

GEOMETRIE AFFINE EUCLIDIENNE

PLAN

- I : Espace affine euclidien
 - 1) Définition
 - 2) Plan euclidien orienté
 - 3) Espace euclidien de dimension 3
- II : Cercles et sphères
 - 1) Equation d'un cercle
 - 2) Equation d'une sphère
 - 3) Lignes de niveaux
- III : Isométries et similitudes
 - 1) Définition
 - 2) Déplacements du plan
 - 3) Déplacements de l'espace de dimension 3
 - 4) Antidéplacements du plan
 - 5) Antidéplacements de l'espace
 - 6) Similitudes
 - 7) Sous-groupes du groupe affine
- Annexe : les torseurs
 - 1) Définitions
 - 2) Exemples de torseurs
 - 3) Cas particuliers de torseurs
 - 4) Propriétés des torseurs
- Exercices
 - 1) Enoncés
 - 2) Solutions

Avant d'aborder ce chapitre., il convient d'avoir lu les chapitres L1/GEOMAFF.PDF pour les notions affines, L1/ESPEUCL.PDF et L2/PREHILB.PDF pour les notions vectorielles euclidiennes, et L1/DETERMNT.PDF pour les notions d'orientation de l'espace.

I : Espace affine euclidien

1- Définition

On rappelle que les éléments d'un espace vectoriel E peuvent être vus comme des vecteurs, mais également comme des points (voir L1/GEOMAFF.PDF). Dans ce dernier cas, E s'appelle un **espace affine**. Dans ce chapitre, on considère le cas où l'espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire $\langle | \rangle$, et donc d'une norme euclidienne $\| \|$. Il en résulte des propriétés métriques pour l'espace affine correspondant, appelé **espace affine euclidien**. En particulier, on définit la distance entre deux points A et B de l'espace affine par :

$$d(A,B) = AB = \| \mathbf{AB} \| \quad (\text{distance euclidienne})$$

où \mathbf{AB} est le vecteur reliant A à B et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne de l'espace vectoriel associé à l'espace affine. Il résulte de l'inégalité triangulaire relative à la norme une inégalité triangulaire relative à la distance :

$$AB \leq AC + CB$$

En effet, $AB = \| \mathbf{AB} \| = \| \mathbf{AC} + \mathbf{CB} \| \leq \| \mathbf{AC} \| + \| \mathbf{CB} \| = AC + CB$.

EXEMPLE :

□ Soient quatre points A, B, C, H vérifiant $\langle \mathbf{AH} | \mathbf{BC} \rangle = 0$ et $\langle \mathbf{BH} | \mathbf{CA} \rangle = 0$. Montrons que $\langle \mathbf{CH} | \mathbf{AB} \rangle = 0$. On a :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{CH} | \mathbf{AB} \rangle &= \langle \mathbf{CA} | \mathbf{AB} \rangle + \langle \mathbf{AH} | \mathbf{AB} \rangle \\ &= \langle \mathbf{CA} | \mathbf{AB} \rangle + \langle \mathbf{AH} | \mathbf{AB} \rangle + \langle \mathbf{AH} | \mathbf{BC} \rangle && \text{puisque } \langle \mathbf{AH} | \mathbf{BC} \rangle = 0 \\ &= \langle \mathbf{CA} | \mathbf{AB} \rangle + \langle \mathbf{AH} | \mathbf{AC} \rangle \\ &= \langle \mathbf{CA} | \mathbf{AB} \rangle - \langle \mathbf{AH} | \mathbf{CA} \rangle \\ &= \langle \mathbf{CA} | \mathbf{AB} - \mathbf{AH} \rangle \\ &= \langle \mathbf{CA} | \mathbf{HB} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Le lecteur est invité à remarquer qu'on vient de montrer simultanément que :

- dans un triangle ABC du plan affine euclidien, les hauteurs issues des trois sommets se coupent en un point commun H, appelé **orthocentre** du triangle.
- dans un tétraèdre ABCH de l'espace affine euclidien de dimension 3, si deux paires de côtés sont constitués de deux segments ayant des directions orthogonales, il en est de même de la troisième paire.

On étudie particulièrement les cas de la dimension 2 et 3.

2- Plan euclidien orienté

a) On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct, constitué d'une origine et d'une base orthonormée directe du plan vectoriel euclidien orienté. Une droite affine admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$. On remarque que le vecteur de composantes (a, b) est orthogonal à la droite vectorielle associée, d'équation $ax + by = 0$. Si l'on choisit un vecteur unitaire \mathbf{V} de composantes $(a, b) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ comme vecteur orthogonal à la droite, l'équation est de la **forme dite normale** :

$$x \cos(\theta) + y \sin(\theta) + c = 0$$

L'intérêt de cette expression est que la distance d'un point M quelconque de coordonnées (x, y) à la droite affine vaut $|x \cos(\theta) + y \sin(\theta) + c|$. En effet, si A est un point de la droite de coordonnées (x_0, y_0) , alors la distance de M à la droite vaut :

$$| \langle \mathbf{AM} | \mathbf{V} \rangle | = | (x - x_0)\cos\theta + (y - y_0)\sin\theta | = | x\cos(\theta) + y\sin(\theta) + c |$$

Dans le cas plus général d'une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec (a, b) non unitaire, la

distance de M(x,y) à la droite vaut $\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

b) Une droite parallèle à l'axe Oy passant par le point $(x_0, 0)$ a évidemment pour équation $x = x_0$. En coordonnées polaires (r, θ) , avec $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, on obtient $r\cos(\theta) = x_0$. Si l'on fait tourner cette droite d'un angle φ autour de O, l'équation devient : $r\cos(\theta - \varphi) = x_0$. L'équation

générale d'une droite sous forme polaire est donc $r \cos(\theta - \varphi) = C$ ou $r = \frac{C}{\cos(\theta - \varphi)}$, où C est une constante. Le point O se projette sur la droite au point de coordonnées polaires (C, φ) .

c) L'angle de deux vecteurs non nuls (U, V) est l'angle de la rotation qui transforme $\frac{U}{\|U\|}$ en $\frac{V}{\|V\|}$.

La mesure de cet angle est définie à 2π près. Les angles vérifient la **relation de Chasles** :

$$(U, V) + (V, W) = (U, W)$$

Celle-ci résulte en effet de la loi de composition des rotations.

On a aussi $(U, -U) \equiv \pi [2\pi]$.

Une **demi-droite** vectorielle (D) est engendrée par un vecteur U non nul de telle façon que :

$$(D) = \{\lambda U \mid \lambda > 0\}$$

Il en est de même d'une demi-droite affine d'origine A et dirigée par U qu'on peut définir comme $\{A + \lambda U \mid \lambda > 0\}$. On peut donc définir l'angle de deux demi-droites comme étant l'angle de leur deux vecteurs générateurs. Cet angle est défini à 2π près. Il en est de même pour l'angle entre deux **axes**, qui sont des droites orientées.

Par contre, une droite vectorielle ou affine non orientée possède des vecteurs directeurs pouvant prendre deux directions. Soit deux droites de vecteurs directeurs U et V . On peut choisir comme angle de ces deux droites les angles (U, V) , $(-U, V)$, $(U, -V)$ ou $(-U, -V)$. Or on a :

$$(-U, V) = (-U, U) + (U, V) = (U, V) + \pi$$

$$(U, -V) = (U, V) + (V, -V) = (U, V) + \pi$$

$$(-U, -V) = (U, V)$$

N'ayant aucun moyen canonique de choisir une orientation particulière pour les droites, nous choisirons donc n'importe lequel de ces angles, mais celui-ci ne sera défini qu'à un multiple entier de π près au lieu de 2π .

d) Relations métriques dans le triangle :

Soit un triangle ABC . On note a, b, c les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B, C . On note α, β, γ les angles internes au triangle en A, B, C . On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC , S l'aire du triangle, $p = \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre.

PROPOSITION

On dispose des relations suivantes :

$$(i) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \quad (\text{théorème de Pythagore généralisé})$$

$$(ii) \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

$$(iii) \quad S = \frac{bc \sin(\alpha)}{2} = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Démonstration :

□ (i) De $\langle \mathbf{AB} \mid \mathbf{AC} \rangle = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} \times \cos(\alpha)$ où α est l'angle $(\mathbf{AB}, \mathbf{AC})$, on tire facilement, en développant $a^2 = \mathbf{BC}^2 = (\mathbf{BA} + \mathbf{AC})^2$:

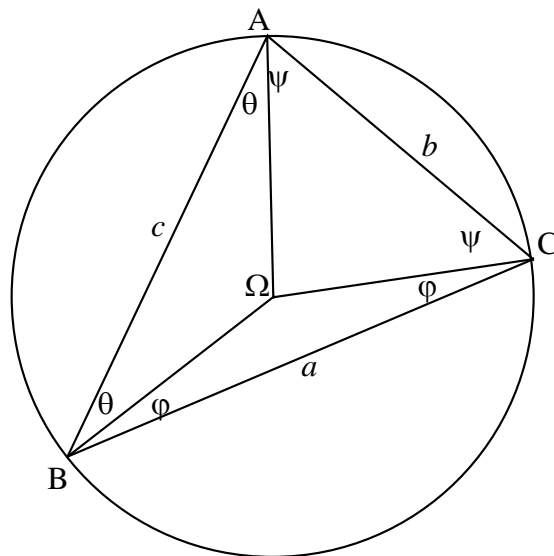
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

□ (ii) (Voir figure). On oriente les angles dans le sens trigonométrique. Soit Ω le centre du cercle circonscrit, α (respectivement β, γ) l'angle $(\mathbf{AB}, \mathbf{AC})$ (respectivement $(\mathbf{BC}, \mathbf{BA}), (\mathbf{CA}, \mathbf{CB})$). Soit θ (respectivement φ, ψ) l'angle $(\mathbf{AB}, \mathbf{A\Omega})$ (respectivement $(\mathbf{BC}, \mathbf{B\Omega}), (\mathbf{CA}, \mathbf{C\Omega})$). Comme le triangle $A\Omega B$ est isocèle, on a aussi θ égal à l'angle $(\mathbf{B\Omega}, \mathbf{BA})$, et de même pour φ et ψ . On a :

$$\cos(\theta) = \frac{c}{2R} \quad \cos(\varphi) = \frac{a}{2R} \quad \cos(\psi) = \frac{b}{2R}$$

(considérer les triangles rectangles constitués d'un sommet, du milieu d'un côté adjacent et du centre Ω) et en particulier :

$$\frac{a}{\cos(\varphi)} = \frac{b}{\cos(\psi)} = \frac{c}{\cos(\theta)} = 2R$$



or $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

donc $2\theta + 2\varphi + 2\psi = \pi$

donc $\theta + \varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$

donc $\cos(\theta) = \sin(\varphi + \psi) = \sin(\gamma)$

de même :

$$\cos(\varphi) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(\psi) = \sin(\beta)$$

D'où le résultat.

Les relations $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ se déduisent aussi de l'aire du triangle :

$$S = \frac{bc \sin(\alpha)}{2} \quad \text{demi-produit de la base } c \text{ par la hauteur } b\sin(\alpha) \text{ issue de } C$$

donc $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{abc}{2S}$ et de même pour $\frac{b}{\sin(\beta)}$ et $\frac{c}{\sin(\gamma)}$.

On vérifiera que les formules restent valables si Ω est extérieur au triangle.

□ (iii) La relation $S = \frac{bc \sin(\alpha)}{2}$ vient d'être justifiée. Comme $\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2R$, on a $S = \frac{abc}{4R}$. Puis :

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2(\alpha) = \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2(\alpha)) \\
&= \frac{1}{4} \left(b^2 c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4} \right) \quad \text{en utilisant (i)} \\
&= \frac{1}{4} \left(bc - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \right) \left(bc + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \right) \\
&= \frac{a^2 - (b - c)^2}{4} \frac{(b + c)^2 - a^2}{4} \\
&= \frac{a - b + c}{2} \frac{a + b - c}{2} \frac{a + b + c}{2} \frac{b + c - a}{2} \\
&= p(p - a)(p - b)(p - c)
\end{aligned}$$

Donc $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$. Cette formule s'appelle **formule de Héron**.

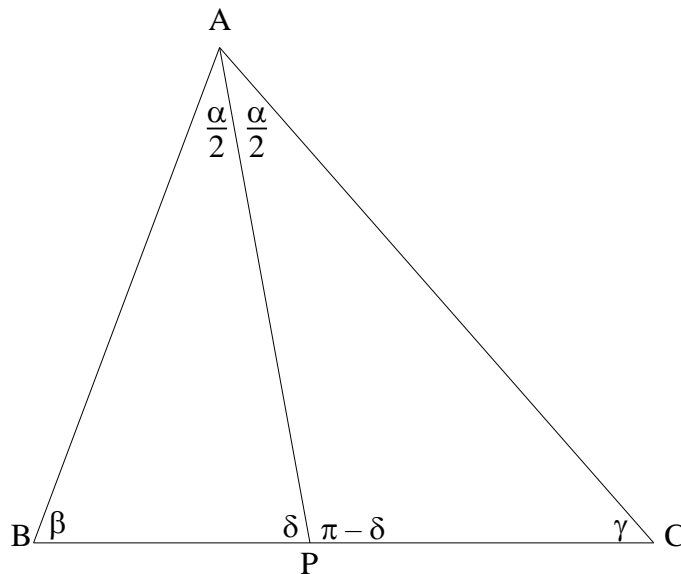
Dans la figure utilisée pour la démonstration du (ii), on remarque que l'angle au centre est le double de l'angle inscrit. Par exemple :

$$(\angle A, \angle B) = \pi - 2\theta = 2(\varphi + \psi) = 2\gamma = 2(\angle CA, \angle CB)$$

En particulier, $\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta + \psi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow$ le segment [BC] est diamètre du cercle. Un triangle inscrit est un triangle rectangle si et seulement si l'un de ses côtés est un diamètre.

EXEMPLE :

□ Considérons un triangle ABC, et soit P l'intersection de la bissectrice issue de A avec son côté opposé.



Soient α , β et γ sont les angles en A, B et C, et a , b , c les longueurs des côtés opposés à A, B et C. Soit δ et $\pi - \delta$ les deux angles supplémentaires en P.

Dans le triangle ABP, on a :
$$\frac{BP}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{c}{\sin(\delta)}$$

Dans le triangle ACP, on a : $\frac{PC}{\sin(\frac{\alpha}{2})} = \frac{b}{\sin(\pi - \delta)} = \frac{b}{\sin(\delta)}$

Donc $\frac{BP}{PC} = \frac{c}{b}$, relation permettant de placer le point P sur [BC] en fonction des longueurs des côtés du triangle.

3- Espace euclidien de dimension 3

a) Il est possible de définir le cosinus de l'angle de deux vecteurs non nuls dans l'espace, au moyen de la formule :

$$\cos(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{\langle \mathbf{U} | \mathbf{V} \rangle}{\|\mathbf{U}\| \|\mathbf{V}\|}$$

Mais même si l'espace est orienté, il n'existe aucun moyen canonique d'en déduire une orientation des plans. De sorte que le signe de l'angle restera indéterminé, et que les angles ne seront pas orientés. Le sinus d'un angle de deux vecteurs dans l'espace n'est donc pas défini, ou alors seulement au signe près. De même, la relation de Chasles n'est pas vérifiée.

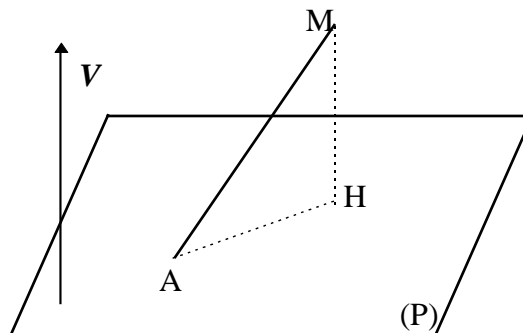
Comme dans le plan, l'angle de deux droites de l'espace est défini par l'angle de deux vecteurs directeurs de ces droites. Cet angle est non orienté. Sa mesure est définie au signe près et à π près.

Une valeur peut être choisie dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

L'angle de deux plans est défini comme l'angle de deux droites orthogonales à ces plans. Cet angle est non orienté. Sa mesure est définie au signe près et à π près. Une valeur peut être choisie dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

L'angle d'une droite et d'un plan est défini comme la différence entre $\frac{\pi}{2}$ et l'angle de la droite et d'une droite orthogonale au plan.

b) *Distance d'un point à un plan* : Soit (P) un plan passant par un point A et \mathbf{V} un vecteur non nul orthogonal à (P). (P) a donc pour équation $\langle \mathbf{AM} | \mathbf{V} \rangle = 0$.



Soit H le projeté d'un point M quelconque sur (P). On a $\langle \mathbf{AH} | \mathbf{V} \rangle = 0$ et $\exists \lambda, \mathbf{HM} = \lambda \mathbf{V}$. Ces deux équations suffisent à définir H de manière unique. On en déduit en effet que :

$$\langle \mathbf{AM} | \mathbf{V} \rangle = \langle \mathbf{AH} | \mathbf{V} \rangle + \langle \mathbf{HM} | \mathbf{V} \rangle = \langle \mathbf{HM} | \mathbf{V} \rangle = \lambda \|\mathbf{V}\|^2$$

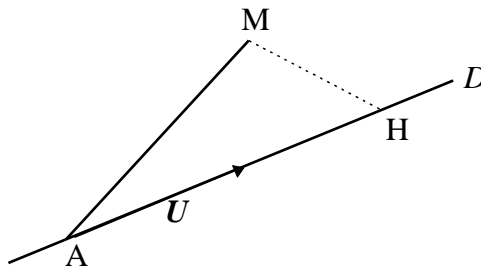
d'où $\lambda = \frac{\langle \mathbf{AM} | \mathbf{V} \rangle}{\|\mathbf{V}\|^2}$. Par conséquent :

$$(i) \mathbf{HM} = \frac{\langle \mathbf{AM} | \mathbf{V} \rangle}{\|\mathbf{V}\|^2} \mathbf{V}$$

$$(ii) d(M, (P)) = HM = \frac{|\langle \mathbf{AM} | \mathbf{V} \rangle|}{\|\mathbf{V}\|}$$

On retrouve une expression analogue à celle vue en dimension 2. Si $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation de (P), alors $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal au plan et $HM = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

c) *Distance d'un point à une droite* : Soit (D) une droite passant par un point A et de vecteur directeur \mathbf{U} . Soit H le projeté sur (D) d'un point quelconque M. On a alors $\mathbf{AH} = \lambda \mathbf{U}$ et $\langle \mathbf{HM} | \mathbf{U} \rangle = 0$, ce qui détermine H.



On en déduit que :

$$\langle \mathbf{AM} | \mathbf{U} \rangle = \langle \mathbf{AH} | \mathbf{U} \rangle + \langle \mathbf{HM} | \mathbf{U} \rangle = \langle \mathbf{AH} | \mathbf{U} \rangle = \lambda \|\mathbf{U}\|^2$$

d'où $\lambda = \frac{\langle \mathbf{AM} | \mathbf{U} \rangle}{\|\mathbf{U}\|^2}$. Par conséquent :

$$(i) \mathbf{AH} = \frac{\langle \mathbf{AM} | \mathbf{U} \rangle}{\|\mathbf{U}\|^2} \mathbf{U}$$

$$(ii) d(M, (D)) = MH = \frac{\|\mathbf{AM} \wedge \mathbf{U}\|}{\|\mathbf{U}\|}$$

car $\|\mathbf{AM} \wedge \mathbf{U}\| = \|\mathbf{AH} \wedge \mathbf{U} + \mathbf{HM} \wedge \mathbf{U}\| = \|\mathbf{HM} \wedge \mathbf{U}\| = \|\mathbf{HM}\| \|\mathbf{U}\|$ car \mathbf{HM} et \mathbf{U} sont orthogonaux. La quantité $\frac{\|\mathbf{AM} \wedge \mathbf{U}\|}{\|\mathbf{U}\|}$ n'est autre que $AM \sin(\theta)$ où θ est l'angle $(\mathbf{U}, \mathbf{AM})$.

d) *perpendiculaire commune* :

Nous dirons que, en dimension 3 :

deux droites sont perpendiculaires si elles sont sécantes et si leurs directions vectorielles sont des droites orthogonales.

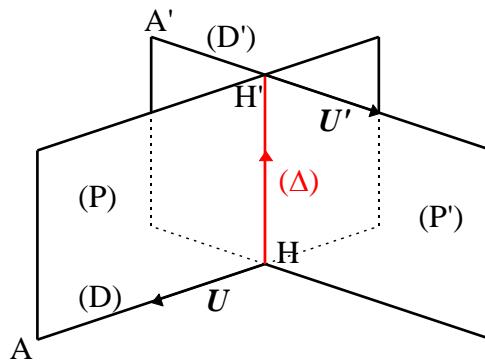
une droite et un plan sont perpendiculaires si leurs directions vectorielles sont orthogonales.

deux plans sont perpendiculaires si leurs directions vectorielles ont pour orthogonal deux droites vectorielles orthogonales.

Soit (D) et (D') deux droites non parallèles, de vecteurs directeurs respectifs \mathbf{U} et \mathbf{U}' , passant par les points respectifs A et A'. On cherche une perpendiculaire commune (Δ) à (D) et (D'). Celle-ci existe et est unique. Montrons l'unicité en supposant provisoirement l'existence. Nécessairement, la droite (Δ) cherchée a pour vecteur directeur un vecteur à la fois orthogonal à \mathbf{U} et à \mathbf{U}' . Ce vecteur

directeur est donc colinéaire à $U \wedge U'$. Les droites (D) et (Δ) définissent un plan (P), passant par A et dirigé par $(U, U \wedge U')$. Les droites (D') et (Δ) définissent un plan (P') passant par A' et dirigé par $(U', U \wedge U')$. Ces deux plans sont non parallèles car sinon, on aurait $\text{Vect}(U, U \wedge U') = \text{Vect}(U', U \wedge U')$, ce qui signifierait les vecteurs $(U, U', U \wedge U')$ sont colinéaires. $(P) \cap (P')$ est donc une droite. Or (Δ) est déjà une droite incluse dans (P) et (P'). Donc nécessairement $(P) \cap (P') = (\Delta)$.

La démarche suivie prouve également l'existence en montrant comment définir (Δ). On prend $(\Delta) = (P) \cap (P')$ avec (P) le plan passant par A et de vecteurs directeurs U et $U \wedge U'$, (P') le plan passant par A' et de vecteurs directeurs U' et $U \wedge U'$. (Δ) est bien la perpendiculaire commune cherchée. En effet, la direction vectorielle de $(P) \cap (P')$ est donnée par $U \wedge U'$ vecteur directeur commun à (P) et (P'). Donc (Δ) coupe (D) et (D') à angle droit puisque $U \wedge U'$ est orthogonal à U et à U' .



Soit H le point $(D) \cap (\Delta)$ et H' le point $(D') \cap (\Delta)$. HH' est la distance entre les deux droites (D) et (D'). En effet, si M est un point quelconque de (D) et M' un point quelconque de (D'), alors $MH \perp HH'$ et $M'H' \perp HH'$ donc le théorème de Pythagore énonce que :

$$\|MM'\|^2 = \|MH\|^2 + \|HH'\|^2 + \|H'M'\|^2 \geq \|HH'\|^2$$

EXEMPLE :

$$\square A(1,3,-2) \quad U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A'(3,1,1) \quad U' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } U \wedge U' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur normal à (P) est $U \wedge (U \wedge U') = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Passant par A, son équation est $2x + y + z = 3$.

Un vecteur normal à (P') est $U' \wedge (U \wedge U') = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Passant par A', son équation est $x + 2y - z = 4$.

Ainsi, les équations de (Δ) sont $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$

Le point H, donné par $(D) \cap (\Delta)$, vérifie les deux équations précédentes et est de la forme $A + \lambda U$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{5}{3} \\ x = 1 \\ y = \frac{4}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi $H = (1, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$.

De même, H' vérifie :

$$\begin{cases} x = 3 + \mu \\ y = 1 \\ z = 1 + \mu \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{5}{3} \\ x = \frac{4}{3} \\ y = 1 \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Ainsi $H' = (\frac{4}{3}, 1, -\frac{2}{3})$.

Le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ vaut $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et la distance entre (D) et (D') est $HH' = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

On peut trouver explicitement le point H égal à $(D) \cap (\Delta)$ de manière plus directe sans avoir besoin de déterminer (Δ) . Soient \mathbf{u} et \mathbf{u}' les vecteurs unitaires colinéaires à \mathbf{U} et \mathbf{U}' . Soit α l'angle $(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$. On remarque que $\mathbf{u} - \cos(\alpha)\mathbf{u}'$ est un vecteur normal au plan (P') (puisque orthogonal à $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}'$ et à \mathbf{u}'). Si λ est tel que $H = A + \lambda\mathbf{u}$, on trouve la valeur de λ en écrivant simplement que le point $H = A + \lambda\mathbf{u}$ doit appartenir à (P'), ce qui donne, en écrivant que $A'H \perp (\mathbf{u} - \cos(\alpha)\mathbf{u}')$:

$$\langle A'A + \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u} - \cos(\alpha)\mathbf{u}' \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle A'A, \mathbf{u} - \cos(\alpha)\mathbf{u}' \rangle + \lambda(1 - \cos^2(\alpha)) = 0$$

On procède de même pour déterminer le point H' égal à $\Delta \cap (D')$.

EXEMPLE :

□ On reprend le même exemple que ci-dessus. On a :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\cos(\alpha) = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u}' \rangle = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{u} - \cos(\alpha)\mathbf{u}' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}' - \cos(\alpha)\mathbf{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A'A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$0 = \langle \mathbf{A}'\mathbf{A}, \mathbf{u} - \cos(\alpha) \mathbf{u}' \rangle + \lambda(1 - \cos^2(\alpha)) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{3\lambda}{4} = \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{3\lambda}{4}$$

donc $\lambda = -\frac{10}{3\sqrt{2}}$ et $\mathbf{H} = (1, 3, -2) - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$

Pour $\mathbf{H}' = \mathbf{A}' + \mu \mathbf{u}'$, on prendra :

$$0 = \langle \mathbf{A}\mathbf{A}', \mathbf{u}' - \cos(\alpha) \mathbf{u} \rangle + \mu(1 - \cos^2(\alpha)) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{3\mu}{4} = \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{3\mu}{4}$$

donc $\mu = -\frac{10}{3\sqrt{2}}$ et $\mathbf{H}' = (3, 1, 1) - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\frac{4}{3}, 1, -\frac{2}{3})$

Analytiquement, on peut également procéder comme suit. Soit $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \lambda \mathbf{u}$ un point quelconque de (D) et $\mathbf{M}' = \mathbf{A}' + \mu \mathbf{u}'$ un point quelconque de (D'). Soit f la fonction :

$$f: (\lambda, \mu) \rightarrow \|\mathbf{M}\mathbf{M}'\|^2 = f(\lambda, \mu)$$

f admet un minimum en (λ_0, μ_0) correspondants aux points H et H' de (D) et (D') appartenant à la perpendiculaire commune Δ . Il suffit donc de résoudre $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$ pour trouver λ et μ . (Voir

L1/FPLSVAR2.PDF). On a :

$$f(\lambda, \mu) = \|\mathbf{A}\mathbf{A}' + \mu \mathbf{u}' - \lambda \mathbf{u}\|^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}'^2 + \lambda^2 + \mu^2 + 2\mu \langle \mathbf{A}\mathbf{A}', \mathbf{u}' \rangle - 2\lambda \langle \mathbf{A}\mathbf{A}', \mathbf{u} \rangle - 2\lambda\mu \cos(\alpha)$$

On souhaite donc que :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, \mu_0) \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial \mu}(\lambda_0, \mu_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 - \langle \mathbf{A}\mathbf{A}', \mathbf{u} \rangle - \mu_0 \cos(\alpha) = 0 \\ \mu_0 + \langle \mathbf{A}\mathbf{A}', \mathbf{u}' \rangle - \lambda_0 \cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

D'où $\lambda_0 = \frac{\langle \mathbf{A}\mathbf{A}', \mathbf{u}' \rangle - \langle \mathbf{A}\mathbf{A}', \mathbf{u} \rangle \cos(\alpha)}{1 - \cos^2(\alpha)}$ et une formule comparable pour μ_0 .

Si on souhaite seulement connaître la distance de (D) à (D'), il n'est pas nécessaire de calculer explicitement H et H'. En effet :

$$d((D), (D')) = \|\mathbf{H}\mathbf{H}'\| = \frac{|\langle \mathbf{A}\mathbf{A}' \mid \mathbf{U} \wedge \mathbf{U}' \rangle|}{\|\mathbf{U} \wedge \mathbf{U}'\|}$$

car :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}\mathbf{A}' \mid \mathbf{U} \wedge \mathbf{U}' \rangle &= \langle \mathbf{A}\mathbf{H} \mid \mathbf{U} \wedge \mathbf{U}' \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{H}' \mid \mathbf{U} \wedge \mathbf{U}' \rangle + \langle \mathbf{H}'\mathbf{A}' \mid \mathbf{U} \wedge \mathbf{U}' \rangle \\ &= \langle \mathbf{H}\mathbf{H}' \mid \mathbf{U} \wedge \mathbf{U}' \rangle \quad \text{avec } \mathbf{H}\mathbf{H}' \text{ et } \mathbf{U} \wedge \mathbf{U}' \text{ colinéaires} \end{aligned}$$

EXEMPLE :

□ Si on reprend encore le même exemple, on a $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{U} \wedge \mathbf{U}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc, directement :

$$d((D), (D')) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

II : Cercles et sphères

1- Equation d'un cercle

Dans un repère orthonormé du plan, l'équation du cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

En effet, M appartient au cercle si et seulement si $\Omega M^2 = R^2$. En développant, on obtient une équation est de la forme :

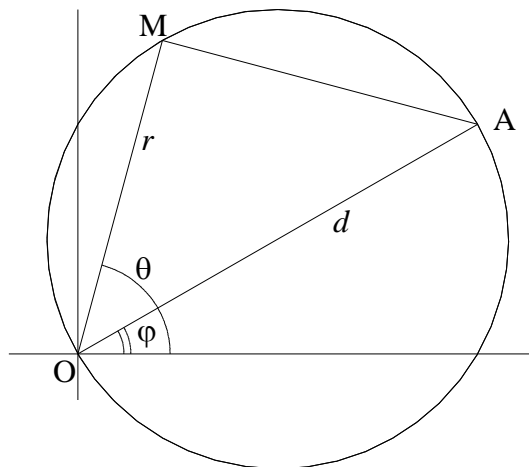
$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$$

Inversement, une équation de ce type peut s'écrire $(x + \frac{c}{2})^2 + (y + \frac{d}{2})^2 = \frac{c^2 + d^2}{4} - e$. Ce n'est l'équation d'un cercle (éventuellement de rayon nul) que si $e \leq \frac{c^2 + d^2}{4}$.

En coordonnées polaires, avec $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, le pôle O appartenant au cercle, l'équation est :

$$r = d \cos(\theta - \varphi)$$

où d est la longueur du diamètre $[OA]$, et φ l'angle que fait ce diamètre avec l'axe Ox .



En effet, si $M = (x, y)$, il suffit de considérer le triangle OAM . $[OA]$ étant un diamètre, ce triangle est rectangle en M et l'angle entre OA et OM est $\theta - \varphi$.

2- Equation d'une sphère

Dans un repère orthonormé, l'équation de la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 + dx + ey + fz + g = 0$$

3- Lignes de niveaux

Soit E un le plan (ou l'espace euclidien de dimension 3). Soit $f : E \rightarrow \mathbf{R}$. Une **ligne de niveau** (ou **surface de niveau** en dimension 3) de f est une partie de E de la forme $f(M) = k$, où k est un réel donné. On s'intéresse aux lignes ou surfaces de niveaux suivantes :

a) Soit \mathbf{u} un vecteur non nul donné (le plus souvent unitaire), et A un point donné, considérons la fonction :

$$f: M \rightarrow \langle \mathbf{u} | \mathbf{AM} \rangle$$

Les lignes de niveaux de cette fonction sont les droites (ou les plans dans l'espace) orthogonales à \mathbf{u} . Il suffit pour cela d'écrire $\mathbf{AM} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$ (+ $z\mathbf{w}$ dans l'espace) avec \mathbf{v} (et \mathbf{w} dans l'espace) orthogonal à \mathbf{u} pour constater que $f(M) = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{\|\mathbf{u}\|^2} = \text{Cte}$.

b) Soit E le plan euclidien et $f: M \rightarrow \det(\mathbf{u}, \mathbf{AM})$, le déterminant étant calculé relativement à une base orthonormée directe et \mathbf{u} un vecteur non nul. Les lignes de niveau sont les droites parallèles à la direction \mathbf{u} . En effet, soit \mathbf{v} un vecteur linéairement indépendant de \mathbf{u} . On a :

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{AM}) = \det(\mathbf{u}, x\mathbf{u} + y\mathbf{v}) = x \det(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + y \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = y \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ puisque } \det(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

Donc $\det(\mathbf{u}, \mathbf{AM}) = \text{Cte} \Leftrightarrow y = \text{Cte}$

c) A et B étant deux points distincts, considérons $f: M \rightarrow \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle$. Notons Ω le milieu de [AB], de sorte que $\mathbf{AM} = \mathbf{A}\Omega + \Omega\mathbf{M}$ et $\mathbf{BM} = \mathbf{B}\Omega + \Omega\mathbf{M}$, et que $\mathbf{B}\Omega = -\mathbf{A}\Omega$. Faisons le produit scalaire. On obtient :

$$f(M) = \langle \mathbf{A}\Omega | \mathbf{B}\Omega \rangle + \Omega M^2$$

Donc $f(M) = k \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 + k$ où $R = \frac{AB}{2}$. Il s'agit donc de cercles de centre Ω (ou de sphères

dans l'espace). Dans le cas où $k = 0$, on obtient $\Omega M = R$. Il s'agit alors du cercle (ou de la sphère dans l'espace) de diamètre [AB]. On retrouve le fait qu'un triangle ABM inscrit dans un cercle est rectangle en M si et seulement si son côté [AB] est un diamètre du cercle.

d) A et B étant deux points distincts, considérons $f: M \rightarrow \frac{MA}{MB}$. Considérons la ligne de niveau

$f(M) = k$ avec k non nul. Elle vérifie $MA = kMB$.

Si $k = 1$, il s'agit de la médiatrice (ou du plan médiateur dans l'espace) de [AB]. En effet :

$$MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow \mathbf{MA}^2 = \mathbf{MB}^2 \Leftrightarrow \mathbf{MB}^2 - \mathbf{MA}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \mathbf{MB} - \mathbf{MA} | \mathbf{MB} + \mathbf{MA} \rangle = 0$$

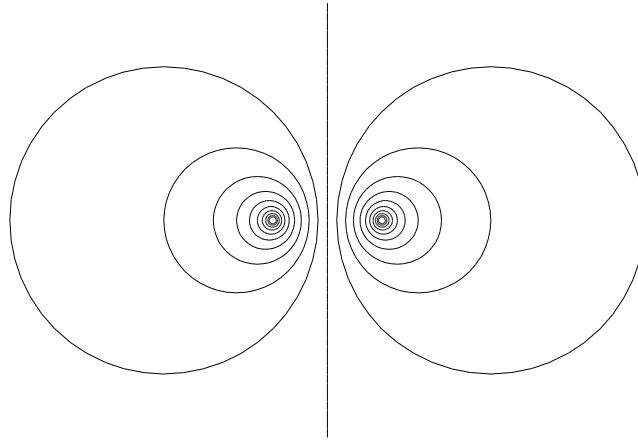
$$\Leftrightarrow \langle \mathbf{AB} | 2\mathbf{M}\Omega \rangle = 0 \quad \text{où } \Omega \text{ est le milieu de [AB]}$$

$\Leftrightarrow M$ appartient à la droite (ou au plan dans l'espace) passant par Ω et perpendiculaire à (AB). On en déduit que les médiatrices d'un triangle ABC se coupent en un point, le centre du cercle circonscrit à ABC. En effet, si O est l'intersection des médiatrices de [AB] et [BC], alors on a $OA = OB$ et $OB = OC$, donc $OA = OC$ et O appartient aussi à la médiatrice de [AC].

Pour k différent de 1, la relation équivaut à $MA^2 = k^2 MB^2$ ou encore à :

$$\langle \mathbf{MA} - k\mathbf{MB} | \mathbf{MA} + k\mathbf{MB} \rangle = 0$$

Notons G_1 le barycentre de (A,1) et (B,-k) et G_2 le barycentre de (A,1) et (B,k). On a alors $\langle \mathbf{MG}_1 | \mathbf{MG}_2 \rangle = 0$. Le triangle MG_1G_2 est rectangle en M, ce qui signifie que, si on considère le cercle dans lequel le triangle est inscrit, $[G_1, G_2]$ en est le diamètre. Inversement, tout point M de ce cercle sera tel que le triangle MG_1G_2 est rectangle en M. La ligne de niveau est donc le cercle (ou de la sphère dans l'espace) de diamètre $[G_1, G_2]$. Quand k tend vers 0, G_1 et G_2 tendent vers A. A la limite, le cercle se réduit au seul point A. Quand k tend vers $+\infty$, G_1 et G_2 tendent vers B. A la limite, le cercle se réduit au seul point B. Quand k tend vers 1, G_1 s'éloigne vers l'infini dans la direction de (AB) et G_2 tend vers Ω , milieu de [AB]. Voici une représentation de ces lignes de niveaux. On obtient un **faisceau de cercles** à deux points limites.



e) Considérons une famille de points $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ affectés de coefficients λ_i et soit la fonction $f: M \rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i MA_i^2$. Supposons d'abord que la somme des coefficients est non nulle, de sorte qu'il

existe un barycentre G aux (A_i, λ_i) , vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{GA}_i = 0$. Utilisant l'égalité $\mathbf{MA}_i = \mathbf{MG} + \mathbf{GA}_i$, on

obtient, en élevant au carré :

$$MA_i^2 = MG^2 + 2\langle \mathbf{MG} | \mathbf{GA}_i \rangle + GA_i^2$$

Il en résulte que :

$$f(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i MG^2 + 2\langle \mathbf{MG} | \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{GA}_i \rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i GA_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i MG^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i GA_i^2$$

Donc les lignes de niveaux vérifient $\sum_{i=1}^n \lambda_i MG^2 = \text{Cte}$. Il s'agit donc de cercles (ou de sphères dans l'espace) de centre G.

Dans le cas où $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, et en prenant cette fois G quelconque, on obtient :

$$f(M) = 2\langle \mathbf{MG} | \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{GA}_i \rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i GA_i^2$$

Posons $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{GA}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (A_i - G) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$ et qui ne dépend pas de G. S'il est nul, f est une

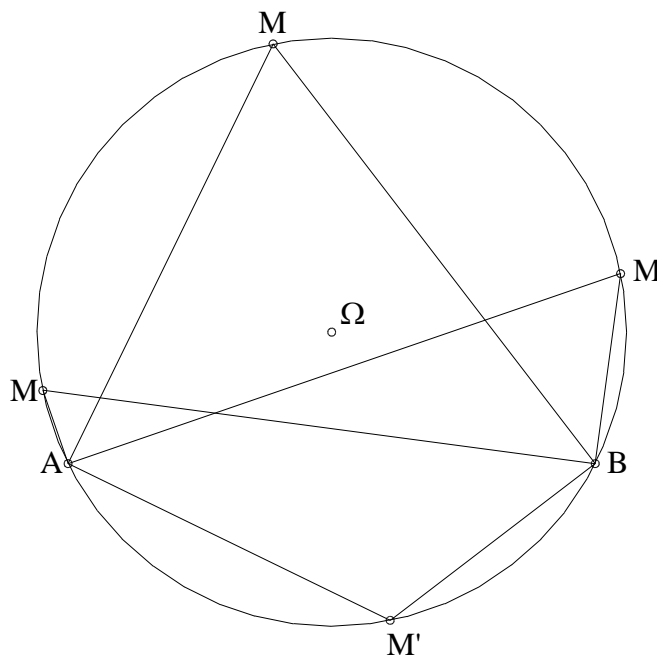
fonction constante. S'il est non nul, les lignes de niveaux vérifient $\langle \mathbf{MG} | \mathbf{U} \rangle = \text{Cte}$. Il s'agit donc, d'après le a), de droites (ou de plans dans l'espace) parallèles, orthogonales à \mathbf{U} .

f) A et B étant deux points distincts du plan, considérons la fonction $f: M \rightarrow \text{angle}(\mathbf{MA}, \mathbf{MB})$.

Si $k = 0$, $f(M) = k \Leftrightarrow (\mathbf{MA}, \mathbf{MB}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{MA}$ et \mathbf{MB} sont colinéaires et de même sens $\Leftrightarrow M, A$ et B sont alignés, M étant extérieur au segment $[AB]$.

Si $k = \pi$, $f(M) = k \Leftrightarrow (\mathbf{MA}, \mathbf{MB}) = \pi \Leftrightarrow \mathbf{MA}$ et \mathbf{MB} sont colinéaires et de sens opposés $\Leftrightarrow M, A$ et B sont alignés, M étant intérieur au segment $[AB]$.

Considérons maintenant $k \neq 0 \pmod{\pi}$. Soit Ω un point de la médiatrice de $[AB]$. Lorsque Ω décrit cette médiatrice, $(\Omega\mathbf{A}, \Omega\mathbf{B})$ décrit l'intervalle $]0, 2\pi[$ de façon strictement monotone. Il existe donc une position unique de Ω pour laquelle $(\Omega\mathbf{A}, \Omega\mathbf{B}) = 2k$. Soit (C) le cercle de centre Ω passant par A et B . Si M appartient à (C) , l'angle au centre $(\Omega\mathbf{A}, \Omega\mathbf{B})$ est le double de l'angle inscrit $(\mathbf{MA}, \mathbf{MB})$. Pour un tel point, on a donc $2(\mathbf{MA}, \mathbf{MB}) = 2k \pmod{2\pi}$, et donc $(\mathbf{MA}, \mathbf{MB}) = k \pmod{\pi}$. Plus précisément, l'un des arcs de cercle joignant A à B correspond à la valeur k , l'autre à la valeur $k + \pi$. Si M est extérieur au cercle, l'angle $(\mathbf{MA}, \mathbf{MB})$ diminue, et s'il est intérieur au cercle, il augmente. Aucun de ces points n'appartiendra à la ligne de niveau. Ainsi la ligne de niveau cherchée est l'un des deux arcs de cercle.



Ci-dessus, on considère le cas où $k = \frac{\pi}{3}$. Ω est tel que $(\Omega\mathbf{A}, \Omega\mathbf{B}) = \frac{2\pi}{3}$. Tous les points M de l'arc supérieur sont tels que $(\mathbf{MA}, \mathbf{MB}) = \frac{\pi}{3}$. Tous les points M' de l'arc inférieur sont tels que

$(\mathbf{M}'\mathbf{A}, \mathbf{M}'\mathbf{B}) = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$. A la limite, quand M tend vers A ou B , l'angle entre (AB)

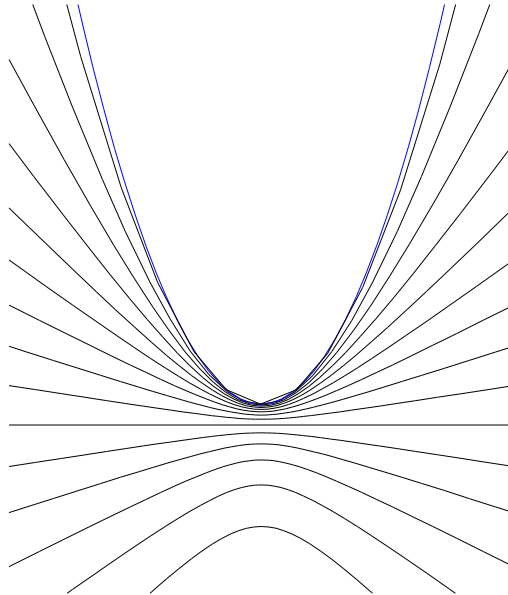
et la tangente en M au cercle vaut aussi $\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$.

g) Soient F et F' deux points distincts du plan et $f: M \rightarrow MF + MF'$. Les lignes de niveaux sont des ellipses de foyer F et F' .

Si on prend $f: M \rightarrow |MF - MF'|$, les lignes de niveaux sont des hyperboles de foyers F et F' .

(Voir L2/CONIQUES pour une démonstration).

h) Soit une parabole donné. Pour tout point M extérieur au domaine convexe limité par la parabole, et n'appartenant pas à la parabole, il existe deux tangentes à la parabole issue de M . Soit α l'angle entre les deux vecteurs reliant M aux deux points de contact des deux tangentes à la parabole, et f la fonction $M \rightarrow \alpha$. Les lignes de niveaux de f sont les branches d'hyperbole de même foyer et de même directrice que la parabole. La directrice elle-même correspond à la valeur $\alpha = \frac{\pi}{2}$. (Voir la partie *Exercices de L2/CONIQUES*).



III : Isométries et similitudes

1- Définition

Les **isométries affines** sont les applications affines associées aux isométries vectorielles. Une isométrie affine associée à une isométrie vectorielle directe, élément de $SO(E)$, s'appelle **déplacement**. Une isométrie affine associée à une isométrie vectorielle indirecte s'appelle **antidéplacement**. La composée d'une isométrie affine et d'une homothétie affine s'appelle une **similitude affine**, directe ou indirecte, suivant que l'isométrie est directe ou indirecte.

Les translations sont les exemples les plus simples d'isométries affines directes, associées à l'identité.

PROPOSITION

- (i) *L'ensemble des isométries affines, muni de la composition des applications, forme un sous-groupe du groupe affine.*
- (ii) *L'ensemble des déplacements en forme un sous-groupe.*
- (iii) *La composée de deux antidéplacements est un déplacement.*

On rappelle que le groupe affine d'un espace affine E est l'ensemble des applications affines de E dans E bijectives, et qu'il forme un groupe pour la composée des applications.

Démonstration :

□ (i) Si f et g sont deux isométries affines, associées respectivement aux isométries linéaires φ et ψ , alors $f \circ g$ est une application affine associée à l'application linéaire $\varphi \circ \psi$. Cette dernière est une isométrie vectorielle, donc $f \circ g$ est une isométrie affine. De plus, φ est inversible, donc f aussi. f^{-1} est associée à l'application affine φ^{-1} qui est une isométrie vectorielle, donc f^{-1} est une isométrie affine.

□ (ii) Si f et g sont des déplacements, alors φ, ψ sont des isométries vectorielles directes et il en est de même de $\varphi \circ \psi$ et φ^{-1} . Donc $f \circ g$ et f^{-1} sont des déplacements.

□ (iii) Si f et g sont des antidéplacements, alors φ, ψ sont des isométries vectorielles indirectes donc $\varphi \circ \psi$ est directe, donc $f \circ g$ est un déplacement. Plus généralement, en se ramenant aux isométries vectorielles, on voit que la composée de n isométries affines f_1, f_2, \dots, f_n est un déplacement si et seulement si le nombre d'antidéplacements parmi elles est pair.

EXEMPLES :

Voici des exemples d'isométries du plan :

- les translations
- les **rotations affines** de centre Ω , d'angle θ . A tout M , on associe N tel que ΩN soit l'image de ΩM par la rotation vectorielle ρ d'angle θ . Une telle rotation affine r est associée à ρ puisque, pour tous points M et N :

$$r(M) = \Omega + \rho(\Omega M)$$

$$r(N) = \Omega + \rho(\Omega N)$$

donc :

$$r(M)r(N) = \Omega + \rho(\Omega N) - \Omega - \rho(\Omega M) = \rho(\Omega N - \Omega M) = \rho(MN)$$

- les symétries orthogonales par rapport à une droite affine (parallèlement à une droite orthogonale à cette droite). Plus généralement, dans un espace affine euclidien quelconque, une symétrie affine orthogonale par rapport à un plan affine s'appelle une **réflexion affine**.

Nous utiliserons le résultat suivant. Soit O un point arbitraire, φ une application linéaire, f et f_0 deux applications affines associées à φ , telles que O soit invariant par f_0 . Alors f est la composée $t_{O f(O)} \circ f_0$ de f_0 et de la translation de vecteur $O f(O)$. En effet :

$$f(M) = f(O) + \varphi(OM) = f(O) + f_0(O)f_0(M) = f(O) + f_0(M) - f_0(O) = f(O) + f_0(M) - O$$

donc $f(M) = f_0(M) + O f(O)$

On peut aussi voir ce résultat sous la forme suivante : $t_{f(O)O} \circ f$ laisse O invariant. De même, $f \circ t_{f(O)O}$ laisse $f(O)$ invariant.

2- Déplacements du plan

PROPOSITION

Les déplacements dans le plan affine euclidien sont les rotations affines et les translations.

Démonstration :

□ Soit f un déplacement, associé à une rotation vectorielle ρ d'angle θ .

Si $\theta = 0$, $\rho = \text{Id}$ et f est une translation.

Supposons $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, et soit f_0 la rotation affine d'angle θ de centre un point arbitraire noté O . f_0 est aussi associée à ρ et est différente de Id . f est la composée de f_0 et de la translation de vecteur

$U = Of(O)$. Nous allons prouver que f est une rotation affine. Pour cela, nous cherchons les points Ω invariants. Ils vérifient :

$$\begin{aligned} \Omega &= f(\Omega) = f(O) + \rho(O\Omega) \\ \Leftrightarrow f(O)\Omega &= f(O)f(\Omega) = \rho(O\Omega) = \rho(Of(O) + f(O)\Omega) = \rho(Of(O)) + \rho(f(O)\Omega) \\ \Leftrightarrow (Id - \rho)(f(O)\Omega) &= \rho(Of(O)) \end{aligned}$$

Comme ρ n'est pas l'identité, ρ est une rotation vectorielle plane, n'admettant pas d'autre vecteur invariant que le vecteur nul, donc l'application $Id - \rho$ est un endomorphisme injectif du plan, donc est bijectif et il existe donc un unique vecteur dont l'image par $Id - \rho$ est $\rho(Of(O))$. Il existe donc un unique point fixe Ω . On a alors :

$$\Omega f(M) = f(\Omega)f(M) = \rho(\Omega M)$$

ce qui prouve que f est bien une rotation de centre Ω .

3- Déplacements de l'espace de dimension 3

On rappelle que les isométries directes de l'espace de dimension 3 sont les rotations. Comme dans le plan, si O est un point donné de l'espace, nous pouvons considérer toute isométrie affine comme la composée d'une isométrie affine laissant invariant O , et d'une translation.

Une **rotation affine** r de l'espace est une application affine pour laquelle il existe un point Ω et une rotation vectorielle ρ telle que, pour tout point M , $r(M) = \Omega + \rho(\Omega M)$. Comme dans le plan, r est une application affine dont l'application vectorielle associée est ρ . Si $\rho = Id$, alors $r = Id$. Sinon, soit Δ l'axe vectoriel de ρ et (D) la droite passant par Ω et de direction Δ . (D) s'appelle l'**axe** de la rotation r . Un point M est invariant si et seulement si M est élément de D . En effet :

$$\begin{aligned} r(M) &= M \\ \Leftrightarrow \Omega + \rho(\Omega M) &= M \\ \Leftrightarrow \rho(\Omega M) &= \Omega M \\ \Leftrightarrow \Omega M &\in \Delta \\ \Leftrightarrow M &\in (D) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut remplacer Ω par n'importe quel autre point de (D) .

Soit Π le plan vectoriel orthogonal à Δ et (P) le plan affine passant par Ω et perpendiculaire à (D) . Le plan Π est globalement invariant par la rotation vectorielle ρ d'axe Δ . Il en résulte que le plan (P) est globalement invariant par la rotation affine r . En effet, pour tout M de (P) , $\Omega M \in \Pi$ donc :

$$r(M) = \Omega + \rho(\Omega M) \in \Omega + \Pi = (P)$$

Si l'angle de rotation vaut π , on a un **demi-tour affine**. Il s'agit également de la symétrie affine orthogonale par rapport à l'axe (D) , ρ étant la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à Δ .

Un **vissage** est la composée $t \circ r$ d'une rotation affine r et d'une translation t parallèlement à l'axe de la rotation. Une rotation est un vissage particulier dont le vecteur de translation est nul. Une translation est un vissage particulier dont l'angle de rotation est nul.

PROPOSITION

- (i) La décomposition d'un vissage $f = t \circ r$ comme composée d'une rotation affine r et d'une translation t de vecteur parallèle à l'axe de la rotation est unique.
- (ii) Dans la décomposition précédente, t et r commutent.
- (iii) Si $r \neq Id$, on appelle **axe du vissage** l'axe de la rotation r . Cet axe est stable par f .

Démonstration :

□ (i) Si on a une autre décomposition $f = t' \circ r'$, l'application vectorielle ρ associée à f est associée à r aussi bien qu'à r' , donc la direction Δ des axes de r et r' est la même. Si (P) est un plan affine perpendiculaire à cet axe, (P) est globalement invariant par r et r' , donc aussi par $r' \circ r^{-1}$. Or $r' \circ r^{-1} = t'^{-1} \circ t$, donc (P) est globalement invariant par $t'^{-1} \circ t$. Cela signifie que le vecteur de translation de $t'^{-1} \circ t$ appartient au plan vectoriel Π , direction de (P). Mais par ailleurs, t et t' étant des translations parallèlement à Δ , ce vecteur appartient à Δ , droite vectorielle orthogonale à Π . Ce vecteur, étant à la fois élément de Δ et de $\Pi = \Delta^\perp$, est nul. Donc $t'^{-1} \circ t = \text{Id}$, donc $t = t'$. On a donc également $r = r'$.

□ (ii) Il est souhaitable de réaliser que la commutation de t et r (lorsque la direction de la translation est parallèle à l'axe de la rotation) est visuellement évidente. Pour une démonstration plus formelle, on peut écrire que, U étant le vecteur de translation de t et M un point quelconque :

$$\begin{aligned} (t \circ r)(M) &= r(M) + U = r(M) + \rho(U) && \text{car } U \in \Delta \text{ axe de } \rho \text{ donc } \rho(U) = U \\ &= r(M + U) = (r \circ t)(M) \end{aligned}$$

□ (iii) Si M appartient à (D), axe du vissage et donc de r , $r(M) = M$ et $f(M) = (t \circ r)(M) = t(M)$ appartient à (D) puisque la translation se fait parallèlement à (D). Donc D est stable par f .

PROPOSITION

Les déplacements dans l'espace affine euclidien de dimension 3 sont les vissages.

Démonstration :

□ Considérons une application affine f associée à une rotation vectorielle ρ d'axe Δ . Soit r une rotation affine quelconque associée à ρ , d'axe (D) droite affine de direction Δ . f et r étant associées à la même application linéaire ρ , $f \circ r^{-1}$ est associée à l'identité, donc est une translation t . Soit $U = r(O)f(O)$ pour n'importe quel point O . On a $f = t \circ r$ car f et $t \circ r$ sont associées à la même application linéaire et que le point O est transformé de la même façon par les deux applications.

Si $t = \text{Id}$, $f = r$ est une rotation affine. C'est un vissage car le vecteur de translation, nul, appartient à la droite vectorielle Δ .

Si $\rho = \text{Id}$, f est une translation. C'est un vissage dont la rotation est l'identité. On peut prendre pour axe de cette rotation n'importe quelle droite, et en particulier la droite de direction le vecteur de translation.

Supposons maintenant $t \neq \text{Id}$ et $\rho \neq \text{Id}$. Distinguons trois cas :

- U est parallèle à (D) (donc est élément de Δ). On obtient directement un vissage.
- U est orthogonal à (D). Dans ce cas, tout plan affine (P) perpendiculaire à D est globalement invariant par f (car il est globalement invariant par r et par t), et d'après l'étude des isométries dans le plan, la restriction de $t \circ r$ à ce plan est une rotation affine. Si Ω est le centre de cette rotation dans le plan (P), $f(\Omega) = \Omega$. On a alors, pour tout M , $f(M) = f(\Omega) + \rho(\Omega M) = \Omega + \rho(\Omega M)$. f est une rotation affine d'axe passant par Ω , de direction Δ (donc parallèle à (D)), et donc un vissage dont le vecteur de translation est nul.

- Sinon, on décompose U sous la forme $V + W$ avec $V \in \Delta$ et $W \perp \Delta$. On a :

$$f = t_U \circ r = t_V \circ t_W \circ r$$

Comme $W \perp \Delta$, d'après le cas précédent, $t_W \circ r$ est une rotation r' dont l'axe a également pour direction Δ . On a donc :

$$f = t_V \circ r' \text{ avec } V \in \Delta$$

et on a le vissage annoncé.

EXEMPLE :

□ Etudier l'application affine définie par $f: (x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$ avec

$$\begin{cases} x' = \frac{-8x + 4y + z + 12}{9} \\ y' = \frac{4x + 7y + 4z - 6}{9} \\ z' = \frac{x + 4y - 8z + 8}{9} \end{cases} .$$

L'application linéaire associée φ est $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$ avec

$$\begin{cases} x' = \frac{-8x + 4y + z}{9} \\ y' = \frac{4x + 7y + 4z}{9} \\ z' = \frac{x + 4y - 8z}{9} \end{cases} .$$
 Sa matrice est

égale à $M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ qui est la matrice d'une isométrie. Les vecteurs invariants par cette

isométrie est une droite vectorielle Δ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Son angle vérifie :

$$\text{Tr}(M) = -1 = 1 + 2\cos(\theta)$$

donc $\theta = \pi$. Il s'agit d'un demi-tour. φ étant une rotation, l'application affine f est un vissage. Un point $M = (x, y, z)$ de l'axe (D) du vissage est tel que $f(M) = M + U$, avec $U \in \Delta$, vecteur de

translation du vissage. Si on pose $U = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, un point M de l'axe vérifie nécessairement :

$$Mf(M) = \lambda U$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-8x + 4y + z + 12}{9} - x \\ \frac{4x + 7y + 4z - 6}{9} - y \\ \frac{x + 4y - 8z + 8}{9} - z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -17x + 4y + z + 12 \\ 4x - 2y + 4z - 6 \\ x + 4y - 17z + 8 \end{pmatrix} = 9\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -17x + 4y + z + 12 = 9\lambda \\ 4x - 2y + 4z - 6 = 36\lambda \\ x + 4y - 17z + 8 = 9\lambda \end{cases}$$

On élimine λ dans les deux dernières équations

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -17x + 4y + z + 12 = 9\lambda \\ 72x - 18y - 54 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ 18x - 18z - 4 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -17x + 4y + z + 12 = 9\lambda \\ z = x - \frac{2}{9} \\ y = 4x - 3 \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent l'équation d'une droite qui est l'axe du vissage cherché. La première donne la valeur de λ et donc du vecteur de translation U :

$$\lambda = \frac{-17x + 4y + z + 12}{9} = -\frac{2}{81}$$

Le vecteur de translation du vissage est donc $U = -\frac{2}{81} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4- Antidéplacements du plan

Soit f un antidéplacement du plan. f est associée à une isométrie vectorielle indirecte s . Or les isométries vectorielles indirectes du plan sont les réflexions (ou symétries orthogonales) par rapport à une droite. Soit Δ la droite vectorielle par rapport à laquelle on effectue la réflexion s . Soit (D) une droite affine arbitraire de direction Δ . Soit f_0 la réflexion affine par rapport à (D) . Soit O un point de (D) , invariant donc par f_0 . f est alors la composée de la réflexion f_0 et de la translation de vecteur $U = Of(O)$. Comme dans le paragraphe précédent, distinguons trois cas :

□ U est parallèle à (D) . Dans ce cas, f s'appelle une **réflexion glissée**. Elle se réduit à une réflexion si $U = 0$. Ci-dessous, les triangles curvilignes supérieurs sont transformés en les triangles curvilignes inférieurs par une réflexion glissée.



Vérifier également que, ci-dessous, on passe d'un rectangle au rectangle suivant par une même réflexion glissée :



On peut aussi voir une réflexion glissée comme la restriction d'un vissage d'angle π à un plan contenant l'axe du vissage.

Comme dans le cas d'un vissage, la décomposition $f = t \circ s$ d'une réflexion glissée en une réflexion s et une translation t parallèlement à la droite par rapport à laquelle s'effectue la réflexion est unique, et t et s commutent. (Voir exercice)

□ U est un vecteur orthogonal à (D) . Dans ce cas, f admet des points M invariants. Notant en effet N le projeté orthogonal d'un point quelconque M sur (D) , ces points invariants M vérifient :

$$f(M) = M$$

$$\Leftrightarrow f_0(M) + U = M$$

$$\Leftrightarrow f_0(M)M = U$$

$$\Leftrightarrow 2NM = U$$

$$\Leftrightarrow NM = \frac{U}{2}$$

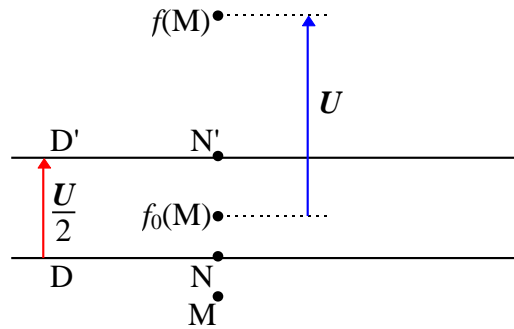
$$\Leftrightarrow M \in (D') \text{ droite parallèle à } (D), \text{ translatée du vecteur } \frac{U}{2}$$

f est la réflexion par rapport à cette droite car, pour tout point M du plan, on a, toujours en notant N le projeté orthogonal de M sur D :

$$f_0(M) = M + 2MN$$

$$\text{le projeté de } M \text{ sur } (D') \text{ est } N' = N + \frac{U}{2}$$

$$\text{donc } f(M) = f_0(M) + U = M + 2MN + U = 2N - M + U = 2N' - M = M + 2MN'$$



□ Sinon, on décompose U sous la forme $V + W$ avec $V \in \Delta$ et $W \perp \Delta$. On a :

$$f = t_U \circ f_0 = t_V \circ t_W \circ f_0$$

Comme $W \perp \Delta$, d'après le cas précédent, $t_W \circ f_0$ est une réflexion f_1 par rapport à une droite de direction Δ . On a donc :

$$f = t_V \circ f_1 \text{ avec } V \in \Delta$$

et f est une réflexion glissée.

On a donc montré :

PROPOSITION

Les antidéplacements sont les réflexions glissées, composée d'une réflexion et d'une translation parallèle à la droite par rapport à laquelle on effectue la réflexion. Une telle réflexion glissée se réduit à une réflexion si le vecteur de translation est nul.

PROPOSITION

Les réflexions affines engendrent le groupe des isométries affines.

Démonstration :

□ Soit O un point fixé du plan affine. On peut associer à toute isométrie vectorielle φ une unique isométrie affine f laissant invariant O .

$$Of(M) = \varphi(OM)$$

Le groupe orthogonal $O(E)$ est alors isomorphe au groupe des isométries affines laissant invariant O . $O(E)$ est engendré par les réflexions vectorielles (voir L2/PREHILB.PDF). Il en résulte que les réflexions affines laissant invariant O engendrent le groupe des isométries affines laissant invariant O . Toute isométrie étant la composée d'une isométrie laissant invariant O et d'une translation, il suffit de montrer qu'une translation est engendrée par des réflexions. Soit t_U une translation, (D) et (D') deux droites parallèles telles que (D') se déduisent de (D) par la translation de vecteur $\frac{U}{2}$, orthogonal à (D) . On a :

$$t_U = s_D \circ s_{D'}$$

Il suffit, pour montrer cela, de voir que l'application linéaire associée à la composée est l'identité, pour conclure que la composée est une translation et de chercher l'image d'un point particulier, par exemple élément de D' pour déterminer que le vecteur de translation est bien U .

5- Antidéplacements de l'espace de dimension 3

Les antidéplacements sont associés aux isométries indirectes de l'espace de dimension 3, qui sont des antirotations vectorielles, composées d'une rotation et d'une réflexion par rapport au plan vectoriel orthogonal à l'axe de rotation (voir L2/PREHILB.PDF).

Si la rotation est l'identité, l'antirotation vectorielle se limite à une réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan). Dans ce cas, on pourra adapter ce qui a été montré dans le plan. Un antidéplacement associé à une réflexion vectorielle est une **réflexion affine glissée**, composée d'une réflexion par rapport à un plan affine et d'une translation parallèlement au plan de la réflexion. La décomposition est unique et la translation commute avec la réflexion.

La composée d'une réflexion et d'une translation selon un vecteur U perpendiculaire au plan de la réflexion reste une réflexion par rapport au plan translaté de $\frac{U}{2}$ par rapport au plan initial.

En ce qui concerne les applications affines f associées à des antirotations vectorielles φ d'angle non nul θ , soit ρ la rotation vectorielle et σ la réflexion vectorielle telles que $\varphi = \rho \circ \sigma$. Soit O un point quelconque, r la rotation affine associée à ρ et dont l'axe (D) passe par O . Soit s la réflexion affine par rapport au plan (P) passant par O et perpendiculaire à l'axe de ρ . Soit $f_0 = r \circ s$. f_0 est un antidéplacement associé à φ donc il existe une translation t telle que $f = t \circ f_0 = t \circ r \circ s$. Le vecteur de la translation t peut se décomposer en un vecteur parallèle à (D) et un vecteur orthogonal à (D) , de sorte que $t = t' \circ t''$, avec t' translation parallèlement à (D) et t'' translation de vecteur orthogonal à (D) . On a alors :

$$f = t' \circ t'' \circ r \circ s$$

Mais le vecteur de translation de t'' étant orthogonal à l'axe de r , $t'' \circ r$ reste une rotation r' dont l'axe est orthogonal au plan (P) . En effet, la restriction de $t'' \circ r$ à (P) est la composée d'une translation parallèlement à (P) et d'une rotation de (P) d'angle θ . C'est une isométrie affine directe de (P) , associée à une rotation vectorielle autre que l'identité, donc une rotation affine de (P) , donc elle admet un point fixe dans (P) . Ce point fixe reste un point fixe de l'application initiale $r' = t'' \circ r$, qui est donc une rotation affine de l'espace d'axe parallèle à (D) . $t' \circ r'$ est alors un vissage. On a :

$$f = t' \circ r' \circ s = r' \circ t' \circ s$$

Mais le vecteur de translation de t' étant orthogonal au plan par rapport auquel s'effectue la réflexion s , $t' \circ s$ reste une réflexion s' , par rapport à un plan translaté du plan précédent. Ainsi, $f = r' \circ s'$. On appellera une telle application une **antirotation affine**. On a donc montré que :

PROPOSITION

Les antidéplacements de l'espace sont :

(i) *les réflexions glissées, composées d'une réflexion et d'une translation parallèlement au plan par rapport auquel s'effectue la réflexion.*

(ii) *les antirotations affines, composées d'une rotation affine et d'une réflexion affine, l'axe de la rotation et le plan de la réflexion étant perpendiculaires.*

PROPOSITION

Les réflexions engendrent les isométries.

Démonstration :

□ On procède d'une façon comparable à la démonstration donnée dans le plan. On utilisera le fait que le groupe des isométries vectorielles est engendré par les réflexions vectorielle, et que toute translation est la composée de deux réflexions affines. Plus précisément, deux réflexions s_P et $s_{P'}$ par rapport à deux plans parallèles (P) et (P') tels que (P') se déduise de (P) par une translation de vecteur $\frac{U}{2}$ orthogonal à (P) , sont telles que $s_P \circ s_{P'}$ est la translation de vecteur U .

EXEMPLE :

□ Soit l'application $f : (x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$ avec
$$\begin{cases} x' = \frac{x + 2y - 2z + 10}{3} \\ y' = \frac{2x + y + 2z - 1}{3} \\ z' = \frac{-2x + 2y + z + 1}{3} \end{cases}$$
. La matrice de

l'application linéaire associée est $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Il s'agit d'une matrice orthogonale. L'ensemble des

vecteurs invariants est le plan $-x + y - z = 0$. Il s'agit donc d'une réflexion et l'application affine associée est une réflexion glissée. Le plan de la réflexion affine est l'ensemble des points M tels que $Mf(M)$ soit élément du plan vectoriel précédent, ce qui conduit à l'équation suivante :

$$x - x' + y' - y + z - z' = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + z = 2 \quad \text{équation du plan cherché}$$

Le vecteur de translation U de la réflexion glissée se trouve en cherchant l'image M' d'un point

quelconque M de ce plan, par exemple $M = (1, 0, 1)$ et $M' = (3, 1, 0)$, d'où $U = MM' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6- Similitudes

Une **similitude affine** est la composée d'une isométrie affine et d'une homothétie de rapport non nul. Les similitudes sont caractérisées par le fait qu'elles multiplient les distances dans un rapport donné, appelé **rapport** de la similitude, qui n'est autre que le rapport de l'homothétie, usuellement non nul. Si ce rapport vaut 1, il s'agit d'une isométrie. Une similitude conserve les angles. La similitude est dite **directe** (respectivement **indirecte**) si l'isométrie est directe (respectivement indirecte).

Dans le cas du plan, les similitudes peuvent être étudiées au moyen des complexes.

PROPOSITION

Dans le plan complexe :

(i) les similitudes directes sont les applications $f : z \rightarrow az + b$, où a est un complexe non nul et b un complexe quelconque.

(ii) les similitudes indirectes sont les applications $f : z \rightarrow a\bar{z} + b$, où a est un complexe non nul et b un complexe quelconque.

Démonstration :

□ (i) Si f est de la forme indiquée, avec $a = re^{i\theta}$ la forme polaire de a , alors f est la composée de :

a) $z \rightarrow e^{i\theta}z$ rotation de centre O d'angle θ

b) $z \rightarrow z + \frac{b}{r}$ translation de vecteur $\frac{b}{r}$

c) $z \rightarrow rz, r \in \mathbf{R}^*$ homothétie de centre O de rapport r

La composition de a) et b) est une isométrie affine et sa composée par c) est bien une similitude directe.

Réciproquement, soit f une similitude directe. f est la composée d'une translation ($z \rightarrow z + b$) ou d'une rotation d'angle θ et de centre z_0 ($z \rightarrow e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$) et d'une homothétie de rapport r non nul et de centre z_1 ($z \rightarrow r(z - z_1) + z_1$ avec r réel). f est donc de la forme suivante :

$$\begin{aligned} r(z + b - z_1) + z_1 &= rz + rb - rz_1 + z_1 && \text{de la forme } az + b \\ \text{ou } r(e^{i\theta}(z - z_0) + z_0 - z_1) + z_1 &= re^{i\theta}z - re^{i\theta}z_0 + rz_0 - rz_1 + z_1 && \text{de la forme } az + b \end{aligned}$$

□ (ii) Il suffit de remarquer que, si s est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel, l'application $f \rightarrow f \circ s$ est une bijection qui transforme toute similitude directe en similitude indirecte, et que s est l'application $z \rightarrow \bar{z}$.

Etudions plus précisément les applications $f: z \rightarrow az + b$. Possède-elle des points invariants z ?

$$az + b = z \Leftrightarrow z(1 - a) = b$$

Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur b (et l'identité si $b = 0$)

Si $a \neq 1$, il y a un point invariant unique $z_0 = \frac{b}{1 - a}$. On a alors :

$$f(z) - z_0 = az + b - z_0 = az - az_0 = a(z - z_0)$$

f est la similitude de centre z_0 , de rapport $|a|$, d'angle $\arg(a)$. En particulier, si $\arg(a) = 0$ ou π , i.e. $a \in \mathbf{R}^*$, alors on dispose d'une homothétie de centre z_0 , de rapport éventuellement négatif. Si a est de module 1, on a une rotation de centre z_0 .

$f: z \rightarrow az + b$			
$a = 1$	$a \in \mathbf{R}^*$	$ a = 1$	autres a
translation	homothétie	rotation	autre similitude

Considérons maintenant les applications $f: z \rightarrow a\bar{z} + b$. Cherchons également les points fixes. Ils vérifient :

$$z = a\bar{z} + b \Leftrightarrow \begin{cases} z = a\bar{z} + b \\ \bar{z} = \bar{a}z + \bar{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = a\bar{z} + b \\ z = |a|^2z + a\bar{b} + b \end{cases}$$

Il y a donc deux cas.

Premier cas : $|a| = 1$

Dans ce cas, f est une isométrie indirecte comme composée d'isométries (la réflexion $z \rightarrow \bar{z}$, la rotation $z \rightarrow az$ et la translation $z \rightarrow z + b$) dont une seule est indirecte. Il s'agit donc d'une réflexion glissée, composée d'une réflexion et d'une translation de vecteur parallèle à la droite par rapport à laquelle s'effectue la symétrie. Soit α un complexe tel que $\alpha^2 = a$. Comme a est de module 1, α aussi et l'on a $\frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$. Montrons que l'axe de la réflexion glissée passe par le point $\frac{b}{2}$, est dirigé par le

vecteur α , et que le vecteur de translation est $\frac{a\bar{b} + b}{2}$. L'application linéaire associée à f est

$\varphi: z \rightarrow a\bar{z}$. Les vecteurs invariants par φ vérifient $z = a\bar{z} = \alpha^2\bar{z}$, ce qui est équivalent à $\bar{\alpha}z = \alpha\bar{z}$, ou à $\bar{\alpha}z$ réel, ou à $z \in \alpha\mathbf{R}$, droite vectorielle engendrée par α . α est donc bien un vecteur directeur de la

direction de l'axe de la réflexion glissée. Vérifions que cet axe est $\frac{b}{2} + \alpha\mathbf{R}$. Il suffit de montrer que tout point c de cet ensemble a son image $f(c)$ telle que $f(c) - c$ est colinéaire à α . Cette différence donne le vecteur de translation.

$$c \in \frac{b}{2} + \alpha\mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, c = \frac{b}{2} + \lambda\alpha$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}, c = \frac{b}{2} + \lambda\alpha \text{ et } f(c) = a\bar{c} + b = \alpha^2\bar{c} + b = \frac{\alpha^2\bar{b}}{2} + \lambda\alpha^2\bar{\alpha} + b = \frac{\alpha^2\bar{b}}{2} + \lambda\alpha + b$$

$$\Rightarrow f(c) - c = \frac{\alpha^2\bar{b}}{2} + \frac{b}{2} = \alpha \frac{\alpha\bar{b} + \bar{\alpha}b}{2} \text{ qui est bien colinéaire à } \alpha \text{ car } \frac{\alpha\bar{b} + \bar{\alpha}b}{2} \in \mathbf{R}.$$

Le vecteur de translation est $\frac{\alpha^2\bar{b}}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a\bar{b} + b}{2}$. En particulier, la réflexion glissée se réduit à une réflexion si et seulement si $a\bar{b} + b = 0$.

Deuxième cas : $|a| \neq 1$. Posons $a = re^{i\theta}$, $r \in \mathbf{R}^*$.

Il existe alors un point unique fixe z_0 défini par :

$$z_0 = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$$

C'est en effet la seule solution au système $\begin{cases} z = a\bar{z} + b \\ z = |a|^2z + a\bar{b} + b \end{cases}$, étant donnée la deuxième équation

$z = |a|^2z + a\bar{b} + b$, et z_0 vérifie bien la première équation $z = a\bar{z} + b$ puisque :

$$a\bar{z}_0 + b = a \frac{\bar{a}\bar{b} + \bar{b}}{1 - |a|^2} + b = \frac{|a|^2b + a\bar{b}}{1 - |a|^2} + b = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2} = z_0$$

On a alors :

$$f(z) - z_0 = f(z) - f(z_0) = a(\bar{z} - \bar{z}_0)$$

f est la composée de la réflexion $z \rightarrow \bar{z} - \bar{z}_0 + z_0$ par rapport à la droite passant par z_0 et parallèle à l'axe réel, de la rotation $z \rightarrow e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$ de centre z_0 et d'angle θ , et de l'homothétie $z \rightarrow r(z - z_0) + z_0$ de centre z_0 et de rapport r . Les deux premières applications ont pour composée la réflexion par rapport à la droite passant par z_0 et faisant un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe réel. f est donc la composée d'une réflexion et d'une homothétie dont le centre appartient à l'axe de la réflexion. Quand r tend vers 1, le centre de l'homothétie est rejeté à l'infini le long de l'axe, et à la limite, on retrouve le cas de la réflexion glissée.

$f: z \rightarrow a\bar{z} + b$	
$ a = 1$	$ a \neq 1$
réflexion glissée	composée d'une réflexion et d'une homothétie

PROPOSITION

L'ensemble des similitudes (de rapport non nul) forme un groupe avec la composée des applications. L'ensemble des similitudes directes en forme un sous-groupe.

Démonstration :

□ Il suffit de le vérifier pour les applications linéaires associées, et cela résulte du fait que l'ensemble des isométries vectorielles forment un groupe et celui des isométries vectorielles directes en forme un sous-groupe. Les homothéties vectorielles apportent un facteur multiplicatif non nul qui se met en facteur.

Le cas des similitudes directes du plan définies par des complexes est intéressant. Posons $G' = \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$, et pour tout $(a, b) \in G'$, notons $f_{a,b}$ l'application définie par :

$$f_{a,b}(z) = az + b$$

et soit $G = \{f_{a,b} \mid a \neq 0\}$ l'ensemble des similitudes, muni de la composition des applications. On peut munir G' d'une loi de façon que G et G' soient des groupes isomorphes, au moyen de l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G' \\ f_{a,b} &\rightarrow (a, b) \end{aligned}$$

On a $f_{a,b} \circ f_{c,d}(z) = f_{a,b}(cz + d) = acz + ad + b = f_{ac, ad+b}(z)$

Posons donc $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$.

* est une loi interne de G' et il en est de même de \circ dans G . La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

\circ est associative, donc * aussi

Id est le neutre de \circ , donc (1,0) est le neutre de *

Le symétrique de (a,b) est $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$ de sorte que l'inverse de la similitude $f_{a,b}$ est la similitude

$$f_{1/a, -b/a}$$

On dispose donc de deux groupes isomorphes (G, \circ) et $(G', *)$. Ces deux groupes sont également

isomorphes au groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, muni du produit. En effet :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le groupe $(G', *)$ permet également de voir facilement que la composée de deux similitudes de rapport a et $\frac{1}{a}$ est une translation.

Ces groupes admettent comme sous-groupe le groupe des homothéties-translations, obtenues pour a réel.

PROPOSITION :

Soit $[AB]$ et $[A'B']$ deux segments du plan de longueur non nulle. Il existe une similitude directe et une seule transformant A en A' et B en B' .

Démonstration :

□ Pour tout point M , notons Z_M l'affixe complexe de M . On cherche a et b tels que :

$$\begin{cases} Z_{A'} = aZ_A + b \\ Z_{B'} = aZ_B + b \end{cases}$$

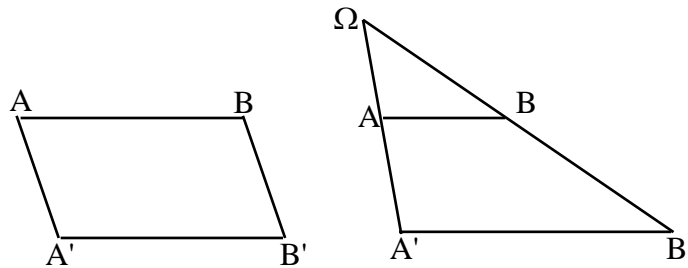
Ce système admet comme solution unique :

$$a = \frac{Z_{A'} - Z_{B'}}{Z_A - Z_B} \text{ et } b = \frac{Z_A Z_{B'} - Z_B Z_{A'}}{Z_A - Z_B}$$

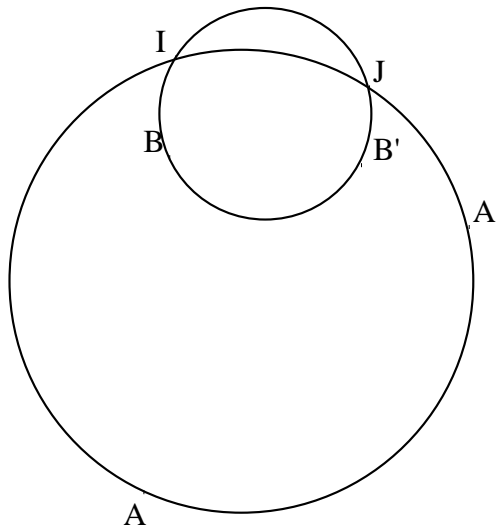
avec a non nul.

Cette similitude a pour rapport $\frac{A'B'}{AB}$ et pour angle $(AB, A'B')$.

Si $(A'B')$ est parallèle à (AB) , la similitude est une translation (de vecteur $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$) si $AA'B'B$ forme un parallélogramme, et une homothétie (de centre Ω l'intersection de (AA') et (BB')) si $AA'B'B$ forme un trapèze. Dans ce dernier cas, le rapport de l'homothétie est $\frac{\Omega A'}{\Omega A} = \frac{\Omega B'}{\Omega B}$ d'après le théorème de Thalès.



Sinon, les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en un point I . Nous nous intéresserons d'abord au cas le plus général, où ce point I est distinct de A, B, A', B' .



Considérons les cercles $(AA'I)$ et $(BB'I)$ qui se coupent en un autre point J (éventuellement égal à I si les deux cercles sont tangents en I). Nous allons montrer que la similitude admet un centre qui n'est autre que J .

On a $(IA, IA') = (IB, IB') = (AB, A'B')$ modulo π
 car IA, IB et AB sont colinéaires, de même que IA', IB' et $A'B'$. Or le centre Ω de la similitude vérifie également :

$$(\Omega A, \Omega A') = (\Omega B, \Omega B') = (AB, A'B') = \text{angle de la similitude}$$

Donc $(\Omega A, \Omega A') = (IA, IA')$ mod π

et $(\Omega B, \Omega B') = (IB, IB')$ mod π

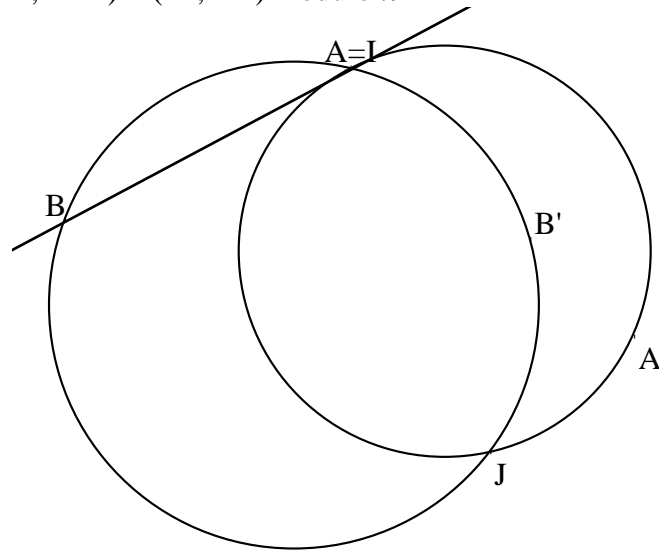
Donc, d'après le résultat sur les lignes de niveaux des deux fonctions $M \rightarrow (MA, MA')$ et $M \rightarrow (MB, MB')$, Ω appartient au cercle $(AA'I)$ et au cercle $(BB'I)$. Il s'agit donc de I ou de J. Supposons que I soit le point recherché. Comme I, A et B sont alignés, il existe λ tel que :

$$IB = \lambda IA$$

En appliquant la similitude, on en déduit que $IB' = \lambda IA'$. Cela signifie que B et B' sont respectivement les images de A et A' par l'homothétie de centre I et de rapport λ . Donc le cercle (IBB') est l'image du cercle (IAA') par la même homothétie. La tangente en I à (IAA') a pour image la tangente en I à (IBB') , et ces deux tangentes, passant par le même point I invariant par l'homothétie, sont identiques. Les deux cercles sont donc tangents en I, donc $I = J$. On en conclut donc, que, si I et J sont distincts, Ω est égal à J. (Dans la figure ci-dessus, on pourra se convaincre que les triangles JAB et JA'B' sont bien semblables).

Dans le cas où I est égal à A, par exemple, on a toujours :

$$(\Omega B, \Omega B') = (AB, A'B') = (IB, IB')$$
 modulo π



dont Ω appartient au cercle (IBB') . D'autre part :

$$(\Omega A, \Omega A') = (AB, A'B') = (IB, IA')$$
 modulo π

(On ne peut prendre IA qui est nul dans le dernier angle). Donc Ω appartient au cercle passant par I et A' et tangent en I à (IB) . Une similitude de centre I ne peut changer A en A', donc le centre cherché est en J, autre point d'intersection des deux cercles.

Interprétation de $\frac{z-a}{z-b}$

Notons $re^{i\theta}$ le nombre $\frac{z-a}{z-b}$. Cela signifie que, dans le triangle ZAB dont les sommets ont pour affixe z, a et b respectivement, on a :

$$\frac{ZA}{ZB} = r \text{ et } (\mathbf{ZB}, \mathbf{ZA}) = \theta = \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

On en déduit une condition simple portant sur les affixes complexes de quatre points A, B, C, D distincts pour savoir si ces quatre points sont cocycliques ou alignés. D'après le résultat sur les lignes de niveaux de la fonction $M \rightarrow (\mathbf{BM}, \mathbf{AM})$, les quatre points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $(\mathbf{BC}, \mathbf{AC}) = (\mathbf{BD}, \mathbf{AD}) \pmod{\pi}$, donc si et seulement si leur affixe a, b, c et d vérifient :

$$\begin{aligned} & \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right) \pmod{\pi} \\ \Leftrightarrow & \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) - \arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right) \equiv 0 \pmod{\pi} \\ \Leftrightarrow & \arg\left(\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}\right) \equiv 0 \pmod{\pi} \\ \Leftrightarrow & \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

7- Sous-groupes du groupe affine

Le tableau suivant indique quelques sous-groupes du groupe affine, ainsi que les propriétés géométriques conservées par ces sous-groupes :

	Identité	Translations	Déplacements	Isométries	Similitudes	Groupe affine
Position	X					
Direction	X	X				
Orientation	X	X	X			
Distances	X	X	X	X		
Angles	X	X	X	X	X	
Parallélisme barycentre	X	X	X	X	X	X

Annexe : les torseurs

1- Définition

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Un **champ de vecteurs** V sur E est une application de E (considéré comme ensemble de points) dans E (considéré comme ensemble de vecteurs). En chaque point P de l'espace affine E, on définit un vecteur $V(P)$ élément de l'espace vectoriel E. $V(P)$ est le **moment** du champ en P.

(i) Ce champ est dit un **torseur** si il existe un vecteur Ω tel que:

$$\forall P, \forall Q, V(Q) = V(P) + \Omega \wedge PQ$$

(ii) Ce champ est dit **équiprojectif** si :

$$\forall P, \forall Q, \langle V(P) | PQ \rangle = \langle V(Q) | PQ \rangle$$

PROPOSITION

Un champ V est équiprojectif si et seulement si c'est un torseur.

Démonstration :

□ L'implication (i) \Rightarrow (ii) est triviale car $\Omega \wedge PQ$ est orthogonal à PQ donc $\langle \Omega \wedge PQ | PQ \rangle = 0$.

□ Montrons la réciproque. Soit O un point arbitraire fixé de E. Pour tout vecteur v , soit P le point tel que $v = OP$. Définissons l'application $u : E \rightarrow E$ (tous deux espaces vectoriels) qui, à un vecteur v de E associe $u(v) = V(P) - V(O)$. u est **antisymétrique**, ce qui signifie que :

$$\forall v, \forall w, \langle u(v) | w \rangle = - \langle v | u(w) \rangle$$

En effet, si $v = OP$ et $w = OQ$, on a :

$$\begin{aligned} \langle u(v) | w \rangle &= \langle V(P) - V(O) | OQ \rangle = \langle V(P) | OQ \rangle - \langle V(O) | OQ \rangle \\ &= \langle V(P) | OQ \rangle - \langle V(Q) | OQ \rangle && \text{en utilisant l'équiprojectivité du champ } V \\ &= \langle V(P) | OP + PQ \rangle - \langle V(Q) | OQ \rangle \\ &= \langle V(P) | OP \rangle + \langle V(P) | PQ \rangle - \langle V(Q) | OQ \rangle \\ &= \langle V(P) | OP \rangle + \langle V(Q) | PQ \rangle - \langle V(Q) | OQ \rangle && \text{en utilisant de nouveau l'équiprojectivité.} \end{aligned}$$

Si on échange les rôles de v et w , on obtiendra, en échangeant les lettres P et Q :

$$\begin{aligned} \langle u(w) | v \rangle &= \langle V(Q) | OQ \rangle + \langle V(P) | QP \rangle - \langle V(P) | OP \rangle \\ \text{puis} &= \langle V(Q) | OQ \rangle + \langle V(Q) | QP \rangle - \langle V(P) | OP \rangle && \text{en utilisant l'équiprojectivité du champ } V \\ &= \langle V(Q) | OQ \rangle - \langle V(Q) | PQ \rangle - \langle V(P) | OP \rangle \\ &= - \langle u(v) | w \rangle \end{aligned}$$

Il en résulte que u est linéaire car, pour tout vecteur v , tout vecteur w et tout réel λ , on a :

$$\langle u(\lambda v) | w \rangle = - \langle \lambda v | u(w) \rangle = - \lambda \langle v | u(w) \rangle = \lambda \langle u(v) | w \rangle = \langle \lambda u(v) | w \rangle$$

Cette relation étant vraie pour tout w , on a $u(\lambda v) = \lambda u(v)$. On montre de même que $u(v + v') = u(v) + u(v')$.

u étant linéaire antisymétrique dans un espace de dimension 3, il existe Ω tel que, pour tout vecteur v , $u(v) = \Omega \wedge v$ (voir L2/PREHILB.PDF). Le champ V vérifie alors, pour tout P :

$$V(P) = V(O) + u(OP) = V(O) + \Omega \wedge OP$$

et aussi :

$$\begin{aligned} V(Q) &= V(O) + \Omega \wedge OQ \\ &= V(O) + \Omega \wedge (OP + PQ) \\ &= V(O) + \Omega \wedge OP + \Omega \wedge PQ \\ &= V(P) + \Omega \wedge PQ \end{aligned}$$

Ω s'appelle la **résultante** du champ. Ω est unique car si un autre vecteur Ω' vérifie (i), alors, on a :

$$\forall w, \Omega \wedge w = \Omega' \wedge w$$

et cela implique que $\Omega = \Omega'$ (considérer par exemple la matrice antisymétrique associée à chacun des deux produits vectoriels. Les deux matrices sont égales, donc leurs coefficients sont égaux, or les coefficients des matrices permettent de reconstituer Ω et Ω'). Pour connaître un torseur en tout point, il suffit, d'après (i), d'en connaître la résultante et le moment en un point. On définit donc un torseur en se donnant en un point P le couple $(\Omega, V(P)) = (\mathbf{Résultante}, \mathbf{Moment}$ en un point P).

PROPOSITION

Les champs de torseurs forment un espace vectoriel.

Démonstration :

□ La relation (ii) permet de montrer facilement que l'ensemble des champs de torseur est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E dans E.

La relation (i) permet de montrer que la résultante du champ $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{V}_i$ est $\sum_{i=1}^n \lambda_i \boldsymbol{\Omega}_i$, où $\boldsymbol{\Omega}_i$ est la résultante du champ \mathbf{V}_i .

2- Exemples de torseurs

Il existe en physique principalement quatre torseurs :

le torseur cinématique d'un solide qui est introduit au moyen de l'équiprojectivité (ii).

les torseurs cinétiques, dynamiques ou des forces portant sur une famille de points, qui sont définis comme sommes de torseurs élémentaires vérifiant (i)

□ Le torseur cinématique d'un solide

Soit \mathbf{V} le champ des vitesses des points d'un solide en mouvement par rapport à E en un instant donné. Il est équiprojectif. En effet, pour tout point P et Q de ce solide :

$$PQ = \text{Cte} \Rightarrow PQ^2 = \text{Cte} \Rightarrow \langle PQ | \mathbf{V}(Q) - \mathbf{V}(P) \rangle = 0 \text{ en dérivant par rapport au temps}$$

$$\text{donc } \langle \mathbf{V}(P) | PQ \rangle = \langle \mathbf{V}(Q) | PQ \rangle$$

Ainsi, le champ des vitesses étant équiprojectif, c'est un torseur dit **torseur cinématique du solide**.

A chaque instant donné, il existe donc un vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ tel que le champ des vitesses vérifie la relation $\mathbf{V}(P) = \mathbf{V}(O) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OP}$. Le vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ s'appelle **vecteur instantané de rotation** du solide par rapport à E. Généralement, il varie avec le temps.

Cela s'applique en particulier pour le mouvement plan sur plan, pour lequel le solide est un plan se déplaçant dans un plan de E. Si $\boldsymbol{\Omega}$ est nul à un instant donné, toutes les vitesses sont égales à $\mathbf{V}(O)$, où O est un point donné quelconque. Le champ des vitesses est identique à cet instant au champ des vitesses d'un mouvement de translation. Si $\boldsymbol{\Omega}$ est non nul, il existe un point O dont la vitesse est nulle à cet instant donné. On le trouve en résolvant l'équation $\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OP} = \mathbf{V}(P)$, où P est un point arbitraire, au moyen d'une division vectorielle (voir L1/DETERMNT.PDF). O s'appelle **centre instantané** de rotation. Le champ des vitesses à l'instant donné est identique à celui d'un mouvement de rotation autour de O.

□ Le torseur cinétique d'un point ou d'un système de points

Soit A un point affecté d'une masse m et d'une vitesse \mathbf{V} par rapport à un référentiel donné. Si l'on choisit un point P quelconque, on définit le **torseur cinétique** \mathbf{L} de A en P par :

$$\left[\begin{array}{l} \text{la résultante} = m\mathbf{V} \\ \text{le moment cinétique de A en P} = \mathbf{PA} \wedge m\mathbf{V} = \mathbf{L}(P) \end{array} \right.$$

On distinguera bien les mots *cinétique* et *cinématique*.

Si on fait varier P, \mathbf{L} est un torseur. En effet, le moment cinétique de A en un autre point Q est tel que :

$$\mathbf{L}(Q) = \mathbf{QA} \wedge m\mathbf{V} = \mathbf{QP} \wedge m\mathbf{V} + \mathbf{PA} \wedge m\mathbf{V} = \mathbf{L}(P) + m\mathbf{V} \wedge \mathbf{PQ}$$

S'il y a n point A_i de masse m_i et de vitesse \mathbf{V}_i , alors le torseur cinétique sera défini par la somme de chacun des torseurs élémentaires définis par chaque A_i , à savoir :

$$\text{la résultante} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{V}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{A}_i = \frac{d}{dt} M_S \mathbf{G} = M_S \mathbf{V}_G$$

où G est la barycentre des points (A_i, m_i) affecté de la masse $M_S = \sum_{i=1}^n m_i$, et V_G est la vitesse de G. Il s'agit de la **quantité de mouvement** de la famille de points.

$$\text{le moment cinétique en un point P} = L(P) = \sum_{i=1}^n \mathbf{PA}_i \wedge m\mathbf{V}_i$$

Dans le cas d'une densité de points A affectés d'une densité de masse dm et de vitesses \mathbf{V} , on remplace le symbole \sum par une intégrale simple, double ou triple, suivant qu'il s'agit d'une densité linéique, surfacique ou volumique.

□ Moment du torseur cinétique d'un solide en un point fixe O de ce solide

Considérons un solide S tel que le torseur cinématique des vitesses soit donné en un point M de S par $(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}(M))$. Cherchons quel est le torseur cinétique de ce solide où chaque point M du solide est affecté d'une densité de masse dm . Supposons qu'il existe un point O du solide S, fixe par rapport au référentiel choisi (de sorte que $\mathbf{V}(O) = 0$). Le moment cinétique du solide en O est :

$$L(O) = \iiint_S \mathbf{OM} \wedge \mathbf{V}(M) dm$$

mais le champ des vitesses est lui-même un torseur. O étant un point de S, supposé fixe par rapport au référentiel, on a $\mathbf{V}(M) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$, donc :

$$L(O) = \iiint_S \mathbf{OM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}) dm = \iiint_S \text{OM}^2 \boldsymbol{\Omega} dm - \iiint_S \langle \mathbf{OM} | \boldsymbol{\Omega} \rangle \mathbf{OM} dm$$

en utilisant la formule du double produit vectoriel (voir L1/DETERMNT.PDF).

Notons \mathbf{J}_O l'opérateur linéaire dit **opérateur d'inertie** relativement à O qui, à tout vecteur \mathbf{u} , associe

$$\mathbf{J}_O(\mathbf{u}) = \iiint_S \mathbf{OM} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{OM}) dm = \iiint_S \text{OM}^2 \mathbf{u} dm - \iiint_S \langle \mathbf{OM} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{OM} dm$$

de sorte que $L(O) = \mathbf{J}_O(\boldsymbol{\Omega})$. On montre dans L2/PREHILB.PDF que \mathbf{J}_O est un opérateur symétrique, autrement dit que $\langle \mathbf{J}_O(\mathbf{u}) | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{J}_O(\mathbf{v}) \rangle$ pour tout vecteur \mathbf{u} et \mathbf{v} , donc sa matrice dans un repère orthonormé est une matrice symétrique, dite **matrice d'inertie**. Etant symétrique, elle est diagonalisable dans un repère orthonormé dont les axes sont appelés **axes principaux d'inertie**.

On notera que l'expression :

$$L(G) = \iiint_S \mathbf{GM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GM}) dm = \mathbf{J}_G(\boldsymbol{\Omega})$$

est valide au centre d'inertie G du solide, même si G est mobile. En effet :

$$\begin{aligned} L(G) &= \iiint_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{V}(M) dm = \iiint_S \mathbf{GM} \wedge (\mathbf{V}(G) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GM}) dm \\ &= \iiint_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{V}(G) dm + \iiint_S \mathbf{GM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GM}) dm \end{aligned}$$

Mais on a $\iiint_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{V}(G) dm = \left(\iiint_S \mathbf{GM} dm \right) \wedge \mathbf{V}(G) = 0$ car $\iiint_S \mathbf{GM} dm = 0$ par définition de G.

Par contre, si O est un point quelconque, lié au solide ou non, mobile ou non, l'expression de $L(O)$ comme étant égale à $J_O(\Omega)$ n'est plus valide en général. Le plus simple est alors de se ramener en G, en utilisant le fait que L est un torseur de résultante $M_S V_G$ où M_S est ici la masse du solide. On a alors :

$$\begin{aligned} L(O) &= L(G) + OG \wedge M_S V_G \\ &= J_G(\Omega) + OG \wedge M_S V_G \end{aligned}$$

□ Le torseur dynamique d'un point ou d'un système de points

Soit A un point affecté d'une masse m et d'une accélération a par rapport à un référentiel donné. Si l'on choisit un point P quelconque, on définit le **torseur dynamique** δ de A en P par :

$$\left[\begin{array}{l} \text{la résultante} = ma \\ \text{le moment dynamique de A en P} = PA \wedge ma = \delta(P) \end{array} \right.$$

δ définit un torseur. En effet, le moment dynamique de A en un autre point Q est tel que :

$$\delta(Q) = QA \wedge ma = \delta(P) + ma \wedge PQ$$

Le torseur dynamique δ n'est autre que la dérivée par rapport au temps du torseur cinétique L à condition que P soit considéré comme fixe dans le référentiel considéré. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(P) &= \frac{d}{dt} (PA \wedge mV) = \frac{dPA}{dt} \wedge mV + PA \wedge \frac{dmV}{dt} = V \wedge mV + PA \wedge ma \\ &= PA \wedge ma = \delta(P) \end{aligned}$$

S'il y a plusieurs point A_i de masse m_i et d'accélération a_i , alors le torseur dynamique sera défini par la somme de chacun des torseurs élémentaires définis par chaque A_i , à savoir :

$$\text{la résultante} = \sum_{i=1}^n m_i a_i = M_S a_G \text{ où } M_S = \sum_{i=1}^n m_i \text{ et } a_G \text{ est l'accélération du barycentre G des } A_i$$

$$\text{le moment dynamique en P} = \delta(P) = \sum_{i=1}^n PA_i \wedge ma_i$$

Comparons $\frac{dL(P)}{dt}$ et $\delta(P)$, avec P quelconque. On a :

$$L(P) = \sum_{i=1}^n PA_i \wedge mV_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dL(P)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{dPA_i}{dt} \wedge mV_i + \sum_{i=1}^n PA_i \wedge \frac{dmV_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n (V_i - V_P) \wedge mV_i + \sum_{i=1}^n PA_i \wedge ma_i \\ &= -V_P \wedge \sum_{i=1}^n mV_i + \delta(P) \\ &= -V_P \wedge M_S V_G + \delta(P) \end{aligned}$$

de sorte que, comme précédemment, $\frac{dL(P)}{dt} = \delta(P)$ si P est un point fixe par rapport au référentiel choisi, mais aussi si P coïncide avec le barycentre G, même si celui-ci est mobile.

Dans le cas d'une densité de points A affectés d'une densité de masse dm et d'accélération \mathbf{a} , on remplace le symbole \sum par une intégrale simple, double ou triple, suivant qu'il s'agit d'une densité linéique, surfacique ou volumique.

□ Le torseur des forces appliquées en un point ou en un système de points

Reprenons notre point A et supposons qu'une force \mathbf{F} s'applique en A. Si l'on choisit un point P quelconque, on définit le **torseur de force** \mathbf{M} en P par :

$$\left[\begin{array}{l} \text{la résultante} = \mathbf{F} \\ \text{le moment de la force en P} = \mathbf{M}(P) = \mathbf{PA} \wedge \mathbf{F} \end{array} \right.$$

\mathbf{M} définit un torseur. En effet, le moment de la force calculé en un autre point Q est tel que :

$$\mathbf{M}(Q) = \mathbf{QA} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{M}(P) + \mathbf{QP} \wedge \mathbf{F}$$

Le principe fondamental de la dynamique énonce qu'il y a identité entre le torseur dynamique calculé dans un référentiel galiléen et le torseur des forces. O étant choisi fixe dans le référentiel pour pouvoir identifier le torseur dynamique à la dérivée du torseur cinétique, on écrit :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (\text{théorème de la quantité de mouvement})$$

$$\mathbf{OA} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{OA} \wedge m\mathbf{a} = \delta(\mathbf{O}) = \frac{dL(\mathbf{O})}{dt} \quad (\text{théorème du moment cinétique})$$

Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut, dans le torseur des forces, tenir compte des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

S'il y a plusieurs point A_i où s'appliquent des forces \mathbf{F}_i , alors le torseur des forces sera défini par la somme de chacun des torseurs élémentaires définis par chaque A_i , à savoir :

$$\text{la résultante} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{F}$$

$$\text{le moment en P} = \mathbf{M}(P) = \sum_{i=1}^n \mathbf{PA}_i \wedge \mathbf{F}_i$$

On peut aussi remplacer \sum par des intégrales dans le cas d'une densité de points.

Le principe fondamental de la dynamique s'énoncera alors sous la forme suivante, dans un repère galiléen où O est fixe :

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_G \quad (\text{théorème de la quantité de mouvement})$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{O}) = \frac{dL(\mathbf{O})}{dt} \quad (\text{théorème du moment cinétique})$$

Dans le cas statique, c'est à dire où le système de points est immobile par rapport au référentiel, le torseur des forces, qualifié alors de torseur statique, est nul.

$$\mathbf{F} = 0$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{O}) = 0$$

3- Cas particuliers de torseurs

□ Torseur nul

Sa résultante est nulle, ainsi que son moment en un point (et donc en tout point). Le champ de vecteurs du torseur nul est identiquement nul.

EXEMPLE : le torseur des forces dans le cas statique est le torseur nul.

□ Couples

Ce sont les torseurs dont la résultante est nulle. Le champ est donc constant.

EXEMPLE 1 :

Le torseur des forces F appliquée en un point A et $-F$ appliquée en un point B est un couple. Le moment ne dépend pas du point où il est calculé. Il vaut, en tout point P :

$$PA \wedge F - PB \wedge F = (PA - PB) \wedge F = BA \wedge F$$

EXEMPLE 2 :

Le torseur cinématique d'un solide en un instant donné est un couple si et seulement si le mouvement est un mouvement instantané de translation à l'instant considéré. Le vecteur de rotation instantané est nul.

□ Glisseurs

Il s'agit d'un torseur élémentaire défini au moyen d'un point A et d'une résultante R par :

$$M(P) = R \wedge AP$$

EXEMPLE 1 :

Dans le cas d'un point unique A, les torseurs cinétiques, dynamiques ou de forces que nous avons définis plus haut sont des glisseurs. Dans le cas de plusieurs point A_i , on obtient les torseurs cinétiques, dynamiques ou de forces en sommant les glisseurs relatifs à chaque point A_i .

EXEMPLE 2 :

Le champ des vitesses d'un solide tournant à la vitesse angulaire ω autour d'un axe (A, u) (u unitaire) est le glisseur de résultante ωu . En effet, tout point P du solide possède la vitesse :

$$V(P) = \omega u \wedge AP$$

Dans la définition d'un glisseur M , on peut remplacer A par un point B appartenant à la droite (A, R). Cette droite est appelée axe du glisseur. Dans l'exemple 2, il s'agit de l'axe de rotation du solide.

$$\begin{aligned} M(P) &= R \wedge AP = R \wedge (AB + BP) \\ &= R \wedge BP \quad \text{puisque } R \text{ et } AB \text{ sont colinéaires.} \end{aligned}$$

4- Propriétés d'un torseur

□ Axe central d'un torseur

Considérons un torseur M de résultante R non nulle. Alors les points P tels que $M(P)$ soit colinéaire à R forme une droite appelée **axe central d'un torseur**.

En effet, soit O un point quelconque. Posons $R = Ru$ avec u unitaire. On cherche les P tels que :

$$M(P) \wedge R = 0$$

$$\Leftrightarrow (M(O) + R \wedge OP) \wedge R = 0$$

$$\Leftrightarrow M(O) \wedge R + R^2 OP - \langle OP, R \rangle R = 0 \quad \text{en utilisant la formule du double produit}$$

vectoriel

$$\Leftrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{O}) \wedge \mathbf{R} + \mathbf{R}^2(\mathbf{OP} - \langle \mathbf{OP}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}) = 0$$

Le vecteur $\mathbf{OP} - \langle \mathbf{OP}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}$ est la projection orthogonale de \mathbf{OP} sur le plan orthogonal à \mathbf{u} . On écrit donc que cette projection est constante, égale à $-\frac{1}{\mathbf{R}} \mathbf{M}(\mathbf{O}) \wedge \mathbf{u}$, de sorte que les vecteurs P cherchés sont tels que :

$$\mathbf{OP} = -\frac{1}{\mathbf{R}} \mathbf{M}(\mathbf{O}) \wedge \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}$$

Il s'agit d'une droite dont un vecteur directeur est la résultante.

Tous les points de l'axe central ont même moment, car si P et Q appartiennent à l'axe, alors :

$$\mathbf{M}(\mathbf{Q}) = \mathbf{M}(\mathbf{P}) + \mathbf{R} \wedge \mathbf{PQ} = \mathbf{M}(\mathbf{P})$$

puisque \mathbf{R} et \mathbf{PQ} sont colinéaires.

EXEMPLE :

Dans le cas d'un glisseur, les points de l'axe du glisseur ont un moment nul, donc colinéaire à la résultante. L'axe central d'un glisseur n'est autre que l'axe du glisseur (cohérence du vocabulaire).

□ Réduction canonique d'un torseur

Soit un torseur \mathbf{M} de résultante \mathbf{R} non nulle. Ce torseur possède un axe central. Choisissons O sur cet axe. Le torseur est défini par :

la résultante \mathbf{R}

le moment $\mathbf{M}(\mathbf{O})$

Il est la somme des deux torseurs suivants ;

un glisseur de résultante \mathbf{R} de moment nul en O

un couple de résultante nulle de moment constant égal à $\mathbf{M}(\mathbf{O})$

Cette décomposition est appelée décomposition canonique. Elle est telle que la résultante du torseur est colinéaire au moment du couple.

EXEMPLE :

Dans le cas du torseur cinématique en un instant donné d'un solide de résultante le vecteur de rotation instantané $\boldsymbol{\Omega}$, les points de l'axe central ont une vitesse colinéaire à $\boldsymbol{\Omega}$. Le torseur champ des vitesses est la somme de :

un champ de vitesses qui est un glisseur. Il s'agit d'un mouvement instantané de rotation d'axe l'axe central du torseur.

un champ de vitesses qui est un couple, dont le moment est colinéaire à $\boldsymbol{\Omega}$. Il s'agit d'un mouvement instantané de translation parallèlement à $\boldsymbol{\Omega}$.

La composition de ces deux mouvements, définissant le torseur initial des vitesses, est un mouvement instantané hélicoïdal d'axe l'axe central du torseur. Ainsi, tout champ de vitesses d'un solide est un mouvement hélicoïdal instantané, pouvant dégénérer en un mouvement instantané de rotation ou un mouvement instantané de translation.

□ Invariant scalaire d'un torseur

Il s'agit de la quantité $\langle \mathbf{M}(\mathbf{O}), \mathbf{R} \rangle$ qui ne dépend pas du point O choisi. En effet :

$$\langle \mathbf{M}(\mathbf{P}), \mathbf{R} \rangle = \langle \mathbf{M}(\mathbf{O}) + \mathbf{R} \wedge \mathbf{OP}, \mathbf{R} \rangle = \langle \mathbf{M}(\mathbf{O}), \mathbf{R} \rangle$$

Un torseur est un couple ou un glisseur si et seulement si cet invariant est nul. (ou bien \mathbf{R} est nul, ou bien les points de l'axe central ont un moment nul).

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Dans \mathbf{R}^3 , déterminer l'ensemble des projetés orthogonaux de l'origine O sur le plan d'équation $x + \lambda y + \mu z = 1$ lorsque λ et μ varient.

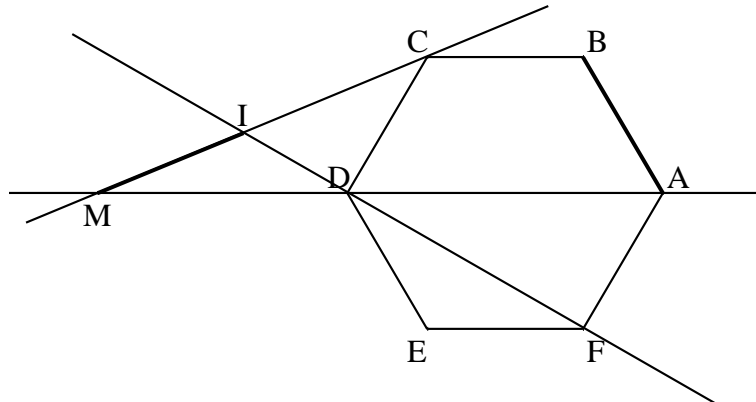
Exo.2) Donner la nature géométrique précise des transformations $f: (x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$ suivantes :

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = -x \\ z' = y - 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = x \\ z' = y - 2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x' = \frac{6x - 2y - 3z + 10}{7} \\ y' = \frac{-2x + 3y - 6z + 27}{7} \\ z' = \frac{-3x - 6y - 2z - 40}{7} \end{cases} \end{array}$$

Exo.3) Soit f une rotation affine plane de centre O , différente de Id , et t une translation de vecteur \mathbf{u} . Soit Ω le centre de la rotation $f \circ t$, et Ω' le centre de la rotation $t \circ f$. Que vaut $\Omega\Omega'$?

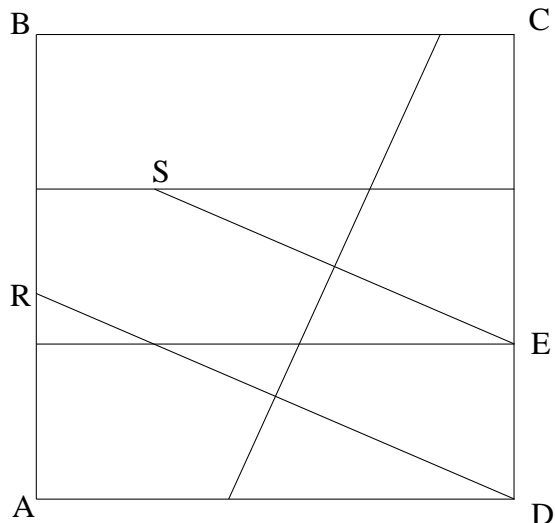
Exo.4) a) On trace un hexagone régulier de côté 1, $ABCDEF$. Une droite passant par le point C et portant un segment $[MI]$ de longueur 1 est placée de façon que les extrémités du segment appartiennent respectivement aux droites (AD) et (FD) . Montrer que la longueur du segment $[IC]$

vaut $\sqrt[3]{2}$.



b) On considère un carré en papier $ABCD$ de côté 1, que l'on plie en trois. Puis on effectue un quatrième pli de façon que D vienne en R sur le bord gauche et E en S sur le pli supérieur.

Montrer que $\frac{BR}{AR} = \sqrt[3]{2}$.



Ces deux méthodes permettent de construire $\sqrt[3]{2}$ soit au moyen d'une règle graduée et d'un compas, soit par pliage de papier (origami). Cela résout le problème de la duplication du cube (construire le côté d'un cube de volume 2) remontant à l'Antiquité grecque :

Eratosthène d'ailleurs, dans le livre qui a pour titre Le Platonicien, rapporte [...] que, les Déliens ayant consulté l'oracle pour savoir comment ils pourraient être délivrés d'une épidémie de peste, le dieu leur répondit qu'ils devaient construire un autel double de celui qui existait déjà. Cherchant à savoir comment il fallait procéder pour bâtir un solide qui fût le double d'un autre solide, les architectes furent plongés dans un grand embarras. Ils allèrent trouver Platon pour s'informer sur ce point avec lui. Le philosophe leur déclara que le dieu n'avait certainement pas besoin d'un autel double mais qu'il leur avait transmis cette demande par l'intermédiaire de son oracle pour leur adresser des reproches et pour leur faire honte, parce qu'ils se désintéressaient des mathématiques et qu'ils avaient négligé la géométrie. (Théon de Smyrne, De l'utilité des mathématiques, traduction de Jean-Pierre Levet, IREM de Poitiers, 1997)

On sait, depuis le XIX^{ème}, que la construction est impossible avec une règle non graduée et un compas.

Exo.5) Soient deux droites quelconque de l'espace (D) et (D'). On note s_D et $s_{D'}$ les demi-tours d'axe ces droites. Quelle est la nature de $s_{D'} \circ s_D$?

Exo.6) Soient trois points non alignés A, B, C du plan affine euclidien. Soient x, y et z trois réels de somme non nulle et M le barycentre de (A, x), (B, y), (C, z).

a) Montrer que :

$$xy AB^2 + yz BC^2 + zx CA^2 = (x + y + z)(x AM^2 + y BM^2 + z CM^2)$$

b) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que :

$$xy AB^2 + yz BC^2 + zx CA^2 = (x + y + z)^2 (R^2 - OM^2)$$

c) Montrer que le cercle circonscrit est l'ensemble des barycentres M tels que

$$:xy AB^2 + yz BC^2 + zx CA^2 = 0$$

Exo.7) Dans le plan euclidien, soient A_1, A_2, A_3 trois points distincts, $A_4 = A_1$, O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , et M un point quelconque. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit u_i le vecteur unitaire dirigé de A_i vers A_{i+1} , P_i le projeté orthogonal de M sur la droite $(A_i A_{i+1})$, f l'application définie par :

$$f: M \rightarrow \sum_{i=1}^3 A_i P_i^2$$

Montrer que $f(M) = f(O) + \sum_{i=1}^3 \langle OM | u_i \rangle^2$

Exo.8) Un quadrilatère convexe du plan est coupé en quatre triangles par ses diagonales. Montrer que le produit des aires de deux triangles opposés est égal au produit des aires des deux autres triangles opposés.

Exo.9) Soit ABC un triangle, a, b, c les longueurs des côtés opposés à A, B, C , α, β, γ les angles aux sommets A, B, C , $p = \frac{a+b+c}{2}$.

a) Montrer que $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\tan(\frac{\alpha-\beta}{2})}$.

b) $\frac{ab}{(a-p)(b-p)} = \frac{1}{\sin^2(\frac{\gamma}{2})}$

Exo.10) Dans l'espace de dimension 3, déterminer la perpendiculaire commune aux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' définies par :

\mathcal{D} passe par $A(0, 1, 1)$ et $B(1, 0, 1)$

\mathcal{D}' a pour équations $\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Exo.11) Dans l'espace de dimension 3, quelle est la distance entre les droites d'équations :

$$(D_1) \begin{cases} 3x + 2y + 6z - 52 = 0 \\ -x + 2y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

et

$$(D_2) \begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ 3x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

Exo.12) a) Dans \mathbf{R}^3 , quelle figure forment les six points $\pm \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$?

b) Dans \mathbf{R}^4 , quelle figure forment les huit points $\pm \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$?

Exo.13) Dans un espace affine euclidien E de dimension finie quelconque, on appelle réflexion glissée la composée $r \circ t$ d'une réflexion r par rapport à un hyperplan affine (H) et d'une translation t

par un vecteur V parallèle à (H) . Vérifier que r et t commutent et que la décomposition $r \circ t$ est unique.

Exo.14) Isométries laissant invariant le tétraèdre. Une isométrie f laissant globalement invariant le tétraèdre régulier T de sommets A, B, C, D est une isométrie telle que $f(T) = T$.

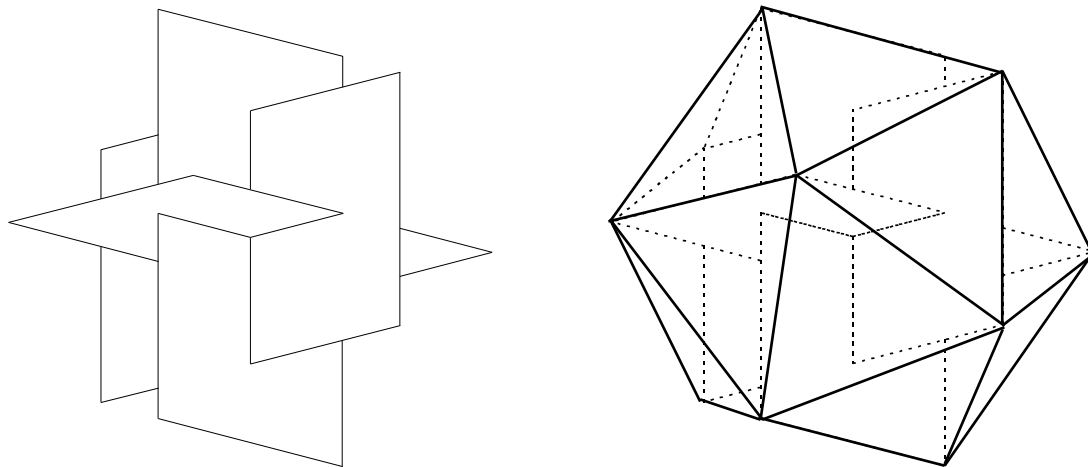
- Combien y a-t-il de telles isométries ? Combien de directes ? Combien d'indirectes ?
- Donner explicitement la nature géométrique de chacune de ces isométries.

Exo.15) Isométries laissant invariant le cube.

a)-b) Traiter les mêmes questions a) et b) de l'exercice précédent, mais pour le cube au lieu du tétraèdre régulier.

c) Constater qu'il y a autant de rotations laissant invariant le cube que d'isométries laissant invariant le tétraèdre régulier. Donner une explication de ce phénomène.

Exo.16) Isométries laissant invariant l'icosaèdre. Dans \mathbf{R}^3 , on considère trois rectangles dont les longueurs des côtés valent 2 et $2\varphi = 1 + \sqrt{5}$, de centre $(0,0,0)$, et situé dans les trois plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, comme ci-dessous.

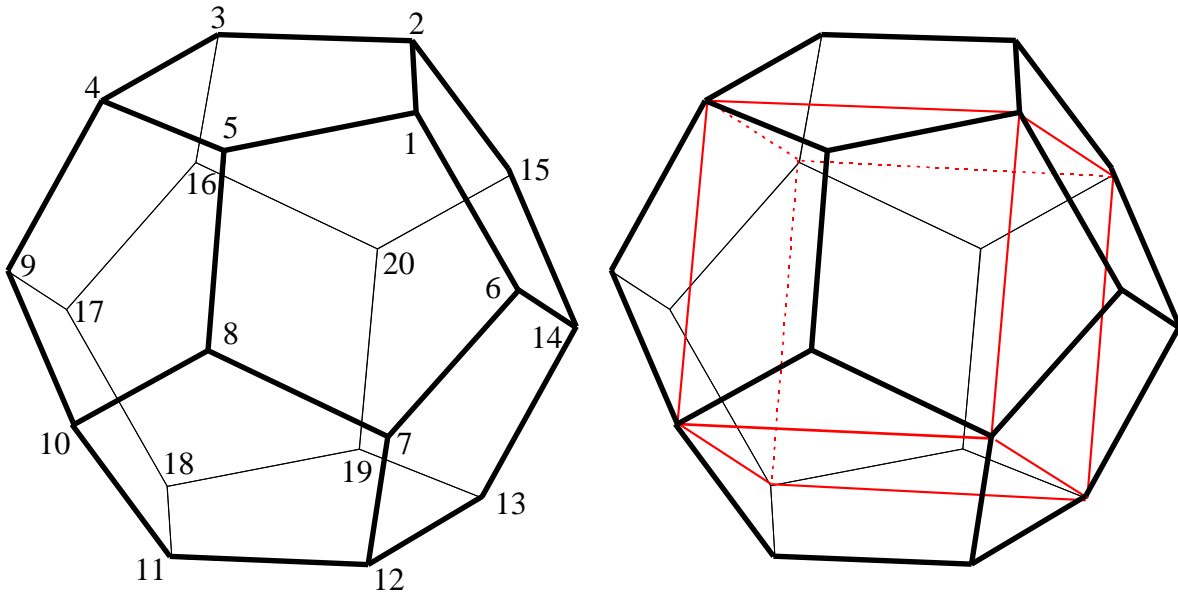


On joint chaque sommet de chaque rectangle aux sommets les plus proches.

a) Montrer qu'on obtient ainsi un icosaèdre régulier. Combien a-t-il de sommets ? d'arêtes ? de faces ?

b) Combien y a-t-il d'isométries laissant globalement invariant un icosaèdre régulier ? Décrire ces isométries.

Exo.17) Isométries laissant invariant le dodécaèdre. Voici un dodécaèdre régulier (à gauche). Il est constitué de douze pentagones.



Chaque face pentagonale possède 5 diagonales, joignant deux sommets distincts et non adjacents du pentagone. Il y a donc 60 diagonales en tout. On peut répartir ces 60 diagonales en les côtés de 5 cubes, chaque cube ayant un côté inclus dans chacun des 12 pentagones. L'un de ces cubes est dessiné sur le dessin de droite.

- Enumérer les 5 cubes par leurs sommets.
- Enumérer les rotations laissant globalement invariant le dodécaèdre. Montrer que le groupe de ces rotations est isomorphe au groupe alterné des permutations paires des 5 cubes.
- Enumérer les isométries indirectes laissant globalement invariant le dodécaèdre.

Exo.18) Dans le plan euclidien \mathbf{R}^2 , donner l'équation du (ou des) cercle passant par l'origine O et par le point A = (3, -1), et tangent à la droite d'équation $y + 2x = 10$.

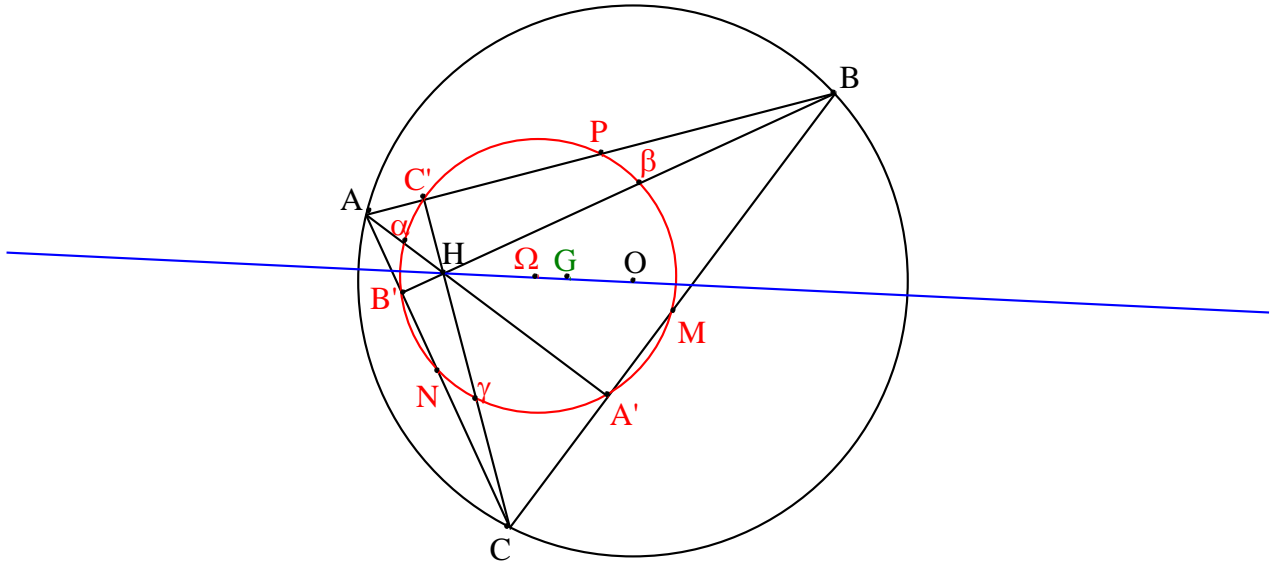
Exo.19) Le cercle des neuf points d'Euler.

Soit ABC un triangle. On note :

- M, N, P les milieux des côtés respectivement opposés à A, B, C,
- A', B' et C' les pieds des hauteurs du triangle ABC
- α , β et γ les milieux de [AH], [BH] et [CH]
- O le centre du cercle circonscrit à ABC
- H l'orthocentre de ABC (intersection des hauteurs issues de A, B et C)
- G l'isobarycentre de A, B et C

On appelle **cercle d'Euler** le cercle passant par M, N, P. On note Ω son centre. Le but de l'exercice est de montrer que :

- les quatre points O, G, H, Ω sont alignés.
- Ω est le milieu de [OH]
- A', B', C' ainsi que α , β et γ appartiennent tous au cercle d'Euler



a) Soit h_G l'homothétie de centre G de rapport $-\frac{1}{2}$. Donner l'image par h_G des objets ou grandeurs suivantes : les sommets A, B, C , la droite (BC) , le cercle circonscrit à ABC , le rayon de ce cercle, le point O , le point H .

b) En déduire que

- Le rayon du cercle d'Euler est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit.
- G, O, Ω sont alignés
- G, O, H sont alignés
- le centre Ω du cercle d'Euler est au milieu de $[OH]$.
- Les points M, N, P, A', B', C' appartiennent au cercle d'Euler.

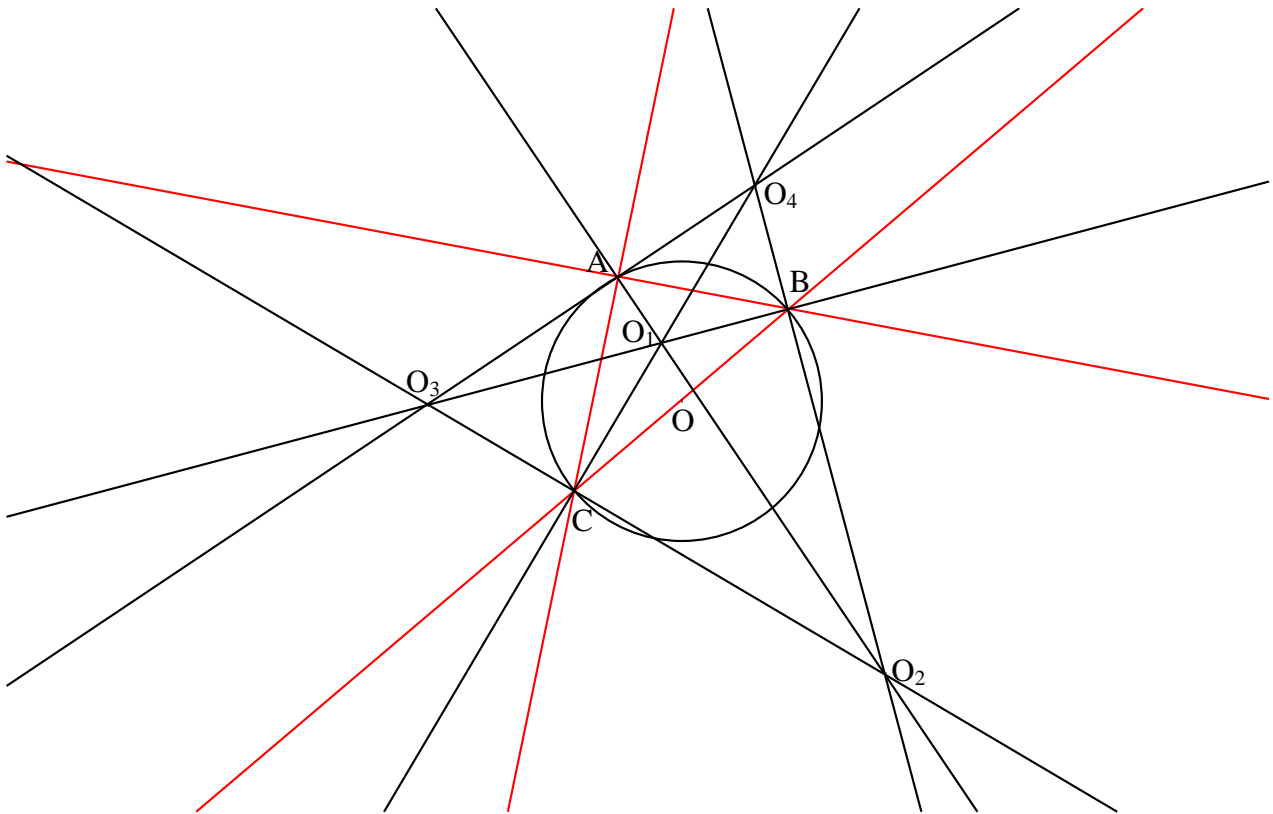
c) On considère maintenant homothétie h_H de centre H de rapport $\frac{1}{2}$. Donner les images par h_H des objets ou grandeurs suivants : le point O , le rayon du cercle circonscrit, le cercle circonscrit de centre O , les sommets A, B, C .

d) En déduire que :

- Les points α, β, γ appartiennent au cercle d'Euler
- α et M (respectivement β et N, γ et P) sont diamétralement opposés dans le cercle d'Euler.
- $OM = \frac{AH}{2}, ON = \frac{BH}{2}$ et $OP = \frac{CH}{2}$

Les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux côtés du triangle ABC appartiennent au cercle circonscrit.

Exo.20) Dans le plan, soit un triangle ABC . Soit O_1, O_2, O_3 et O_4 les intersections des bissectrices intérieures et extérieures des angles en A, B et C . Soit O l'isobarycentre des quatre points O_1, O_2, O_3, O_4 . Montrer que O est le centre du cercle circonscrit à ABC .



2- Solutions

Sol.1) Le projeté M de O vérifie l'équation précédente, et OM est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, vecteur orthogonal au plan. Donc les coordonnées de M vérifient :

$$\begin{cases} x + \lambda y + \mu z = 1 \\ y = \lambda x \\ z = \mu x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1 + \lambda^2 + \mu^2} \\ y = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2 + \mu^2} \\ z = \frac{\mu}{1 + \lambda^2 + \mu^2} \end{cases}$$

(x, y, z) vérifie $x^2 + y^2 + z^2 = x$ et $x \neq 0$. Réciproquement, si (x, y, z) vérifie $x^2 + y^2 + z^2 = x$ et $x \neq 0$, alors on peut poser $\lambda = \frac{y}{x}$ et $\mu = \frac{z}{x}$ d'où $x^2(1 + \lambda^2 + \mu^2) = x$, ce qui conduit au système précédent.

L'ensemble cherché est la sphère de rayon $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, passant par O et privée de O.

Sol.2) a) La matrice de l'application linéaire associée est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice étant une matrice orthogonale de déterminant 1, c'est celle d'une rotation. L'application f est donc un vissage. Son angle θ vérifie $\text{Tr}(M) = 0 = 1 + 2\cos(\theta)$ donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$.

La matrice antisymétrique $M - M^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ permet de déduire que θ et le vecteur directeur unitaire Ω de l'axe vérifie $2\sin(\theta)\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (voir L2/PREHILB.PDF) donc $\Omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où finalement $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Les points M de l'axe du vissage sont tels qu'il existe λ

satisfaisant $Mf(M) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, colinéaire à Ω . D'où le système :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - z + 1 = \lambda \\ -x - y = -\lambda \\ y - z - 2 = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - z + 1 = \lambda \\ -2x - y - z + 1 = 0 \\ -x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations définissent une droite affine qui est l'axe cherché. Cet axe a bien pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et il passe par le point $(0, 1, 0)$. La valeur de λ vaut alors 1, donc le vecteur

de translation du vissage est $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) La matrice de l'application linéaire associée est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice étant une matrice orthogonale de déterminant -1 , c'est celle d'une isométrie indirecte. Son angle θ vérifie :

$$\text{Tr}(M) = 0 = -1 + 2\cos(\theta)$$

donc $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. L'angle n'étant pas nul, ce n'est pas une réflexion, mais une antirotation et il en est de même de l'application affine f .

La matrice antisymétrique $M - M^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ permet de déduire que θ et le vecteur directeur unitaire Ω de l'axe vérifie $2\sin(\theta)\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\Omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où finalement

$\theta = \frac{\pi}{3}$. L'application affine f admet un unique point invariant qui est $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ (résoudre le système $f(M) = M$). L'axe de l'antirotation passe par ce point et est dirigé par Ω . Le plan de l'antirotation est le plan passant par ce point et orthogonal à Ω . Son équation est $x - y + z = -\frac{1}{2}$.

c) La matrice de l'application linéaire associée est $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. C'est une matrice orthogonale symétrique, donc une matrice d'une symétrie orthogonale (voir la partie sur les endomorphismes

symétriques dans L2/PREHILB.PDF). L'ensemble des vecteurs invariants vérifient $x + 2y + 3z = 0$. C'est un plan, donc l'isométrie vectorielle est une réflexion, et l'application affine une réflexion glissée. Le plan de cette réflexion glissée est formée des points M tels que $Mf(M)$ appartienne au plan vectoriel précédent, ce qui donne l'équation $(x' - x) + 2(y' - y) + 3(z' - z) = 0$, qui se simplifie en $x + 2y + 3z + 4 = 0$. Un point de ce plan est $M = (-4, 0, 0)$, donc l'image par f est $f(M) = (-2, 5, -4)$.

. Le vecteur de translation de la réflexion glissée est $Mf(M) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Sol.3) Soit φ la rotation vectorielle associée à f . On a :

$$\Omega = (f \circ t)(\Omega) = f(\Omega + \mathbf{u}) = f(\Omega) + \varphi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{O}) + \varphi(\mathbf{O}\Omega) + \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{O} + \varphi(\mathbf{O}\Omega) + \varphi(\mathbf{u})$$

$$\Omega' = (t \circ f)(\Omega') = f(\Omega') + \mathbf{u} = \mathbf{O} + \varphi(\mathbf{O}\Omega') + \mathbf{u}$$

donc :

$$\Omega\Omega' = \varphi(\Omega\Omega') + \mathbf{u} - \varphi(\mathbf{u})$$

$$\Leftrightarrow (\text{Id} - \varphi)(\Omega\Omega') = (\text{Id} - \varphi)(\mathbf{u})$$

Mais, dans la plan, si $\varphi \neq \text{Id}$, $\text{Id} - \varphi$ est inversible. Donc $\Omega\Omega' = \mathbf{u}$.

Sol.4) a) Prendre un repère orthonormé direct d'origine le centre de l'hexagone, l'axe des abscisses étant (DA). On a $A = (1, 0)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D = (-1, 0)$, $E = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $F = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

.La droite (FD) a pour équation :

$$y = -\frac{x+1}{\sqrt{3}}$$

Une droite (CM) de pente $\lambda > 0$ quelconque a pour équation :

$$y = \lambda(x + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Elle coupe (DA) au point $M = (-\frac{\sqrt{3}}{2\lambda} - \frac{1}{2}, 0)$.

Elle coupe la droite (FD) au point $I = (-\frac{1}{2} \frac{5 + \sqrt{3}\lambda}{1 + \sqrt{3}\lambda}, \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3} - \lambda}{1 + \sqrt{3}\lambda})$. On supposera $\lambda < \sqrt{3}$ de façon que I soit dans le demi-plan supérieur. Le vecteur MI vaut :

$$MI = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3} - \lambda}{1 + \sqrt{3}\lambda} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sa longueur vaut $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3} - \lambda}{1 + \sqrt{3}\lambda} \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda}$. λ doit donc être tel que $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3} - \lambda}{1 + \sqrt{3}\lambda} \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda} = 1$. En particulier,

on a $\frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{1 + \sqrt{3}\lambda} = \frac{2\lambda}{\sqrt{3} - \lambda}$. Cette équation équivaut à :

$$(\sqrt{3} - \lambda)^2(1 + \lambda^2) = 4\lambda^2(1 + \sqrt{3}\lambda)^2$$

$$\Leftrightarrow 11\lambda^4 + 10\sqrt{3}\lambda^3 + 2\sqrt{3}\lambda - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (11\lambda^3 - \sqrt{3}\lambda^2 + 3\lambda - \sqrt{3})(\lambda + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 11\lambda^3 - \sqrt{3}\lambda^2 + 3\lambda - \sqrt{3} = 0 \quad \text{car } \lambda \neq -\sqrt{3}$$

Le vecteur CI vaut $-\frac{2}{1+\sqrt{3}\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$. Sa longueur est $\frac{2\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{3}\lambda} = \frac{4\lambda}{\sqrt{3}-\lambda}$. Il s'agit donc de vérifier que $\frac{64\lambda^3}{(\sqrt{3}-\lambda)^3} = 2$. Cette équation est équivalente à $11\lambda^3 - \sqrt{3}\lambda^2 + 3\lambda - \sqrt{3} = 0$. Elle est bien vérifiée.

b) On se place dans le repère $(A, \mathbf{AD}, \mathbf{AB})$.

Méthode 1

Si le dernier pli a pour équation $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = d$, alors la réflexion par rapport à cette droite a pour expression :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2(x\cos(\theta) + y\sin(\theta) - d) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

L'image de D est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2(\cos(\theta) - d) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ et

l'image de E est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} - 2(\cos(\theta) + \frac{\sin(\theta)}{3} - d) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$

On souhaite que
$$\begin{cases} 1 - 2(\cos(\theta) - d)\cos(\theta) = 0 \\ \frac{1}{3} - 2(\cos(\theta) + \frac{\sin(\theta)}{3} - d)\sin(\theta) = 2/3 \end{cases}$$

Donc $\cos(\theta) - d = \frac{1}{2\cos(\theta)}$ et $-2(\frac{1}{2\cos(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{3})\sin(\theta) = \frac{1}{3}$. On cherche l'ordonnée t de R qui vaut

$t = -2(\cos(\theta) - d)\sin(\theta) = -\tan(\theta)$. L'équation en θ conduit à $t - \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{1+t^2}) = \frac{1}{3}$, d'où :

$$3t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 + (t-1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{BR}{AR} = \frac{1-t}{t} = \sqrt[3]{2}$$

Méthode 2

On pose $R(0, r)$ et $S(s, \frac{2}{3})$. On peut écrire que la médiatrice de $[ES]$, de vecteur normal \mathbf{ES} et passant

par le milieu de $[ES]$, d'équation $(s-1)x + \frac{y}{3} = \frac{s^2-1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{s^2-2/3}{2}$, est la même que la médiatrice

de $[DR]$ d'équation $-x + ry = \frac{r^2-1}{2}$. On en déduit que $1-s = \frac{1}{3r} = \frac{s^2-2/3}{r^2-1}$, ce qui conduit à la même

équation en r que l'équation en t précédente.

Méthode 3

On pose $R(0, r)$ et $S(s, \frac{2}{3})$. On écrit que (ES) est parallèle à (RD) ce conduit à la relation

$rs - r + \frac{1}{3} = 0$ soit $s = 1 - \frac{1}{3r}$, puis que $RS = ED$, ce qui donne $s^2 + (\frac{2}{3} - r)^2 = \frac{1}{9}$. Si on remplace s par

$1 - \frac{1}{3r}$ dans cette dernière, on obtient l'équation $9r^4 - 12r^3 + 12r^2 - 6r + 1 = 0$, qui se factorise en

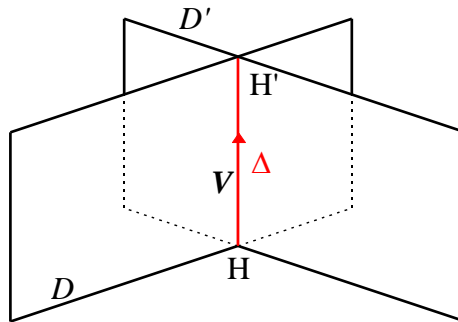
$(3r^3 - 3r^2 + 3r - 1)(3r - 1)$. La racine $r = \frac{1}{3}$ qui donne $s = 0$ ne répond pas au problème. On retrouve

alors la relation voulue $3r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$.

Sol.5 Soit σ et σ' les applications linéaires (demi-tours) associées à s_D et $s_{D'}$.

Si les deux droites sont parallèles, alors leurs directions vectorielles sont égales, donc $\sigma = \sigma'$, donc $\sigma' \circ \sigma = \text{Id}$, donc $s_{D'} \circ s_D$ est une translation. Il suffit de chercher l'image d'un point de (D) pour voir que le vecteur de translation est $2U$, où U est le vecteur orthogonal à (D) tel que la translation de vecteur U transforme (D) en (D').

Sinon, soit Δ la perpendiculaire commune de (D) et (D'), V un vecteur directeur de Δ , et α l'angle entre les directions vectorielles de (D) et (D'), orienté par V , H et H' les points intersections de $(D) \cap \Delta$ et $(D') \cap \Delta$. σ et σ' étant des demi-tours distincts, $\sigma' \circ \sigma$ est une rotation d'angle non nul donc $s_{D'} \circ s_D$ est un vissage. On a $\sigma(V) = -V$ car V est orthogonal à (D). De même $\sigma'(V) = -V$, donc $(\sigma' \circ \sigma)(V) = V$. L'axe de la rotation $\sigma' \circ \sigma$ est donc V . Son angle est 2α comme on peut s'en rendre compte en prenant l'image d'un vecteur directeur de (D). L'axe du vissage est Δ car $s_D(\Delta) = \Delta = s_{D'}(\Delta)$ donc $(s_{D'} \circ s_D)(\Delta) = \Delta$. Le vecteur de translation du vissage est $2HH'$ comme on s'en rend compte en cherchant l'image de H.



Si les droites (D) et (D') sont sécantes, le vissage se réduit à une simple rotation affine. Cet exercice permet de voir que tout vissage peut se décomposer comme produit de deux demi-tours.

Sol.6) a) On a $AB^2 = (\mathbf{AM} + \mathbf{MB})^2 = AM^2 - 2\langle \mathbf{AM}, \mathbf{BM} \rangle + BM^2$ et de même pour BC^2 et CA^2 .
Donc :

$$xy AB^2 + yz BC^2 + zx CA^2 = (xy + zx) AM^2 + (xy + yz) BM^2 + (yz + zx) CM^2 - 2xy \langle \mathbf{AM}, \mathbf{BM} \rangle - 2yz \langle \mathbf{BM}, \mathbf{CM} \rangle - 2zx \langle \mathbf{AM}, \mathbf{CM} \rangle$$

Or $x\mathbf{AM} + y\mathbf{BM} + z\mathbf{CM} = \mathbf{0}$ donc :

$$x\mathbf{AM} + y\mathbf{BM} = -z\mathbf{CM}$$

donc $x \langle \mathbf{AM}, \mathbf{CM} \rangle + y \langle \mathbf{BM}, \mathbf{CM} \rangle = -z CM^2$

donc $xz \langle \mathbf{AM}, \mathbf{CM} \rangle + yz \langle \mathbf{BM}, \mathbf{CM} \rangle = -z^2 CM^2$

De même :

$$xy \langle \mathbf{AM}, \mathbf{BM} \rangle + xz \langle \mathbf{AM}, \mathbf{CM} \rangle = -x^2 AM^2$$

$$xy \langle \mathbf{AM}, \mathbf{BM} \rangle + yz \langle \mathbf{BM}, \mathbf{CM} \rangle = -y^2 BM^2$$

donc $-2xy \langle \mathbf{AM}, \mathbf{BM} \rangle - 2yz \langle \mathbf{BM}, \mathbf{CM} \rangle - 2zx \langle \mathbf{AM}, \mathbf{CM} \rangle = x^2 AM^2 + y^2 BM^2 + z^2 CM^2$

donc $xy AB^2 + yz BC^2 + zx CA^2 = (xy + zx + x^2) AM^2 + (xy + yz + y^2) BM^2 + (yz + zx + z^2) CM^2 = (x + y + z)(x AM^2 + y BM^2 + z CM^2)$

b) Soit $R = OA = OB = OC$. On a :

$$AM^2 = (\mathbf{AO} + \mathbf{OM})^2 = R^2 + 2\langle \mathbf{AO}, \mathbf{OM} \rangle + OM^2$$

et de même :

$$BM^2 = R^2 + 2\langle \mathbf{BO}, \mathbf{OM} \rangle + OM^2$$

$$CM^2 = R^2 + 2\langle \mathbf{CO}, \mathbf{OM} \rangle + OM^2$$

donc $x AM^2 + y BM^2 + z CM^2 = (x + y + z)(R^2 + OM^2) + 2\langle x\mathbf{AO} + y\mathbf{BO} + z\mathbf{CO}, \mathbf{OM} \rangle$

mais $x\mathbf{AO} + y\mathbf{BO} + z\mathbf{CO} = (x + y + z)\mathbf{MO}$ car M est le barycentre de (A, x), (B, y) et (C, z)

$$\text{donc } x AM^2 + y BM^2 + z CM^2 = (x + y + z)(R^2 + OM^2) - 2(x + y + z)OM^2 \\ = (x + y + z)(R^2 - OM^2)$$

$$\text{donc } xy AB^2 + yz BC^2 + zx CA^2 = (x + y + z)^2(R^2 - OM^2)$$

c) Résulte trivialement du b) puisque $xy AB^2 + yz BC^2 + zx CA^2 = 0 \Leftrightarrow OM = R$.

Sol.7) Pour tout i , $A_i P_i = \langle A_i M | u_i \rangle u_i$, donc :

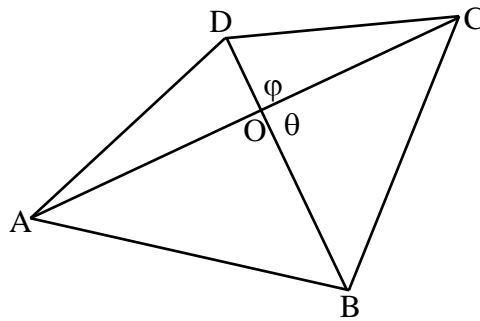
$$f(M) = \sum_{i=1}^3 A_i P_i^2 = \sum_{i=1}^3 \langle A_i M | u_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^3 \langle A_i O + OM | u_i \rangle^2 \\ = \sum_{i=1}^3 (\langle A_i O | u_i \rangle + \langle OM | u_i \rangle)^2 \\ = \sum_{i=1}^3 (\langle A_i O | u_i \rangle^2 + 2\langle A_i O | u_i \rangle \langle OM | u_i \rangle + \langle OM | u_i \rangle^2) \\ = f(O) + 2 \langle OM | \sum_{i=1}^3 \langle A_i O | u_i \rangle u_i \rangle + \sum_{i=1}^3 \langle OM | u_i \rangle^2$$

Comme O est sur la médiatrice de chaque $[A_i A_{i+1}]$, on a $\langle A_i O | u_i \rangle u_i = \frac{1}{2} A_i A_{i+1}$. Donc :

$$\sum_{i=1}^3 \langle A_i O | u_i \rangle u_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 A_i A_{i+1} = \frac{1}{2} A_1 A_4 = 0$$

Il reste bien $f(M) = f(O) + \sum_{i=1}^3 \langle OM | u_i \rangle^2$

Sol.8) Soit ABCD le quadrilatère, O l'intersection de [AC] et [BD], θ l'angle BOC ou AOD, $\varphi = \pi - \theta$ l'angle COD ou AOB.



Plaçons-nous dans un espace de dimension 3 en rajoutant un axe perpendiculaire au plan ABCD. L'aire de AOB est donné $OA \wedge OB$, de sorte que le produit des aires de AOB et COD est :

$$\langle OA \wedge OB | OC \wedge OD \rangle = [OA, OB, OC \wedge OD] \quad \text{produit mixte} \\ = [OC \wedge OD, OA, OB] \\ = \langle (OC \wedge OD) \wedge OA | OB \rangle$$

Or $(OC \wedge OD) \wedge OA = \langle OC | OA \rangle OD - \langle OD | OA \rangle OC$ (formule du double produit vectoriel)

$$\text{donc } \langle OA \wedge OB | OC \wedge OD \rangle = \langle OC | OA \rangle \langle OD | OB \rangle - \langle OD | OA \rangle \langle OC | OB \rangle \\ = OA \times OC \times OD \times OB - OA \times OC \times OD \times OB \cos(\theta)^2 \\ = OA \times OC \times OD \times OB \sin(\theta)^2$$

Le même calcul pour les deux autres triangles donnera :

$$\langle \mathbf{OB} \wedge \mathbf{OC} \mid \mathbf{OD} \wedge \mathbf{OA} \rangle = \mathbf{OA} \times \mathbf{OC} \times \mathbf{OD} \times \mathbf{OB} \sin(\varphi)^2$$

Comme $\sin(\theta)^2 = \sin(\varphi)^2$, les deux produits sont bien égaux.

Sol.9) On utilise la relation $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.

$$\text{a) } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{\sin(\alpha) - \sin(\beta)} = \frac{2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})} = \frac{\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\tan(\frac{\alpha-\beta}{2})}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{ab}{(a-p)(b-p)} &= \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{(\sin(\alpha) - \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)}{2})(\sin(\beta) - \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)}{2})} \\ &= \frac{4\sin(\alpha)\sin(\beta)}{(\sin(\alpha) - \sin(\beta) - \sin(\gamma))(\sin(\beta) - \sin(\alpha) - \sin(\gamma))} \\ &= \frac{4\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin^2(\gamma) - (\sin(\alpha) - \sin(\beta))^2} \\ &= \frac{4\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin^2(\alpha + \beta) - 4\sin^2(\frac{\alpha - \beta}{2})\cos^2(\frac{\alpha + \beta}{2})} \\ &= \frac{4\sin(\alpha)\sin(\beta)}{4\sin^2(\frac{\alpha + \beta}{2})\cos^2(\frac{\alpha + \beta}{2}) - 4\sin^2(\frac{\alpha - \beta}{2})\cos^2(\frac{\alpha + \beta}{2})} \\ &= \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos^2(\frac{\alpha + \beta}{2})(\sin^2(\frac{\alpha + \beta}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha - \beta}{2}))} \\ &= \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos^2(\frac{\alpha + \beta}{2})(\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2})} \\ &= \frac{1}{\cos^2(\frac{\alpha + \beta}{2})} = \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2})} = \frac{1}{\sin^2(\frac{\gamma}{2})} \end{aligned}$$

Sol.10) \mathcal{D} a pour vecteur directeur $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et \mathcal{D}' a pour vecteur directeur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passe par le

point $(-3, 1, 0)$. La perpendiculaire commune a pour vecteur directeur $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Elle est contenue dans :

$$\text{le plan contenant } \mathcal{D} \text{ et } \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \text{ d'équation : } x + y + 2z = 3$$

$$\text{le plan contenant } \mathcal{D}' \text{ et } \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \text{ d'équation : } x + 4y + 5z = 1$$

Ces deux équations définissent la perpendiculaire commune. Elle coupe \mathcal{D} en $(\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, 1)$ et \mathcal{D}' en

$$(2, -\frac{7}{3}, \frac{5}{3}).$$

Sol.11) La première droite passe par $O_1 = (11, \frac{19}{2}, 0)$ et a pour vecteur directeur $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. La

deuxième droite passe par $O_2 = (0, 3, 3)$ et a pour vecteur directeur $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. La distance cherchée

$$\text{est } \frac{|\langle \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2, \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \rangle|}{\|\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2\|} = \frac{40\sqrt{2}}{9}$$

Sol.12) a) Il s'agit d'un hexagone dans le plan $x + y + z = 0$. Placer les points successivement dans l'ordre :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Deux points adjacents forment un triangle équilatéral avec l'origine.

b) Il s'agit d'un cube dans l'hyperplan $x + y + z + t = 0$

Prendre les deux points $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, séparés par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On les translate suivant le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ en les points $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ pour obtenir un carré.

On les translate suivant le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en les points $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour obtenir un

cube.

Sol.13) Montrons la commutativité. Soit ρ la réflexion vectorielle associée à la réflexion affine r (qui vérifie $\rho(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B}) - r(\mathbf{A})$ pour tout point A et B). On rappelle qu'une application affine est une translation si et seulement si l'application linéaire est Id. L'application linéaire associée à l'application affine $r \circ t \circ r^{-1} \circ t^{-1}$ est $\rho \circ \text{Id} \circ \rho^{-1} \circ \text{Id} = \text{Id}$, donc $r \circ t \circ r^{-1} \circ t^{-1}$ est une translation.

Si on prend un point A de (H), on a par ailleurs :

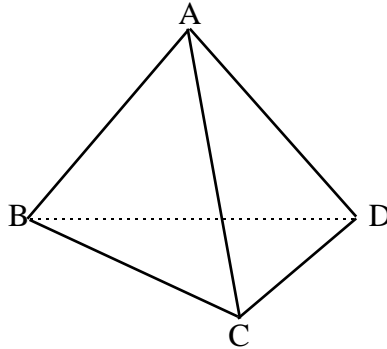
$$\begin{aligned} (r \circ t \circ r^{-1} \circ t^{-1})(\mathbf{A}) &= (r \circ t \circ r^{-1})(\mathbf{A} - \mathbf{V}) \\ &= (r \circ t)(\mathbf{A} - \mathbf{V}) \quad \text{car } \mathbf{A} - \mathbf{V} \in (\text{H}) \text{ puisque } \mathbf{V} \text{ est parallèle à } (\text{H}), \text{ et } r^{-1} = r \\ &= r(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \end{aligned}$$

donc le vecteur de la translation $r \circ t \circ r^{-1} \circ t^{-1}$ est nul, donc $r \circ t \circ r^{-1} \circ t^{-1} = \text{Id}$ et $r \circ t = t \circ r$. (On pourra aussi adapter la démonstration donnée pour les vissages).

Montrons l'unicité de la décomposition. On procède d'une manière analogue aux vissages. Si la composée $f = r \circ t$ admet une autre décomposition $r' \circ t'$ avec r' réflexion par rapport à un hyperplan (H') et t' translation parallèlement à (H'), alors l'application vectorielle ρ associée à f est associée à r aussi bien qu'à r' et est une réflexion vectorielle par rapport à un hyperplan Π , direction commune des hyperplans des réflexions de r et r' . Si (D) est une droite affine perpendiculaire à cet hyperplan, (D) est globalement invariant par r et r' , donc aussi par $r^{-1} \circ r'$. Or $r^{-1} \circ r' = t \circ t'^{-1}$, donc (D) est

globalement invariant par $t \circ t^{-1}$. Cela signifie que le vecteur de translation de $t \circ t^{-1}$ appartient à la droite vectorielle Δ , direction de (D). Mais par ailleurs, t et t' étant des translations parallèlement à Π , ce vecteur appartient également à Π , hyperplan vectoriel orthogonal à Δ . Donc ce vecteur, étant élément de Δ et de $\Pi = \Delta^\perp$, est nul. Donc $t \circ t^{-1} = \text{Id}$, donc $t = t'$. On a donc également $r = r'$.

Sol.14) a) On dénombre 24 isométries, dont 12 directes. En effet, si ABCD est le tétraèdre initial, A doit être envoyé sur l'un des sommets, ce qui donne 4 choix, puis B sur un autre, ce qui donne 3 choix, puis C sur un troisième, ce qui laisse 2 choix. D a alors pour image le dernier sommet restant. On peut aussi dire que le groupe des isométries du tétraèdre est isomorphe au groupe des permutations des quatre sommets A, B, C, D.



Il y a autant d'isométries directes que d'indirectes, car si u est une isométrie indirecte laissant globalement le tétraèdre, l'application $r \rightarrow u \circ r$ établit une bijection entre les isométries directes laissant globalement le tétraèdre et les isométries indirectes.

b) Les isométries directes sont :

- l'identité, laissant les quatre points invariants.
- 8 rotations dont l'axe passe par la hauteur contenant un sommet et d'angle $\pm \frac{\pi}{3}$. Le sommet est invariant, les trois autres sont permutés. Une telle rotation correspond à une permutation circulaire de trois éléments du type (BCD). Notons r_A la rotation laissant A invariant, d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- 3 demi-tours d'axe la droite passant par le milieu de deux arêtes opposées, par exemple [AB] et de [CD]. Cette rotation permute A et B d'une part, et C et D d'autre part. Elle correspond au produit (AB)(CD) de deux transpositions. Notons $d_{AB,CD}$ ce demi-tour.

Les isométries indirectes sont :

- 6 réflexions par rapport au plan médiateur d'un côté, par exemple [AB], (et qui contient l'autre côté [CD]). A et B sont invariants, les deux autres C et D étant permutés. Elle correspond à la transposition (AB). Notons s_{AB} cette réflexion.
- Il reste 6 permutations circulaires, par exemple (ABCD) ou $f : A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$. On peut les considérer comme la composée d'une rotation par rapport à la hauteur passant par A, qui permute $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$, et de la réflexion par rapport au plan passant par C, D et le milieu de [AB]. Il s'agit donc bien d'une isométrie indirecte. Il s'agit donc d'une réflexion ou d'une antirotation d'angle non nul. Il ne peut s'agir d'une réflexion ni d'une antirotation d'angle π car $f \circ f \neq \text{Id}$. Puisque $f \circ f \circ f \circ f = \text{Id}$, il s'agit d'une antirotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. On remarque que l'isométrie permute circulairement les

milieux de [AB], [BC], [CD], et [DA]. Ces quatre milieux sont coplanaires et le plan les contenant est globalement invariant. Il s'agit donc du plan de l'antirotation. Notons a_{ABCD} cette antirotation.

On s'entraînera à effectuer quelques comparaisons entre le groupe des isométries du tétraèdre et le groupe des permutations des quatre sommets, par exemple :

Groupe des isométries	Groupe des permutations
$r_A \circ r_B = r_D^{-1}$	$(BCD)(CAD) = (ABC)$
$r_A \circ s_{AB} = s_{AD}$	$(BCD)(CD) = (BC)$
$r_A \circ s_{BC} = a_{ABCD}$	$(BCD)(AD) = (ABCD)$
$s_{AB} \circ d_{AC,BD} = a_{ADBC}$	$(CD)(AC)(BD) = (ADBC)$
isométries directes	permutations paires
isométries indirectes	permutations impaires
déterminant	signature

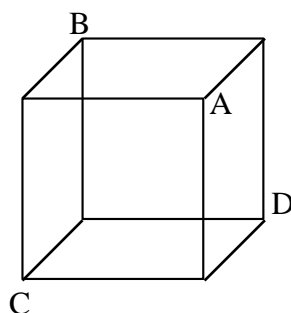
Si on prend $A = (1,1,1)$, $B = (-1,-1,1)$, $C = (-1,1,-1)$ et $D = (1,-1,-1)$, on pourra aussi vérifier que le groupe G des 12 rotations du tétraèdre est le sous-groupe de $SO_3(\mathbf{R})$ engendré par les demi-tours

d'axe Ox , Oy , Oz et par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ d'axe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si on y ajoute le demi-tour d'axe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, le

sous-groupe H engendré est celui des rotations laissant invariant le cube. Voir l'exercice suivant pour une description de ces rotations.

Sol.15) a) Il existe 48 isométries laissant globalement invariant le cube. En effet, si l'on se donne un sommet A et trois vecteurs i, j et k portés par les côtés du cube, il y a 8 images possibles pour A , 3 pour i , 2 pour j , l'image de k étant alors imposée. Le cube image peut alors être reconstitué de manière unique. Par le même raisonnement que celui tenu pour le tétraèdre, il y a autant isométries directes que d'indirectes, soit 24 de chaque catégorie.

b) Remarquons que les 8 sommets d'un cube peuvent être partitionnés en les sommets de deux tétraèdres réguliers. Ci-dessous, l'un des tétraèdres T a pour sommets A, B, C et D , les quatre autres sommets formant un autre tétraèdre régulier T' :



Les 24 isométries directes sont des rotations :

- l'identité
 - 8 rotations d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ d'axe les diagonales du cube.
 - 3 demi-tours d'axe passant par les centres de deux faces opposées.
- Ces 12 rotations laissent globalement invariants T et T' .

- 6 demi-tours d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées.
- 6 rotations d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$, d'axe passant par les centres de deux faces opposées.

Ces 12 rotations échangent T et T'.

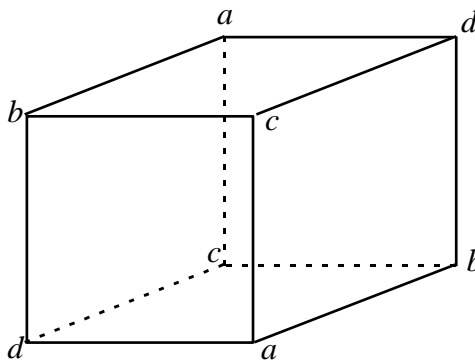
Pour obtenir les isométries indirectes, il suffit de composer chaque isométrie directe par s_O , symétrie par rapport au centre O du cube (antirotation d'angle π selon un axe quelconque). Les 24 isométries indirectes sont respectivement :

- la symétrie s_O .
 - 8 antirotations d'angle $\pm \frac{\pi}{3}$, d'axe les diagonales. Le plan orthogonal à chaque diagonale, passant par O, coupe les côtés du cube selon un hexagone.
 - 3 réflexions par rapport au plan médiateur de quatre côtés parallèles du cube.
- Ces 12 isométries échangent T et T'.

- 6 réflexions par rapport au plan contenant deux côtés opposés.
- 6 antirotations d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$ par rapport au plan médiateur de quatre côtés parallèles du cube.

Ces 12 isométries laissent globalement invariant T et T'

c) On constate que l'énumération des 24 isométries du tétraèdre (ou des 24 permutations de \mathcal{S}_4), des 24 isométries directes du cube et des 24 isométries indirectes du cube s'est effectuée selon une partition $24 = 1 + 8 + 3 + 6 + 6$. Cela est normal pour les isométries du cube (puisqu'on a composé chaque isométrie directe par s_O pour obtenir une isométrie indirecte). Il reste à effectuer un rapprochement entre les isométries directes du cube et les permutations de 4 objets. Il suffit de remarquer que chaque rotation laissant invariant le cube est une permutation de 4 objets : ce sont les 4 diagonales du cube, chaque diagonale reliant un sommet de T à un sommet de T'. Inversement, toute permutation des 4 diagonales peut s'interpréter par l'action d'une rotation. Désignons par un même nom a, b, c ou d les deux sommets d'une même diagonale :

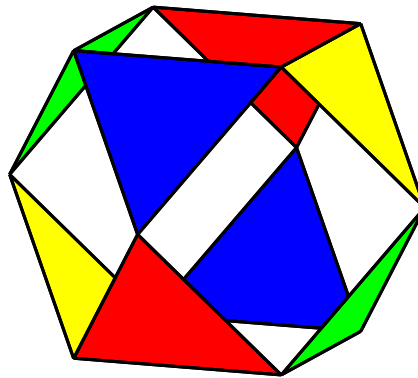


On a alors la correspondance suivante :

Groupe symétrique	Rotations du cube	Effectifs
\mathcal{S}_4		
Id	Identité	1
$(a b c)$	rotation d'un tiers de tour d'axe une diagonale	$4 \times 2 = 8$

$(a\ b)(c\ d)$	demi-tour d'axe passant par le centre de deux faces opposées	3
$(a\ b)$	demi-tour d'axe passant par les milieux de deux côtés opposés	6
$(a\ b\ c\ d)$	rotation d'un quart de tour d'axe passant par le centre de deux faces opposées	$3 \times 2 = 6$
		24

On verra mieux les permutations sur les diagonales du cube en coupant les huit sommets du cube de façon à obtenir un cuboctaèdre. Nous représentons ci-dessous un tel cuboctaèdre en enlevant également les faces carrées qui restent de façon à voir ce qui se passe de l'autre côté.



Colorions les triangles opposés de la même couleur, ce qui donne quatre paires de quatre couleurs. Il devient alors facile à voir que :

- les tiers-de-tours d'axes passant par les centres de deux triangles opposés (initialement les diagonales du cube) permutent trois couleurs.
- les rotations d'axes passant par les centres des carrés (absents) du cuboctaèdre (initialement les centres des faces du cube) permutent quatre couleurs, soit circulairement pour les quart de tours, soit deux à deux pour les demi-tours.
- les demi-tours d'axes passant par deux sommets opposés du cuboctaèdre (initialement les milieux de deux côtés opposés du cube) permutent deux couleurs

Sol.16) a) Les coordonnées des sommets des trois rectangles sont :

$$(0, \pm \varphi, \pm 1), (\pm 1, 0, \pm \varphi), (\pm \varphi, \pm 1, 0)$$

Chacun de ses sommets se situe à la même distance du centre $O = (0,0,0)$.

Chaque sommet est relié à cinq autres sommets. La longueur des côtés vaut 2 (longueur du petit côté d'un rectangle) ou $\sqrt{(\varphi - 1)^2 + 1 + \varphi^2}$ (longueur joignant deux sommets proches de deux rectangles différents, par exemple $(\varphi, 1, 0)$ et $(1, 0, \varphi)$). On vérifiera que $\sqrt{(\varphi - 1)^2 + 1 + \varphi^2} = 2$. Ainsi, tous les côtés ont même longueur.

Un icosaèdre possède 12 sommets, 30 arêtes, 20 faces triangulaires équilatérales.

b) Il y a $120 = 12 \times 5 \times 2$ isométries laissant globalement invariant l'icosaèdre. En effet, soit A un sommet donné, B un sommet situé à une distance 2 de A. On définit une isométrie en envoyant A sur l'un des 12 sommets A' possibles, B sur l'un des cinq sommets B' adjacents à A, les images des

autres sommets étant ensuite définis à partir de A' et B' soit par orientation directe, soit par orientation indirecte. Ces 120 isométries se répartissent en 60 isométries directes et 60 isométries indirectes.

□ Les 60 = 1 + 24 + 20 + 15 rotations sont :

L'identité (1 isométrie)

Les rotations d'axes passant par deux sommets diamétralement opposés et d'angle $\frac{2k\pi}{5}$,

$1 \leq k \leq 4$ ($6 \times 4 = 24$ isométries)

Les rotations d'axes passant par les centres de deux faces diamétralement opposées et d'angle $\frac{2k\pi}{3}$, $1 \leq k \leq 2$ ($10 \times 2 = 20$ isométries)

Les demi-tours d'axes passant par les milieux de deux côtés diamétralement opposés (15 isométries)

□ Les 60 = 1 + 24 + 20 + 15 isométries indirectes sont :

La symétrie centrale s_O de centre O (1 isométrie),

Les composées d'une rotation et d'une réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation, la rotation étant d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\frac{(2k+1)\pi}{5}$, $k \neq 2$ ($6 \times 4 = 24$ isométries),

Les composées d'une rotation et d'une réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation, la rotation étant d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\frac{(2k+1)\pi}{3}$,

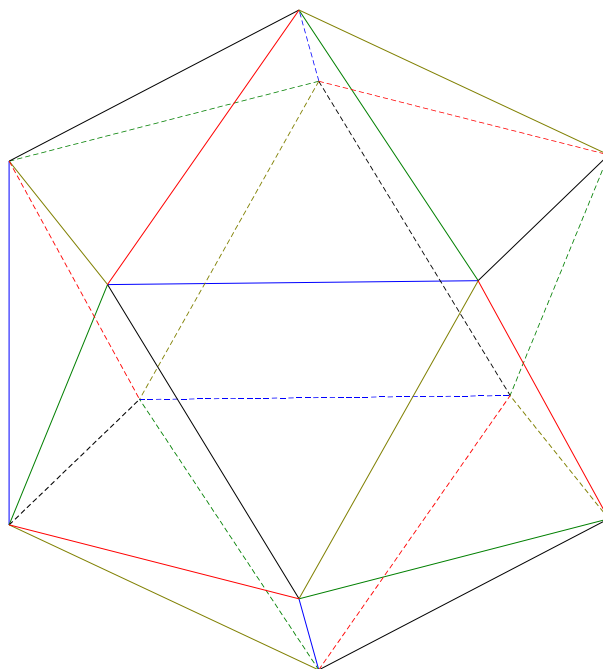
$k \neq 1$ ($10 \times 2 = 20$ isométries),

Les réflexions par rapport à un plan contenant deux arêtes opposées (15 isométries).

REMARQUES :

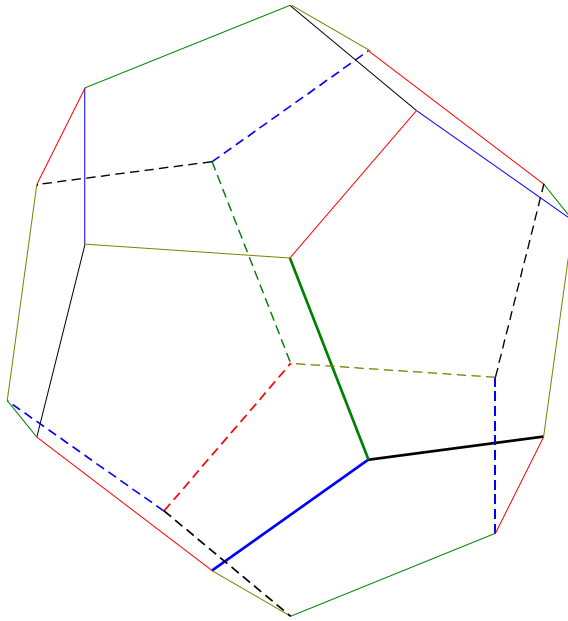
□ Le groupe des rotations laissant globalement invariant l'icosaèdre est isomorphe au groupe alterné \mathfrak{A}_5 des permutations paires de 5 objets (voir la notion de *groupe alterné* dans le chapitre L1/GROUPSYM.DOC). En effet, on remarquera (avec un peu de) qu'il existe 5 façons de disposer trois rectangles perpendiculaires définissant l'icosaèdre précédent, qu'une rotation permute ces 5 trirectangles, et que ladite permutation est paire. Comme il y a 60 rotations ainsi associées à 60 permutations paires, on obtient bien tous les éléments de \mathfrak{A}_5 qui sont eux aussi au nombre de $\frac{5!}{2} = 60$.

Ou encore, en ne gardant de chaque triplet de rectangles que leurs petits côtés (soit 6 côtés pour chaque triplet), et en attribuant une couleur différente à chacun de ces triplets, on répartit les 30 arêtes de l'icosaèdre en 5 groupes de 6 côtés, chaque groupe ayant une couleur spécifique. Une rotation laissant globalement invariant l'icosaèdre revient à permuer les 5 couleurs de façon paire. Inversement, toute permutation paire des 5 couleurs peut s'obtenir par une unique rotation spécifique laissant globalement invariant l'icosaèdre. Plus précisément, les 24 rotations d'axe passant par deux sommets diamétralement opposés correspondent aux 24 permutations circulaires $(a b c d e)$ des cinq couleurs. Les 20 rotations d'axe passant par les centres de deux faces opposées correspondent aux 20 permutations circulaires $(a b c)$ de trois couleurs. Les 15 demi-tours correspondent aux 15 permutations $(a b)(c d)$ produits de deux transpositions.



□ Une isométrie laissant globalement invariant l'icosaèdre est de la forme $r \circ s_0^k$ avec r une rotation laissant globalement invariant l'icosaèdre, et $k = 0$ (ou k pair) pour une isométrie directe, $k = 1$ (ou k impair) pour une isométrie indirecte. De plus, s_0 commute avec toute telle rotation r . Une telle isométrie est donc définie par le couple (r, k) , $k \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (voir le chapitre L2/ZSURNZ.PDF pour la définition de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$). L'application $(r, k) \rightarrow r \circ s_0^k$ permet de définir un isomorphisme de groupe entre $\mathfrak{A}_5 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et le groupe des isométries laissant globalement invariant l'icosaèdre.

Une répartition analogue en 5 groupes de 6 arêtes est également applicable au dodécaèdre, conduisant au même résultat : le groupe des rotations laissant globalement invariant le dodécaèdre est isomorphe au groupe \mathfrak{A}_5 . On en donne une autre démonstration dans l'exercice suivant.



Sol.17) a) Les cinq cubes sont :

A = {4, 1, 15, 16, 10, 7, 13, 18} (le cube rouge)

B = {5, 2, 7, 14, 9, 16, 11, 19}

C = {1, 3, 14, 20, 8, 9, 12, 18}

D = {2, 4, 17, 20, 6, 8, 11, 13}

E = {3, 5, 10, 17, 15, 6, 12, 19}

b) Il y a 60 rotations laissant globalement invariant le dodécaèdre. On les énumère en donnant également la permutation paire des 5 cubes qui leur correspond :

L'identité, laissant invariant tous les cubes

Les 24 rotations d'angle $\frac{2k\pi}{5}$ d'axe passant par les centres de deux faces opposées, permutant circulairement les cinq cubes,

Les 20 rotations d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ d'axe passant par deux sommets opposés, permutation circulaire de trois cubes. Par exemple, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ passant par les sommets 1 et 18 laisse les cubes A et C invariants et est la permutation circulaire (BED),

Les 15 demi-tours d'axe passant par les milieux de deux côtés opposés, produit de deux transpositions, l'un des cubes est invariant. Par exemple, le demi-tour passant par le centre du segment [5,8] et [19,20] laisse le cube rouge A invariant et est (BD)(CE).

c) Il y a 60 isométries indirectes, qui sont :

la symétrie centrale de centre le centre du dodécaèdre,

24 antirotations d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm \frac{\pi}{5}$ ou $\pm \frac{3\pi}{5}$

(il y a six axes possibles),

20 antirotations d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm \frac{\pi}{3}$ (il y a dix axes),

15 réflexions par rapport au plan médiateur d'une arête et de l'arête opposée (il y a 15 couples de telles arêtes). Chaque plan médiateur contient aussi deux arêtes opposées.

Sol.18) Soit (x, y) les coordonnées du centre Ω du cercle cherché. Ω est à égale distance de O et A, donc :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$$

qui se simplifie, après élévation au carré, en $3x - y = 5$, équation de la médiatrice de [OA].

Par ailleurs, la distance de Ω à la droite tangente donnée, d'équation $y + 2x = 10$, est égale au rayon du cercle, donc de nouveau à $\sqrt{x^2 + y^2}$. Cela donne l'équation supplémentaire :

$$\frac{|2x + y - 10|}{\sqrt{5}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

qui, après élévation au carré, se simplifie en :

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 40x + 20y = 100$$

On a donc :

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x^2 + 4y^2 - 4xy + 40x + 20y = 100 \end{cases}$$

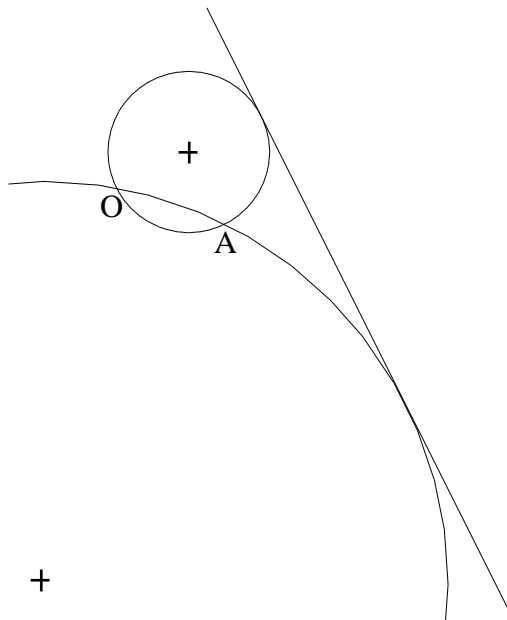
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ x^2 + 4(3x - 5)^2 - 4x(3x - 5) + 40x + 20(3x - 5) = 100 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (2, 1) \text{ ou } (x, y) = (-2, -11)$$

Il y a deux cercles possibles dont les centres sont données par les deux solutions précédentes, les rayons respectifs étant $\sqrt{5}$ et $\sqrt{125}$.



Sol.19) a) h_G transforme les objets de la façon suivante :

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & M \\ B & \rightarrow & N \end{array}$$

C	→	P
(BC)	→	(NP)
Cercle circonscrit ABC	→	Cercle d'Euler MNP
Rayon du cercle circonscrit	→	Rayon du cercle d'Euler
centre du cercle circonscrit O	→	centre du cercle d'Euler Ω
Orthocentre de ABC, H	→	Orthocentre de MNP, O

O est bien l'orthocentre de MNP car O étant à la même distance de B et C, il appartient à la médiatrice de [BC] qui est la droite passant par M et perpendiculaire à (BC). Comme (BC) est parallèle à (NP) (une droite est image de l'autre par l'homothétie), (OM) passe par le sommet M et est orthogonale à (NP). C'est une hauteur de MNP. Il en est de même pour (ON) et (OP).

b) Le rayon du cercle d'Euler est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit.

$G\Omega = -\frac{1}{2}GO$ donc G, O, Ω sont alignés

De même, $GO = -\frac{1}{2}GH$ donc G, O, H sont alignés. $G\Omega = \frac{1}{4}GH$

En retranchant membre à membre les deux égalités précédentes, on obtient :

$O\Omega = -\frac{1}{2}HO = \frac{1}{2}OH$, ce qui signifie que le centre Ω du cercle d'Euler est le milieu de

[OH].

Les points M, N, P, A', B', C' appartiennent au cercle d'Euler. En effet, si l'on considère la projection orthogonale sur (BC), H se projette en A', O en M et Ω milieu de [OH] en le milieu de [MA'], ce qui signifie que Ω est sur la médiatrice de [MA'], et donc que $M\Omega = \Omega A'$.

c) h_H transforme les objets de la façon suivante :

O	→	Ω
Rayon du cercle circonscrit	→	Rayon du cercle d'Euler
Cercle circonscrit de centre O	→	Cercle d'Euler de centre Ω
A	→	α
B	→	β
C	→	γ

d) Puisque A, B, C sont élément du cercle circonscrit, en appliquant h_G , α , β , γ sont éléments du cercle d'Euler.

L'application $h_G \circ h_H^{-1}$ laisse le point Ω invariant et le produit des rapports des deux homothéties est $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$. Il s'agit donc de la symétrie par rapport au point Ω . Or cette application transforme

α en M, β en N et γ en P. Donc α et M sont deux points diamétralement opposés du cercle d'Euler de centre Ω , et de même pour β et N, γ et P.

Puisque α et M sont diamétralement opposés et que Ω est le milieu de [OH], α (respectivement H) est l'image de M (respectivement O) par la symétrie de centre. Donc $OM = \alpha H = \frac{AH}{2}$. De même

pour les autres sommets.

L'image des symétriques de l'orthocentre par h_H n'est autre que A', B' et C' qui appartiennent au cercle d'Euler. Les symétriques, antécédents de ces points par h_H , appartiennent donc au cercle circonscrit.

Sol.20) O est l'isobarycentre des quatre centres O_1, O_2, O_3, O_4 intersections des bissectrices à (AB), (AC), (BC). Les bissectrices d'un même couple de droites étant perpendiculaires (voir le chapitre L1/GEOMELEM.PDF), O_1 est l'orthocentre de $(O_2O_3O_4)$, et A, B, C en sont les pieds des hauteurs.

L'isobarycentre O des quatre O_i est le barycentre de O_1 affecté du coefficient 1 et de l'isobarycentre Γ (non représenté sur la figure) de O_2, O_3, O_4 affecté du coefficient 3 :

$$O = \frac{O_1}{4} + \frac{3\Gamma}{4}$$

donc $\Gamma O = \frac{1}{4} \Gamma O_1$

donc O n'est autre que le centre du cercle d'Euler relatif à $(O_2O_3O_4)$. Ce cercle passe par le pied des hauteurs, donc passe par A, B, C . Le cercle d'Euler relatif à $(O_2O_3O_4)$ est donc le cercle circonscrit à (ABC) , et le centre O cherché est le centre du cercle circonscrit à (ABC) .

