$$\{y \mid N(y-x) < \frac{R}{C}\} \subset \{y \mid \| x-y \| < R\} \subset V$$

donc V est un voisinage de x pour N. On montre de même que tout voisinage de x pour N est un voisinage de x pour $\| \ \|$ en utilisant l'autre inégalité du type $N \leq C' \| \ \|$.
Plus généralement, toutes les notions qui seront introduites par la suite dépendent de la norme utilisée, sauf en dimension finie où la norme utilisée sera indifférente. De ce point de vue, il y a une différence fondamentale entre espace vectoriel normé de dimension finie et espace vectoriel normé de dimension infinie.

La notion de boule intervient dans la définition des limites. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |a_n - l| < \varepsilon$$

ou de manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, a_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$$

Dans un espace normé, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \| a_n - l \| < \varepsilon$$

ou de manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, a_n \in B(l, \varepsilon)$$

Les boules jouent donc dans un espace normé le rôle des intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$.

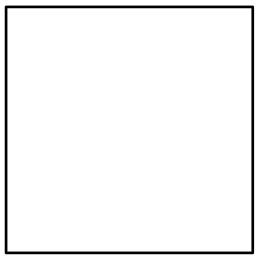
A est une **partie bornée** de E si elle est contenue dans une boule.

$$\exists x, \exists R, \forall y \in A, \| x-y \| < R$$

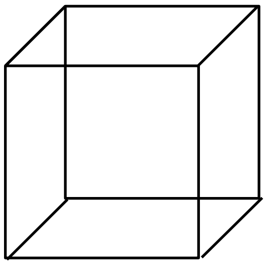
Voici des représentations de boules pour les normes N_1 et N_∞ en dimension inférieure ou égale à 4 :

- Les boules pour la norme N_∞ ont la forme suivante :

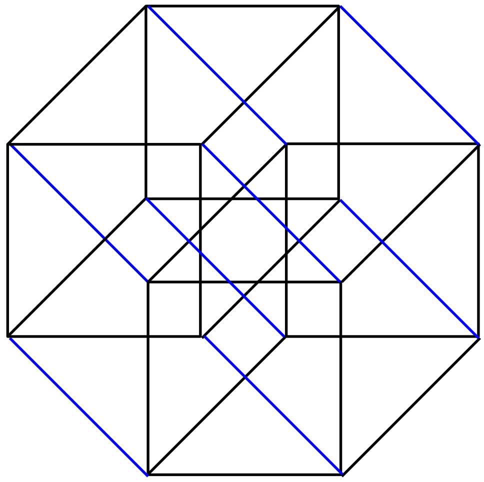
en dimension 2 :



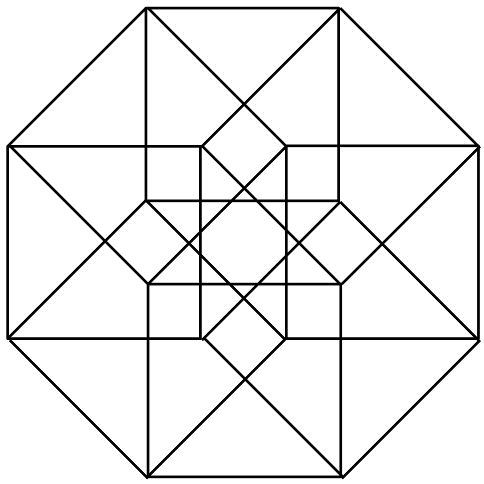
en dimension 3 :



en dimension 4, on obtient un hypercube, obtenu en translatant le cube dans une quatrième dimension :



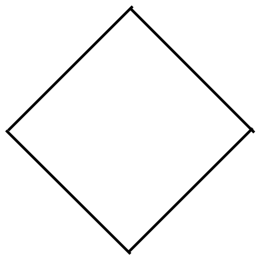
Mais les quatre dimensions jouent des rôles symétriques et il vaut mieux avoir une vision ne privilégiant pas de direction particulière :



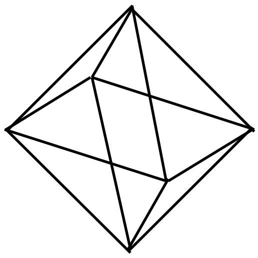
La figure ci-dessus possède 16 sommets, 32 arêtes, 24 faces carrées, 8 cubes.

- Les boules pour la norme N_1 ont la forme suivante :

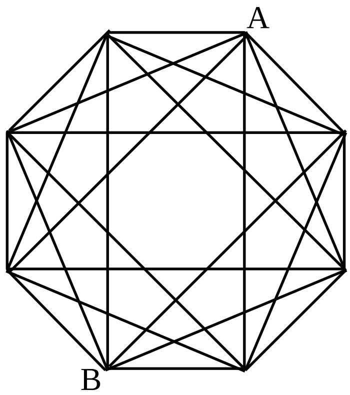
en dimension 2 :



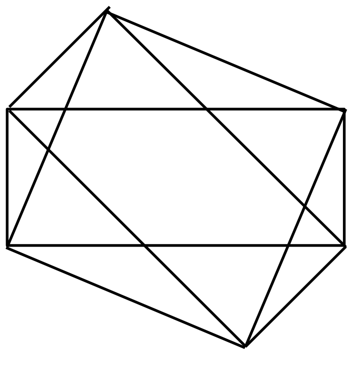
en dimension 3 :



Il s'agit d'un octaèdre (dual du cube, il est obtenu à partir du cube en joignant les centres des faces adjacentes). On l'obtient aussi à partir de la boule de dimension précédente en placant deux nouveaux points symétriquement par rapport au centre et en joignant ces deux points aux sommets précédemments existants.
On peut généraliser ces remarques en dimension 4, ou bien en prenant le dual de l'hypercube (en joignant les centres des cubes adjacents) ou bien en rajoutant deux points dans une quatrième dimension que l'on joint aux sommets de l'octaèdre. On obtient ainsi un hyper-octaèdre, polytope régulier convexe de dimension 4. (Il existe 5 polyèdres réguliers convexes en dimension 3, 6 en dimension 4 et 3 seulement en dimension supérieure).



Si on supprime par exemple les points A et B ainsi que leurs segments, on obtient :



qui est bien un octaèdre.
L'hyperoctaèdre possède 8 sommets, 24 arêtes, 32 faces triangulaires et 16 tétraèdres.

2- Points intérieurs à une partie, ouverts

On souhaite définir une notion qui généralise le résultat suivant dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ et } l \in \,]a, b[\, \Rightarrow \exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, a_n \in \,]a, b[$$

La propriété est vraie car l est à l'intérieur de l'intervalle (et non à l'une des bornes). Dans un espace normé, on souhaite avoir, pour une partie A de cet espace :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ et } l \text{ intérieur à A} \Rightarrow \exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, a_n \in \mathrm{A}$$

Quelle définition donner d'un point intérieur à une partie pour que cette propriété soit vraie ? On remarque que, s'il existe une boule B(l, R) avec R > 0 incluse dans A, alors on aura :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

$\Rightarrow \quad \exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, \| a_n - l \| < \mathrm{R}$

$\Rightarrow \quad \exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, a_n \in \mathrm{B}(l, \mathrm{R})$

$\Rightarrow \quad \exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, a_n \in \mathrm{A}$

et la conclusion sera vraie.

On posera donc la définition suivante :

DEFINITION

Un élément x de A *est dit* **intérieur** *à* A *s'il existe une boule* B(x, R) *de rayon strictement positif incluse dans* A. *On a alors* :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x \text{ et } l \text{ intérieur à A} \Rightarrow \exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, a_n \in \mathrm{A}$$

On appelle **intérieur** *de* A *noté* $\overset{\circ}{\mathrm{A}}$ *l'ensemble des points intérieurs à* A.

Si, pour tout point x d'une partie U, *il existe une boule centrée en x incluse dans* U, *alors on dira que* U *est un ensemble* **ouvert**. U *est égal à son intérieur. On a alors :*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x \text{ et } x \in \mathrm{U} \text{ ouvert} \Rightarrow \exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, a_n \in \mathrm{U}$$

Intuitivement, lorsqu'on est à l'intérieur d'une partie, on peut se déplacer en restant dans cette partie, à condition que le déplacement soit de faible amplitude.

EXEMPLES :

❑ Voici quelques exemples d'ouverts dans $\mathbb{R}$: les intervalles ouverts, bornés ou non, $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^*$.

❑ Voici des exemples de parties non ouvertes : $\mathbb{Q}$ et son complémentaire $\mathbb{Q}^c$, qui sont d'intérieur vide puisqu'il n'existe aucun intervalle inclus dans ces ensembles, les intervalles fermés qui possèdent comme intérieur l'intervalle ouvert obtenu en enlevant les bornes de l'intervalle fermé ...

❑ Voici des exemples d'ouverts du plan : $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$, B(0, R)...

❑ Voici des exemple de parties non ouvertes du plan : $\{(x, y) \mid x \geq 0, y > 0\}$ dont l'intérieur est $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$, $\mathbb{Z}^2$ qui est d'intérieur vide.

PROPRIETES DES OUVERTS :

i) E *et* ∅ *sont ouverts*
ii) *Une réunion quelconque d'ouvert est un ouvert.*
iii) *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*
iv) *Une boule ouverte est un ouvert.*

Démonstration :

❑ i) évident pour E. En ce qui concerne ∅, il est impossible de trouver un élément x qui contredise la propriété d'être intérieur à ∅, donc ∅ est ouvert !

❑ ii) Soit $\bigcup_{i\in I} O_i$ une réunion d'ouverts et x un élément quelconque de cette réunion. Il existe i tel que x soit élément de O_i, et O_i contient une boule centrée en x. Il en est donc de même de la réunion.

❑ iii) Soit $\bigcap_{i\in I} O_i$ une intersection d'ouverts et x élément quelconque de cette intersection. Pour chaque i, il existe R_i tel que $B(x,R_i) \subset O_i$. Les R_i, étant en nombre fini, possèdent un minimum R. On a alors $B(x, R) \subset O_i$ pour tout i, soit $B(x, R) \subset \bigcap_{i\in I} O_i$. Ce résultat est faux pour une intersection quelconque. Par exemple dans $\mathbf{R}$, $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est ouvert pour tout n entier, mais $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ n'est pas ouvert.

❑ iv) Soit $B = B(x_0, R)$ une boule ouverte, et soit $x \in B$. Alors $d(x, x_0) < R$. Posons $R' = R - d(x_0, x)$. Au moyen de l'inégalité triangulaire, il n'est pas difficile de montrer que $B(x, R')$ est incluse dans B.

$$y \in B(x, R') \Leftrightarrow d(y, x) < R' \Rightarrow d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < R' + d(x, x_0) = R$$

3- Points adhérents à une partie, fermés

Dans $\mathbf{R}$, on a des résultats tels que :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ et } \forall n, a_n \geq \alpha \Rightarrow l \geq \alpha \text{ (passage à la limité dans une inégalité large)}$$

On note que la conclusion se fait avec une inégalité large, même si l'hypothèse comporte une inégalité stricte :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ et } \forall n, a_n > \alpha \Rightarrow l \geq \alpha$$

On dira que l est adhérent à l'ensemble $]\alpha, +\infty[$. Dans un espace normé, on souhaite avoir également :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ et } \forall n, a_n \in A \Rightarrow l \text{ est adhérent à A.}$$

Quelle définition donner d'un point adhérent à une partie pour que cette propriété soit vraie ? La solution de facilité consiste à prendre cette implication comme définition : l est adhérent à A si l est la limite d'une suite de A. Mais cherchons une autre caractérisation. On remarque que, puisque a_n tend vers l et que a_n est élément de A, il existe des éléments de A aussi proche que l'on veut de l, ce qu'on peut traduire par :

$\forall R > 0, \exists a \in A, d(l, a) < R$

ou $\forall R > 0, \exists a \in A, a \in B(l, R)$

ou $\forall R > 0, A \cap B(l, R) \neq \emptyset$

Vérifions qu'inversement, un point x vérifiant :

$\forall R > 0, A \cap B(x, R) \neq \emptyset$

est limite d'une suite de A. Il suffit pour cela de prendre $R = 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...$ Pour chaque entier n, on a donc $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. Cela signifie qu'il existe a_n dans $B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. On a alors construit une suite de A convergeant vers x. D'où :

PROPOSITION-DEFINITION
Soit A *une partie de* E *et x un point de* E. *Il y a équivalence entre :*

i) $\forall$ R > 0, B(x, R) $\cap$ A $\neq \varnothing$

ii) *il existe une suite* (a_n) *d'éléments de* A *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ *(caractérisation séquentielle des points adhérents).*

On dit alors que x est **adhérent** *à* A. *On appelle* **adhérence** *de* A, *notée* $\overline{\mathrm{A}}$, *l'ensemble des points adhérents à* A.

EXEMPLE :

❑ Soit A =]0, 1[. $x = 0$ est adhérent à A car $x = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n} \in$ A pour $n \geq 2$. Plus généralement, l'adhérence de A est égale à [0, 1].
❑ L'adhérence de $\{(x, y) \mid x \geq 0, y > 0\}$ est égale à $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.
❑ $\mathbb{Z}^2$ est égale à sa propre adhérence.
❑ L'adhérence de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est égal à $\mathbb{R}$ car tout réel est limite de rationnels. (Voir L1/REELS.PDF). Plus généralement, si une partie A de E est telle que son adhérence $\overline{\mathrm{A}}$ est égale à E, on dit que A est **dense** dans E.

Revenons à l'énoncé dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ et } \forall\, n,\ a_n \geq \alpha \Rightarrow l \geq \alpha$$

Dans un espace normé, on souhaiterait caractériser les parties F telles que :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ et } \forall\, n,\ a_n \in \mathrm{F} \Rightarrow l \in \mathrm{F}$$

On sait que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ et $\forall\, n,\ a_n \in$ F $\Rightarrow l$ adhérent à F. Pour conclure que $l \in$ F, il suffit d'exiger que tout point adhérent appartienne à F. On dira alors que F est fermé, de sorte que :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ et } \forall\, n,\ a_n \in \mathrm{F} \text{ fermé} \Rightarrow l \in \mathrm{F}$$

Mais là aussi, l'implication a servi de définition. Que peut-on dire de plus sur F ? On remarque que, dans $\mathbb{R}$, [α, +∞[qui est fermé, est le complémentaire de]–∞, α[qui est ouvert. Montrons alors :

PROPOSITION-DEFINITION
Soit F *une partie de* E. *Il y a équivalence entre :*

i) *Tout point adhérent à* F *appartient à* F. *Autrement dit, toute suite convergente de* F *a sa limite dans* F (*caractérisation séquentielle des fermés*) *ou encore F est égale à son adhérence.*

ii) F *est le complémentaire d'un ouvert*

On dira alors que F *est* **fermé**, *et l'on a :*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ et } \forall\, n,\ a_n \in \mathrm{F} \textit{ fermé} \Rightarrow l \in \mathrm{F}$$

<u>Démonstration</u> :
❑ i) $\Rightarrow$ ii) : Supposons que tout point adhérent à F appartient à F. Soit x élément de F^c, complémentaire de F. Alors x n'appartient pas à F, donc x n'est pas adhérent à F, donc :

$$\exists\, \mathrm{R} > 0,\ \mathrm{B}(x, \mathrm{R}) \cap \mathrm{F} = \varnothing$$

ce qui signifie que $B(x, R) \subset F^c$. Donc x est intérieur à F^c. x étant quelconque, cela montre que F^c est ouvert.

❑ ii) $\Rightarrow$ i) : Supposons que $U = F^c$ soit ouvert, et soit x adhérent à F. Alors, pour tout $R > 0$, $B(x, R) \cap F \neq \emptyset$ de sorte que $B(x, R)$ n'est jamais inclus dans U, et donc que x n'appartient pas à U. (U étant ouvert, si x était élément de U, il y aurait une boule de centre x incluse dans U). Puisque x n'appartient pas à U, alors x appartient à F.

EXEMPLES
❑ Voici des exemples de fermés dans $\mathbb{R}$: les intervalles fermés, $\mathbb{Z}$.
❑ Voici des exemples de parties qui ne sont pas fermées dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^c$ dont l'adhérence est égale à $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts dont l'adhérence est l'intervalle fermé obtenu en rajoutant les bornes réelles de l'intervalle ouvert.
❑ Voici des exemples de fermés dans $\mathbb{R}^2$: une parabole, un cercle, $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$
❑ Voici des exemples de parties qui ne sont pas fermées dans $\mathbb{R}^2$: $\{(x, y) \mid x \geq 0, y > 0\}$ dont l'adhérence est $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$, $\mathbb{Q}^2$ dont l'adhérence est $\mathbb{R}^2$.

PROPRIETES DES FERMES :

i) $\emptyset$ *et* E *sont des fermés.*
ii) *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*
iii) *Une réunion finie de fermés est un fermé.*
iv) *Une boule fermée est un fermé.*

<u>Démonstration</u> :
❑ Les propriétés i), ii), iii) résultent des propriétés des ouverts par passage au complémentaire. Pour la propriété iv), montrons que le complémentaire d'une boule fermée $B_f(a, R)$ est un ouvert. Soit x élément de ce complémentaire. On a donc $\| x - a \| > R$. Prenons $R' < \| x - a \| - R$ et montrons que $B(x, R') \subset B_f(a, R)^c$:

$$\forall y, y \in B(x, R') \Rightarrow \| y - x \| \leq R'$$
$$\Rightarrow \| y - a \| = \| (y - x) - (x - a) \| \geq \| x - a \| - \| y - x \| \geq \| x - a \| - R' > R$$

donc $\quad y \in B_f(a, R)^c$

DEFINITION
Soit A *une partie d'un espace vectoriel normé* E. *On appelle* **frontière** *de* A, *notée* Fr(A), *l'ensemble des points qui sont adhérents à la fois à* A *et à* A^c.

EXEMPLES :
❑ La frontière de $[a, b[$ est $\{a, b\}$
❑ La frontière de $\{(x, y) \mid x \geq 0, y > 0\}$ est la réunion des deux demi-droites $[0, +\infty[\times \{0\}$ et $\{0\} \times [0, +\infty[$.
❑ La frontière de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$.

III : Fonctions définies sur un espace normé

1- Limites

❑ Soit f une application d'un espace normé E dans un espace normé F, E et F possédant le même corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (f n'est pas forcément linéaire). Soit D inclus dans E et a un point adhérent à D. On dit que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = b$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x \in A \text{ et } \| x - a \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - b \| < \varepsilon$$

(On a noté les normes de E et de F de la même façon pour alléger l'écriture, mais si les espaces sont différents, les normes sont évidemment différentes). On laisse au lecteur le soin de montrer que b est unique (démonstration analogue à celle des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Si F est un espace de dimension finie, on peut choisir une base $(e_1, ..., e_n)$ et poser :

$$\forall y \in F, y = y_1e_1 + .. + y_ne_n$$
$$\text{et } f(x) = f_1(x)e_1 + ... + f_n(x)e_n$$

où les y_i sont des scalaires et les f_i des fonctions de E dans le corps de base $\mathbb{K}$. Comme pour les suites, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ si et seulement si, pour tout i, $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = b_i$.

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans F, on définit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A, \forall x > A, \| f(x) - b \| < \varepsilon$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A, \forall x < A, \| f(x) - b \| < \varepsilon$$

Si f est une fonction de E dans $\mathbb{R}$, on définit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A, \exists \delta > 0, \forall x \in B(a, \delta), f(x) > A$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A, \exists \delta > 0, \forall x \in B(a, \delta), f(x) < A$$

❑ Comme pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a, pour f et g fonctions de E dans F et λ fonction de E dans $\mathbb{K}$ corps de base ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \to a} g(x) = c \Rightarrow \lim_{x \to a} (f + g)(x) = b + c$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \to a} \lambda(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to a} (\lambda f)(x) = lb$$

Pour f de E dans F et g de F dans G :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{y \to b} g(y) = c \Rightarrow \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$$

Les démonstrations sont identiques à celles concernant les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en changeant valeur absolue par norme.

Pour f de E dans F, on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \text{pour toute suite } (u_n) \text{ de limite } a, f(u_n) \text{ a pour limite } b$$

Le sens $\Rightarrow$ découle de la composée des limites des deux fonctions $n \to u_n$ et de $x \to f(x)$. En ce qui concerne la réciproque, si $f(x)$ ne convergeait pas vers b, cela signifierait que :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, \| x - a \| < \delta \text{ et } \| f(x) - b \| \geq \varepsilon$$

En prenant $\delta = \dfrac{1}{n}$ et en appelant u_n un élément tel que $\| u_n - a \| < \dfrac{1}{n}$ et $\| f(u_n) - b \| \geq \varepsilon$, on définit ainsi une suite (u_n) de limite a, pour laquelle $(f(u_n))$ ne tend pas vers b, contrairement à l'hypothèse.

❑ f est **continue** en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Si f n'est pas définie en a, mais si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = b$, on peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = b$.

❑ S'il existe une fonction φ de E dans $\mathbb{R}$ et une constante C telle que, au voisinage de a, $\| f(x) \| \leq C\,\varphi(x)$, on dit que f est **dominée** par φ au voisinage de a, et on note $f = O(\varphi)$. Si $\dfrac{\| f \|}{\varphi}$ tend vers 0 quand x tend vers a, on dit que f est **négligeable** devant φ au voisinage de a et on note $f = o(\varphi)$.

2- Continuité

f définie de D, inclus dans E, à valeurs dans F est dite continue sur D si f est continue en tout point de D. On note C(D, F) l'espace vectoriel des applications continues de D dans F. La somme de deux fonctions continues à valeurs dans F, le produit d'une fonction continue à valeur dans F par une fonction continue à valeur dans $\mathbb{K}$, la composée de deux fonctions continues, sont continues. Si F est de dimension finie, il y a équivalence entre la continuité de f et la continuité de chacune de ses composantes f_i.

EXEMPLE :
Un polynôme de plusieurs variables $x_1, ..., x_n$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$. Il s'agit d'une fonction continue.

PROPOSITION
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ *continue, et a un réel. Alors* $\{x, f(x) \geq a\}$ et $\{x, f(x) \leq a\}$ *sont fermés.* $\{x, f(x) > a\}$ *et* $\{x, f(x) < a\}$ *sont ouverts*

Démonstration :
❑ Soit (x_n) une suite convergeant vers x tel que, pour tout n, $f(x_n) \geq a$. Alors, en passant à la limite, $f(x) \geq a$. On a montré que $\{x, f(x) \geq a\}$ est fermé. On procède de même pour $\{x, f(x) \leq a\}$. Quant à $\{x, f(x) > a\}$ et $\{x, f(x) < a\}$, ce sont les complémentaires des parties précédentes, donc il sont ouverts.

Cette proposition permet de montrer facilement qu'un ensemble est ouvert ou fermé, comme dans les exemples suivants.

EXEMPLES :
❑ $\{(x, y) \mid y^2 \geq x^2 + 3\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Il suffit en effet de définir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = y^2 - x^2$ pour s'apercevoir qu'il s'agit de l'ensemble $\{(x, y), f(x, y) \geq 3\}$.

❑ $\{(x, y) \mid y^2 > x^2 + 3\}$ est ouvert.

❑ $\{(x, y, z) \mid xy \leq z$ et $z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ est fermé, comme intersection du fermé $F = \{(x, y, z) \mid xy \leq z\}$ et du fermé $G = \{(x, y, z) \mid z \leq 1 - x^2 - y^2\}$.

❑ $\{(x, y, z) \mid xy \leq z$ ou $z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ est fermé, comme réunion du fermé $F = \{(x, y, z) \mid xy \leq z\}$ et du fermé $G = \{(x, y, z) \mid z \leq 1 - x^2 - y^2\}$.

❑ Une boule fermée est fermée. En effet $B(a, R) = \{x, \| x - a \| \leq R\} = \{x, f(x) \leq R)$ avec f la fonction continue $x \to \| x - a \|$, composée des deux fonctions continues $x \to x - a$ et $\| \ \|$.

On admet provisoirement le théorème suivant, qui généralise le fait que l'image d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles est un segment. Il sera montré plus loin dans ce chapitre. On essaie ainsi de généraliser la notion de segment aux espaces normés :

THEOREME

Soient E *et* F *étant deux espaces normés de* ***dimension finie****. Alors l'image d'une partie fermée bornée de* E *par une application f continue à valeurs dans* F *est fermée bornée. En particulier, si* F *est égal à* $\mathbb{R}$, *f admet un maximum et un minimum.*

La première partie du théorème est momentanément admise. Elle sera montrée plus loin en liaison avec la notion de compact.
En ce qui concerne le cas $F = \mathbb{R}$, si A est un fermé bornée, alors $f(A)$ est fermé borné. La borne supérieure de $f(A)$ est donc en fait un maximum. On raisonne de même pour le minimum.

Ce résultat peut être faux pour des espaces vectoriels normés de dimension infinie.

EXEMPLE :
❑ Soit $f(x, y) = 3x^2 - 8xy - 5y^2$. Montrer que f admet des extrema sur le disque unité fermé D. Déterminer ces extrema.
D est un fermé borné donc f y admet un maximum et un minimum. Si un extremum est intérieur au disque, alors le gradient de f doit s'y annuler (voir la notion de point critique dans L1/CALCDIF1.PDF) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x - 8y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -8x - 10y = 0 \end{cases}$$

d'où $x = y = 0$. Mais au voisinage de 0, f change de signe (considérer $f(x, 0)$ et $f(0, y)$), donc les extrema sont nécessairement sur le cercle unité, frontière de D. Si on pose $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3\cos^2(\theta) - 8\cos(\theta)\sin(\theta) - 5\sin^2(\theta) \\ &= 4\cos(2\theta) - 1 - 4\sin(2\theta) \\ &= 4\sqrt{2}\cos(2\theta + \frac{\pi}{4}) - 1 \end{aligned}$$

donc le maximum de f vaut $4\sqrt{2} - 1$ et le minimum $-4\sqrt{2} - 1$.

3- Fonctions lipschitziennes

Pour qu'une fonction f soit continue, et donc vérifie :

$$\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, \| x - y \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

il suffit que l'on ait :

$$\forall\, x,\ \forall\, y,\ \| f(x) - f(y) \| \leq k \| x - y \|$$

En effet, dans ce cas, il suffit de prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ pour que la définition de la continuité soit vérifiée.

On dit que f est **lipschitzienne** de rapport k. Une fonction lipschitizienne est donc continue. On peut noter que, si f et g sont lipschitziennes, il en est de même de la somme, du produit par un scalaire et de la composée.

EXEMPLES :

❑ Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables à dérivées bornées sont lipschitziennes. Si M majore $|f'|$, on a, en vertu de l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\, x,\ \forall\, y,\ |f(x) - f(y)| \leq k\, |x - y|$$

❑ La fonction de E dans $\mathbb{R}$, qui à x associe $\| x \|$ est lipschitzienne de rapport 1. En effet :

$$\forall\, x,\ \forall\, y,\ \big|\, \| x \| - \| y \| \,\big| \leq \| x - y \|$$

❑ La fonction $f : x \to x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue mais n'est pas lipschizienne. En effet :

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |x + y| \qquad \text{quantité qui n'est pas bornée}$$

4- Cas des applications linéaires

Nous avons vu que f lipschitzienne $\Rightarrow f$ continue et que la réciproque est fausse. Cependant, si f est liénaire, les deux notions sont identiques.

PROPOSITION :
Soit u une application linéaire d'un espace normé (E, N) *dans un espace normé* (F, N'). *Il y a équivalence entre :*

i) *il existe k tel que* : $\forall\, x \in \mathrm{E},\ \mathrm{N}'(u(x)) \leq k\, \mathrm{N}(x)$
ii) *u est lipschitzienne*
iii) *u est continue sur* E
iv) *u est continue en* 0

Dans le cas où E ***est de dimension finie****, ces propriétés sont vérifiées.*

<u>Démonstration</u> :
❑ i) $\Rightarrow$ ii) car $\mathrm{N}'(u(x) - u(y)) = \mathrm{N}'(u(x - y)) \leq k\, \mathrm{N}(x - y)$

❑ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) est évident

❑ Supposons iv) et montrons i). La continuité en 0 implique que (pour $\varepsilon = 1$) :

$$\exists\, \delta > 0,\ \forall\, x,\ \mathrm{N}(x) < \delta \Rightarrow \mathrm{N}'(u(x)) < 1$$

Soit x quelconque non nul. Alors $\dfrac{\delta}{2\mathrm{N}(x)}\, x$ est de norme inférieure à δ, donc :

$$\mathrm{N}'\left(\frac{\delta}{2\mathrm{N}(x)}\, u(x)\right) < 1$$

$\Rightarrow \qquad N'(u(x)) < \frac{2}{\delta} N(x)$ et i) est vérifié avec $k = \frac{2}{\delta}$

Dans le cas où E est de dimension finie, on peut choisir une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E. On a alors :

$$N'(u(x)) = N'(u(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)) = N'(\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N'(u(e_i))$$

$$\leq N_1(x) \underset{i=1..n}{\text{Max}} N'(u(e_i))$$

Les normes étant équivalentes en dimension finie, il existe une constante C telle que $N_1 \leq CN$, donc :

$$N'(u(x)) \leq N(x) \times C \times \underset{i=1..n}{\text{Max}} N'(u(e_i)) = k\, N(x)$$

avec $k = C \times \underset{i=1..n}{\text{Max}} N'(u(e_i))$.

❑ La continuité de u n'est pas nécessairement vérifiée si E est de dimension infinie. Considérons par exemple $E = C^0([0,1])$ muni de la norme $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ et $u : E \to \mathbb{R}$ définie par $u(f) = f(0)$.

Considérons la suite (f_n) de E où f_n est la fonction telle que :

$f_n(0) = 1 - nx$ sur $[0, \frac{1}{n}]$

$f_n(\frac{1}{n}) = 0$ sur $[\frac{1}{n}, 1]$

On a $u(f_n) = 1$ alors que $N_1(f_n) = \frac{1}{2n}$ donc (f_n) tend vers 0 pour la norme N_1 alors que ce n'est pas le cas de $u(f_n)$ qui est constante. Donc u n'est pas continue.

5- Norme d'une application linéaire continue

Dans le cas où $u : E \to F$ est continue (et en particulier si E est de dimension finie), on note $|||\, u\, |||$ la plus petite constante de Lipschitz k de u. Il suffit pour cela de prendre :

$$|||\, u\, ||| = \text{Sup}\, \{\frac{\|\, u(x)\, \|}{\|\, x\, \|}, x \neq 0\}$$

où on a noté de la même façon $\| \;\|$ pour la norme de E et la norme de F pour alléger les notations.

En effet, $|||\, u\, |||$ est un majorant de $\frac{\|\, u(x)\, \|}{\|\, x\, \|}$, donc on aura pour tout x de E, $\|\, u(x)\, \| \leq |||\, u\, |||\; \|\, x\, \|$. Par ailleurs, si k est une constante de Lipschitz de u, alors k majore les $\frac{\|\, u(x)\, \|}{\|\, x\, \|}$ donc est supérieur ou égal à $|||\, u\, |||$, plus petit majorant.

En posant $x = \|\, x\, \|\, y$, où y est unitaire, on voit qu'on a aussi :

$$|||\, u\, ||| = \text{Sup}\, \{\|\, u(y)\, \|,\ y \in S\}$$

où S est la sphère unité.

On a enfin :

$$|||\, u\, ||| = \text{Sup}\, \{\|\, u(y)\, \|,\ y \in B\}$$

où B est la boule fermée unité. En effet, pour y dans B :

$$\| u(y) \| \leq ||| u ||| \, \| y \| \leq ||| u ||| \qquad \text{car } \| y \| \leq 1$$

donc $||| u |||$ majore $\{\| u(y) \| \mid y \in B\}$ donc $||| u ||| \geq \text{Sup } \{\| u(y) \|, y \in B\}$. Mais, par ailleurs, on a :

$$\{\| u(y) \| \mid y \in S\} \subset \{\| u(y) \| \mid y \in B\}$$

donc :

$$\text{Sup } \{\| u(y) \|, y \in S\} \leq \text{Sup } \{\| u(y) \|, y \in B\}$$

donc :

$$||| u ||| \leq \text{Sup } \{\| u(y) \|, y \in B\}$$

En dimension finie, $||| u |||$ est en fait un maximum. En effet, la fonction $\varphi : x \to \| u(x) \|$ est continue sur la sphère unité $S = \{y, \| y \| = 1\}$ qui est fermée (toute suite convergente (y_n) de vecteurs unitaires a pour limite l un vecteur unitaire car, par continuité de $x \to \| x \|$, $\| l \|$ est égale à $\lim\limits_{n\to\infty} \| y_n \| = 1$) et bornée. La fonction φ admet donc non seulement une borne supérieure, mais un maximum. Par conséquent, pour montrer que $\| u \| = k$, on cherchera d'abord à majorer $\| u(x) \|$ par $k \| x \|$, puis on cherchera un x pour lequel on a l'égalité.
En dimension infinie, le maximum n'est peut-être pas atteint. Le problème est donc plus difficile.

Géométriquement, $||| u |||$ est le rayon de la plus petite boule contenant l'image par u de la boule unité B.

EXEMPLES :

❑ Soit $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, qui à $z = (x, y)$ associe $ax + by$. La matrice de u dans la base canonique est la ligne $(a\ b)$. Prenons dans $\mathbf{R}$ la valeur absolue. On a $|ax + by| \leq |a|\,|x| + |b|\,|y|$.

Si dans $\mathbf{R}^2$, on prend la norme N_∞, alors $|ax + by| \leq (|a| + |b|)\, N_\infty(z)$ et l'égalité est atteinte pour $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$ suivant le signe de a et b. De sorte que $||| u ||| = |a| + |b| = N_1(a, b)$.

Si dans $\mathbf{R}^2$, on prend la norme N_1, alors $|ax + by| \leq \text{Max}(|a|,|b|)\, N_1(z)$ et l'égalité est atteinte pour $x = 0$ ou 1 et $y = 0$ ou 1 suivant que le maximum vaut a ou b. De sorte que $||| u ||| = \text{Max}(|a|,|b|) = N_\infty(a, b)$.

Si dans $\mathbf{R}^2$, on prend la norme N_2, alors $|ax + by| \leq N_2(z)\, N_2(a,b)$ en utilisant l'inégalité de Schwarz et l'égalité est atteinte pour (x, y) colinéaire à (a, b). De sorte que $||| u ||| = N_2(a,b)$.

❑ Soit $u : C^0([a, b]) \to \mathbf{R}$ définie par $u(f) = \int_a^b f(t)\, dt$. Montrons que u est continue lorsqu'on munit respectivement $C^0([a,b])$ des normes suivantes, et donnons la valeur de $||| u |||$ dans chacun des cas suivants :

a) $N_\infty(f) = \text{Sup}\{|f(t)|, t \in [a,b]\}$

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq (b - a) N_\infty(f) \text{ avec égalité si } f = 1 \Rightarrow ||| u ||| = b - a$$

b) $N_1(f) = \int_a^b |f(t)|\, dt$

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \mathrm{N}_1(\mathrm{f}) \text{ avec égalité si } f = 1 \Rightarrow |||\, u \,||| = 1$$

c) $\mathrm{N}_2(f) = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}$

$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{b-a}\ \mathrm{N}_2(f)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec égalité si $f = 1$, donc $|||\, u \,||| = \sqrt{b-a}$

❑ Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour U = (u_n) élément de E, on pose $\|\, \mathrm{U} \,\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n|$. Il n'est pas difficile de vérifier que $\|\ \ \|_\infty$ est une norme. Soit f la forme linéaire définie sur E par :

$$\forall\, \mathrm{U} \in \mathrm{E},\ f(\mathrm{U}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$$

f est 2-lipschitzienne car :

$$|f(\mathrm{U})| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \leq \|\, \mathrm{U} \,\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\, \|\, \mathrm{U} \,\|_\infty$$

Par ailleurs, l'égalité est atteinte si on prend la suite U constante égale à 1. Ainsi, $|||\, f \,||| = 2$.
Considérons maintenant le sous-espace vectoriel F des suites de limite nulle et la restriction g de f à F. On a toujours g lipschitzienne de rapport 2, mais il est plus difficile de montrer $|||\, g \,||| = 2$. En effet, l'égalité précédente ne peut être atteinte pour un élément U de F. Cependant, si on prend pour U la suite (1, 1, ...1, 1, 0, 0, ..., 0, ...) commençant par $n + 1$ termes 1, on a $\|\, \mathrm{U} \,\|_\infty = 1$ et :

$$|g(\mathrm{U})| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Donc $|||\, g \,||| = \mathrm{Sup}\{\frac{|g(\mathrm{U})|}{\|\, \mathrm{U} \,\|}, \mathrm{U} \in \mathrm{F}, \mathrm{U} \neq 0\} \geq 2 - \frac{1}{2^n}$.
Ceci étant vrai pour tout n, on a $|||\, g \,||| \geq 2$, et comme on avait déjà $|||\, g \,||| \leq 2$, on a bien encore $|||\, g \,||| = 2$.

PROPOSITION
$|||\ \ |||$ est une norme sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E *dans* F*, appelée* **norme subordonnée** *aux normes de* E *et* F.
De plus, si $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *et* $v : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *sont continues, alors* $|||\, v \circ u \,||| \leq |||\, v \,|||\ |||\, u \,|||$.

De façon plus légère, on peut noter $\|\, u \,\|$ en place de $|||\, u \,|||$ en prenant garde que $\|\ \ \|$ appliqué à un vecteur est généralement utilisé pour désigner la norme de E ou de F, alors que $\|\ \ \|$ appliqué à une application linéaire ne peut être que la norme de cette application linéaire subordonnée aux normes de E et de F.

Démonstration :

❑ Pour tout u continue, on a évidemment $|||\, u \,||| \geq 0$. Si $|||\, u \,||| = 0$, alors, pour tout x de E, on a :

$$\|\, u(x) \,\| \leq |||\, u \,|||\ \|\, x \,\| = 0$$

donc

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ \|\, u(x) \,\| = 0$$

donc

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ u(x) = 0$$

et $u = 0$.

❑ Soient u, v : E $\to$ F continues. On a, pour tout x de E :

$$\begin{aligned} \|\, (u + v)(x) \,\| &= \|\, u(x) + v(x) \,\| \\ &\leq \|\, u(x) \,\| + \|\, v(x) \,\| \\ &\leq |||\, u \,|||\ \|\, x \,\| + |||\, v \,|||\ \|\, x \,\| \\ &\leq (|||\, u \,||| + |||\, v \,|||)\ \|\, x \,\| \end{aligned}$$

donc $|||\, u \,||| + |||\, v \,|||$ est une constante de Lipschitz de $u + v$. Comme $|||\, u + v \,|||$ en est la plus petite constante de Lipschitz, on a $|||\, u + v \,||| \leq |||\, u \,||| + |||\, v \,|||$

❑ La même démonstration s'applique pour la composée de fonctions de u : E $\to$ F et v : F $\to$ G. Pour tout x de E, on a :

$$\begin{aligned} \|\, (v \circ u)(x) \,\| &= \|\, v(u(x)) \,\| \\ &\leq |||\, v \,|||\ \|\, u(x) \,\| \\ &\leq |||\, v \,|||\ |||\, u \,|||\ \|\, x \,\| \end{aligned}$$

donc $|||\, u \,|||\ |||\, v \,|||$ est une constante de Lipschitz de $v \circ u$. Comme $|||\, v \circ u \,|||$ en est la plus petite constante de Lipschitz, on a $|||\, v \circ u \,||| \leq |||\, u \,|||\ |||\, v \,|||$

❑ Soit λ un scalaire qu'on peut supposer non nul. Montrons que $|||\, \lambda u \,||| = |\lambda|\ |||\, u \,|||$ (trivialement vérifié si $\lambda = 0$). Pour tout x de E, on a :

$$\begin{aligned} \|\, \lambda u(x) \,\| &= |\lambda|\ \|\, u(x) \,\| \\ &\leq |\lambda|\ |||\, u \,|||\ \|\, x \,\| \end{aligned}$$

donc $|\lambda|\ |||\, u \,|||$ est une constante de Lipschitz de λu, donc $|||\, \lambda u \,||| \leq |\lambda|\ |||\, u \,|||$.

Réciproquement, en remplaçant u par λu et λ par $\dfrac{1}{\lambda}$, on aura de même :

$$|||\, u \,||| = |||\, \frac{1}{\lambda} \lambda u \,||| \leq \frac{1}{|\lambda|}\ |||\, \lambda u \,|||$$

donc $\quad |\lambda|\ |||\, u \,||| \leq |||\, \lambda u \,|||$.

On a donc bien $|||\, \lambda u \,||| = |\lambda|\ |||\, u \,|||$.

COROLLAIRE

Si u est un endomorphisme continu de E*, alors, pour tout entier naturel n,* $|||\, u^n \,||| \leq |||\, u \,|||^n$.

Démonstration :

❑ Par récurrence sur n en utilisant $|||\, u^n \,||| = |||\, u^{n-1} \circ u \,||| \leq |||\, u^{n-1} \,|||\ |||\, u \,|||$.

EXEMPLE :

❑ Soit E un espace normé p un projecteur non nul de E. Alors $|||\, p\, ||| \geq 1$. En effet :

$$p = p \circ p \Rightarrow |||\, p\, ||| = |||\, p \circ p\, ||| \leq |||\, p\, |||^2 \Rightarrow |||\, p\, ||| \geq 1$$

De plus, si E est un espace euclidien, alors p est un projecteur orthogonal si et seulement $|||\, p\, ||| = 1$. En effet, si p est un projecteur orthogonal, et si x élément de E se décompose en $y + z$ avec $y = p(x)$ et z orthogonal à y, alors le théorème de Pythagore permet de voir que $\|\, p(x)\, \| = \|\, y\, \| \leq \|\, x\, \|$, donc $|||\, p\, ||| \leq 1$. Comme on a par ailleurs $|||\, p\, ||| \geq 1$, on a $|||\, p\, ||| = 1$.

Réciproquement, soit p est un projecteur sur F parallèlement à G, tel que $|||\, p\, ||| = 1$. Si $G = \{0\}$, alors $p = \mathrm{Id}$ et p est bien un projecteur orthogonal. Supposons donc $G \neq \{0\}$. Soit x_F un vecteur quelconque de F et x_G un vecteur quelconque de G. Alors :

$$x_F = p(x_F + x_G)$$

$\Rightarrow \quad \|\, x_F\, \| \leq |||\, p\, ||| \times \|\, x_F + x_G\, \| = \|\, x_F + x_G\, \|$

$\Rightarrow \quad \|\, x_F\, \|^2 \leq \|\, x_F\, \|^2 + \|\, x_G \|^2 + 2\langle x_F, x_G\rangle$ — en élevant au carré

$\Rightarrow \quad 0 \leq \|\, x_G \|^2 + 2\langle x_F, x_G\rangle$

et $\quad 0 \leq \|\, x_G \|^2 - 2\langle x_F, x_G\rangle$ — en appliquant la même inégalité sur $-x_G$.

$\Rightarrow \quad |\langle x_F, x_G\rangle| \leq \dfrac{1}{2} \|\, x_G \|^2$

$\Rightarrow \quad \left|\left\langle x_F, \dfrac{x_G}{\|\, x_G\, \|}\right\rangle\right| \leq \dfrac{1}{2} \|\, x_G\, \|$ — pour tout x_G non nul

Choisissons u vecteur non nul quelconque de G et posons $x_G = \lambda u$, puis faisons tendre λ vers 0. On obtient

$$\langle x_F, u\rangle = 0$$

On a montré que les vecteurs de F sont orthogonaux aux vecteurs de G, et p est bien un projecteur orthogonal.

Cette réciproque peut aussi se montrer comme suit : soit $x \in G^\perp$. Soit $y = x - p(x)$. On a $y \in G$. Comme $p(x) = x - y$ et que $x \perp y$, on a $\|\, p(x)\, \|^2 = \|\, x\, \|^2 + \|\, y\, \|^2 \geq \|\, x\, \|^2$. Comme l'hypothèse donne $\|\, p(x)\, \| \leq \|\, x\, \|$, on a $\|\, p(x)\, \| = \|\, x\, \|$ et donc $\|\, y\, \| = 0$ donc $y = 0$, donc $x = p(x)$ et $x \in F$. Donc $G^\perp \subset F$ et en comparant les dimensions, on obtient l'égalité $G^\perp = F$.

6- Applications multilinéaires

Ce que nous venons de dire s'applique également aux applications bilinéaires. Soit $B : E \times F \to G$ bilinéaire, qui à (x, y) associe $B(x, y)$. Si E et F sont de dimension finie, alors il existe une constante k telle que :

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ \|\, B(x, y)\, \| \leq k\, \|\, x\, \|\, \|\, y\, \|$$

La relation ainsi obtenue est une généralisation de l'inégalité de Schwarz pour le produit scalaire. La démonstration est comparable au cas linéaire. Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ une base de F, alors :

$$\|\, B(x, y)\, \| = \|\, B(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i\, , \sum_{j=1}^{p} y_j\, e_j)\, \| = \|\, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i\, y_j\, B(e_i, e_j)\, \|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |x_i|\, |y_j|\, \|\, B(e_i, e_j)\, \|$$

$$\leq N_1(x)\, N_1(y)\, \underset{i,j}{\mathrm{Max}}\, \|\, B(e_i, e_j)\, \| \leq k\, \|\, x\, \|\, \|\, y\, \|$$

Il en résulte que B est continue. En effet :

$$\begin{aligned}\| B(x, y) - B(x_0, y_0) \| &= \| B(x, y) - B(x, y_0) + B(x, y_0) - B(x_0, y_0) \| \\ &\leq \| B(x, y) - B(x, y_0) \| + \| B(x, y_0) - B(x_0, y_0) \| \\ &\leq \| B(x, y - y_0) \| + \| B(x - x_0, y_0) \| \\ &\leq k \| x \| \| y - y_0 \| + k \| x - x_0 \| \| y_0 \|\end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0)

EXEMPLE :

❑ La même propriété s'applique pour les applications multilinéaires.

Par exemple, considérons $E = \mathbf{R}^n$ muni de la norme euclidienne, notée ici $\| \ \|$. Alors on a l'**inégalité d'Hadamard** suivante :

$$\forall (V_1, ..., V_n) \in E^n, \left|\det(V_1, ..., V_n)\right| \leq \| V_1 \| \times \| V_2 \| \times ... \times \| V_n \|$$

En effet, supposons les V_j indépendants (sinon le déterminant est nul et la majoration est automatiquement vérifiée) et cherchons à orthonormaliser les V_j. Le procédé d'orthogonalisation de Schmidt consiste d'abord à définir une base (e_j) orthogonale telle que $e_j = V_j$ + une combinaison linéaire de $e_1, ..., e_{j-1}$ (ou de $V_1, ..., V_{j-1}$), puis à l'orthonormer. Soit M la matrice de colonne les V_j. M est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ à la base $(V_1, ..., V_n)$. Soit T la matrice de passage de la base (V_j) à la base (e_j). T est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1 (en particulier $\det(T) = 1$), et MT est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ à la base $(e_1, ..., e_n)$. Puis, la matrice de passage de la base $(e_1, ..., e_n)$ à la base orthonormée $\left(\dfrac{e_j}{\| e_j \|}\right)_{1\leq i\leq n}$ est une matrice diagonale D, ayant les coefficients $\dfrac{1}{\| e_j \|}$ sur la diagonale, et MTD est la matrice de passage de la base canonique orthonormée de $\mathbf{R}^n$ à la base orthonormée $\left(\dfrac{e_j}{\| e_j \|}\right)_{1\leq i\leq n}$. Il s'agit donc d'une matrice orthogonale. Donc :

$$\begin{aligned}\det(MTD) = \pm 1 &= \det(M)\det(T)\det(D) \\ &= \det(M) \frac{1}{\| e_1 \|} \times ... \times \frac{1}{\| e_n \|}\end{aligned}$$

Mais chaque e_j a une norme inférieure ou égale à celle de V_j (utiliser le théorème de Pythagore et le fait que $V_j = e_j$ + une combinaison linéaire de $e_1, ..., e_{j-1}$, la combinaison linéaire étant orthogonale à e_j. Donc :

$$\left|\det(V_1, ..., V_n)\right| = \left|\det(M)\right| = \| e_1 \| \times \| e_2 \| \times ... \times \| e_n \| \leq \| V_1 \| \times \| V_2 \| \times ... \times \| V_n \|$$

Cette formule exprime aussi que le volume d'un parallélépipède en dimension quelconque est inférieur au produit des normes des côtés. Cette dernière question est abordée dans une annexe du chapitre L2/PREHILB.PDF. Dans cette annexe, on montre que, dans un espace vectoriel euclidien E, on a :

$$\left|\det(y_1, ..., y_n)\right| = \| z_1 \| \times \left|\det(y_2, ..., y_n)\right|$$

où le déterminant du membre de gauche est calculé dans une base orthonormée de E, z_1 est le projeté orthogonal de y_1 sur la droite orthogonale à un hyperplan H contenant $y_2, ..., y_n$, et le déterminant du membre de droite est calculé dans une base orthonormée de H. Comme $\| z_1 \| \leq \| y_1 \|$, on a

$$\left|\det(y_1, ..., y_n)\right| \leq \| y_1 \| \times \left|\det(y_2, ..., y_n)\right|$$

et on conclut par récurrence.

On a ainsi montré que le déterminant est continu lorsqu'on munit l'espace de la norme euclidienne. Par équivalence des normes, il est aussi continu pour toute autre norme, et on pourra chercher par exemple des constantes telles que :

$$\left|\det(V_1, ..., V_n)\right| \leq C\ N_1(V_1) \times N_1(V_2) \times ... \times N_1(V_n)$$

ou $$\left|\det(V_1, ..., V_n)\right| \leq C'\ N_\infty(V_1) \times N_\infty(V_2) \times ... \times N_\infty(V_n)$$

Il est facile de voir que C = 1 et C' = n! conviennent. On peut améliorer C' en $n^{n/2}$ en passant d'abord par l'inégalité d'Hadamard, puis en majorant $\|\ \|$ par $\sqrt{n}\ N_\infty$.

IV : Cas de la dimension finie

Un certain nombre de théorèmes sont propres aux espaces vectoriels normés de dimension finie. Nous avons cité par exemple l'équivalence des normes, qui sera prouvée à la fin de ce paragraphe.

1- Théorème de Bolzano-Weierstrass et compacts

Le théorème de Bolzano-Weierstrass, vue dans le chapitre L1/SUITES.PDF, énonce que, de toute suite réelle ou complexe bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge. Ce théorème reste vrai dans un espace normé **de dimension finie** de la façon suivante.

THEOREME DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Soit (u_n) *une suite bornée d'un espace vectoriel normé* E ***de dimension finie****. Alors, il existe une sous-suite de* (u_n) *qui converge.*

Démonstration :

❑ Une base $(e_1, ..., e_p)$ de E étant choisie, on note N_1 la norme somme des valeurs absolues des composantes :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{p} \left|x(i)\right| \qquad \text{où } x(i) \text{ est la composante de } x \text{ selon } e_i$$

La suite étant bornée pour la norme de E et les normes étant équivalentes, la suite est également bornée pour la norme N_1 et donc aussi pour chaque suite de composantes $(u_n(i))$. En appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas réel ou complexe, on en déduit qu'il existe une sous-suite (u_{n_k}) telle que la sous-suite des premières composantes converge, puis une sous-suite de la précédente (u_{p_k}) telle que la sous-suite des deuxièmes composantes converge (et celle des premières composantes qui convergeait déjà continue à le faire), puis une sous-suite (u_{r_k}) de la précédente telle que la sous-suite des troisièmes composantes converge, etc... A chaque itération, on obtient une composante de plus qui converge. On répète cette extraction de sous-suite p fois. La dernière sous-suite extraite converge pour N_1, donc également pour toute norme N (en utilisant ici le sens facile à montrer de l'équivalence des normes : $\exists\ C \in \mathbb{R},\ N \leq CN_1$).

Dans un espace de dimension infinie, le théorème de Bolzano-Weierstrass peut être faux. Considérons par exemple E = $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme N_∞ (maximum des coefficients du polynôme dans la base canonique) et soit $U_n = X^n$. Il n'existe aucune sous-suite de (U_n) qui converge vers quoi que ce soit. En effet, si une sous-suite (U_{n_k}) converge vers le polynôme $L = \sum l_n X^n$ pour la norme N_∞, on a, pour tout i, en notant $U_n(i)$ le coefficient de degré i du polynôme U_n :

$$\left|U_{n_k}(i) - l_i\right| \leq N_\infty(U_{n_k} - L)$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{n_k}(i) = l_i$. Or $U_{n_k}(i) = 0$ dès que $n_k > i$, donc nécessairement $l_i = 0$ et L est le polynôme nul. Mais aucune sous-suite (U_{n_k}) ne tend vers le polynôme nul, puisque $N_\infty(U_{n_k}) = 1$. donc le théorème de Bolzano-Weierstrass ne s'applique pas.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass est liée à la notion de compact :

PROPOSITION-DEFINITION

Soit K *une partie d'un espace normé. Considérons les deux propriétés :*

i) K *est une partie fermée bornée*

ii) *De toute suite de* K, *on peut extraire une sous-suite convergente dans* K. *On appelle* **compact** *d'un espace normé* E *une partie* K *de* E *vérifiant cette propriété* ii).

Alors :

Quelle que soit la dimension de E, ii) $\Rightarrow$ i)

En dimension finie, ii) $\Leftrightarrow$ i)

Démonstration :

❑ ii) $\Rightarrow$ i) : Si de toute suite d'une partie K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K, alors K est fermée et bornée.

K est fermée, car si l est un point adhérent de K, il existe une suite de K convergeant vers l. Cette suite admet une sous-suite convergente dans K, mais cette sous-suite converge elle-même vers l, donc l est dans K.

K est bornée car sinon, on pourrait trouver x_1 élément de K tel que $\| x_1 \| > 1$, x_2 dans K tel que $\| x_2 \| > \| x_1 \| + 1$, ..., x_n dans K tel que $\| x_n \| > \| x_{n-1} \| + 1$, etc.... Le choix des x_i empêche toute sous-suite de converger puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \| x_n \| = +\infty$.

On notera que cette démonstration ne fait nullement appel à la dimension finie de l'espace.

❑ i) $\Rightarrow$ ii) en dimension finie : Si K est fermée bornée, alors une suite de K est bornée (puisque K l'est), donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass pour un espace de dimension finie, on peut extraire une sous-suite convergente, et puisque K est fermé, la limite de cette sous-suite est dans K.

La définition (ii) permet de montrer que :

PROPOSITION

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Démonstration :

❑ Soit A un compact d'un espace vectoriel normé et f une application continue de cet espace vectoriel normé dans un autre espace vectoriel normé. Il s'agit de montrer que $f(A)$ est un compact. Soit (v_n) une suite de $f(A)$. Il s'agit de montrer que cette suite admet une sous-suite convergente dans $f(A)$. Or, pour tout n, il existe u_n élément de A tel que $f(u_n) = v_n$. A étant compact, il existe une sous-suite (u_{n_k}) qui converge vers l élément de A. f étant continue, la sous-suite $(v_{n_k}) = (f(u_{n_k}))$ converge vers $f(l)$ élément de $f(A)$.

EXEMPLE :

❑ Dans un espace vectoriel normé E, la boule unité fermée B_f est bornée. Est-elle compacte ? Le **théorème de Riesz** énonce que B_f est compacte si et seulement si E est de dimension finie. On en donne deux démonstrations dans les exercices du chapitre L3/METRIQUE.PDF.

Nous avons donné plus haut l'exemple suivant. Soit F l'espace vectoriel des suites réelles de limite nulle. Soit g la forme linéaire définie sur F par : $\forall$ U = $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in$ F, $g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$. La fonction g est continue, mais n'admet pas de maximum sur B_f (elle admet seulement une borne supérieure égale à $|||\ g\ ||| = 2$). Donc $g(B_f)$ n'est pas compacte et la proposition montre alors que B_f ne peut être compacte, en cohérence avec ce qu'énonce le théorème de Riesz.

Les compacts disposent des propriétés suivantes :

PROPOSITION

i) *Un fermé inclus dans un compact est compact*

ii) *Le produit de deux compacts est un compact*

Démonstration

❑ i) Soit F fermé inclus dans K compact d'un espace vectoriel normé E. Alors F est compact. En effet, soit (u_n) une suite de F. (u_n) est également une suite de K, et K étant compact, on peut en extraire une sous-suite convergente vers l. Mais F étant fermé, la limite d'une suite convergente de F appartient à F. On a donc extrait une sous-suite de (u_n), convergeant vers un élément de F.

❑ ii) Soient A et B deux compacts inclus respectivement dans deux espaces vectoriels normés E et F. Alors A × B est un compact de E × F. (Si E et F sont munis des normes N et N' respectivement, on munit E × F de la norme $\|\ (x, y)\ \| = N(x) + N'(y)$ ou $\mathrm{Max}(N(x), N'(y))$, ces deux normes étant équivalentes). En effet, si (u_n, v_n) est une suite de A × B, on extrait d'abord une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de la suite (u_n) de façon à ce qu'elle converge vers un élément de A, puis on extrait de la suite $(v_{\varphi(n)})$ une sous-suite $(v_{\psi(n)})$ qui converge vers un élément de B. Alors la sous-suite $(u_{\psi(n)}, v_{\psi(n)})$ converge vers un élément de A × B.

L'étude des compacts est menée de façon plus approfondie dans L3/METRIQUE.PDF puis dans L3/TOPOLOG.PDF.

2- Suites de Cauchy

Dans une espace vectoriel normé (E, $\|\ \ \|$), une suite de vecteurs (x_n) est une **suite de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \|\ x_n - x_p\ \| < \varepsilon$$

PROPOSITION

Dans les espaces vectoriels normés de ***dimension finie****, les suites de Cauchy sont convergentes.*

Démonstration 1 :

❑ On utilise pour le montrer le théorème de Bolzano-Weierstrass. En effet, une suite de Cauchy (u_n) est bornée, car en prenant la définition avec $\varepsilon = 1$, on a :

$$\exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \|\ u_n - u_p\ \| < 1$$

donc tout u_n appartient à l'ensemble borné $\{u_0, u_1, ..., u_{N-1}\} \cup B(u_N, 1)$. Il existe donc une sous-suite (u_{n_k}) qui converge vers une limite l. Posons $p = n_k$ dans la propriété de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall k \text{ tq } n_k \geq N, \|\ u_n - u_{n_k}\ \| < \varepsilon$$

Faisons tendre k vers l'infini et utilisons la continuité de la norme pour passer à la limite dans l'inégalité ci-dessus :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \|\ u_n - l\ \| < \varepsilon$$

ce qui est la définition de $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

Démonstration 2 :

❑ Soit (u_n) une suite vérifiant la propriété de Cauchy dans un espace de dimension finie. En prenant une base de l'espace, on peut raisonner composante par composante. Si on prend pour norme N_1, par équivalence des normes, la suite est également de Cauchy pour la norme N_1, et comme N_1 majore la valeur absolue de chaque composante, alors on voit que chaque composante de la suite est elle-même une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (si le corps de base est $\mathbb{C}$, on raisonne sur partie réelle et partie imaginaire). Donc chaque composante de la suite converge, donc la suite converge.

3- Applications uniformément continues

Entre les fonctions continues et les fonctions lipschitziennes se glisse une catégorie supplémentaire, les fonctions uniformément continues. On distingue donc :

❑ les fonctions continues :

$$\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, \| x - y \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

❑ les fonctions **uniformément continues** :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \forall y, \| x - y \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

Ce qui distingue la continuité de l'uniforme continuité, c'est que, dans le cas de la continuité, δ dépend de ε et x, alors que dans le cas de l'uniforme continuité, δ ne dépend que de ε et non de x.

❑ les fonctions lipschitziennes de rapport k :

$$\forall x, \forall y, \| f(x) - f(y) \| \leq k \| x - y \|$$

PROPOSITION

f lipschitzienne ⇒ f uniformément continue ⇒ f continue.

La deuxième implication est évidente. Pour la première, si f est k-lipschitzienne, prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$.

Toutes les réciproques sont fausses.

❑ $x \to e^x$ est continue mais pas uniformément continue. En effet, pour $x \geq y$, $e^x - e^y \geq (x - y)e^y$ d'après l'égalité des accroissements finis, donc, même si $|x - y| < \delta$, on pourra avoir $e^x - e^y$ arbitrairement grand.

❑ $x \to \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ mais pas lipschitizienne. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta = \varepsilon^2$. Soit x et y tels que $|x - y| < \delta$ avec par exemple $y \geq x$. On a alors :

$$x \leq y < x + \delta = x + \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x} \leq \sqrt{y} < \sqrt{x + \varepsilon^2} < \sqrt{x} + \varepsilon \text{ comme on le voit en élevant au carré}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| < \varepsilon$$

Elle n'est pas lipschitizienne car le rapport $\left|\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}\right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ n'est pas borné quand x et y tendent vers 0.

On peut aussi prouver l'uniforme continuité en vertu du théorème suivant :

THEOREME (de HEINE)
Soit f : E $\to$ F, continue sur A compact de E. Alors f est uniformément continue.

Démonstration 1 :

❑ Si f n'est pas uniformément continue, alors :

$$\exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ \delta > 0,\ \exists\ x \in \text{A},\ \exists\ y \in \text{A},\ \| x - y \| < \delta \text{ et } \| f(x) - f(y) \| \geq \varepsilon$$

Prenons $\delta = \dfrac{1}{n}$ et appelons x_n et y_n les éléments x et y correspondants, de sorte que $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = 0$. A étant compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite l.
La sous-suite $(y_{\varphi(n)})$ converge nécessairement vers la même limite l, puisque $\| x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} \|$ tend vers 0. On en déduit que $(f(x_{\varphi(n)}))$ et $(f(y_{\varphi(n)}))$ convergent vers $f(l)$ car f est continue, et donc que $\| f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)} \|$ tend vers 0, ce qui contradictoire avec le fait que cette quantité reste supérieure à ε.

Démonstration 2 :

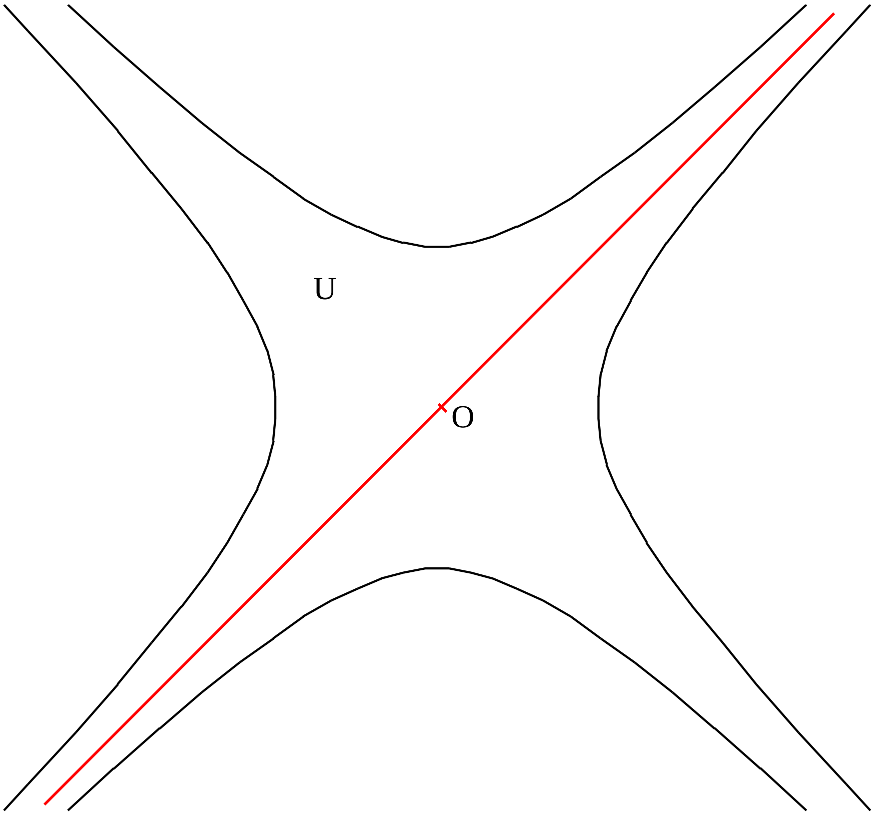
❑ Soit $\varepsilon > 0$ donné. Considérons la partie V de E $\times$ E définie par $\{(x, y) \mid \| f(x) - f(y) \| \geq \varepsilon\}$. On munit E $\times$ E de la norme $\text{N}(x, y) = \| x \| + \| y \|$, où $\| \ \|$ désigne ici la norme de E. Cette partie V est un fermé de E $\times$ E puisque, si (x_n, y_n) est une suite de V convergeant vers (x, y) point adhérent de V, alors :

$$\forall\ n,\ \| f(x_n) - f(y_n) \| \geq \varepsilon$$

donc en passant à la limite :

$$\| f(x) - f(y) \| \geq \varepsilon$$

donc (x, y) appartient à V.
Il en résulte que le complémentaire U = $\{(x, y) \mid \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon\}$ de V est ouvert. On note que U contient la diagonale $\{(x, x) \mid x \in \text{E}\}$. Voici ci-dessous, dans le cas de la fonction réelle $f(x) = x^2$, l'allure de U.



La diagonale est en rouge. U est limité par quatre branches d'hyperbole. Les sommets des hyperboles sont à la distance $\sqrt{\varepsilon}$ de l'origine.

Considérons l'application δ de E dans $\mathbf{R}^{+*}$, définie par :

$$\delta : x \to d((x, x), V) = \operatorname*{Inf}_{(z,t) \in V} N((x, x) - (z, t))$$

distance du couple (x, x) à V.

Pour tout x, $\delta(x)$ est strictement positif, car si $\delta(x)$ était nul pour un certain x, cela voudrait dire que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, (z, t) \in V,\ N((x, x) - (z, t)) < \varepsilon$$

et donc que (x, x) est adhérent à V, donc élément de V puisque V est fermé. Or ce n'est pas le cas.

δ est lipschitzienne de rapport 1. En effet, pour tout x et tout x', on a, (z, t) étant un élément quelconque de V :

$$\delta(x) = d((x, x), V) \leq N((x, x) - (z, t)) \leq N((x, x) - (x', x')) + N((x', x') - (z, t))$$

Prenant la borne inférieure du membre de droite lorsque (z, t) décrit V, on obtient :

$$\delta(x) \leq N((x, x) - (x', x')) + d((x', x'), V) = N((x, x) - (x', x')) + \delta(x')$$

donc $\quad \delta(x) - \delta(x') \leq N((x, x) - (x', x'))$

On montrerait de même que $\delta(x') - \delta(x) \leq N((x, x) - (x', x'))$

donc $\quad \left|\delta(x) - \delta(x')\right| \leq N((x, x) - (x', x'))$

Par définition de N et de δ, on a :

$$\| y - x \| < \delta(x) \Rightarrow N((x, x) - (x, y)) < \delta(x) \Rightarrow (x, y) \in U \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

Ainsi, $\delta(x)$ n'est autre que le δ intervenant dans la définition de la continuité de f en x, mais il apparaît ici non seulement comme une valeur dépendant de x (et de ε), mais comme une fonction continue de x.

Si on se limite à A compact, δ est une fonction continue sur un compact à valeurs strictement positives, donc admet un minimum strictement positif δ_0. On a alors :

$$\forall x, \forall y, \| x - y \| < \delta_0 \Rightarrow \| y - x \| < \delta(x) \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$$

et f est bien uniformément continue.

C'est le cas de la fonction $x \to x^2$, restreinte à un compact, comme le montre le graphique précédent : la fonction δ, distance des points de la diagonale à V, admet un minimum strictement positif. Par contre, si on se place sur $\mathbb{R}$ tout entier, les hyperboles limitant V sont asymptotes à la diagonale, et δ admet une borne inférieure nulle. Dans ce cas, f n'est pas uniformément continue.

4- Equivalence des normes

Dans ce qui précède, plusieurs résultats portant sur les espaces vectoriels normés de dimension finie ont été montré en utilisant l'équivalence des normes en dimension finie. Il est temps de prouver cette propriété. Pour ce faire, on utilisera le théorème de Bolzano-Weierstrass sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou bien sur un espace vectoriel de dimension finie munie d'une norme du type N_1, pour laquelle on peut raisonner composante par composante.

PROPOSITION

Si E *est un espace de dimension finie muni de deux normes* N *et* N', *alors les deux normes sont équivalentes.*

Nous avons montré à la fin du I que, pour toute norme N, il existe une constante C telle que $N \leq CN_1$, où $N_1(x) = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$ si $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ dans une base $(e_1, ..., e_p)$ donnée. La réciproque a été admise. On se propose de la démontrer ici.

<u>Démonstration 1</u> :

❑ Supposons que l'affirmation $\exists$ C', $N_1 \leq C'N$ soit fausse. Cela signifie alors que :

$$\forall C', \exists u \in E, N_1(u) > C'N(u)$$

En particulier, pour $C' = n$ entier, il existe u_n tel que $N_1(u_n) > nN(u_n)$. En particulier $u_n \neq 0$. Quitte à diviser u_n par $N_1(u_n)$, on peut supposer que $N_1(u_n) = 1$ pour tout n et donc que $N(u_n) < \frac{1}{n}$. Donc la suite (u_n) converge vers 0 pour la norme N.

Puisque $(N_1(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il en est de même des composantes des u_n dans la base $(e_1, ..., e_p)$, et en appliquant successivement le théorème de Bolzano-Weierstrass à chaque composante, on extrait une sous-suite (z_n) de la suite (u_n) convergeant vers une limite l pour N_1. Cependant, pour la norme N, la suite (z_n) est une sous-suite de (u_n) qui converge donc vers 0. Or ceci est impossible car :

$$|N_1(z_n) - N_1(l)| \leq N_1(z_n - l) \text{ tend vers 0 donc } N_1(l) = \lim_{n\to\infty} N_1(z_n) = 1 \text{ donc } l \neq 0$$

$$N(z_n - l) \leq CN_1(z_n - l) \text{ donc } \lim_{n\to\infty} N(z_n - l) = 0$$

$$\left|N(z_n) - N(l)\right| \leq N(z_n - l) \text{ tend vers 0 donc } N(l) = \lim_{n\to\infty} N(z_n) = 0 \text{ donc } l = 0$$

D'où une contradiction.

Démonstration 2 :

❑ L'inégalité déjà prouvée suivante :

$$\forall\, x,\ N(x) = N(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|\, N(e_i) \leq C \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right| = CN_1(x) \text{ où } C = \text{Max } \{N(e_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

montre que l'application Id de (E, N_1) dans (E, N) est lipschitizienne de rapport C, donc continue. Donc, si (u_n) tend vers l pour N_1, autrement dit dans l'espace de départ, alors (u_n) tend vers l pour N, dans l'espace d'arrivée. Considérons la sphère S de rayon 1 dans (E, N_1). C'est un ensemble fermé et borné dans un espace de dimension finie. Elle est donc compacte (la preuve de la compacité d'une partie fermée bornée de E de dimension finie munie d'une norme du type N_1 utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass sur chaque composante, dans le cas réel ou complexe. Elle n'utilise pas la propriété d'équivalence des normes). S étant compacte dans l'espace de départ, son image S dans (E, N) par une application continue est donc également compacte. L'application $S \subset (E, N) \to \mathbb{R}$ qui à x associe $N(x)$ est elle-même continue. Etant continue sur un compact à valeurs réelles, son image est une partie compacte de $\mathbb{R}$ donc elle admet un minimum $\dfrac{1}{C'}$, non nul puisque x est non nul dans S. On a donc montré que :

$$\forall\, x,\ N_1(x) = 1 \Rightarrow N(x) \geq \frac{1}{C'}$$

ou encore, en remplaçant x par $\dfrac{y}{N_1(y)}$ avec y quelconque non nul :

$$\forall\, y \neq 0,\ N(\frac{y}{N_1(y)}) \geq \frac{1}{C'}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \forall\, y,\ C'N(y) \geq N_1(y)$$

On a ainsi montré que N est équivalente à N_1. De même toute autre norme N' est équivalente à N_1. On dispose donc de constantes telles que :

$N \leq CN_1$

$N_1 \leq C'N$

$N' \leq C''N_1$

$N_1 \leq C'''N'$

donc $N \leq CC'''N'$

et $N' \leq C''C'N$

donc N et N' sont équivalentes.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) a) Prouver qu'il y a équivalence entre les deux systèmes (I) et (II) d'axiomes suivants permettant de définir une norme sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

(I) $\quad \forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in \mathbf{K},\ \left[\begin{array}{l} \mathrm{N}(x) \geq 0 \\ \mathrm{N}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\ \mathrm{N}(x) \\ \mathrm{N}(x + y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y) \end{array}\right.$

et

(II) $\quad \forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in \mathbf{K},\ \left[\begin{array}{l} \mathrm{N}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \mathrm{N}(x + \lambda y) \leq \mathrm{N}(x) + |\lambda|\ \mathrm{N}(y) \end{array}\right.$

En particulier, le fait qu'une norme est à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ est une conséquence des autres axiomes.

b) Montrer que les deux systèmes suivants ne sont pas équivalents :

(Ibis) $\quad \forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in \mathbf{K},\ \left[\begin{array}{l} \mathrm{N}(x) \geq 0 \\ \mathrm{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\ \mathrm{N}(x) \\ \mathrm{N}(x + y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y) \end{array}\right.$

et

(IIbis) $\quad \forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\, y \in \mathrm{E},\ \forall\, \lambda \in \mathbf{K},\ \left[\begin{array}{l} \mathrm{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \mathrm{N}(x + \lambda y) \leq \mathrm{N}(x) + |\lambda|\ \mathrm{N}(y) \end{array}\right.$

(On a remplacé à deux endroits une équivalence par une implication).

Exo.2) a) Soient deux boules ouvertes $\mathrm{B}(x, \mathrm{R})$ et $\mathrm{B}(y, \mathrm{R}')$ dans un espace vectoriel normé. Montrer que $\mathrm{B}(x, \mathrm{R}) \cap \mathrm{B}(y, \mathrm{R}') = \varnothing \Leftrightarrow \| x - y \| \geq \mathrm{R} + \mathrm{R}'$.

b) Soient deux boules ouvertes $\mathrm{B}(x, \mathrm{R})$ et $\mathrm{B}(y, \mathrm{R}')$ de rayon strictement positif dans un espace vectoriel normé. Montrer que $\mathrm{B}(x, \mathrm{R}) \subset \mathrm{B}(y, \mathrm{R}') \Leftrightarrow \| x - y \| \leq \mathrm{R}' - \mathrm{R}$.

Exo.3) Dans $\mathbf{R}^2$, on pose $\mathrm{N}(x, y) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x + ty|$ et $\| (x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Montrer que N est une norme sur $\mathbf{R}^2$.

b) Dessiner la boule unité B(0, 1) (boule de centre 0 et de rayon 1) pour la norme N.

c) Pour tout R, on note $\mathrm{B}_2(0, \mathrm{R})$ la boule de centre 0 de rayon R pour la norme $\| \ \|$. Déterminer deux réels R_1 et R_2 tels que : $\mathrm{B}_2(0, \mathrm{R}_1) \subset \mathrm{B}(0, 1) \subset \mathrm{B}_2(0, \mathrm{R}_2)$. En déduire que, pour tout (x, y) de $\mathbf{R}^2$: $\mathrm{N}(x, y) \leq \sqrt{2}\, \| (x, y) \|$ et $\| (x, y) \| \leq \sqrt{5}\, \mathrm{N}(x, y)$.

d) Plus généralement, soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes N et N', et C un réel strictement positif. Montrer que la relation $\mathrm{N}' \leq \mathrm{CN}$ est équivalente à une inclusion dont le sens est à déterminer entre la boule fermée $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ de centre 0 de rayon R pour la norme N et une boule fermée $\mathrm{B}_f'(0, \mathrm{R}')$ de centre 0 et de rayon R' à déterminer pour la norme N'.

Exo.4) Sur $\mathrm{C}^\infty([0, 1], \mathbf{R})$, on pose :

$$\mathrm{N}_0(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$$\mathrm{N}_1(f) = |f(0)| + \mathrm{N}_0(f')$$

$$\mathrm{N}_2(f) = |f(0)| + \mathrm{N}_1(f')$$

...

$$\mathrm{N}_k(f) = |f(0)| + \mathrm{N}_{k-1}(f')$$

a) Montrer qu'il s'agit de normes.

b) Montrer que, pour tout k, $N_k \leq N_{k+1}$ mais qu'il n'existe aucune inégalité du type $N_{k+1} \leq CN_k$.

Exo.5) a) On munit $\mathbb{R}[X]$ de deux normes. Pour $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, on pose :

$$N(P) = \text{Sup } \{|P(x)|, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$$

$$N'(P) = |a_0 - a_1 - ... - a_n| + |a_1| + \frac{|a_2|}{2} + \ ... + \frac{|a_n|}{n}$$

Vérifier que N et N' sont des normes. Trouver la limite de la suite (X^n) pour la norme N, puis pour la norme N'.

b) Nous allons montrer que, quel que soit le polynôme Q choisi, il existe une norme N" sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite (X^n) converge vers Q. Pour cela, on note n_0 le degré de Q, et on appelle u l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$u(X^n) = X^n$ pour $n < n_0$
$u(Q) = Q$
$u(X^n) = Q + X^n$ pour $n > n_0$

et on définit $N''(P) = \int_0^1 |u(P)(t)|\, dt$. Vérifier que N" répond à la question.

Exo.6) Sur l'espace vectoriel des séries absolument convergentes, on définit trois normes. Si U est la série de terme général u_n, on pose :

$$N_1(U) = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \qquad N_2(U) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \qquad N_3(U) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{n!}$$

a) Vérifier qu'il s'agit de trois normes.

b) Sont-elles équivalentes ?

c) Soit (a_n) une suite. A quelle condition nécessaire et suffisante $N_a : U \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n |u_n|$ est-elle une norme sur l'espace des séries absolument convergentes ?

d) Soient (a_n) et (b_n) deux suites vérifiant la condition du c). A quelle condition nécessaire et suffisante supplémentaire les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

Exo.7) Soit E un espace vectoriel normé. Soit f un endomorphisme de E tel que, pour tout x de E, on ait $\| f(x) \| \leq \| x \|$. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}) \cap \text{Im}(f - \text{Id}) = \{0\}$.

Exo.8) Pour toute matrice carrée A, on pose $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nA^n}{n!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{t^nA^n}{n!}$, notée $\exp(tA)$ et appelée **exponentielle de matrice**. (On montre dans le chapitre L3/BANACH.PDF) que, pour toute matrice carrée A, cette série est convergente).

a) Calculer $\exp(tA)$ avec $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ puis $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

b) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(tJ)$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} (I_2 + \dfrac{tJ}{n})^n$.

c) Soit $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 + A$. En déduire $\exp(tA)$ et interpréter géométriquement la matrice obtenue.

Exo.9) Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que :

a) x adhérent à $A \cap B \Rightarrow x$ adhérent à A et x adhérent à B, mais la réciproque est fausse.

b) x adhérent à $A \cup B \Leftrightarrow x$ adhérent à A ou x adhérent à B

c) x intérieur à $A \cap B \Leftrightarrow x$ intérieur à A et x intérieur à B

d) x intérieur à A ou x intérieur à B $\Rightarrow x$ intérieur à $A \cup B$, mais la réciproque est fausse.

Exo.10) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel normé (E, N), et soit p le projecteur sur F parallèlement à G.

a) Soit A un ouvert de E. Montrer que $p(A)$ est un ouvert de F.

b) Soit B un fermé de E. $p(B)$ est-il un fermé de F ?

Exo.11) Le théorème de Weierstrass : Soit f une fonction continue sur le segment [0, 1]. On se propose de montrer qu'il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f (voir le chapitre L2/SUITESF.PDF pour la notion de convergence uniforme).

a) $\varepsilon > 0$ étant choisi, montrer qu'il existe une constante M telle que, pour tout x et y de [0, 1], on ait : $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + M(x-y)^2$. Pour cela, on pourra considérer l'ensemble $A = \{(x, y), |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\}$ et l'application $(x, y) \in A \to \dfrac{|f(x) - f(y)| - \varepsilon}{(x-y)^2}$.

b) Pour tout entier n, on définit le polynôme de Bernstein $B_n(f)$ comme étant la fonction polynômiale suivante : $B_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} f(\dfrac{k}{n})\, x^k(1-x)^{n-k}$. On pose également P_0, P_1, P_2 les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2$. Calculer $B_n(P_0)$, $B_n(P_1)$, $B_n(P_2)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Déduire du a) et du b) que : $\forall\, x \in [0, 1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon + M\,\dfrac{x - x^2}{n}$

d) En déduire que la suite des polynômes (B_n) converge uniformément vers f.

Exo.12) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que E ne peut être réunion finie d'hyperplans.

b) Soient $F_1, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de E distincts de E. Montrer que $F_1 \cup ... \cup F_p$ ne possède aucun point intérieur.

Exo.13) Le théorème de Rowe : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si elle vérifie les deux propriétés :

(i) f vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sur tout intervalle $[a, b]$

(ii) Pour tout y, $F = \{x, f(x) = y\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$

Exo.14) Dans $\mathbb{R}$, soit $A =]-3, -1[\cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0, 3\}$. Dans cet exemple :

3 est dit point isolé de A. 0 n'est pas un point isolé.
0, –1 et –2 sont dits points d'accumulation de A
1 n'est pas un point d'accumulation de A

a) Proposer une définition d'un **point isolé** d'une partie A d'un espace vectoriel normé E, et d'un **point d'accumulation** de A. Quel est le lien entre la notion de point isolé et celle de point d'accumulation ?

b) Soit A une partie de E. Montrer que A est fermé sans point isolé si et seulement si A est égal à l'ensemble de ses points d'accumulation.

c) Pour tout x élément de $[0,1[$, on note a_n le $n^{\text{ème}}$ chiffre du développement décimal de x. On pose $A = \{x \in [0, 1[, \forall n, a_n = 0 \text{ ou } a_n = 1\}$. Montrer que A est fermé sans point isolé, et est d'intérieur vide.

Exo.15) Soit m un entier positif ou nul. On se propose de montrer que, si (P_n) est une suite de polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$, alors la convergence simple de la suite de fonctions $x \in \mathbb{R} \to P_n(x)$ vers la fonction nulle entraîne la convergence simple de la suite de fonctions $z \in \mathbb{C} \to P_n(z)$ vers la fonction nulle, mais que ce résultat peut être faux pour une suite (P_n) de $\mathbb{R}[X]$. (Voir au besoin le chapitre L2/SUITESF.PDF pour la notion de convergence simple).

a) Pour tout P élément de $\mathbb{R}_m[X]$ de la forme $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on pose :

$$\| P \| = \text{Max } \{|P(k)|, 0 \leq k \leq m\} \qquad \text{et} \qquad N(P) = \text{Max } \{|a_k|, 0 \leq k \leq m\}$$

Vérifier que $\| \ \|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}_m[X]$.

b) Montrer que, si la suite de fonctions polynomiales (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, alors $\lim_{n\to\infty} \| P_n \| = 0$ et $\lim_{n\to\infty} N(P_n) = 0$. En déduire que la suite de fonctions polynomiales (P_n) converge simplement sur $\mathbb{C}$ vers la fonction nulle.

c) Pour tout entier n, on pose $P_n = X \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sqrt{n}^k}{k!} X^{2k}$. Montrer que la suite de fonctions polynomiales (P_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, mais pas sur $\mathbb{C}$.

Exo.16) Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exo.17) Soit (E, N) un espace vectoriel normé et f la fonction de E dans E définie par $f(x) = \frac{x}{1 + N(x)}$. Cette fonction est-elle lipschitzienne ? De quel rapport ?

Exo.18) Soient A et B deux matrices $n \times n$ à coefficients réels.

a) Si $A = (a_{ij})$, on pose $N(A) = \text{Max } \{|a_{ij}|, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$.Trouver une constante K telle que, pour tout A et B, $N(AB) \leq K\, N(A)N(B)$.

b) Même question avec $N(A) = \sum_{i,j} |a_{ij}|$.

c) Même question avec $N(A) = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$.

Exo.19) Soit u en endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de matrice $A = (a_{ij})$ dans la base canonique.

a) Montrer que, lorsqu'on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $N_1\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, la norme de u subordonnée à N_1 est : $|||\, u \,||| = \underset{j}{\text{Max}} \left(\sum_{i} |a_{ij}|\right)$.

b) Montrer que, lorsqu'on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $N_\infty\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \underset{i}{\text{Max}} |x_i|$, la norme de u subordonnée à N_∞ est : $|||\, u \,||| = \underset{i}{\text{Max}} \left(\sum_{j} |a_{ij}|\right)$.

c) Montrer que, lorsqu'on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $N_2\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, la norme de u subordonnée à N_2 est $\sqrt{\Lambda}$, où Λ est la plus grande valeur propre $A^{\mathsf{T}}A$.

Exo.20) Soit $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $u(P) = P'$, dérivée de P, et $v : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $v(P) = XP$.

a) Pour tout $P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$, on pose $N(P) = \sum_{k\geq 0} k!\, |a_k|$. Montrer que u est lipschitzienne pour la norme N, mais pas v.

b) Pour tout $P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$, on pose $N'(P) = \sum_{k\geq 0} |a_k|$. Montrer que v est lipschitzienne pour la norme N', mais pas u.

c) On se propose de montrer qu'il n'existe aucune norme N sur $\mathbb{R}[X]$ telle que les endomorphismes u et v soient tous deux lipschitziens. Par l'absurde, on suppose qu'une telle norme existe. Calculer $u \circ v - v \circ u$, puis, pour tout $n > 0$, $u \circ v^n - v^n \circ u$. En déduire une contradiction.

Exo.21) Soit $H : C^0([0, 1]) \to C^0([0, 1])$ définie par $H(f)(0) = f(0)$ et $H(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ pour tout x élément de $]0, 1]$ et pour tout f élément de $C^0([0, 1])$. On définit également $N_\infty(f) = \underset{t\in[0,1]}{\text{Sup}} |f(t)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$.

a) Montrer que $H(f)$ est bien continue sur $[0, 1]$.

b) On munit $C^0([0, 1])$ de la norme N_∞. H est-elle lipschitzienne ?

c) On munit $C^0([0, 1])$ de la norme N_1. H est-elle lipschitzienne ?

Exo.22) Soit (E, $\|\ \|$) un espace vectoriel normé de dimension finie et φ une forme linéaire non nulle sur E. On note également $\|\varphi\|$ la norme de φ subordonnée à la norme de E. Pour x élément de E et A une partie de E, on note $d(x, A) = \text{Inf}\,\{\|x - y\|, y \in A\}$

a) Montrer que, pour tout x de E, $d(x, \text{Ker}(\varphi)) = \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$

b) Que devient cette relation dans un espace euclidien (E, < , >), avec $\varphi(x) = \langle x, k\rangle$, où k est un vecteur donné non nul ?

Exo.23) Soit E = $\mathbb{R}[X]$, A non vide inclus dans $\mathbb{R}$.

a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'application

$$N : P \in E \to N(P) = \sup_{x\in A} |P(x)|$$

soit une norme sur E.

b) Cette condition étant supposée réalisée, à quelle condition la forme linéaire $P \in E \to P(0)$ est-elle continue ?

Exo.24) Soit E l'espace vectoriel des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées, muni de la norme $N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Pour tout p élément de $\mathbb{N}$, soit $e(p)$ la suite $(\delta_{np})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\delta_{np} = 1$ si $n = p$ et $\delta_{np} = 0$ sinon. Soit $P = \{e(p), p \in \mathbb{N}\}$.

a) Montrer que P est fermé et borné.

b) Soit f l'application : $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \to f(u) = (\dfrac{u_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Montrer que f est une application continue.

c) Montrer que $f(P)$ n'est pas fermée. Qu'illustre cet exercice ?

d) Montrer que la restriction de f au sous-espace vectoriel F des suites nulles à partir d'un certain rang est une bijection de F dans lui-même, mais que sa réciproque n'est pas continue.

Exo.25) Soit $E = C^0([-1,1])$, muni de la norme $N_\infty(f) = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$. On considère la forme linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to \mathbb{R} \\ f &\to \int_0^1 f(t)\,dt - \int_{-1}^0 f(t)\,dt \end{aligned}$$

a) Calculer $\|\varphi\|$, norme de l'application linéaire φ subordonnée à la norme de E et à la valeur absolue de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'image de la boule fermée unité de E par φ n'est pas fermée.

Exo.26) Soit l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^2$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ des rationnels. Pour tout (x, y) de $\mathbb{Q}^2$, on pose :

$$N_1(x, y) = |x| + |y|$$

$$N_2(x, y) = |x + y\sqrt{2}|$$

On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.

b) Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes.

c) Où utilise-t-on le fait que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour montrer que deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes ?

2- Solutions

Sol.1) a) (I) $\Rightarrow$ (II) est facile.

Réciproquement, supposons (II) et montrons (I) :

pour $\lambda = 1$ dans l'inégalité de (II), on obtient l'inégalité triangulaire de (I).

Pour $\lambda = 0$, on a $N(\lambda y) = N(0) = 0 = |\lambda|\ N(y)$, donc $N(\lambda y) = |\lambda|\ N(y)$ dans ce cas. Pour $\lambda \neq 0$, prenons $x = 0$. L'inégalité de (II) donne alors :

$$N(\lambda y) \leq |\lambda|\ N(y) = |\lambda|\ N(\frac{1}{\lambda}\lambda y)$$

$$\leq |\lambda| \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda y)$$

en appliquant l'inégalité $N(\lambda y) \leq |\lambda|\ N(y)$ au couple $(\frac{1}{\lambda}, \lambda y)$ au lieu de (λ, y)

$$\leq N(\lambda y)$$

donc $N(\lambda y) = |\lambda|\ N(y)$

Pour $\lambda = -1$ et $x = y$, (II) donne :

$$0 = N(0) = N(x - x) \leq N(x) + N(x) = 2N(x) \text{ donc } N(x) \geq 0.$$

b) (Ibis) $\Rightarrow$ (IIbis), mais la réciproque est fausse. En effet, dans (IIbis), on n'a pas nécessairement $N(0) = 0$. Exemple sur $\mathbb{R}$, $N(x) = |x| + 1$ vérifie (IIbis) mais pas (Ibis).

Sol.2) a) Raisonnons plutôt sur la contraposée des implications et montrons que :

$$B(x, R) \cap B(y, R') \neq \varnothing \Leftrightarrow \| x - y \| < R + R'$$

Si $B(x, R) \cap B(y, R') \neq \varnothing$, alors il existe $z \in B(x, R) \cap B(y, R')$. Donc :

$$\| x - y \| \leq \| x - z \| + \| z - y \| < R + R'$$

Réciproquement, soit x et y tels que $\| x - y \| < R + R'$. Si $x = y$, il est clair que $B(x, R) \cap B(y, R') \neq \varnothing$. Supposons donc $x \neq y$. On cherche un élément z commun aux deux boules appartenant au segment $[x, y]$. Soit donc $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$. On a :

$$\| x - z \| = (1 - \lambda)\ \| x - y \|$$

$$\| z - y \| = \lambda\ \| x - y \|$$

Pour trouver un tel z dans $B(x, R) \cap B(y, R')$, il suffit de prendre λ tel que :

$$(1 - \lambda)\ \| x - y \| < R \quad \text{et} \quad \lambda\ \| x - y \| < R'$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{R}{\| x - y \|} < \lambda < \frac{R'}{\| x - y \|}$$

Un tel λ entre 0 et 1 existe car l'hypothèse $\| x - y \| < R + R'$ entraîne que $1 - \frac{R}{\| x - y \|} < \frac{R'}{\| x - y \|}$, et que $0 < \frac{R'}{\| x - y \|}$ et $1 - \frac{R}{\| x - y \|} < 1$.

b) Supposons $\| x - y \| \leq R' - R$. Alors, pour tout z :

$$\| y - z \| \leq \| y - x \| + \| x - z \| \leq R' - R + \| x - z \|$$

donc, si $\| x - z \| < \mathrm{R}$, alors $\| y - z \| < \mathrm{R}'$, ce qui prouve que $\mathrm{B}(x, \mathrm{R}) \subset \mathrm{B}(y, \mathrm{R}')$
Réciproquement, supposons que $\mathrm{B}(x, \mathrm{R}) \subset \mathrm{B}(y, \mathrm{R}')$. Considérons ce qui se passe pour les éléments z de la droite affine passant par x et y, et situés au delà de x. Soit donc $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ avec $\lambda \geq 1$. On a :

$$\| z - x \| = (\lambda - 1) \| x - y \|$$
$$\| z - y \| = \lambda \| x - y \|$$
$$z \in \mathrm{B}(x, \mathrm{R}) \Leftrightarrow \| z - x \| < \mathrm{R} \Leftrightarrow 1 \leq \lambda < 1 + \frac{\mathrm{R}}{\| x - y \|}$$
$$z \in \mathrm{B}(y, \mathrm{R}') \Leftrightarrow \| z - y \| < \mathrm{R} \Leftrightarrow 1 \leq \lambda < \frac{\mathrm{R}'}{\| x - y \|}$$

L'hypothèse $\mathrm{B}(x, \mathrm{R}) \subset \mathrm{B}(y, \mathrm{R}')$ se traduit donc par l'implication :

$$1 \leq \lambda < 1 + \frac{\mathrm{R}}{\| x - y \|} \Rightarrow 1 \leq \lambda < \frac{\mathrm{R}'}{\| x - y \|}$$

et donc par :

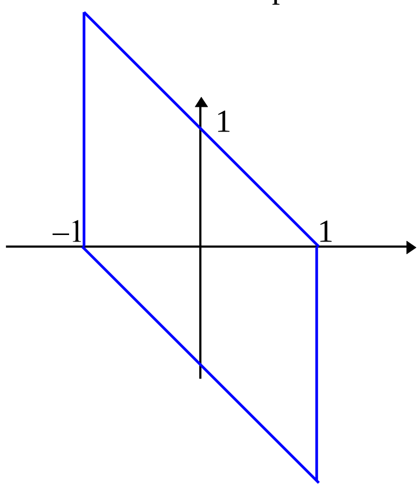
$$[1, 1 + \frac{\mathrm{R}}{\| x - y \|}[\subset [1, \frac{\mathrm{R}'}{\| x - y \|}[$$

ou par :

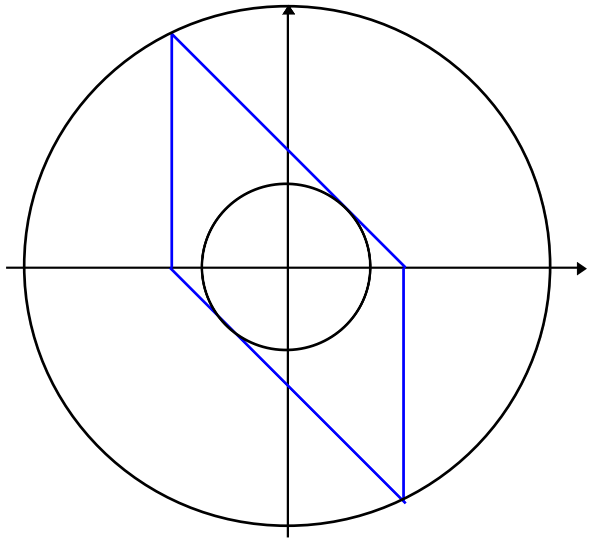
$$1 + \frac{\mathrm{R}}{\| x - y \|} \leq \frac{\mathrm{R}'}{\| x - y \|}$$

ou enfin par $\| x - y \| \leq \mathrm{R}' - \mathrm{R}$.

Sol.3) a) Pas de difficulté particulière.
b) Par symétrie de la boule par rapport à l'origine, supposons $x \geq 0$.
Si $y \geq 0$ alors $\mathrm{N}(x, y) = x + y$. Un élément (x, y) dans le domaine $x \geq 0$, $y \geq 0$ appartient donc à $\mathrm{B}(0, 1)$ si et seulement si $x + y < 1$.
Si $y \leq 0$, $x + ty$ varie entre x et $x + y$, donc $\mathrm{N}(x, y) = \mathrm{Max}(x, |x + y|)$. Un élément (x, y) dans le domaine $x \geq 0$, $y \leq 0$ appartient donc à $\mathrm{B}(0, 1)$ si et seulement si $x < 1$ et $|x + y| < 1$, ou encore $x < 1$ et $-1 < x + y < 1$. La boule est donc le domaine limité par le contour bleu ci-dessous :



On peut reconnaître dans N une norme du type N_∞ lorsque l'on prend $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme base de $\mathbf{R}^2$.
c) Si on compare les boules euclidiennes B_2 à la boule unité $\mathrm{B}(0, 1)$ précédente, on a :



Le rayon de la grande boule euclidienne extérieure est $\sqrt{5}$ et celui de la petite boule euclidienne intérieure est $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $B_2(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \subset B(0, 1) \subset B_2(0, \sqrt{5})$. Ce qui signifie que, $\forall$ X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\| X \| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow N(X) < 1 \Rightarrow \| X \| < \sqrt{5}$$

La même relation d'inclusion s'applique aux boules fermées, conduisant à des inégalités larges :

$$\| X \| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow N(X) \leq 1 \Rightarrow \| X \| \leq \sqrt{5}$$

En appliquant la première implication à un vecteur $\frac{X}{\sqrt{2}\, \| X \|}$, X non nul quelconque, on obtient :

$$N\left(\frac{X}{\sqrt{2}\, \| X \|}\right) \leq 1$$

et donc :

$$N(X) \leq \sqrt{2}\, \| X \|$$

En appliquant la deuxième implication à un vecteur $\frac{X}{N(X)}$, X non nul quelconque, on obtient :

$$\left\| \frac{X}{N(X)} \right\| \leq \sqrt{5}$$

et donc :

$$\| X \| \leq \sqrt{5}\, N(X)$$

d) Montrons que : $N' \leq CN \Leftrightarrow B_f(0, R) \subset B_f'(0, CR)$.

$\Rightarrow$: $x \in B_f(0, R) \Rightarrow N(x) \leq R \Rightarrow N'(x) \leq CR \Rightarrow x \in B_f'(0, CR)$

$\Leftarrow$: $x \in B_f(0, N(x)) \Rightarrow x \in B_f'(0, CN(x)) \Rightarrow N'(x) \leq CN(x)$

Sol.4) a) Pas de difficulté particulière, en procédant par récurrence sur l'indice k.

b) Remarquons que $N_k(f) = |f(0)| + |f'(0)| + ... + |f^{(k-1)}(0)| + N_0(f^{(k)})$.

Le théorème des accroissements finis donne, pour $0 \leq x \leq 1$:

$$|f^{(k)}(x)| - |f^{(k)}(0)| \leq |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)| \leq x\, N_0(f^{(k+1)}) \leq N_0(f^{(k+1)})$$

donc $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq \left|f^{(k)}(0)\right| + N_0(f^{(k+1)})$

donc $N_0(f^{(k)}) \leq \left|f^{(k)}(0)\right| + N_0(f^{(k+1)})$

donc $N_k(f) = \left|f(0)\right| + \left|f'(0)\right| + ... + \left|f^{(k-1)}(0)\right| + N_0(f^{(k)})$

$$\leq \left|f(0)\right| + \left|f'(0)\right| + ... + \left|f^{(k-1)}(0)\right| + \left|f^{(k)}(0)\right| + N_0(f^{(k+1)}) = N_{k+1}(f)$$

En revanche, il n'existe pas d'inégalité du type $N_{k+1} \leq \text{Cte } N_k$. Comparer $N_0(f_n)$ et $N_1(f_n)$ avec $f_n = x^n$ ou plus généralement $N_k(f_{n,k})$ et $N_{k+1}(f_{n,k})$ avec $f_{n,k} = \dfrac{x^{n+k}}{(n+k)(n+k-1)...(n+1)}$

Sol.5) a) Il n'y a pas de difficulté particulière pour montrer que N et N' sont des normes.
Pour N, (X^n) tend vers 0
Pour N', (X^n) tend vers -1 car $N'(1 + X^n) = \dfrac{1}{n} \to 0$
Le fait que les limites soient différentes provient du fait que les deux normes ne sont pas équivalentes, contrairement à ce qui se passe pour des espaces vectoriels normés en dimension finie.
b) N'' est une norme. Par exemple : $N''(P) = 0 \Rightarrow u(P) = 0 \Rightarrow P = 0$ car u est bijective, etc.
Pour $n > n_0$, $N(X^n - Q) = \displaystyle\int_0^1 \left|u(X^n - Q)(t)\right| \,dt = \int_0^1 \left|u(X^n) - u(Q)\right|(t) \,dt = \int_0^1 t^n \,dt$ qui est bien de limite nulle.

Sol.6) a) sans difficulté.
b) Pour tout n, $1 \leq 2^n \leq 2\ n!$ donc $\dfrac{1}{2} N_3 \leq N_2 \leq N_1$. Considérons maintenant la série U_x de terme général x^n avec $x \in [0, 1[$. Alors $N_1(U_x) = \dfrac{1}{1-x}$, $N_2(U_x) = \dfrac{2}{2-x}$.
Quand x tend vers 1, N_1 tend vers ∞ mais pas N_2 donc les deux normes N_1 et N_2 ne peuvent être équivalentes. En effet, une suite bornée pour une norme l'est aussi pour toute autre norme équivalente.
Considérons maintenant la série V_N de terme général 2^n pour $n \leq N$ et 0 au delà. Alors $N_2(V_N) = N + 1$ de limite $+\infty$ quand N tend vers l'infini, alors que $\lim\limits_{N\to+\infty} N_3(V_N) = e^2$ donc les deux normes N_2 et N_3 ne sont pas équivalentes non plus.
N_1 et N_3 ne peuvent être équivalentes car si on avait $N_1 \leq CN_3$, on aurait $\dfrac{1}{2} N_3 \leq N_2 \leq N_1 \leq CN_3$, et N_2 et N_3 seraient équivalentes.
c) Il suffit que la suite (a_n) soit bornée à termes strictement positifs (vérification sans difficulté).
C'est également nécessaire. Si on prend U la série dont tous les termes sont nuls sauf un seul u_n qui vaut 1, on a $0 < N(U) = a_n$ donc les a_n doivent être strictement positifs. Si la suite (a_n) n'est pas bornée, il y a une sous-suite vérifiant $\forall\ n$, $a_{\varphi(n)} \geq n^2$. Si on prend $\forall\ n$, $u_{\varphi(n)} = \dfrac{1}{n^2}$ et $u_k = 0$ pour les indices k qui ne sont pas de la forme $\varphi(n)$, $\sum a_n u_n$ est une série divergente.
d) Si $\dfrac{a_n}{b_n}$ appartient à un segment $[\dfrac{1}{M}, \dfrac{1}{m}]$ inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, les deux normes N_a et N_b sont équivalentes. On a en effet :
$\forall\ n$, $ma_n \leq b_n \leq Ma_n \Rightarrow mN_a \leq N_b \leq MN_a$

Réciproquement, si $m\mathrm{N}_a \leq \mathrm{N}_b \leq \mathrm{MN}_a$, en prenant la série U dont tous les termes sont nuls sauf le n-ème, on aura $ma_n \leq b_n \leq \mathrm{M}a_n$.

Sol.7) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$. Alors :

$$f(x) = x \text{ et } \exists\, y,\ x = f(y) - y$$
$$\Rightarrow \quad f(y) = x + y$$
$$\Rightarrow \quad f^2(y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = x + f(y) = 2f(y) - y$$

Par récurrence, montrons que $f^n(y) = n(f(y) - y) + y$. Si la relation est vraie au rang $n - 1$, alors :

$$\begin{aligned} f^n(y) = f(f^{n-1}(y)) &= f((n-1)(f(y) - y) + y) \\ &= (n-1)(f^2(y) - f(y)) + f(y) \\ &= (n-1)(f(y) - y) + f(y) \\ &= n(f(y) - y) + y \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall\, n,\ f(y) - y = \frac{1}{n}(f^n(y) - y)$$

Par ailleurs, puisque f est 1-lipschitzienne, on a :

$$\| f^n(y) - y \| \leq \| f^n(y) \| + \| y \| \leq 2 \| y \|$$

donc la suite $(f^n(y) - y)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Passant à la limite dans l'égalité $f(y) - y = \frac{1}{n}(f^n(y) - y)$ quand n tend vers l'infini, on obtient $f(y) - y = 0$ et donc $x = 0$.

Sol.8) a) On écrit $\mathrm{A} = \lambda\mathrm{I} + \mathrm{B}$, où I est la matrice identité et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'où :

$$\mathrm{A}^n = (\lambda\mathrm{I} + \mathrm{B})^n = \lambda^n\mathrm{I} + n\lambda^{n-1}\mathrm{B} + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\mathrm{B}^2$$

tous les autres termes étant nuls car $\mathrm{B}^3 = 0$ dans les deux cas demandés (et $\mathrm{B}^2 = 0$ dans le premier cas). Donc :

$$\begin{aligned} \exp(t\mathrm{A}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\mathrm{A}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\lambda^n}{n!}\mathrm{I} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} n\lambda^{n-1}\,\mathrm{B} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\,\mathrm{B}^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\lambda^n}{n!}\mathrm{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}\lambda^{n-1}\,\mathrm{B} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}\lambda^{n-2}\,\mathrm{B}^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\lambda^n}{n!}\mathrm{I} + t\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{B} + \frac{t^2}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}\lambda^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{B}^2 \\ &= e^{\lambda t}\,\mathrm{I} + te^{\lambda t}\,\mathrm{B} + \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}\,\mathrm{B}^2 \\ &= e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ respectivement } e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) $\mathrm{J}^2 = \mathrm{I}_2$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\mathrm{J}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}\mathrm{I}_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{J} = \mathrm{ch}(t)\mathrm{I}_2 + \mathrm{sh}(t)\mathrm{J}$ (voir au besoin le chapitre sur les séries entières L2/SERIENTR.PDF).

Pour le calcul de $\lim\limits_{n\to\infty} (I_2 + \frac{tJ}{n})^n$, remarquons que $I_2 + \frac{tJ}{n}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec $a = \frac{t}{n}$. Diagonalisons cette matrice symétrique. Les valeurs propres sont :

$1 + a$ de vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$1 - a$ de vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit P la matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$. On remplace a par $\frac{t}{n}$, on calcule $\lim\limits_{n\to\infty} D^n = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. La limite cherchée est :

$$\lim_{n\to\infty} (I_2 + \frac{tJ}{n})^n = \lim_{n\to\infty} PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix} = \mathrm{ch}(t)I_2 + \mathrm{sh}(t)J$$

On constate donc que :

$$\lim_{n\to\infty} (I_2 + \frac{tJ}{n})^n = \exp(tJ)$$

au même titre que, dans $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{tx}{n})^n = \exp(tx)$.

c) On vérifiera que $A^3 + A = 0$. Donc, par récurrence $A^{2p+1} = (-1)^pA$ et $A^{2p+2} = (-1)^pA^2$. On en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} A^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1}$$

$$= I_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} (-1)^{n-1} A^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n A$$

$$= I_3 - (\cos(t) - 1)A^2 + \sin(t)A$$

Or A est la matrice du produit vectoriel par ω : $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $AX = \omega \wedge X$. On a donc, pour tout X dans $\mathbb{R}^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^nX = X + (1 - \cos(t))\, \omega \wedge (\omega \wedge X) + \sin(t)\, \omega \wedge X$$

$$= X + (1 - \cos(t)) (\langle\omega, X\rangle\, \omega - X) + \sin(t)\, \omega \wedge X$$

en utilisant $\langle\omega, \omega\rangle = 1$ dans la formule du double produit vectoriel

$$u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle\, v - \langle u, v\rangle\, w$$

$$= \cos(t)X + (1 - \cos(t)) \langle\omega, X\rangle\, \omega + \sin(t)\, \omega \wedge X$$

et l'on reconnait une rotation d'angle t d'axe ω. On le voit en cherchant l'image de ω et de vecteurs orthogonaux à ω.

Sol.9) a) Si x est adhérent à $A \cap B$, alors toute boule de centre x rencontre $A \cap B$ donc rencontre A et rencontre B, donc x est adhérent à A et à B.
Pour un contre-exemple à la réciproque, prendre $E = \mathbb{R}$, $A =]0, 1]$, $B = [-1, 0[$ (ou $B = [-1, 0[\cup \{1\}$ si on veut éviter une intersection vide avec A) et $x = 0$.

b) Soit x adhérent à $A \cup B$. Par l'absurde, si x n'est adhérent ni à A ni à B, il existe une boule $B(x, R)$ qui ne rencontre pas A, et une boule $B(x, R')$ qui ne rencontre pas B. Alors la boule $B(x, \mathrm{Min}(R, R'))$ ne rencontre ni A ni B, donc ne rencontre pas $A \cup B$, en contradiction avec l'hypothèse.
Réciproquement, soit x adhérent à A. Alors toute boule de centre x rencontre A donc rencontre $A \cup B$ donc x est adhérent à $A \cup B$. De même si x est adhérent à B.
c) Si x est intérieur à $A \cap B$, alors il existe une boule de centre x entièrement incluse dans $A \cap B$, donc incluse dans A et incluse dans B. Donc x est intérieur à A et à B.
Réciproquement, si x est intérieur à A et à B, il existe une boule $B(x, R)$ incluse dans A et une boule $B(x, R')$ incluse dans B. La plus petite des deux boules est alors incluse dans $A \cap B$ et x est intérieur à $A \cap B$.
d) Si x est intérieur à A, il existe une boule de centre x incluse dans A, donc incluse dans $A \cup B$, donc x est intérieur à $A \cup B$. De même si x est intérieur à B.
Un contre-exemple à la réciproque est donné par $E = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$, $B = [-1, 0]$, $x = 0$.

Sol.10) a) Soit x appartenant à $p(A)$. Alors il existe $y \in G$ tel que $x + y \in A$. Puisque A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x + y, \varepsilon) \subset A$. Vérifions que :

$$\{z \in F, N(x - z) < \varepsilon\} \subset p(A)$$

où $\{z \in F, N(x - z) < \varepsilon\}$ est, dans F, la boule de centre x et de rayon ε. Cela montrera que $p(A)$ est ouvert. Si z est un élément de F tel que $N(x - z) < \varepsilon$, alors :

$$N(x + y - (z + y)) = N(x - z) < \varepsilon$$

donc $z + y \in B(x + y, \varepsilon)$

donc $z = p(z + y) \in p(B(x + y, \varepsilon)) \subset p(A)$

b) La conclusion est fausse. Dans $\mathbb{R}^2$, prendre F l'axe des abscisses et G l'axe des ordonnées. Soit B le graphe de la fonction tangente. Il est fermé, mais son projeté ne l'est pas.

Sol.11) a) Si $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$, l'inégalité demandée est vérifiée avec n'importe quelle constante M positive. On choisira comme valeur de M celle définie par les (x, y) vérifiant $|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$, i.e. (x, y) élément de A.
A est fermé. En effet, soit (x, y) est adhérent à A. Il existe une suite (x_n, y_n) d'éléments de A convergeant vers (x, y). Pour tout n, on a :

$$|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$$

et si on passe à la limite, $|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$, donc (x, y) est élément de A.
A est borné car inclus dans $[0, 1] \times [0, 1]$.
L'application $(x, y) \to \dfrac{|f(x) - f(y)| - \varepsilon}{(x - y)^2}$ étant continue et partout définie sur le fermé borné A, cette application admet un maximum M positif ou nul, donc $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon + M(x - y)^2$

b) $B_n(P_0) = 1$

$$B_n(P_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1 - x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1 - x)^{n-1-(k-1)}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \qquad \text{par changement d'indice}$$

$$= x (x + (1-x))^{n-1} = x = \mathrm{P}_1(x)$$

$$\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{n} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{k-1}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{k+2} (1-x)^{n-2-k}$$

$$= \frac{x}{n} (x + (1-x))^{n-1} + \frac{n-1}{n} x^2 (x + (1-x))^{n-2}$$

$$= \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n} x^2$$

$$= x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

c) Soit $\varepsilon > 0$. On a, avec le a) :

$$\left|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)\right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) x^k (1-x)^{n-k} \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\varepsilon + \mathrm{M}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\varepsilon + \mathrm{M}\,\frac{k^2}{n^2} - 2\mathrm{M}x\,\frac{k}{n} + \mathrm{M}x^2\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \varepsilon + \mathrm{M}\,\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_2)(x) - 2\mathrm{M}x\,\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_1) + \mathrm{M}x^2$$

$$\leq \varepsilon + \mathrm{M}x^2 + \mathrm{M}\,\frac{x - x^2}{n} - 2\mathrm{M}x^2 + \mathrm{M}x^2$$

$$\leq \varepsilon + \mathrm{M}\,\frac{x - x^2}{n}$$

d) Donc, $\forall\, x \in [0, 1]$, $\left|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon + \frac{\mathrm{M}}{n}$. Prenons N entier tel que $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} < \varepsilon$. Alors :

$$\forall\, x \in [0, 1],\ \forall\, n \geq \mathrm{N},\ \left|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)\right| \leq 2\varepsilon$$

ce qui est la définition de la convergence uniforme de la suite $(\mathrm{B}_n(f))$ de polynômes vers f.

Une autre approche du théorème de Weierstrass est présentée dans une annexe du chapitre L3/METRIQUE.PDF.

Sol.12) E étant de dimension finie, on le munit d'une norme quelconque.
a) On procède par récurrence sur n = dim(E) (qu'on peut assimiler à $\mathbb{R}^n$ au moyen d'un isomorphisme). Considérons un nombre fini d'hyperplans et montrons que leur réunion n'est pas égale à E en exhibant un vecteur n'appartenant à aucun hyperplan.
Pour $n = 1$, le seul hyperplan est $\{0\}$. Il est différent de E.
Pour $n = 2$, considérons le cercle C = $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x^2 + y^2 = 1\}$. Les hyperplans sont des droites vectorielles, qui coupent chacune C en deux points. Les hyperplans étant en nombre fini, leur intersection avec C est finie. C étant infini, il existe un élément de C n'appartenant à aucun hyperplan.
Supposons la propriété vraie pour les espaces vectoriels de dimension $n - 1$. Considérons un espace vectoriel de dimension n (ou $\mathbb{R}^n$) et un nombre fini d'hyperplans H_i, ayant donc un nombre fini de vecteurs normaux (et unitaires). La sphère unité étant infinie, il existe un élément dans cette sphère distinct de tous les vecteurs normaux aux hyperplans H_i. L'hyperplan H orthogonal à cet élément est donc distinct de tous les hyperplans H_i. Les $H_i \cap H$ sont des hyperplans de H en nombre fini, donc, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à H, il existe un élément de H n'appartenant à aucun des $H_i \cap H$. Le même élément est un élément de E n'appartenant à aucun des H_i.
b) On peut inclure les F_i dans des hyperplans H_i noyaux de formes linéaires φ_i. Si x était intérieur à la réunion des F_i il le serait a fortiori à celle des H_i. Il existerait donc ε tel que :

$$\forall y \in B(0, \varepsilon), x + y \in H_1 \cup ... \cup H_p$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall y \in B(0, \varepsilon), \varphi_1(x + y) \times \varphi_2(x + y) \times ... \times \varphi_p(x + y) = 0$$

Si on pose $y = tz$, z unitaire, t élément de $]-\varepsilon, \varepsilon[$, la relation précédente donne un polynôme en t nul sur l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$, donc ce polynôme admet une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul et tous ses coefficients sont nuls, en particulier celui de t^p, qui provient des termes z dans chacun des p facteurs. Donc :

$$\forall z \in S \text{ (sphère unité)}, \varphi_1(z) \times ... \times \varphi_p(z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall z \in E, \varphi_1(z) \times ... \times \varphi_p(z) = 0$$

en multipliant z unitaire par un réel quelconque et en utilisant la linéarité des φ_i

$$\Leftrightarrow \quad E = H_1 \cup ... \cup H_p$$ ce qui est impossible d'après le a).

Sol.13) $\Rightarrow$: Supposons f continue. (i) est vérifié par toute fonction continue donc est vérifié par f. Pour le (ii), utilisons la caractérisation séquentielle des fermés. Si (x_n) est une suite de F de limite l, alors pour tout n, $f(x_n) = y$ et, f étant continue :

$$f(l) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$$

donc l appartient à F. Donc F est fermé.
$\Leftarrow$: Réciproquement, supposons (i) et (ii) vérifiés.
❑ Soit x_0 élément de $\mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que f n'est pas continue en x_0. Dans ce cas :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists y \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(y) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Prenant $\alpha = \dfrac{1}{n}$ avec n entier strictement positif et notant $x_n = y$, on a :

$$\forall n, \exists x_n \in]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[, f(x_n) \geq f(x_0) + \varepsilon \text{ ou } f(x_n) \leq f(x_0) - \varepsilon.$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires (i) entre x_0 et x_n, on en déduit qu'il existe y_n entre x_0 et x_n tel que $f(y_n) = f(x_0) \pm \varepsilon$. Comme y_n est compris entre x_0 et x_n et que (x_n) converge vers x_0, il en est de même de (y_n). Mais $\{x, f(x) = f(x_0) + \varepsilon\} \cup \{x, f(x) = f(x_0) - \varepsilon\}$ est un fermé d'après (ii), les y_n appartiennent à ce fermé, mais pas leur limite x_0 d'où une contradiction.

❑ On peut aussi raisonner directement comme suit : soit x_0 réel et $\varepsilon > 0$. $\{x, f(x) \neq f(x_0) + \varepsilon\}$ est un ouvert contenant x_0 comme complémentaire du fermé (ii) $\{x, f(x) = f(x_0) + \varepsilon\}$ et de même de $\{x, f(x) \neq f(x_0) - \varepsilon\}$. Il en est de même de l'intersection. Soit donc $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ soit inclus dans cette intersection. En raison du théorème des valeurs intermédiaires (i) supposé vérifié par f sur cet intervalle, on a nécessairement pour tout x de cet intervalle, $f(x)$ élément de $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$. C'est la définition de la continuité.

On pourra lire l'article original de Rowe à l'adresse :
http://www.ams.org/journals/bull/1926-32-03/S0002-9904-1926-04213-0/S0002-9904-1926-04213-0.pdf

Dans les exercices du chapitre L1/DERIVEE.PDF, on montre le théorème de Darboux, datant de 1875, qui énonce que toute fonction dérivable f admet une dérivée f' qui vérifie (i). Cependant f' n'est pas nécessairement continue. Dans ce cas, f' ne vérifie pas (ii). Tel est le cas de la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ sinon} \end{cases}$. On a $f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \text{ sinon} \end{cases}$.

Considérons l'ensemble $F = \{x, f'(x) = 1\} = \{x, x \neq 0 \text{ et } 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) = 1\}$.

Pour tout entier n, $x_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ est élément de F. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 0 est adhérent à F. Cependant 0 n'appartient pas à F, donc F n'est pas fermé.

L'exemple précédent montre qu'il n'y a pas équivalence entre continuité et la condition (i). Le théorème de Rowe datant de 1926 ajoute la condition (ii) à la condition (i) permettant d'obtenir une équivalence avec la continuité.

Sol.14) a) On peut proposer :
a est un point isolé de A $\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0,\ B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\} \Leftrightarrow a \in A$ et a n'est pas adhérent à $A - \{a\}$.
x est un point d'accumulation de A si x est adhérent à $A - \{x\}$.
Les points d'accumulation de A sont :

- les points de A qui ne sont pas isolés,
- les points adhérents à A qui ne sont pas dans A.

En ce qui concerne les points de A, point isolé est la négation de point d'accumulation.
En ce qui concerne les points non dans A, point d'accumulation est équivalent à point adhérent.
b) Si A est fermé sans point isolé, alors d'une part, tout point de A n'étant pas isolé est un point d'accumulation de A, d'autre part, tout point d'accumulation étant adhérent à A appartient à A puisque A est fermé.
Réciproquement, si A est égal à l'ensemble de ses points d'accumulation, alors aucun point de A n'est isolé (car un point de A isolé n'est pas un point d'accumulation de A), et d'autre part, A est fermé. En effet, un point adhérent à A, s'il n'était pas dans A, en serait un point d'accumulation, mais dans ce cas devrait être dans A.
A est dit **parfait**. C'est le cas d'un segment ou de l'ensemble donné en c).
c) D'après le b), on montre que A est fermé sans point isolé en montrant que A est l'ensemble de ses points d'accumulation.

❑ Soit x élément de A, de développement décimal $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$. Définissons la suite (x_n) où :

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1-a_n}{10^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

x_n a le même développement décimal que x, sauf le n-ème chiffre que l'on change, 0 en 1 et 1 en 0. Pour tout n, x_n est élément de A, différent de x, et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, donc x est point d'accumulation de A.

❑ Réciproquement, soit x un point d'accumulation de A. A fortiori x est adhérent à A, donc limite d'une suite (x_n) de A. Ecrivons les développements décimaux de x et de chaque x_n :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

$$\forall\ n,\ x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{10^k}$$

Vérifions que, pour tout k, $a_k = \lim_{n\to\infty} a_{k,n}$. Commençons par $k = 1$. On a, pour tout n

$$\begin{aligned}
\left|x - x_n\right| &= \left| \frac{a_1 - a_{1,n}}{10} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k - a_{k,n}}{10^k} \right| \\
&\geq \frac{\left|a_1 - a_{1,n}\right|}{10} - \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k - a_{k,n}}{10^k} \right| \\
&\geq \frac{\left|a_1 - a_{1,n}\right|}{10} - \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{a_k - a_{k,n}}{10^k} \right| \\
&\geq \frac{\left|a_1 - a_{1,n}\right|}{10} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{\left|a_1 - a_{1,n}\right|}{10} - \frac{1}{100}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\left|a_1 - a_{1,n}\right|}{10} - \frac{1}{90}
\end{aligned}$$

Pour n assez grand, $\left|x - x_n\right| < \frac{8}{90}$, ce qui impose $\left|a_1 - a_{1,n}\right| < 1$ et donc $a_{1,n} = a_1$. La suite $(a_{1,n})$ est donc constante à partir d'un certain rang, égale à a_1.

Supposons qu'on ait montré que, pour n assez grand, $a_{1,n} = a_1$, $a_{2,n} = a_2$, ..., $a_{k,n} = a_k$. La différence $10^k(x - x_n)$ s'écrit alors $\frac{a_{k+1} - a_{k+1,n}}{10} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{a_{k+p} - a_{k+p,n}}{10^p}$ et le même raisonnement que précédemment appliqué à la suite $(10^k(x - x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ montrera que, à partir d'un certain rang, $a_{k+1,n} = a_{k+1}$.

On a ainsi montré que, pour tout k, la suite $(a_{k,n})_{n\in\mathbf{N}}$ est constante à partir d'un certain rang et égale à a_k. Comme les $a_{k,n}$ valent 0 ou 1, il en sera de même de a_k, et x est élément de A.

❑ Il reste à montrer que A est d'intérieur vide. Si ce n'est pas le cas, il contient un intervalle non réduit à un point, mais dans tout tel intervalle, il existe un réel dont le développement décimal possède un chiffre autre que 0 ou 1.

Sol.15) a) Pas de difficulté. Par exemple, $\| P \| = 0 \Rightarrow$ P admet les $k + 1$ racines 0, 1, ..., m, mais P est de degré m, donc P = 0.
b) Si (P_n) converge simplement vers 0, alors, pour tout k, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k) = 0$, donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, k,\ \exists\, M_k,\ \forall\, n \geq M_k,\ |P_n(k)| \leq \varepsilon$$

donc, pour $M = \text{Max}\,\{M_k, 0 \leq k \leq m\}$, $\forall\, n \geq M$, $\| P_n \| \leq \varepsilon$, ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to\infty} \| P_n \| = 0$.
En dimension finie, la notion de convergence ne dépend pas de la norme, donc $\lim\limits_{n\to\infty} N(P_n) = 0$. On peut dire aussi, qu'en dimension finie, la notion de convergence se traduit composante par composante, donc, pour tout k, la suite $(a_k(P_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, donc leur maximum aussi (comme ci-dessus).
Comme les $m + 1$ suites des coefficients des P_n tend vers 0, pour tout z complexe, il en est de même de $P_n(z)$.
c) On reconnaît dans $P_n(x)$ la somme partielle de la série de somme $x \exp(-\sqrt{n}\, x^2)$.
Pour tout x réel, $|P_n(x)| \leq |P_n(x) - x \exp(-\sqrt{n}\, x^2)| + |x| \exp(-\sqrt{n}\, x^2)$ et il suffit de montrer que $|P_n(x) - x \exp(-\sqrt{n}\, x^2)|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Or :

$$|P_n(x) - x \exp(-\sqrt{n}\, x^2)| = \left| x \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{n}^k}{k!} x^{2k} \right|$$

Vérifions que la valeur absolue u_k du terme général de la série alternée est décroissant, pour $n \geq x^4$:

$$\forall\, k > n,\ \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\sqrt{n}\, x^2}{k+1} \leq \frac{\sqrt{n}\, x^2}{n} = \frac{x^2}{\sqrt{n}} \leq 1$$

On peut donc majorer la valeur absolue du reste de la série par la valeur absolue de son premier terme (revoir au besoin le paragraphe relatif aux séries alternées dans le chapitre L2/SERIES.PDF) :

$$\forall\, x \in \mathbf{R},\ \forall\, n \geq x^4,\ |P_n(x) - x \exp(-\sqrt{n}\, x^2)| \leq |x|\ \frac{\sqrt{n}^{n+1}\, x^{2(n+1)}}{(n+1)!}$$

Utilisant la formule de Stirling $n! \sim n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ (voir les chapitres L2/SERIES.PDF ou L2/SUITESF.PDF), on obtient un équivalent du majorant :

$$|x|\ \frac{\sqrt{n}^{n+1}\, x^{2(n+1)}}{(n+1)!} \sim |x|\ \frac{\sqrt{n}^{n+1}\, x^{2(n+1)}}{(n+1)\, n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \sim |x|\ \frac{e^n\, x^{2(n+1)}}{\sqrt{n}^{n+1} \sqrt{2\pi n}} \to 0 \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

On a donc bien montré la convergence simple de (P_n) vers 0 dans $\mathbf{R}$.

Cependant $P_n(i) = i \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{n}^k}{k!}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{n}^k}{k!} \geq \sqrt{n} \to +\infty$. Donc (P_n) ne converge pas simplement vers 0 dans $\mathbf{C}$.

Sol.16) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Son polynôme caractéristique $\det(A - XI_n)$ n'admet qu'un nombre fini de racines. Donc, dans tout intervalle $]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}[$, on peut trouver un réel λ_k tel que $\det(A - \lambda_k I_n) \neq 0$. La matrice $A_k = A - \lambda_k I_n$ est donc élément de $GL_n(\mathbf{R})$. On a ainsi défini une suite

$(A_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donc adhérente à $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Sol.17) $N(f(x) - f(y)) = N\left(\dfrac{x}{1 + N(x)} - \dfrac{y}{1 + N(y)}\right) = N\left(\dfrac{x - y}{1 + N(x)} + \dfrac{y}{1 + N(x)} - \dfrac{y}{1 + N(y)}\right)$

$$= N\left(\frac{x - y}{1 + N(x)} + \frac{N(y) - N(x)}{(1 + N(x))(1 + N(y))}\, y\right)$$

$$\leq N\left(\frac{x - y}{1 + N(x)}\right) + \frac{|N(y) - N(x)|}{(1 + N(x))(1 + N(y))}\, N(y)$$

$$\leq \frac{N(x - y)}{1 + N(x)} + \frac{N(y - x)}{(1 + N(x))(1 + N(y))}\, N(y)$$

$$\leq N(y - x)\left(\frac{1}{1 + N(x)} + \frac{N(y)}{(1 + N(x))(1 + N(y))}\right) \leq 2N(y - x)$$

Donc f est lipschitzienne de rapport 2.
On peut faire mieux en écrivant que, par symétrie, on a de même :

$$N(f(x) - f(y)) \leq N(y - x)\left(\frac{1}{1 + N(y)} + \frac{N(x)}{(1 + N(x))(1 + N(y))}\right)$$

et donc, en faisant la demi-somme :

$$N(f(x) - f(y)) \leq N(y - x)\,\frac{1 + N(x) + N(y)}{(1 + N(x))(1 + N(y))} \leq N(x - y)$$

donc f est lispchitzienne de rapport 1. Pour $y = 0$ et x tendant vers 0, on voit qu'on ne peut faire mieux.

Sol.18) a) $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \Rightarrow |(AB)_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \leq nN(A)N(B)$ donc $K = n$ convient. On ne peut faire mieux. Prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & & ... & \\ 1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$.

b) $N(AB) = \sum_{i,j} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right| \leq \sum_{i,j,k} |a_{ik}||b_{kj}| = \sum_{i,k} |a_{ik}| L_k$ où $L_k = \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}| \leq N(B)$

$$\leq \sum_{i,k} |a_{ik}| N(B) = N(A)N(B)$$

c) $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \Rightarrow (AB)_{ij}^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} (AB)_{ij}^2 \leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\, N(B)^2$

$\Rightarrow \quad N(AB)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (AB)_{ij}^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\, N(B)^2 = N(A)^2\, N(B)^2$

$\Rightarrow \qquad N(AB) \leq N(A)N(B)$

Sol.19) a) $N_1(AX) = \sum_i |(AX)_i| = \sum_i \left| \sum_j a_{ij}\, x_j \right|$

$$\leq \sum_i \sum_j |a_{ij}|\, |x_j| = \sum_j \Big(\sum_i |a_{ij}|\Big)\, |x_j|$$

$$\leq \operatorname{Max}_j \Big(\sum_i |a_{ij}|\Big) \sum_j |x_j|.$$

En outre, l'égalité est atteinte lorsque l'on prend $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$ avec le 1 placé sur l'indice j correspondant au maximum des $\sum_i |a_{ij}|$.

b) $N_\infty(AX) = \operatorname{Max}_i |(AX)_i| = \operatorname{Max}_i \left| \sum_j a_{ij}\, x_j \right| \leq \operatorname{Max}_i \sum_j |a_{ij}|\, |x_j| \leq \operatorname{Max}_i \Big(\sum_j |a_{ij}|\Big) N_\infty(X)$

En outre, l'égalité est atteinte lorsque l'on prend $X = (\pm 1, \pm 1, ..., \pm 1, \pm 1, ...)$ avec chaque ± 1 placé sur chaque indice j correspondant au signe de a_{ij}, i étant égal à l'indice du maximum des $\sum_j |a_{ij}|$.

c) $N_2(AX)^2 = \langle AX, AX\rangle = (AX)^T AX = X^T A^T AX = X^T SX$
où S est la matrice symétrique $A^T A$. S étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée (voir le chapitre L2/PREHILB.PDF) et ses valeurs propres sont positives ou nulles car si Y est vecteur propre de S de valeur propre λ, on a :

$$N_2(AY)^2 = Y^T SY = \lambda Y^T Y = \lambda N_2(Y)^2$$

Soit P une matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormée de vecteurs propres de S. P est une matrice orthogonale puisque c'est une matrice de changement de base d'une base orthonormée à une autre. Donc $P^T P = PP^T = I_n$. On a $S = PDP^{-1} = PDP^T$ avec D matrice diagonale dont les coefficients diagonaux λ_i sont les valeurs propres de S. Posons $X = PY$. P étant orthogonale, $N_2(X) = N_2(PY) = N_2(Y)$, et :

$$N_2(AX)^2 = X^T SX = X^T PDP^T X = Y^T P^T PDP^T PY = Y^T DY$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i\, y_i^2$$

$$\leq \Lambda \sum_{i=1}^n y_i^2 = \Lambda\, N_2(Y)^2 = \Lambda\, N_2(X)^2$$

donc $\quad N_2(AX) \leq \sqrt{\Lambda}\, N_2(X)$.

La valeur $\sqrt{\Lambda}$ est atteinte lorsque l'on prend $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ avec un unique 1 placé sur l'indice j correspondant au maximum Λ des λ_j.

Le même raisonnement s'applique pour une application linéaire u de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ de matrice rectangulaire A élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Si $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ sont munis de leur norme euclidienne canonique, la norme de u subordonnée aux deux normes euclidiennes est $\sqrt{\Lambda}$, où Λ est la plus grande valeur propre ${}^{\mathrm{T}}\!AA$. On peut faire le lien entre cette propriété est le fait, prouvé dans le chapitre L2/PREHILB.PDF, que l'image de la sphère unité par u est l'ellipsoïde (ou le domaine limité par cette ellipsoïde selon que $\mathrm{rg}(A) = p$ ou $\mathrm{rg}(A) < p$) dont les longueurs des demi-axes sont les $\sqrt{\lambda_i}$, où les λ_i sont les valeurs propres de ${}^{\mathrm{T}}\!AA$. On retrouve le fait que la valeur maximale de $N_2(f(x))$ lorsque x décrit la sphère unité est alors $\sqrt{\Lambda}$.

Sol.20) a) $N(u(P)) = N(P') = \sum_{k\geq 0} k!\,(k+1)a_{k+1} = \sum_{k>0} k!\,\left|a_k\right| \leq N(P)$ donc u est lipschitzienne de rapport 1. Mais :

$$N(v(X^n)) = N(X^{n+1}) = (n+1)! = (n+1)N(X^n)$$

et il ne peut existe aucune constante C telle que : $\forall$ P, $N(v(P)) \leq CN(P)$.

b) $\quad N'(v(P)) = N'(XP) = N'(P)$ donc v est lipschitzienne de rapport 1. Mais :

$$N'(u(X^n)) = N'(nX^{n-1}) = n = nN'(X^n)$$

et il ne peut existe aucune constante C telle que : $\forall$ P, $N'(u(P)) \leq CN'(P)$.

On voit donc que le caractère lipschitzien dépend des normes choisies (sauf en dimension finie en raison de l'équivalence des normes).

c) $\quad (u \circ v - v \circ u)(P) = (XP)' - XP' = P$ donc $u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}$.

Plus généralement :

$$(u \circ v^n - v^n \circ u)(P) = (X^nP)' - X^nP' = nX^{n-1}P \text{ donc } u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1}.$$

Donc, en notant $\|\ \|$ la norme des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ subordonnée à l'hypothétique norme N :

$$\frac{u \circ v^n - v^n \circ u}{\| v^{n-1} \|} = \frac{nv^{n-1}}{\| v^{n-1} \|}$$

La norme du membre de droite tend vers $+\infty$, alors que le membre de gauche est borné :

$$\forall n, \left\| \frac{u \circ v^n - v^n \circ u}{\| v^{n-1} \|} \right\| \leq \frac{\| u \circ v^n \| + \| v^n \circ u \|}{\| v^{n-1} \|} \leq \frac{2 \| u \| \| v \| \| v^{n-1} \|}{\| v^{n-1} \|} = 2 \| u \| \| v \|$$

d'où une contradiction.

Sol.21) a) Si F est une primitive de f, pour $x \neq 0$, $H(f)(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x} \to F'(0) = f(0)$ quand x tend vers 0.

b) H est lipschitzienne de rapport 1 car :

$$\left|H(f)(0)\right| = \left|f(0)\right| \leq N_\infty(f)$$

et $\quad \forall\, x \in\,]0, 1],\ \left|H(f)(x)\right| \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \left|f(t)\right|\,dt \leq \dfrac{1}{x}\int_0^x N_\infty(f)\,dt = N_\infty(f)$

donc $\quad N_\infty(H(f)) \leq N_\infty(f)$

c) H n'est pas lipschitzienne pour la norme N_1. Pour $f(t) = (1 - t)^n$, $N_1(f) = \dfrac{1}{n+1}$.

et $\quad H(f)(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1 - (1 - x)^{n+1}}{(n+1)x} \text{ sinon} \end{cases}$

$$N_1(H(f)) = \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^{n+1}}{(n+1)x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - t^{n+1}}{(n+1)(1-t)}\,dt \qquad \text{avec le changement de variable } t = 1 - x$$

$$= \frac{1}{n+1}\int_0^1 1 + t + ... + t^n\,dt$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= N_1(f)\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n+1}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n+1} = +\infty$ (voir au besoin le chapitre L2/SERIES.PDF), il ne peut exister de constante k telle que, pour tout f, $N_1(H(f)) \leq k\, N_1(f)$

Le fait que H soit lipschitzienne pour une norme et pas pour l'autre illustre le fait que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Sol.22) a) ❑ Démonstration 1 : Si x appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi)$, les deux membres de l'égalité demandée sont nuls.

Supposons donc que $x \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan et $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite supplémentaire de cet hyperplan donc $E = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$. Pour tout y de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, on a :

$$\left|\varphi(x)\right| = \left|\varphi(x - y)\right| \leq \|\,\varphi\,\|\ \|\,x - y\,\|$$

donc $\|\,x - y\,\| \geq \dfrac{\left|\varphi(x)\right|}{\|\,\varphi\,\|}$ donc $\dfrac{\left|\varphi(x)\right|}{\|\,\varphi\,\|}$ minore tous les $\|\,x - y\,\|$, $y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

donc, la borne inférieure étant le plus grand des minorants, $d(x, \mathrm{Ker}(\varphi)) \geq \dfrac{\left|\varphi(x)\right|}{\|\,\varphi\,\|}$ ou encore $\|\,\varphi\,\| \geq \dfrac{\left|\varphi(x)\right|}{d(x, \mathrm{Ker}(\varphi))}$.

Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que, pour tout z de E, $\left|\varphi(z)\right| \leq \dfrac{\left|\varphi(x)\right|}{d(x, \mathrm{Ker}(\varphi))}\|\,z\,\|$ puisque cela montrera que $\dfrac{\left|\varphi(x)\right|}{d(x, \mathrm{Ker}(\varphi))}$ est un rapport de Lipschitz de φ, donc supérieur ou égal à $\|\,\varphi\,\|$ qui est le plus petit rapport de Lipschitz possible. On décompose $z = y + \lambda x$ avec y élément de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Si $z \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, l'inégalité est triviale. Prenons donc $z \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$ et donc $\lambda \neq 0$. On a $|\varphi(z)| = |\lambda|\ |\varphi(x)|$ donc il suffit de montrer que $|\lambda| \leq \dfrac{\| z \|}{\mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}(\varphi))}$ ou que $\mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}(\varphi)) \leq \dfrac{\| z \|}{|\lambda|} = \| x + \dfrac{y}{\lambda} \|$ ce qui est vrai puisque $\dfrac{y}{\lambda} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

❑ <u>Démonstration 2</u> : On a directement :

$$\begin{aligned}
\| \varphi \| &= \mathrm{Sup}\ \{\frac{|\varphi(y)|}{\| y \|}, y \in \mathrm{E}, y \neq 0\} \\
&= \mathrm{Sup}\ \{\frac{|\varphi(z + \lambda x)|}{\| z + \lambda x \|}, z \in \mathrm{Ker}(\varphi), \lambda \in \mathbb{K}, (z, \lambda) \neq (0, 0)\} \text{ en décomposant } y = z + \lambda x \\
&= \mathrm{Sup}\ \{\frac{|\lambda\varphi(x)|}{\| z + \lambda x \|}, z \in \mathrm{Ker}(\varphi), \lambda \in \mathbb{K}, (z, \lambda) \neq (0, 0)\} \\
&= \mathrm{Sup}\ \{\frac{|\lambda\varphi(x)|}{\| z + \lambda x \|}, z \in \mathrm{Ker}(\varphi), \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0\} \\
&= \mathrm{Sup}\ \{\frac{|\varphi(x)|}{\| \mu z + x \|}, z \in \mathrm{Ker}(\varphi), \mu \in \mathbb{K}, \mu \neq 0\} \text{ en posant } \mu = \frac{1}{\lambda} \\
&= \mathrm{Sup}\ \{\frac{|\varphi(x)|}{\| \mathrm{Z} + x \|}, \mathrm{Z} \in \mathrm{Ker}(\varphi)\} \quad \text{avec } \mathrm{Z} = \mu z \\
&= \frac{|\varphi(x)|}{\mathrm{Inf}\ \{\| \mathrm{Z} + x \|, \mathrm{Z} \in \mathrm{Ker}(\varphi)\}} \\
&= \frac{|\varphi(x)|}{\mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}(\varphi))}
\end{aligned}$$

b) Vérifier que $\| \varphi \| = \| k \|$. On obtient $\mathrm{d}(x, k^{\perp}) = \dfrac{|\langle x, k\rangle|}{\| k \|}$, distance de x à l'hyperplan orthogonal à k, ou norme du projeté de x sur la droite dirigée par k.

Sol.23) a) La condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme est A borné (pour que N soit défini) et infini (pour que $\mathrm{N(P)} = 0 \Rightarrow \mathrm{P} = 0$).
b) La condition nécessaire et suffisante pour que la forme linéaire soit continue est : 0 est adhérent à A.
❑ Elle est suffisante car si 0 est adhérent à A, 0 est la limite d'une suite d'éléments y de A. Or on a : $\forall\ y \in \mathrm{A}, |\mathrm{P}(y)| \leq \underset{x \in \mathrm{A}}{\mathrm{Sup}}\ |\mathrm{P}(x)| = \mathrm{N(P)}$. En passant à la limite quand y tend vers 0 dans cette inégalité, on a aussi : $|\mathrm{P}(0)| \leq \mathrm{N(P)}$, ce qui prouve que la forme linéaire est lipschitzienne de rapport 1.
❑ Elle est nécessaire, car si les points de A sont à une distance supérieure à $\varepsilon > 0$ de 0, mais sont bornés par M, alors la suite $\mathrm{P}_n = (1 - \dfrac{\mathrm{X}^2}{\mathrm{M}^2})^n$ est telle que $\mathrm{P}_n(0) = 1$ mais $\mathrm{N}(\mathrm{P}_n) \leq (1 - \dfrac{\varepsilon^2}{\mathrm{M}^2})^n \to 0$.

Sol.24) a) P est borné car, pour tout p, $\mathrm{N}_\infty(e(p)) = 1$.
P est fermé, car si une suite $e(p_n)$ de P converge vers l, alors :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \mathrm{M}, \forall\ n > \mathrm{M}, \mathrm{N}_\infty(l - e(p_n)) < \varepsilon$$

ce qui impose que $|l_{p_n} - 1| < \varepsilon$ et $|l_q| < \varepsilon$ pour $q \neq p_n$. Si on prend $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$, il en résulte que, nécessairement, la suite (p_n) est stationnaire, puisque tous les termes de la suite l sont élément de]–

ε, ε[, sauf un seul, d'indice p_n. Mais en faisant tendre ε vers 0, on en déduit également que tous les termes de la suite l sont nuls, sauf celui d'indice p_n qui vaut 1. On a donc $l = e(p_n)$, élément de P.
b) f est linéaire et $N_\infty(f(u)) \leq N_\infty(u)$. Donc f est lipschitzienne.
c) $f(e(n))$ a tous ses termes nuls, sauf celui d'indice n qui vaut $\frac{1}{n+1}$. On a donc :

$$N_\infty(f(e(n)) = \frac{1}{n+1}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc, dans E, la suite $(f(e(n)))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la suite identiquement nulle. Mais cette dernière n'appartient pas à f(P). Donc f(P) n'est pas fermé.
On a montré qu'en dimension infinie, l'image d'un fermé borné par une application continue n'est pas nécessairement fermé borné, ou encore que la notion de compact en tant que simple fermé borné ne s'étend pas aux espaces de dimension infinie.
d) La réciproque de la restriction de f à F est l'application $(u_n) \to ((n + 1)u_n)$. Elle n'est pas continue, puisque, si on prend la suite u égale à $e(n)$, on a $N_\infty(f^{-1}(u)) = n + 1$ alors que $N_\infty(u) = 1$. L'application f^{-1} ne peut être lipschitzienne.

Sol.25) a) $|\varphi(f)| \leq 2\ N_\infty(f)$ est facile à montrer, donc $\| \varphi \| \leq 2$. Pour montrer que $\| \varphi \|$ vaut effectivement 2, prendre $\alpha \in\ ]0, 1[$ et la fonction $f : t \to \begin{cases} -1 \text{ si } t \in [-1, 0] \\ \frac{2t}{\alpha} - 1 \text{ si } t \in [0, \alpha] \\ 1 \text{ si } t \in [\alpha, 1] \end{cases}$. Pour une telle fonction, on a :

$$\varphi(f) = \int_0^\alpha (\frac{2t}{\alpha} - 1)\,dt + \int_\alpha^1 1\,dt - \int_{-1}^0 -\,dt = 2 - \alpha$$

Comme $N_\infty(f) = 1$, on doit avoir $2 - \alpha = |\varphi(f)| \leq \| \varphi \|$ pour tout $\alpha \in\ ]0, 1[$ et donc $\| \varphi \| \geq 2$.
b) Le a) montre que 2 est adhérent à l'image par φ de la boule unité de E. Par contre 2 n'est pas dans cette image, ce qui prouve que cette image n'est pas fermée. En effet, il est impossible de trouver f continue telle que $N_\infty(f) \leq 1$ et $|\varphi(f)| = 2$:

Si f est constante, on a $\varphi(f) = 0$.

Si f est non constante, il existe x_0 tel que $|f(x_0)| < 1$. Prenons $\varepsilon = \frac{1 - |f(x_0)|}{2}$. Par continuité de f en x_0, il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que $|f| < 1 - \varepsilon$ sur I. $|\varphi(f)|$ est alors majoré par $(2 - \text{longueur(I)}) + (1 - \varepsilon) \times \text{longueur(I)} = 2 - \varepsilon \times \text{longueur(I)}$, qui est strictement inférieur à 2.
On a un exemple d'un ensemble fermé borné dont l'image par une fonction continue n'est pas un fermé borné, mais on n'est pas en dimension finie. La boule unité n'est pas un compact de E, conformément au théorème de Riesz.

Sol.26) a) Il n'y a pas de difficulté à montrer que N_1 et N_2 sont des normes. On a par exemple :

$N_2(x, y) = 0 \Rightarrow x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$ sinon $\sqrt{2} = -\frac{x}{y}$ serait rationnel.

b) On a $N_2(x, y) \leq \sqrt{2}N_1(x, y)$ mais l'autre inégalité n'est pas vérifiée. Par exemple, soient a_n et b_n les entiers tels que $a_n + b_n\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^n$. On a :

$N_2(a_n, b_n) = (\sqrt{2} - 1)^n \to 0$ quand n tend vers l'infini

Mais il est impossible que $N_1(a_n, b_n)$ tende vers 0. En effet, a_n et b_n étant entiers, cela voudrait dire que $a_n = b_n = 0$ pour n assez grand, et donc que $\sqrt{2} = 1$.

c) Les démonstrations d'équivalence des normes en dimension finie utilisent le théorème de Bolzano-Weierstrass. Or celui-ci n'est pas valide dans $\mathbb{Q}$. Si on prend une suite de rationnels qui convergent dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{2}$, alors toute sous-suite converge vers $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$, mais aucune de ces sous-suites ne peut converger dans $\mathbb{Q}$.

◆