POLYNOMES ORTHOGONAUX

Plan

I : Structures d'espace préhilbertien de $\mathbb{R}[X]$

1- Définition de produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$

$\mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, peut être muni de diverses structures d'espaces préhilbertiens. Une manière courante de procéder consiste à prendre une fonction w continue par morceaux strictement positive sur un intervalle I, telle que w est intégrable sur I ainsi que le produit de w par tout polynôme. w permet alors de définir un produit scalaire de la façon suivante :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, Q \in \mathbb{R}[X],\ \langle P, Q \rangle = \int_I P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

D'autres produits scalaires sont possibles, tel le produit scalaire défini par :

$$\forall\, P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k,\ \forall\, Q = \sum_{k\geq 0} b_k X^k,\ \langle P, Q \rangle = \sum_{k\geq 0} a_k b_k$$

et pour lequel la base canonique $(X^n)_{n\geq 0}$ forme une base orthonormée. Ce produit scalaire ne saurait être de la forme $\langle P, Q \rangle = \int_I P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t$, sinon on aurait :

$$1 = \langle X, X \rangle = \int_I t^2 w(t)\,\mathrm{d}t = \langle 1, X^2 \rangle = 0$$

Si $\mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire, le terme unitaire devient ambigu. Désigne-t-il un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1, ou bien un polynôme dont la norme vaut 1 ? Nous garderons la définition usuelle portant sur le coefficient dominant, et parlerons explicitement de polynôme de norme 1 dans le second cas.

Dans le cas d'un produit scalaire de la forme $<P, Q> = \int_I P(t)Q(t)w(t)\, dt$, on a $<XP, Q> = <P, XQ>$ puisque les deux membres valent $\int_I tP(t)Q(t)\, dt$. Autrement dit, l'opérateur $P \in \mathbb{R}[X] \to XP \in \mathbb{R}[X]$ est symétrique[1]. Notons $P_0, P_1, ..., P_n, ...$ des polynômes obtenus à partir de la base canonique $1, X, ..., X^n, ...$ en lui appliquant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt (voir L1/ESPEUCL.PDF). Pour tout n, $(P_0, P_1, ..., P_n)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, P_0 étant un polynôme constant non nul et, pour $n \geq 1$, P_n étant de degré n (car étant combinaison linéaire de $1, X, ..., X^n$ et ayant une composante non nulle selon X^n) et orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Nous dirons que cette famille est **associée** au produit scalaire défini par w. Calculons les P_n en les choisissant unitaires, et en cherchant P_{n+1} à partir de $P_0, P_1, ..., P_n$ sous la forme :

$$P_{n+1} = XP_n + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$$

puisque XP_n a pour terme dominant X^{n+1}, comme attendu pour P_{n+1}.

PROPOSITION

(i) *La famille orthogonale de polynômes unitaires* (P_n) *associée au produit scalaire défini par w vérifie* :

$$\forall\, n \geq 1,\ P_{n+1} = XP_n - \frac{<XP_n, P_n>}{<P_n, P_n>} P_n - \frac{<P_n, P_n>}{<P_{n-1}, P_{n-1}>} P_{n-1}$$

(ii) *Si les* P_n *ne sont pas choisis unitaires mais ont pour coefficient dominant* Λ_n, *la relation précédente s'écrit* :

$$\forall\, n \geq 1,\ P_{n+1} = \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} XP_n - \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} \frac{<XP_n, P_n>}{<P_n, P_n>} P_n - \frac{\Lambda_{n-1}\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n^2} \frac{<P_n, P_n>}{<P_{n-1}, P_{n-1}>} P_{n-1}$$

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : Faisant le produit scalaire des deux membres de l'égalité $P_{n+1} = XP_n + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$ par P_i, i variant de 0 à $n-2$, on obtient :

$$<P_{n+1}, P_i> = <XP_n, P_i> + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k <P_k, P_i>$$

$\Rightarrow \quad 0 = <P_n, XP_i> + \lambda_i <P_i, P_i>$ car P_i est orthogonal aux P_k, $k \neq i$

$\Rightarrow \quad 0 = \lambda_i <P_i, P_i>$ car P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ auquel appartient XP_i

$\Rightarrow \quad \lambda_i = 0.$

❑ (i-bis) : Le produit scalaire par P_{n-1} donne :

[1] Contrairement à ce qui se passe en dimension finie, on peut noter que cet opérateur ne peut avoir de vecteur propre puisque XP ne peut être le produit de P par un scalaire si P est non nul.

$$0 = \langle XP_n, P_{n-1}\rangle + \lambda_{n-1} \langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = \langle P_n, XP_{n-1}\rangle + \lambda_{n-1} \langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = \langle P_n, P_n\rangle + \lambda_{n-1} \langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle$$

car, en comparant les coefficients dominants, $XP_{n-1} = P_n + Q$, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}$ et P_n est orthogonal à Q

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_{n-1} = -\frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle}$$

❑ (i-ter) : Le produit scalaire par P_n donne :

$$0 = \langle XP_n, P_n\rangle + \lambda_n \langle P_n, P_n\rangle$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda_n = -\frac{\langle XP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle}$$

❑ (ii) : Il suffit d'écrire la relation (i) avec la famille $\left(\frac{P_n}{\Lambda_n}\right)$.

EXEMPLE :

❑ Pour I = [–1, 1] et $w = 1$, le produit scalaire est défini par $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$. On a :

$P_0 = 1$ de norme $\sqrt{2}$

$$P_1 = XP_0 - \frac{\langle XP_0, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} P_0$$

$= X$ car $\langle XP_0, P_0\rangle = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0$

P_1 est de norme $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$$P_2 = XP_1 - \frac{\langle XP_1, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle} P_1 - \frac{\langle P_1, P_1\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} P_0$$

$= X^2 - \frac{1}{3}$ car $\langle XP_1, P_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0$

P_2 est de norme $\frac{2\sqrt{10}}{15}$.

PROPOSITION

Pour tout n, P_n *possède n racines simples, toutes éléments de* I.

Démonstration :

❑ Notons $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ les racines réelles de P_n de multiplicité impaires éléments de I, et Q le polynôme $(x - \alpha_1)...(x - \alpha_k)$. On a $P_nQ \geq 0$ et $P_nQ \neq 0$, donc $\langle P_n,Q\rangle = \int_I P_n(t)Q(t)w(t)\,dt > 0$. Si $P_n \neq Q$, on a $\deg(Q) < \deg(P_n)$ et comme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\langle P_n,Q\rangle = 0$ ce qui est contradictoire.

EXEMPLE :

❑ Pour $I = [-1, 1]$ et $w = 1$, P_1 a pour racine 0 et P_2 a pour racine $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

PROPOSITION

Notons :

$x_{n0}, x_{n1}, ..., x_{nn}$ les $n + 1$ *racines de* P_{n+1},

$L_{n0}, L_{n1}, ..., L_{nn}$ *les* $n + 1$ *polynômes interpolateurs de Lagrange définis par ces* $n + 1$ *nombres,*

$$a_{nk} = \int_I L_{nk}(t)\, w(t)\, dt = \langle L_{nk}, 1\rangle$$

Alors :

(i) *pour tout polynôme* P *de* $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P, 1\rangle = \int_I P(t)\, w(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\, P(x_{nk})$$

(ii) *La formule reste vraie pour tout polynôme de* $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

(iii) $\forall\, n, \forall\, k, a_{nk} > 0$

Dans le (i) et le (ii), l'intégrale se calcule comme une somme finie. Nous utiliserons cette décomposition pour l'appliquer au calcul approché d'intégrales.

On a, avec les notations précédentes, $P_{n+1}(t) = \Lambda_{n+1} \prod_{k=0}^{n} (t - x_{nk})$, où Λ_{n+1} est le coefficient dominant de P_{n+1}.

Démonstration :

❑ (i) : Revoir au besoin le paragraphe *polynômes interpolateurs de Lagrange* dans le chapitre L1/POLYNOME.PDF. On y montre que les L_{nk} sont définis par les relations :

$$\forall\, n, \forall\, i, \forall\, k, L_{nk}(x_{ni}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}$$

que L_{nk} est de degré n et que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n, on a :

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(x_{nk})\, L_{nk}$$

Par conséquent :

$$\int_I P(t)\, w(t)\, dt = \langle P, 1\rangle$$

$$= \langle \sum_{k=0}^{n} P(x_{nk})\, L_{nk}, 1\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(x_{nk})\, \langle L_{nk}, 1\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\, P(x_{nk})$$

❑ (ii) : Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Effectuons la division euclidienne de P par P_{n+1} :

$$P = P_{n+1}Q + R \text{ avec } \deg(Q) \leq n \text{ et } \deg(R) < \deg(P_{n+1}) \text{ donc } \deg(R) \leq n.$$

Comme P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\langle P_{n+1}, Q\rangle = 0 = \int_I P_{n+1}(t)Q(t)w(t)\,dt = \langle P_{n+1}Q, 1\rangle$$

On a également $P(x_{nk}) = R(x_{nk})$ car $P_{n+1}(x_{nk}) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_I P(t)\,w(t)\,dt = \langle P, 1\rangle &= \langle P_{n+1}Q + R, 1\rangle \\ &= \langle P_{n+1}Q, 1\rangle + \langle R, 1\rangle \\ &= \langle R, 1\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\,R(x_{nk}) \qquad \text{d'après le (i)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\,P(x_{nk})\end{aligned}$$

❑ (iii) : On applique le (ii) à L_{nk}^2 :

$$0 < \int_I L_{n,k}(t)^2\,w(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} a_{ni}\,L_{nk}^2(x_{ni}) = a_{nk}$$

car $L_{nk}^2(x_{ni}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}$

EXEMPLES :

On prend $I = [-1, 1]$ et $w = 1$, on a :

❑ Pour $n = 0$, $P_1 = X$, $x_{00} = 0$, $L_{00} = 1$, $a_{00} = 2$ et pour tout pout polynôme de degré inférieur ou égal à 1 :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = 2P(0)$$

❑ Pour $n = 1$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$ et :

$$x_{10} = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$L_{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(X - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ L_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(X + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$a_{10} = a_{11} = 1$ (après quelques calculs)

Pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3 :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

2- Application au calcul approché d'intégrales

Utilisons maintenant la somme $\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\ f(x_{nk})$ comme valeur approchée de l'intégrale $\int_{\mathrm{I}} f(t)\ w(t)\ \mathrm{d}t$ d'une fonction f telle que fw soit intégrable sur I. Cette valeur approchée est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $2n + 1$.

EXEMPLES :
On prend $\mathrm{I} = [-1, 1]$ et $w = 1$, on obtient les méthodes d'intégration de Gauss-Legendre.
❑ Pour $n = 0$, on approxime $\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$ par $2f(0)$. C'est la méthode des rectangles du point milieu.
❑ Pour $n = 1$, on approxime $\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$ par $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$. On a rencontré cette expression dans l'annexe I, *Calcul approché d'intégrales*, du chapitre L1/INTEGRAL.PDF.

On peut déterminer l'erreur commise lorsque f est une fonction de classe C^{2n+2}, bornée sur I. On pose $\| f^{(2n+2)} \|$ la borne supérieure de f sur I. On approxime f par un polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n + 1$:

PROPOSITION
Soit f une fonction de classe C^1 *sur* I.
(i) *Il existe un unique polynôme* P *de degré au plus* $2n + 1$ *tel que* :

$$\forall\ k \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{P}(x_{nk}) = f(x_{nk}) \text{ et } \mathrm{P}'(x_{nk}) = f\,'(x_{nk}).$$

(ii) *De plus, si f est de classe* C^{2n+2}*, pour tout x de* I, *il existe un réel* ζ *élément de* I *tel que* :

$$f(x) - \mathrm{P}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_{nk})^2\ f^{(2n+2)}(\zeta)$$

Démonstration :
❑ (i) : Pour l'existence et l'unicité de P, on considère $\Phi : \mathbf{R}_{2n+1}[\mathrm{X}] \to \mathbf{R}^{2n+2}$ définie par :

$$\Phi(\mathrm{P}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(x_{n0}) \\ \ldots \\ \mathrm{P}(x_{nn}) \\ \mathrm{P}'(x_{n0}) \\ \ldots \\ \mathrm{P}'(x_{nn}) \end{pmatrix}$$

Φ est trivialement linéaire. Elle est injective car, si $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors P admet x_{n0}, x_{n1}, ..., x_{nn} comme racine double. Il admet donc au moins $2n + 2$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité. Comme $\deg(\mathrm{P}) \leq 2n + 1$, $\mathrm{P} = 0$.
Puisque Φ est injective et que $\dim(\mathbf{R}_{2n+1}[\mathrm{X}]) = 2n + 2 = \dim(\mathbf{R}^{2n+2})$, le théorème du rang permet d'en déduire que Φ est surjective. Φ est donc bijective.

Par conséquent, considérant l'élément $\begin{pmatrix} f(x_{n0}) \\ \dots \\ f(x_{nn}) \\ f'(x_{n0}) \\ \dots \\ f'(x_{nn}) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^{2n+2}$, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ dont l'image par Φ est égal à cet élément. Donc :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], P(x_{nk}) = f(x_{nk}) \text{ et } P'(x_{nk}) = f'(x_{nk}).$$

❑ (ii) : Soit x élément de I. Si x est égal à l'un des x_{nk}, l'égalité à prouver est trivialement vérifiée avec n'importe quel ζ. Supposons donc x distinct des x_{nk}. On pose K (dépendant de x) tel que :

$$f(x) - P(x) - \frac{1}{(2n+2)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_{nk})^2 K$$

et l'on considère la fonction g définie par:

$$g(t) = f(t) - P(t) - \frac{1}{(2n+2)!} \prod_{k=0}^{n} (t - x_{nk})^2 K$$

g s'annule au moins en x et en x_{nk} soit $n + 2$ points donc, en appliquant le théorème de Rolle entre chacun de ces points, g' s'annule $n + 1$ fois sur I, mais g' s'annule également en les x_{nk} donc g' s'annule au moins $2n + 2$ fois. En appliquant de nouveau le théorème de Rolle, g'' s'annule au moins $2n + 1$ fois sur I, $g^{(3)}$ s'annule au moins $2n$ fois, etc. jusqu'à $g^{(2n+2)}$ qui s'annule au moins une fois sur I, en un point ζ. On a alors, en tenant compte que la dérivée $(2n + 2)$-ème de P est nulle (car $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$) et que la dérivée $(2n + 2)$-ème de $\frac{1}{(2n+2)!} \prod_{k=0}^{n} (t - x_{nk})^2 K$ vaut K :

$$0 = g^{(2n+2)}(\zeta) = f^{(2n+2)}(\zeta) - K$$

Donc $K = f^{(2n+2)}(\zeta)$ et on a bien $f(x) - P(x) = \frac{1}{(2n+2)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_{nk})^2 f^{(2n+2)}(\zeta)$.

COROLLAIRE

Sous les hypothèses précédentes, l'erreur commise en approximant $\int_I f(t)\, w(t)\, dt$ *par* $\sum_{k=0}^{n} a_{nk} f(x_{nk})$ *est* $\frac{\| f^{(2n+2)} \|}{(2n+2)!\, \Lambda_{n+1}^2}$*, où* Λ_{n+1} *est le coefficient dominant du polynôme* P_{n+1} *lorsque celui-ci est pris de norme égale à* 1.

<u>Démonstration</u> :

❑ $$\left| \int_I f(t)\, w(t)\, dt - \sum_{k=0}^{n} a_{nk} f(x_{nk}) \right| = \left| \int_I f(t)\, w(t)\, dt - \sum_{k=0}^{n} a_{nk} P(x_{nk}) \right|$$

car $\forall k$, $P(x_{nk}) = f(x_{nk})$

$$= \left| \int_I f(t)\, w(t)\, dt - \int_I P(t)\, w(t)\, dt \right|$$

car $\displaystyle\int_I P(t)\, w(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\, P(x_{nk})$

$$\leq \int_I \left| f(t) - P(t) \right| w(t)\, dt$$

$$\leq \int_I \frac{1}{(2n+2)!} \prod_{k=0}^{n} (t - x_{nk})^2 \left| f^{(2n+2)}(\zeta) \right| w(t)\, dt$$

où ζ dépend de t

$$\leq \frac{\| f^{(2n+2)} \|}{(2n+2)!} \int_I \prod_{k=0}^{n} (t - x_{nk})^2\, w(t)\, dt$$

$$\leq \frac{\| f^{(2n+2)} \|}{(2n+2)!\, \Lambda_{n+1}^{\ 2}} \int_I P_{n+1}^{\ 2}(t)\, w(t)\, dt$$

car $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (t - x_{nk}) = \frac{P_{n+1}(t)}{\Lambda_{n+1}}$

$$\leq \frac{\| f^{(2n+2)} \|}{(2n+2)!\, \Lambda_{n+1}^{\ 2}} \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle$$

$$\leq \frac{\| f^{(2n+2)} \|}{(2n+2)!\, \Lambda_{n+1}^{\ 2}}$$

car P_{n+1} est de norme 1

EXEMPLE :

❑ Pour I = [–1, 1], $w = 1$, $n = 1$ et $f(t) = e^t$, la méthode précédente approxime l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} e^t\, dt = e - \frac{1}{e} \approx 2{,}350$$

par la somme finie :

$$\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \exp\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 2{,}343$$

où $x_{10} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $x_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ sont les racines du polynôme de norme 1 : $P_2 = \Lambda_2\left(X^2 - \dfrac{1}{3}\right)$. On a ici :

$$\int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45} = \frac{1}{\Lambda_2^{\ 2}}$$

L'erreur est inférieure à 0,008. La majorant de l'erreur donné par le corollaire est :

$$\frac{\| f^{(4)} \|}{4!\, \Lambda_2^{\ 2}} = \frac{e}{24} \frac{8}{45} = \frac{e}{135} \approx 0{,}020$$

II : Familles classiques de polynômes orthogonaux

On donne ci-dessous un certain nombre de familles de polynômes orthogonaux, associées à diverses valeurs de la fonction w et de l'intervalle I. Celles-ci peuvent être déjà préprogrammées dans certains logiciels de mathématiques (par exemple avec la commande orthopoly de Maple).

1- Les polynômes de Legendre

Ce sont des polynômes orthogonaux associés à la fonction $w = 1$ sur $[-1, 1]$. Ce sont eux (à un facteur près) que l'on a utilisés dans les exemples du paragraphe précédent.

Les **polynômes de Legendre** P_n sont définis par l'égalité $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n\, n!} \dfrac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$. On donne ci-dessous un certain nombre de propriétés de ces polynômes. Les premières valeurs de la suite sont :

$P_0 = 1$

$P_1 = X$

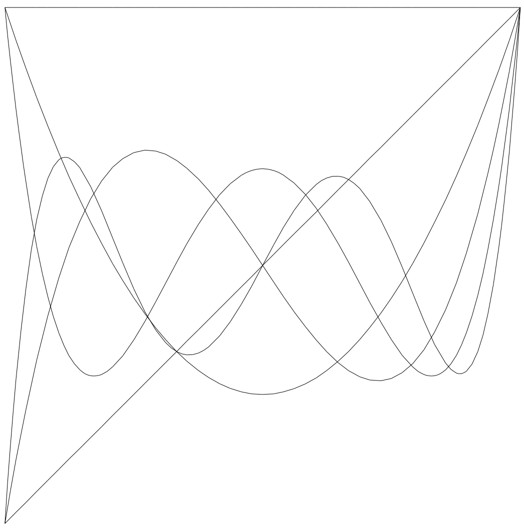
$P_2 = \dfrac{3X^2 - 1}{2}$

$P_3 = \dfrac{5X^3 - 3X}{2}$

$P_4 = \dfrac{35X^4 - 30X^2 + 3}{8}$

$P_5 = \dfrac{63X^5 - 70X^3 + 15X}{8}$

Ci-dessous, leur représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 1]$:



PROPOSITION

a) *Pour tout n,* P_n *est de degré n, et le coefficient dominant de* P_n *est* $\Lambda_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^n}$.

b) *Les polynômes* (P_n) *forment une famille orthogonale pour le produit scalaire défini sur* $\mathbb{R}[X]$ *par* :

$$<\mathrm{P},\mathrm{Q}> = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$$

c) *La norme euclidienne de* P_n *est* $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}$.

d) *La famille vérifie la relation de récurrence* : $\forall\, n \geq 1$, $(n + 1)\mathrm{P}_{n+1} = (2n + 1)\mathrm{X}\mathrm{P}_n - n\mathrm{P}_{n-1}$

e) P_n *est solution de l'équation différentielle* $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$.

f) *Pour tout polynôme* P, *on pose* $\Phi(\mathrm{P}) = (1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{P}'' - 2\mathrm{X}\mathrm{P}'$. Φ *est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini en b).*

g) *Pour t assez petit,* $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x)t^n$.

La démonstration est donnée en exercice.

2- Les polynômes de Tchebychev

Ce sont des polynômes orthogonaux associés à la fonction $w(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $]-1, 1[$.

Les **polynômes de Tchebychev** T_n sont les polynômes vérifiant :

$\forall\, \theta$, $\mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

ou $\forall\, u$, $\mathrm{T}_n(\mathrm{ch}(u)) = \mathrm{ch}(nu)$

Les deux relations précédentes définissent en effet des relations polynomiales qu'on peut expliciter. Ainsi :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^n) = \mathrm{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) \\ &= \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)\, i^k \sin^k(\theta)\Big) \\ &= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta)\, (-1)^k \sin^{2k}(\theta) \\ &= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta)\, (-1)^k\, (1 - \cos^2(\theta))^k\end{aligned}$$

qui est bien un polynôme en $\cos(\theta)$. On a ainsi :

$$\mathrm{T}_n = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k} \mathrm{X}^{n-2k}\, (1 - \mathrm{X}^2)^k = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} \mathrm{X}^{n-2k}\, (\mathrm{X}^2 - 1)^k$$

De même, en désignant par Pair(f) la partie paire d'une fonction f, à savoir la fonction $x \to \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(nu) &= \mathrm{Pair}(e^{nu}) = \mathrm{Pair}((e^u)^n) = \mathrm{Pair}((\mathrm{ch}(u) + \mathrm{sh}(u))^n) \\ &= \mathrm{Pair}\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{ch}^{n-k}(u)\mathrm{sh}^k(u)\Big)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} \mathrm{ch}^{n-2k}(u)\ \mathrm{sh}^{2k}(u)$$

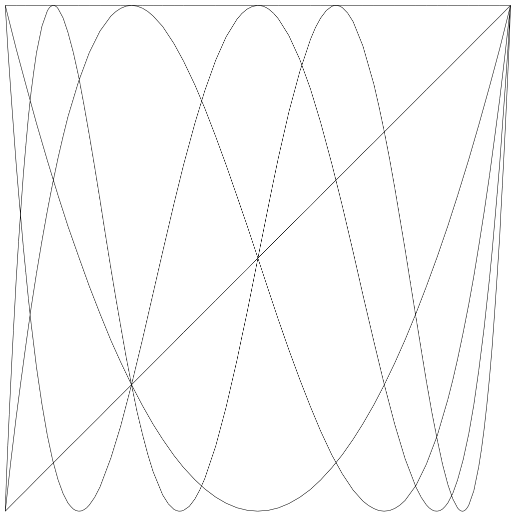
$$= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} \mathrm{ch}^{n-2k}(u)\ (\mathrm{ch}^2(u) - 1)^k$$

$$= \mathrm{T}_n(\mathrm{ch}(u))$$

Les premières valeurs de la suite (T_n) sont :

$\mathrm{T}_0 = 1$
$\mathrm{T}_1 = \mathrm{X}$
$\mathrm{T}_2 = 2\mathrm{X}^2 - 1$
$\mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}$
$\mathrm{T}_4 = 8\mathrm{X}^4 - 8\mathrm{X}^2 + 1$
$\mathrm{T}_5 = 16\mathrm{X}^5 - 20\mathrm{X}^3 + 5\mathrm{X}$

Ci-dessous, leur représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 1]$:



PROPOSITION

a) *Pour tout* n, T_n *est de degré* n, *et le coefficient dominant de* T_n *est* $\Lambda_0 = 1$ *si* $n = 0$, *et* $\Lambda_n = 2^{n-1}$ *si* $n \geq 1$.

b) *Les polynômes* (T_n) *forment une famille orthogonale pour le produit scalaire défini sur* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *par* :

$$\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

c) *La norme euclidienne de* T_n *est* $\sqrt{\pi}$ *si* $n = 0$ *et* $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ *si* $n \geq 1$.

d) *La famille vérifie la relation de récurrence* : $\forall\ n \geq 1$, $\mathrm{T}_{n+1} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n-1}$

e) T_n *est solution de l'équation différentielle* $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.

f) *Pour tout polynôme* P, *on pose* $\Phi(\mathrm{P}) = (1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{P}'' - \mathrm{X}\mathrm{P}'$. Φ *est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini en* b).

g) *Pour t assez petit,* $\dfrac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{T}_n(x)\, t^n$.

La démonstration est donnée en exercice.

3- Les polynômes de Laguerre

Ce sont des polynômes orthogonaux associés à la fonction $w(t) = e^{-t}$ sur $[0, +\infty[$.

Les **polynômes de Laguerre** sont définis par $\mathrm{L}_n(x) = \dfrac{e^x}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$. (Des variantes omettent le facteur $\dfrac{1}{n!}$. Par ailleurs, on évitera de confondre la notation L_n utilisée dans ce paragraphe pour désigner les polynômes de Laguerre avec la notion L_{nk} utilisée plus haut pour désigner les polynômes d'interpolation de Lagrange.)

Les premières valeurs de la suite (L_n) sont :

$\mathrm{L}_0 = 1$

$\mathrm{L}_1 = 1 - \mathrm{X}$

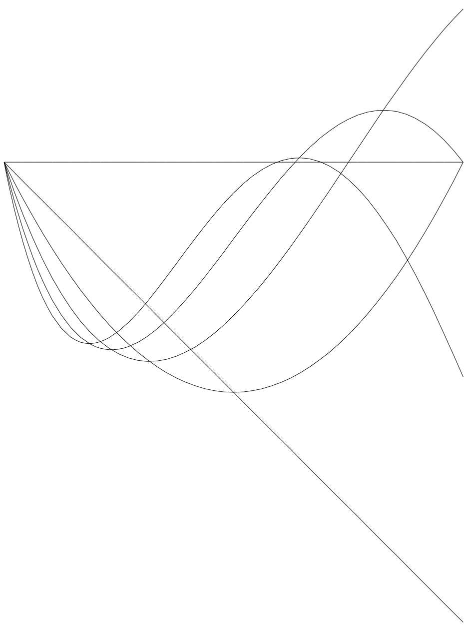
$\mathrm{L}_2 = \dfrac{\mathrm{X}^2}{2} - 2\mathrm{X} + 1$

$\mathrm{L}_3 = -\dfrac{\mathrm{X}^3}{6} + \dfrac{3\mathrm{X}^2}{2} - 3\mathrm{X} + 1$

$\mathrm{L}_4 = \dfrac{\mathrm{X}^4}{24} - \dfrac{2\mathrm{X}^3}{3} + 3\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 1$

$\mathrm{L}_5 = -\dfrac{\mathrm{X}^5}{120} + \dfrac{5\mathrm{X}^4}{24} - \dfrac{5\mathrm{X}^3}{3} + 5\mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 1$

Ci-dessous, leur représentation graphique sur l'intervalle [0, 4] :



PROPOSITION

a) *Pour tout n*, L_n *est de degré n et son coefficient dominant est* $\Lambda_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

b) *Ces polynômes forment une famille orthogonale pour le produit scalaire défini sur* $\mathbb{R}_n[X]$ *par* :

$$<P,Q> = \int_0^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt.$$

c) *La norme euclidienne de* L_n *est* 1.

d) *Ils vérifient la relation de récurrence :* $\forall\, n \geq 1$, $(n+1)L_{n+1} = (2n+1-X)\,L_n - n\,L_{n-1}$.

e) L_n *est solution de l'équation différentielle* $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$.

f) *Pour tout polynôme* P, *on pose* $\Phi(P) = XP'' + (1-X)P'$. Φ *est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini en b*).

g) *Pour t assez petit*, $\dfrac{\exp(-\frac{xt}{1-t})}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$.

La démonstration est donnée en exercice.

4- Les polynômes d'Hermite

Ce sont des polynômes orthogonaux associés à la fonction $w(t) = e^{-t^2}$ sur $[-\infty, +\infty[$.

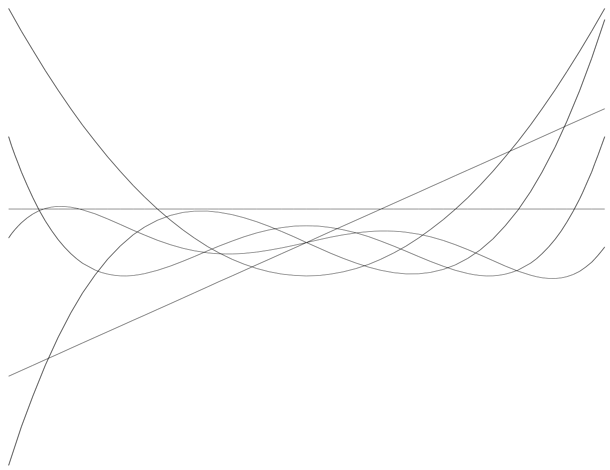
On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ (pour une démonstration, voir le chapitre L2/INTMULT.PDF ou les exercices de L2/SERIENTR.PDF).

Les **polynômes d'Hermite** sont définis par $H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\, \dfrac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}$.

Les premières valeurs sont :

$H_0 = 1$
$H_1 = 2X$
$H_2 = 4X^2 - 2$
$H_3 = 8X^3 - 12X$
$H_4 = 16X^4 - 48X^2 + 12$
$H_5 = 32X^5 - 160X^3 + 120X$

Ci-dessous, la représentation graphique des $\dfrac{H_n}{n!}$, $0 \leq n \leq 5$, sur l'intervalle $[-2, 2]$, le repère étant non orthonormé :



PROPOSITION

a) *Pour tout n*, H_n *est de degré n et son coefficient dominant est* $\Lambda_n = 2^n$.

b) *Ces polynômes forment une famille orthogonale pour le produit scalaire défini sur* $\mathbb{R}_n[X]$ *par* :

$$<P,Q> = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\, dt$$

c) *La norme euclidienne de* H_n *est* $\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$.

d) *Ils vérifient la relation de récurrence* : $\forall\ n \geq 1$, $H_{n+1} = 2XH_n - 2nH_{n-1}$.

e) H_n *est solution de l'équation différentielle* $y'' - 2xy' + 2ny = 0$.

f) *Pour tout polynôme* P, *on pose* $\Phi(P) = P'' - 2XP'$. Φ *est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini en b*).

g) *Pour t assez petit*, $\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \dfrac{t^n}{n!}$

La démonstration est donnée en exercice.

Sur les quatre familles précédentes, les polynômes de Tchebychev sont les seuls qui n'ont pas été définis au moyen d'une dérivée *n*-ème. Cependant, nous verrons dans les exercices qu'une telle définition est possible.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Prouver les propriétés des polynômes de Legendre, énoncées dans le II-1)

Exo.2) Prouver les propriétés des polynômes de Tchebychev, énoncées dans le II-2)

Exo.3) Prouver les propriétés des polynômes de Laguerre, énoncées dans le II-3)

Exo.4) Prouver les propriétés des polynômes d'Hermite, énoncées dans le II-4)

Exo.5) Montrer que les polynômes de Tchebychev valent :

a) $\forall\, n \geq 1$, $\mathrm{T}_n = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \dfrac{n}{n-k} \dbinom{n-k}{k} 2^{n-2k-1}\, \mathrm{X}^{n-2k}$

b) $\forall\, n \geq 0$, $\mathrm{T}_n(x) = (-1)^n \dfrac{2^n\, n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2}\, \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (1-x^2)^{n-1/2}$

Exo.6) Trouver les valeurs de réels a, b, c, u, v, w, tels que la formule :

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\, \mathrm{d}t = a\mathrm{P}(u) + b\mathrm{P}(v) + c\mathrm{P}(w)$$

soit vérifiée pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 5.

Exo.7) Cet exercice nécessite la connaissance du chapitre *Espaces normés* (L2/EVNORME.PDF).

On munit $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ du produit scalaire suivant : $< \sum\limits_{n\geq 0} a_n \mathrm{X}^n, \sum\limits_{n\geq 0} b_n \mathrm{X}^n > \; = \sum\limits_{n\geq 0} a_n b_n$ et de la norme euclidienne associée.

a) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\{\mathrm{X}^n + 1,\ n \geq 1\}$. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Déterminer une forme linéaire φ telle que $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Cette forme est-elle continue ? Montrer que $\mathrm{F}^{\perp} = \{0\}$.

b) On définit maintenant la forme linéaire ψ sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ par $\psi(\mathrm{P}) = \sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{a_k}{k+1}$ si $\mathrm{P} = \sum\limits_{k\geq 0} a_k \mathrm{X}^k$.

Montrer que ψ est continue. On pose $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(\psi)$. Donner une base de G. Montrer que $\mathrm{G}^{\perp} = \{0\}$.

Exo.8) a) Soit (E, (|)) un espace vectoriel euclidien (donc de dimension finie) et u un endomorphisme symétrique de E tel que, $\forall\, x \in \mathrm{E}$, $(u(x) \mid x) \geq 0$. Montrer que u admet une racine carrée, i.e qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $u = v \circ v$.

b) Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni d'un produit scalaire $(\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}) = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)w(t)\, \mathrm{d}t$ où w est une fonction continue par morceaux et strictement positive sur un intervalle I. Soit u l'endomorphisme de E défini par : $\mathrm{P} \to \mathrm{XP}$. Vérifier que :

$\forall\, \mathrm{P}, \forall\, \mathrm{Q}, (u(\mathrm{P}) \mid \mathrm{Q}) = (\mathrm{P} \mid u(\mathrm{Q}))$

$\forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{E}, (u(\mathrm{P}), \mathrm{P}) \geq 0$

u n'admet pas de racine carrée v

Pour la dernière question, on pourra raisonner par l'absurde et considérer le polynôme P égal à $v(1)$.

Exo.9) Cet exercice nécessite la connaissance du chapitre *Séries entières* (L2/SERIENTR.PDF). Soit θ élément de $[0, \pi]$. On considère la fonction $f : t \in\,]-1, 1[\, \to \arctan\left(\dfrac{2t}{1-t^2} \cos(\theta)\right)$.

a) Montrer que f est développable en série entière, et donner son développement.

b) En considérant $f(\sqrt{2} - 1)$, en déduire un développement en série de $\arctan(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, faisant intervenir les polynômes de Tchebychev $\mathrm{T}_{2n+1}(x)$, $n \geq 0$.

c) Donner un nombre de termes suffisant pour qu'une somme partielle de la série précédente permette de calculer $\arctan(x)$ à 10^{-10} près.

Exo.10) Pour tout polynôme P de $\mathbf{R}$[X], on pose $\| P \|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} \{|P(x)|, x \in [-1, 1]\}$. Soit $n \geq 1$.

On considère le polynôme de Tchebychev T_n. On a vu dans le cours que $\dfrac{T_n}{2^{n-1}}$ est un polynôme unitaire de degré n.

a) Que vaut $\| \dfrac{T_n}{2^{n-1}} \|_\infty$?

b) Montrer que, pour tout polynôme P unitaire de degré n, $\| \dfrac{T_n}{2^{n-1}} \|_\infty \leq \| P \|_\infty$. On pourra raisonner par l'absurde et considérer le signe de $(P - \dfrac{T_n}{2^{n-1}})(\cos(\dfrac{k\pi}{n}))$, $0 \leq k \leq n$.

c) Montrer que, si P est unitaire de degré n et si $\| \dfrac{T_n}{2^{n-1}} \|_\infty = \| P \|_\infty$, alors $P = \dfrac{T_n}{2^{n-1}}$.

Ainsi, le polynôme de Tchebychev T_n est-il caractérisé par la propriété d'être le seul à minimiser $\| \ \|_\infty$ parmi les polynômes de même degré et de même coefficient dominant que lui.

Exo.11) Pour chacune des familles de polynômes orthogonaux : Legendre, Tchebychev, Laguerre, Hermite, considérer l'équation différentielle vérifiée par le polynôme de degré n, donnée dans la proposition e) de chaque théorème la concernant. Cette équation différentielle est de la forme :

$$p(x)y'' + q(x)y' + \lambda_n y = 0$$

où p est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, q un polynôme de degré 1 ne divisant pas p, et λ_n une constante dépendant de n.

a) Vérifier que la fonction w définissant le produit scalaire correspondant à chaque famille vérifie la relation $(pw)' = qw$, que w est définie sur un intervalle I pour lequel on a $\forall\, n$, $lim\ w(x)p(x)x^n = 0$, la limite étant prise en chaque borne de I, finie ou non, et que $\lambda_n = \dfrac{(n - n^2)p''}{2} - nq'$.

b)Vérifier que, pour chaque famille, le polynôme de degré n associé au produit scalaire défini par w est égal à $\dfrac{1}{w(x)} \dfrac{d^n}{dx^n} (w(x)p(x)^n)$, à un facteur constant près.

Ce résultat est connu sous le nom de **formule de Rodrigues**. Elle permet d'unifier un certain nombre de calculs et permet de montrer certaines relations portant sur les polynômes orthogonaux en une seule démonstration, au lieu d'avoir une démonstration propre à chaque famille de polynômes orthogonaux, comme on l'a fait dans les exercices 1) à 4). Pour cela, on se donne :

un polynôme p non nul de degré inférieur ou égal à 2,

un polynôme q de degré 1 ne divisant pas p. Si $p = aX^2 + bX + c$ et $q = dX + e$, on supposera que, pour tout entier n positif ou nul, $d + na \neq 0$,

un intervalle I maximal sur lequel p ne s'annule pas,

w une solution strictement positive[2] sur I de l'équation différentielle $(pw)' = qw$. On suppose que p et w sont tels que pour tout polynôme P, wP est intégrable sur I (ce qui permet de définir un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ au moyen de w), et que $\forall\ n$, $lim\ w(x)p(x)x^n = 0$ aux bornes de I,

$$\lambda_n = \frac{(n-n^2)p''}{2} - nq'$$

c) Montrer que, sous ces hypothèses, pour tout entier $0 \leq k \leq n$ et pour tout polynôme Q, $\frac{1}{w}(wp^n\mathrm{Q})^{(k)}$ (où $^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème) est un polynôme de la forme $p^{n-k}\mathrm{R}_{nk}$ avec $\deg(\mathrm{R}_{nk}) = \deg(\mathrm{Q}) + k$. En particulier, $\mathrm{P}_n = \frac{1}{w}(wp^n)^{(n)}$ est un polynôme de degré n.

d) Montrer que la famille (P_n) est orthogonale pour le produit scalaire défini par w.

e) Montrer que l'opérateur L défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\mathrm{L(P)} = p\mathrm{P}'' + q\mathrm{P}'$ est symétrique pour le même produit scalaire.

f) Montrer que $p\mathrm{P}_n'' + q\mathrm{P}_n' + \lambda_n\mathrm{P}_n = 0$. Pour cela[3], on commencera par déterminer une expression de $p\mathrm{P}_n'' + q\mathrm{P}_n'$ en fonction de $(wp^n)^{(n)}$, $(wp^n)^{(n+1)}$, $(wp^n)^{(n+2)}$ en éliminant les w' au moyen de la relation $(pw)' = qw$. Puis on simplifiera les termes en $(wp^n)^{(n+1)}$ et $(wp^n)^{(n+2)}$ en calculant $((p(wp^n)')^{(n+1)}$ de deux façons : la première consiste à simplifier d'abord $p(wp^n)'$ avant d'appliquer au résultat la formule de Leibniz, et la seconde consiste à appliquer directement la formule de Leibniz au produit $p \times (wp^n)'$.

g) A l'aide des questions précédentes, formez votre propre famille de polynômes orthogonaux.

2- Solutions

Sol.1) a) P_n est de degré n puisqu'il est la dérivée n-ème d'un polynôme de degré $2n$.
Son coefficient dominant est :

$$\Lambda_n = \frac{1}{2^n\,n!} \times 2n(2n-1)...(n+1) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}.$$

On remarque aussi que $(x^2-1)^n$ ne possède que des puissances paires de x, donc sa dérivée n-ème et donc P_n possède des puissances de x de même parité que n. Cette remarque sera utilisée dans le d).
b) Il suffit de montrer que, pour $p < n$, on a $<\mathrm{P}_n, \mathrm{X}^p> = 0$. On intégre par partie en tenant compte du fait que, pour tout $m < n$, $\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}(t^2-1)^n$ s'annule en 1 et -1 :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n\, t^p\,\mathrm{d}t &= -\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}(t^2-1)^n\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^p)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}t^{n-2}}(t^2-1)^n\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(t^p)\,\mathrm{d}t \\ &= ...\end{aligned}$$

[2] La fonction $y = pw$ vérifie $y' = \frac{qy}{p}$, donc est de la forme Cte $\times \exp(\int \frac{q(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x)$, où $\int \frac{q(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x$ désigne une primitive de $\frac{q}{p}$ sur I. On prend Cte du signe de p de sorte que $w = \frac{\mathrm{Cte}}{p} \times \exp(\int \frac{q(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x)$ sera bien positive sur I. Seule la relation $(pw)' = qw$ sera utile pour les calculs.

[3] Cette méthode est utilisée par Mathieu Lavoie, *Polynômes orthogonaux*, Maîtrise en Mathématiques, Université de Laval, Canada (2015).

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^p)\, \mathrm{d}t = 0 \text{ car la dérivée } n^{\text{ème}} \text{ de } t^p \text{ est nulle.}$$

c) $\quad <\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n> = \dfrac{1}{2^n n!} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} (t^2 - 1)^n\, \mathrm{P}_n(t)\, \mathrm{d}t$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \mathrm{P}_n(t)\, \mathrm{d}t$$

en intégrant n fois par parties comme dans le a)

$$= \frac{1}{2^n n!} \times n! \times \frac{\binom{2n}{n}}{2^n} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n\, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n\, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \times 2 \int_{0}^{1} (1 - t^2)^n\, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \times 2 \int_{0}^{\pi/2} \sin^{2n+1}(\theta)\, \mathrm{d}\theta \qquad \text{en posant } t = \cos(\theta)$$

$\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin^{2n+1}(\theta)\, \mathrm{d}\theta$ est une intégrale de Wallis (voir le chapitre L2/SERIES.PDF) dont la valeur est $\dfrac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$. Donc :

$$<\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n> = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \times 2 \times \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \frac{2}{2n+1}$$

d)

Méthode 1 :

On utilise la relation suivante, prouvée dans la partie I :

$$\forall\, n,\ \mathrm{P}_{n+1} = \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} \mathrm{XP}_n - \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} \frac{<\mathrm{XP}_n, \mathrm{P}_n>}{<\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n>} \mathrm{P}_n - \frac{\Lambda_{n-1}\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n^2} \frac{<\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n>}{<\mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_{n-1}>} \mathrm{P}_{n-1}$$

avec $\Lambda_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^n}$, donc $\dfrac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} = \dfrac{2n+1}{n+1}$ et $\dfrac{\Lambda_{n-1}\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n^2} = \dfrac{n}{2n-1}\,\dfrac{2n+1}{n+1}$. Par ailleurs :

$<\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_n> = \dfrac{2}{2n+1}$ $\qquad$ comme on l'a vu ci-dessus

et $\quad <\mathrm{XP}_n,\mathrm{P}_n> = \dfrac{1}{2^n n!} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} (t^2 - 1)^n\, t\mathrm{P}_n(t)\, \mathrm{d}t$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t\mathrm{P}_n(t))\, \mathrm{d}t \qquad \text{en intégrant } n \text{ fois par parties}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^n\, n!}\int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \frac{d^n}{dt^n}(\frac{(2n)!}{2^n\, n!^2}\, t^{n+1} + ...t^{n-1} + ...)\, dt$$

Il n'y a pas de termes t^n dans $tP_n(t)$ car les puissances de t de ce polynôme ont tous même parité.

$$= (-1)^n \frac{1}{2^n\, n!}\int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \frac{(2n)!\ (n+1)!}{2^n\, n!^2}\, t\, dt$$

$= 0$ car on intègre une fonction impaire sur $[-1, 1]$

On obtient donc :

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} XP_n - \frac{n}{2n-1}\frac{2n+1}{n+1}\frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} P_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} XP_n - \frac{n}{2n-1}\frac{2n+1}{n+1}\frac{2n-1}{2n+1} P_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} XP_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1}$$

__**Méthode 2 :**__

Par vérification directe :

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}(x(x^2-1)^n) \qquad \text{après une première dérivation}$$

$$= \frac{1}{2^n\, n!}(x\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n + n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n)$$

d'après la formule de Leibniz (voir le chapitre L1/DERIVEE.PDF)

$$= xP_n(x) + \frac{1}{2^n\,(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n$$

A-t-on bien $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$? Si on multiplie la relation trouvée par $2n+1$ et si on retranche la relation à démontrer, il s'agit de vérifier que :

$$nP_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{2^n\,(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n + nP_{n-1}(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n}{2^{n+1}\,(n+1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^{n+1} = \frac{2n+1}{2^n\,(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n + \frac{n}{2^{n-1}\,(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\text{ expression }] = 0 \text{ avec}$$

$$\text{expression} = \frac{n}{2^{n+1}\,(n+1)!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^{n+1} - \frac{2n+1}{2^n\,(n-1)!}(x^2-1)^n - \frac{n}{2^{n-1}\,(n-1)!}(x^2-1)^{n-1}$$

$$= \frac{n}{2^{n+1}\,(n+1)!}(2(n+1)(x^2-1)^n + 4(n+1)n\,x^2(x^2-1)^{n-1})$$

$$- \frac{2n+1}{2^n\,(n-1)!}(x^2-1)^n - \frac{n}{2^{n-1}\,(n-1)!}(x^2-1)^{n-1}$$

$$= \frac{n}{2^n\, n!}((x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1})$$

$$- \frac{2n+1}{2^n\,(n-1)!}(x^2-1)^n - \frac{n}{2^{n-1}\,(n-1)!}(x^2-1)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2^n\,(n-1)!}((x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^{n-1})$$

$$- \frac{2n+1}{2^n (n-1)!} (x^2-1)^n - \frac{n}{2^{n-1} (n-1)!} (x^2-1)^{n-1}$$

$$= 0$$

e) Dérivons $n + 1$ fois la relation $(x^2 - 1)U_n' = 2nxU_n$, où $U_n = (x^2 - 1)^n$. On obtient, en utilisant la formule de Leibniz :

$$(x^2 - 1)U_n^{(n+2)} + 2(n + 1)xU_n^{(n+1)} + n(n + 1)U_n^{(n)} = 2nxU_n^{(n+1)} + 2n(n + 1)U_n^{(n)}$$

ce qui donne :

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + 2(n + 1)xP_n'(x) + n(n + 1)P_n(x) = 2nxP_n'(x) + 2n(n + 1)P_n(x)$$

d'où le résultat.

f) $$<\Phi(P), Q> = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)P''(t)Q(t) - 2tP'(t)Q(t) \, dt$$

$$= - \int_{-1}^{1} (1 - t^2)P'(t)Q'(t) \, dt$$

en intégrant par parties le premier terme $P''(t) \times (1 - t^2)Q(t)$

On obtient une expression symétrique entre P et Q, donc $<\Phi(P), Q> = <P, \Phi(Q)>$

D'après le e) P_n est vecteur propre de Φ avec la valeur propre $- n(n + 1)$. Ces valeurs propres étant distinctes, les P_n appartiennent à ces sous-espaces propres distincts. Φ étant symétrique, ces sous-espaces propres sont orthogonaux. On retrouve alors le résultat du a).

g) Le trinôme $t \to 1 - 2xt + t^2$ admet deux racines non nulles, (éventuellement complexes), α et β, dépendant de x, de sorte que $\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha - t}} \times \frac{1}{\sqrt{\beta - t}}$. Chaque facteur (et donc le produit aussi) admet un développement en série entière pour $|t| < \text{Min}(|\alpha|, |\beta|)$ (voir le chapitre L2/SERIENTR.PDF. Le cas α et β complexes relèvent du chapitre L3/HOLOMRPH.PDF et nous admettrons dans ce chapitre que, même dans ce cas, la fonction $\varphi : t \to \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}$ est, pour tout x, développable en série entière). Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ le développement en série entière de φ (où a_n dépend de x). On a :

$$a_0 = \varphi(0) = 1 = P_0(x)$$

On vérifiera que φ est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$(1 - 2xt + t^2)y' + (t - x)y = 0$$

Remplaçant y par $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et y' par $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$, on obtient :

$$(1 - 2xt + t^2)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + (t - x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)a_{n+1} t^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n - 1)a_{n-1} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

Pour $n = 0$, on obtient $a_1 - xa_0 = 0$ donc $a_1 = x = P_1(x)$.

Pour $n \geq 1$, on obtient, comme coefficient de t^n :

$$(n + 1)a_{n+1} - 2nxa_n + (n - 1)a_{n-1} + a_{n-1} - xa_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (n + 1)a_{n+1} - (2n + 1)xa_n + na_{n-1} = 0$$

qui est exactement la relation de récurrence vérifiée par la suite $(P_n(x))_{n\geq 0}$. Comme la suite (a_n) et la suite $(P_n(x))$ vérifie la même relation de récurrence d'ordre 2, et ont les deux mêmes valeurs initiales, elles sont égales pour tout n.

On a donc bien $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$.

Sol.2) a) On a vu que $T_n = \displaystyle\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} X^{n-2k} (X^2 - 1)^k$. Son coefficient dominant est $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k}$. T_n est bien de degré n et $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ si } n = 0 \\ 2^{n-1} \text{ si } n \geq 1 \end{array}\right.$ (revoir au besoin les *formules classiques des coefficients binomiaux* dans le chapitre L1/DENOMBRE.PDF).

b) Si on pose $t = \cos(\theta)$, on a, pour tout $n \neq m$:

$$\begin{aligned}
<T_n,T_m> &= \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1 - t^2}} \, dt \\
&= \int_0^{\pi} \cos(nt)\cos(mt) \, dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\cos((n + m)t) + \cos((n - m)t)}{2} \, dt \\
&= \left[\frac{\sin((n + m)t)}{2(n + m)} + \frac{\sin((n - m)t)}{2(n - m)}\right]_0^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

c) Le même calcul pour $n = m$ conduit à :

$$\begin{aligned}
<T_n, T_n> &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(2nt) + 1}{2} \, dt \\
&= \left[\begin{array}{l} \pi \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ si } n \geq 1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

d) <u>**Méthode 1 :**</u>

Pour montrer que $T_{n+1} - 2XT_n + T_{n-1} = 0$, il suffit de montrer que la fonction polynomiale associée est identiquement nulle sur $[-1 ,1]$, i.e :

$$\forall\, x \in [-1, 1],\ T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, \theta,\ T_{n+1}(\cos(\theta)) - 2\cos(\theta)T_n(\cos(\theta)) + T_{n-1}(\cos(\theta)) = 0 \qquad \text{en posant } x = \cos(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, \theta,\ \cos((n + 1)\theta)) - 2\cos(\theta)\cos(n\theta) + \cos((n - 1)\theta) = 0$$

ce qui est facilement vérifiable en développant $\cos((n + 1)\theta)) + \cos((n - 1)\theta)$. (On aurait pu faire un calcul analogue avec le cosinus hyperbolique).

<u>**Méthode 2 :**</u>

On peut aussi utiliser la relation :

$$T_{n+1} = \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} XT_n - \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} \frac{<XT_n, T_n>}{<T_n, T_n>} T_n - \frac{\Lambda_{n-1}\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n^2} \frac{<T_n, T_n>}{<T_{n-1}, T_{n-1}>} T_{n-1}$$

comme dans l'exercice précédent, mais avec ici $\Lambda_0 = 1$ et $\Lambda_n = 2^{n-1}$ si $n \geq 1$. Donc :

$$\frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} = 2$$

$$\frac{\Lambda_{n-1}\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n^2} = \left[\begin{array}{l} 2 \text{ si } n = 1 \\ 1 \text{ si } n \geq 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} <XT_n, T_n> &= \int_{-1}^{1} \frac{tT_n(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \\ &= \int_0^{\pi} \cos(\theta)\cos^2(n\theta) \, d\theta \qquad \text{en posant } t = \cos(\theta) \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(\theta) + 2\cos(\theta)\cos(2n\theta)}{2} \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} <T_1, T_0> + <T_1, T_{2n}> \\ &= 0 \qquad \text{compte tenu de l'orthogonalité des } T_n \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} XT_n - \frac{\Lambda_{n-1}\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n^2} \frac{<T_n, T_n>}{<T_{n-1}, T_{n-1}>} T_{n-1} \\ &= 2XT_n - T_{n-1} \qquad \text{que } n = 1 \text{ ou } n \geq 2 \end{aligned}$$

e) **Méthode 1 :**

On peut effectuer le changement de variable $x = \cos(\theta)$, $z(\theta) = y(x) = y(\cos(\theta))$. On obtient :

$$z'(\theta) = -\sin(\theta)y'(\cos(\theta)) = -\sin(\theta)y'(x)$$

$$z''(\theta) = -\cos(\theta)y'(x) + \sin^2(\theta)y''(x) = -xy'(x) + (1-x^2)y''(x)$$

L'équation différentielle dévient :

$$z''(\theta) = -n^2y(x) = -n^2z(\theta)$$

dont les solutions sont de la forme $z = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$. La solution particulière $z(\theta) = \cos(n\theta)$ n'est autre que $y(x) = T_n(x)$.

Méthode 2 :

On peut aussi procèder par récurrence en utilisant la relation $T_{n+1} - 2XT_n + T_{n-1} = 0$ montrée précédemment. Pour tout x :

❑ Si $n = 0$, $T_0 = 1$ et $\forall x$, $(1-x^2)T_0''(x) - xT_0'(x) + 0^2T_0(x) = 0$.

❑ Si $n = 1$, $T_1 = X$ et $\forall x$, $(1-x^2)T_1''(x) - xT_1'(x) + 1^2T_1(x) = 0$.

❑ Supposons la relation prouvée jusqu'au rang n. Alors, au rang $n + 1$, on a pour tout x :

$$\begin{aligned} (1-x^2)T_{n+1}''(x) - xT_{n+1}'(x) + (n+1)^2T_{n+1}(x) &= (1-x^2)(2xT_n(x) - T_{n-1}(x))'' \\ &\quad - x(2xT_n(x) - T_{n-1}(x))' \\ &\quad + (n+1)^2(2xT_n(x) - T_{n-1}(x)) \\ &= (1-x^2)(4T_n'(x) + 2xT_n''(x) - T_{n-1}''(x)) \\ &\quad - x(2T_n(x) + 2xT_n'(x) - T_{n-1}'(x)) \\ &\quad + (n+1)^2(2xT_n(x) - T_{n-1}(x)) \\ &= 4(1-x^2)T_n'(x) + 2x((1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + (n+1)^2T_n(x)) \\ &\quad - ((1-x^2)T_{n-1}''(x) - xT_{n-1}'(x) + (n+1)^2T_{n-1}(x)) - 2xT_n(x) \\ &= 4(1-x^2)T_n'(x) + 2x(-n^2T_n(x) + (n+1)^2T_n(x)) \\ &\quad - (-(n-1)^2T_{n-1}(x) + (n+1)^2T_{n-1}(x)) - 2xT_n(x) \end{aligned}$$

en utilisant les relations de récurrence

$= 4(1 - x^2)T_n'(x) + 4xnT_n(x) - 4nT_{n-1}(x)$

Il faut donc montrer que la quantité ci-dessus est nulle. En posant $x = \cos(\theta)$, et sachant que :

$$\sin(\theta)\, T_n'(\cos(\theta)) = (-\, T_n(\cos(\theta)))' = -\cos(n\theta)' = n \sin(n\theta)$$

l'expression vaut (au facteur 4 près)

$$\sin(\theta)\, n \sin(n\theta) + n \cos(\theta) \cos(n\theta) - n \cos((n - 1)\theta)$$

qui est effectivement nul comme on le voit en développant $\cos((n - 1)\theta)$.

Le membre de gauche est donc nul sur $[-1, 1]$, et étant une fonction polynomiale, il est nul partout.

f) $$<\Phi(P),Q> = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, P''(t)Q(t) - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, P'(t)Q(t)\, dt$$

on intègre par parties l'expression $P''(t) \times \sqrt{1-t^2}\, Q(t)$

$$= -\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, P'(t)Q'(t)\, dt$$

expression symétrique entre P et Q. Donc Φ est symétrique.

D'après le e), T_n est vecteur propre de Φ avec la valeur propre $-\, n^2$. Ces valeurs propres étant distinctes, comme dans l'exercice précédent, on retrouve le fait que les T_n sont orthogonaux.

g) Pour tout x, la fraction rationnelle $t \to \dfrac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}$ admet deux pôles non nuls α et β (éventuellement complexes) et sa réduction en éléments simples est de la forme $\dfrac{A}{\alpha - t} + \dfrac{B}{\beta - t}$ pour deux constantes A et B. Elle se développe en série entière si $|t| < \text{Min}(|\alpha|, |\beta|)$ (voir le chapitre L2/SERIENTR.PDF). Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ son développement en série entière, les a_n dépendant de x. On a $a_0 = 1$ (valeur de la fraction pour $t = 0$) et :

$$\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - xt = (1 - 2xt + t^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - xt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - xt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n$$

On égalise maintenant les termes de même degré :

Pour $n = 0$, on obtient $1 = a_0$. Donc $a_0 = T_0(x)$.

Pour $n = 1$, on obtient $-x = a_1 - 2xa_0$ donc $a_1 = x = T_1(x)$

Pour $n \geq 2$, on obtient $0 = a_n - 2xa_{n-1} + a_{n-2}$

Cette dernière relation est exactement la même que vérifie la suite $(T_n(x))$. Les deux suites (a_n) et $(T_n(x))$, vérifiant la même relation récurrente d'ordre 2 et ayant les deux mêmes valeurs initiales, sont égales.

Une autre méthode consiste, dans le cas où $x = \cos(\theta)$, à utiliser le développement en série entière de $\dfrac{1}{1 - te^{i\theta}} + \dfrac{1}{1 - te^{-i\theta}}$ et le fait que $\cos(n\theta) = \mathrm{T}_n(\cos(\theta))$. Elle est utilisée dans les exercices du chapitre L2/SERIENTR.PDF. On peut aussi l'adapter pour $x = \mathrm{ch}(u)$ en considérant $\dfrac{1}{1 - te^{u}} + \dfrac{1}{1 - te^{-u}}$.

Sol.3) a) On obtient une expression explicite des L_n en utilisant la formule de Leibniz de dérivation d'un produit :

$$\forall\, x,\ \mathrm{L}_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\, n(n-1)...(k+1)\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k$$

Le coefficient dominant est $\dfrac{(-1)^n}{n!}$

b) Il suffit de montrer que, pour $p < n$, on a $<\mathrm{L}_n, \mathrm{X}^p> = 0$, or, en intégrant par partie (au facteur $\dfrac{1}{n!}$ près) :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} (t^n e^{-t})\, t^p \,\mathrm{d}t &= -\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} (t^n e^{-t}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^p) \,\mathrm{d}t \\
&= ... \\
&= (-1)^n \int_0^{\infty} t^n e^{-t} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^p) \,\mathrm{d}t \\
&= 0 \qquad \text{car la dérivée } n^{\text{ème}} \text{ de } t^p \text{ est nulle.}
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
<\mathrm{L}_n, \mathrm{L}_n> &= \frac{1}{n!^2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} (t^n e^{-t})\, \mathrm{L}_n(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^n}{n!^2} \int_0^{\infty} t^n e^{-t} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \mathrm{L}_n(t) \,\mathrm{d}t \qquad \text{en intégrant } n \text{ fois par parties} \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc L_n est de norme 1. Les L_n forment une base orthonormée de $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$.

d) <u>**Méthode 1 :**</u>

On utilise la relation :

$$\forall\, n,\ \mathrm{L}_{n+1} = \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} \mathrm{XL}_n - \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} \frac{<\mathrm{XL}_n, \mathrm{L}_n>}{<\mathrm{L}_n, \mathrm{L}_n>} \mathrm{L}_n - \frac{\Lambda_{n-1}\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n^{\,2}} \frac{<\mathrm{L}_n, \mathrm{L}_n>}{<\mathrm{L}_{n-1}, \mathrm{L}_{n-1}>} \mathrm{L}_{n-1}$$

avec $\Lambda_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ Par ailleurs :

$<\mathrm{L}_n, \mathrm{L}_n> = 1$ comme vu précédemment

et
$$\begin{aligned}
<\mathrm{XL}_n, \mathrm{L}_n> &= \frac{1}{n!^2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} (t^n e^{-t})\, t\mathrm{L}_n(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^n}{n!^2} \int_0^{\infty} t^n e^{-t} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t\mathrm{L}_n(t)) \,\mathrm{d}t \qquad \text{en intégrant } n \text{ fois par parties} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!^2} \int_0^{\infty} t^n e^{-t} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}((-1)^n\, t^{n+1} + (-1)^{n-1} n^2 t^n + ...) \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

en utilisant l'expression $L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\, n(n-1)...(k+1)\, x^k$ donnée en a)

$$= \frac{(-1)^n}{n!^2} \int_0^{\infty} t^n e^{-t} \left((-1)^n (n+1)!\, t + (-1)^{n-1} n^2\, n!\right) dt$$

$$= (n+1)^2 - n^2$$

$$= 2n + 1$$

On obtient donc :

$$L_{n+1} = -\frac{1}{n+1} XL_n + \frac{1}{n+1} \frac{\langle XL_n, L_n\rangle}{\langle L_n, L_n\rangle} L_n - \frac{n}{n+1} \frac{\langle L_n, L_n\rangle}{\langle L_{n-1}, L_{n-1}\rangle} L_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{n+1} XL_n + \frac{2n+1}{n+1} L_n - \frac{n}{n+1} L_{n-1}$$

ou $\quad (n+1)L_{n+1} = (2n+1-X)\, L_n - n\, L_{n-1}$

Méthode 2 :

On prend l'expression de L_n trouvée en *a*) :

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} X^k$$

et on remplace dans l'égalité à prouver. Le coefficient de X^k vaut respectivement dans les deux membres :

$$(n+1) \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^k}{k!} \overset{?}{=} (2n+1) \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} - \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$- n \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+1) \binom{n+1}{k} \overset{?}{=} (2n+1) \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} k - n \binom{n-1}{k}$$

après simplification de $\dfrac{(-1)^k}{k!}$

$$\Leftrightarrow \quad (n+1) \frac{n+1}{n+1-k} \overset{?}{=} (2n+1) + \frac{k^2}{n+1-k} - (n-k) = n + 1 + k + \frac{k^2}{n+1-k}$$

après simplification de $\dbinom{n}{k}$

ce qui est exact.

e) **Méthode 1 :**

On prend l'expression de $L_n(x)$ trouvée en *a*) et on remplace. Le coefficient de x^k dans le membre de gauche vaut :

$$\binom{n}{k+1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!} + \binom{n}{k+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} - \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} + n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Après simplification par $\dbinom{n}{k} \dfrac{(-1)^k}{k!}$, on obtient $-\dfrac{n-k}{k+1} k - \dfrac{n-k}{k+1} - k + n$ qui est bien nul.

Méthode 2 :

Posons $g(x) = x^n e^{-x}$ de sorte que $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} \dfrac{d^n}{dx^n} g(x)$.

En utilisant la formule de Leibniz, la relation $x\mathrm{L}_n''(x) + (1 - x)\mathrm{L}_n'(x) + n\mathrm{L}_n(x) = 0$ est équivalente à (après simplification du facteur $\dfrac{1}{n!}$) :

$$xe^x \frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}} g(x) + 2xe^x \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} g(x) + xe^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} g(x)$$

$$+ (1 - x)(e^x \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} g(x) + e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} g(x)) + ne^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}} g(x) + (1 + x) \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} g(x) + (n + 1) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} g(x) = 0$$

Or $\quad \dfrac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}} (xg(x)) = x \dfrac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}} g(x) + (n + 2) \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} g(x) \qquad$ encore la formule de Leibniz

et $\quad \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} (xg(x)) = x \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} (g) + (n + 1) \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (g) \qquad$ idem

La relation à prouver est donc équivalente à :

$$\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}} (xg(x)) - (n + 1) \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} g(x) + \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} (xg(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} ((xg(x))' - (n + 1)g(x) + xg(x)) = 0$$

qui est bien vérifié car :

$$(xg(x))' - (n + 1)g(x) + xg(x) = (x^{n+1}e^{-x})' - (n + 1)(x^n e^{-x}) + x^{n+1}e^{-x} = 0$$

f) $\quad \langle \Phi(\mathrm{P}), \mathrm{Q} \rangle = \displaystyle\int_0^\infty t\mathrm{P}''(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t} + (1 - t)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)e^{-t}\, \mathrm{d}t$

$\quad = -\displaystyle\int_0^\infty t\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)e^{-t}\, \mathrm{d}t \qquad$ en intégrant par parties le terme $\mathrm{P}''(t) \times t\mathrm{Q}(t)e^{-t}$

expression symétrique entre P et Q.

Comme dans les exercices précédents, l'expression est symétrique entre P et Q, donc Φ est un opérateur symétrique.

D'après le e), L_n est vecteur propre de Φ avec la valeur propre $-n$. Ces valeurs propres étant distinctes, le f) et la symétrie de Φ permettent de retrouver l'orthogonalité des L_n, déjà prouvée en a).

g) Nous admettrons que la fonction $\varphi : t \to \dfrac{\exp(-\frac{xt}{1-t})}{1 - t}$ est développable en série entière (une preuve relève du chapitre L3/HOLOMRPH.PDF). Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ le développement en série entière de φ (où les a_n dépendent de x). Pour x fixé, la fonction φ vérifie $\varphi(0) = 1 = a_0 = \mathrm{L}_0(x)$ et on vérifiera que φ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - t)^2 y' = (1 - x - t)y$$

On remplace y par $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et y' par $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$, ce qui donne :

$$(1 - 2t + t^2)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = (1 - x - t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} t^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n$$

On égalise les coefficients de même degré :
pour $n = 0$, on obtient $a_1 = (1-x)a_0 = 1 - x = \mathrm{L}_1(x)$.
pour $n = 1$, on obtient $2a_2 - 2a_1 = (1-x)a_1 - a_0 = x^2 - 2x \Rightarrow a_2 = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1 = \mathrm{L}_2(x)$
pour $n \geq 2$, on obtient :

$$(n+1)a_{n+1} - 2na_n + (n-1)a_{n-1} = (1-x)a_n - a_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+1)a_{n+1} = (2n+1-x)a_n - na_{n-1}$$

qui est la relation vérifiée par la suite $(\mathrm{L}_n(x))$. Les deux suites (a_n) et $(\mathrm{L}_n(x))$, vérifiant la même relation de récurrence d'ordre 2, et ayant les deux mêmes valeurs initiales, sont égales.

Sol.4) a) Vérifions par récurrence sur n que $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}$ est de la forme $e^{-x^2}\,\mathrm{P}_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n. Cette propriété est vraie pour $n = 0$ avec $\mathrm{P}_0 = 1$. Si elle est vraie au rang n, alors :

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} e^{-x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-x^2}\,\mathrm{P}_n(x)\right) = e^{-x^2}\left(-2x\mathrm{P}_n(x) + \mathrm{P}_n'(x)\right)$$

qui est bien de la forme voulue avec $\mathrm{P}_{n+1}(x) = -2x\mathrm{P}_n(x) + \mathrm{P}_n'(x)$. $\mathrm{H}_n(x)$ n'est autre que $(-1)^n\,\mathrm{P}_n(x)$. La relation de récurrence précédente s'écrit alors :

$$\mathrm{H}_{n+1}(x) = 2x\mathrm{H}_n(x) - \mathrm{H}_n'(x)$$

ce qui permet de montrer par récurrence que le coefficient dominant de $\mathrm{H}_n(x)$ est 2^n.
b) Remarquons que, pour tout polynôme P et tout $n \geq 1$, $\langle \mathrm{P}, \mathrm{H}_n\rangle = \langle \mathrm{P}', \mathrm{H}_{n-1}\rangle$. En effet :

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{P}, \mathrm{H}_n\rangle &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(e^{-t^2}\right) \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(e^{-t^2}\right) \mathrm{P}'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{en intégrant par parties} \\
&= \langle \mathrm{P}', \mathrm{H}_{n-1}\rangle
\end{aligned}$$

Dès lors, pour tout $p < n$:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{X}^p, \mathrm{H}_n\rangle &= p\,\langle \mathrm{X}^{p-1}, \mathrm{H}_{n-1}\rangle = p(p-1)\,\langle \mathrm{X}^{p-2}, \mathrm{H}_{n-2}\rangle \\
&= \ \dots \\
&= \ p!\,\langle 1, \mathrm{H}_{n-p}\rangle \\
&= p!\,\langle 0, \mathrm{H}_{n-p-1}\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

On a ainsi montré que H_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.
c) Le même calcul pour $p = n$ conduit à :

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{X}^n, \mathrm{H}_n\rangle &= n\,\langle \mathrm{X}^{n-1}, \mathrm{H}_{n-1}\rangle \\
&= \ \dots \\
&= \ n!\,\langle 1, \mathrm{H}_0\rangle \\
&= n! \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= n!\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Comme $H_n = 2^nX^n + P$ avec P de degré strictement inférieur à n et que H_n est orthogonal à P, on a :

$$\langle H_n, H_n\rangle = 2^n \langle X^n, H_n\rangle + \langle P, H_n\rangle = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

d) **Méthode 1 :**

On a vu en a) que, pour tout x, $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$. Il suffit de vérifier que $H_n' = 2nH_{n-1}$. Les coefficients dominants coïncidant, $H_n' - 2nH_{n-1}$ est élément de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et il suffit de vérifier que $H_n' - 2nH_{n-1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ pour prouver qu'il est nul. Comme les H_p, $0 \leq p \leq n-2$, engendrent $\mathbb{R}_{n-2}[X]$, il s'agit de montrer que $\langle H_p, H_n' - 2nH_{n-1}\rangle = 0$. Sachant que H_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que H_{n-1} est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$, on a :

$$\begin{aligned}\langle H_p, H_n' - 2nH_{n-1}\rangle &= \langle H_p, H_n'\rangle \\ &= \langle H_{p+1}, H_n\rangle \\ &\qquad \text{d'après la relation } \langle P, H_{p+1}\rangle = \langle P', H_p\rangle \text{ vue en b)} \\ &\qquad \text{avec ici } P = H_n \\ &= 0\end{aligned}$$

Méthode 2 :

On peut aussi utiliser la formule de Leibniz :

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} = \frac{d^n}{dx^n} (-2xe^{-x^2}) = -2x \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} - 2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}$$

donc, en multipliant par $(-1)^{n+1} e^{x^2}$:

$$H_{n+1} = 2x\, H_n - 2nH_{n-1}$$

Méthode 3 :

On peut utiliser la formule générale :

$$H_{n+1} = \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} XH_n - \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n} \frac{\langle XH_n, H_n\rangle}{\langle H_n, H_n\rangle} H_n - \frac{\Lambda_{n-1}\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n^2} \frac{\langle H_n, H_n\rangle}{\langle H_{n-1}, H_{n-1}\rangle} H_{n-1}$$

avec $\Lambda_n = 2^n$

$$\langle H_n, H_n\rangle = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

$$\begin{aligned}\langle XH_n, H_n\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} tH_n(t)^2 e^{-t^2}\, dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} (H_n(t)^2)'\, dt \\ &\qquad \text{en intégrant par parties } te^{-t^2} \times H_n(t)^2 \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n(t)H_n'(t)\, dt \\ &= -\langle H_n, H_n'\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque H_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, espace auquel appartient H_n'. Dès lors :

$$H_{n+1} = 2XH_n - \frac{2^n n!\sqrt{\pi}}{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}} H_{n-1} = 2XH_n - 2nH_{n-1}$$

e) **Méthode 1 :**

Pour $n = 0$ ou $n = 1$, la vérification ne pose pas de problème. Supposons $n \geq 2$. On veut montrer que $H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n = 0$, or on a montré au d) que $H_n' = 2nH_{n-1}$. En dérivant cette égalité, on a donc également :

$$H_n'' = 2nH_{n-1}' = 4n(n-1)H_{n-2}$$

On a donc les équivalences suivantes :

$$H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 4n(n-1)H_{n-2} - 4nXH_{n-1} + 2nH_n = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2(n-1)H_{n-2} - 2XH_{n-1} + H_n = 0$$

ce qui n'est autre que la relation d) au rang n.

__Méthode 2 :__

On montre que $H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n$ est nul en montrant qu'il est orthogonal à tous les H_p, $0 \leq p \leq n$, et donc qu'il est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$, sous-espace auquel il appartient :

$$H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n \overset{?}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall\, p,\ \langle H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n, H_p\rangle \overset{?}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall\, p,\ \langle H_n'', H_p\rangle - 2\langle XH_n', H_p\rangle + 2n\langle H_n, H_p\rangle \overset{?}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall\, p,\ \langle H_n', H_{p+1}\rangle - 2\langle (XH_n)' - H_n, H_p\rangle + 2n\langle H_n, H_p\rangle \overset{?}{=} 0$$

en utilisant dans le premier terme la relation $\langle P, H_{p+1}\rangle = \langle P', H_p\rangle$ vue en b)

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, p,\ \langle H_n, H_{p+2}\rangle - 2\langle (XH_n)', H_p\rangle + 2(n+1)\langle H_n, H_p\rangle \overset{?}{=} 0$$

en utilisant de nouveau la relation $\langle P, H_{p+2}\rangle = \langle P', H_{p+1}\rangle$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, p,\ \langle H_n, H_{p+2}\rangle - 2\langle XH_n, H_{p+1}\rangle + 2(n+1)\langle H_n, H_p\rangle \overset{?}{=} 0$$

en utilisant de nouveau la relation $\langle P, H_{p+1}\rangle = \langle P', H_p\rangle$ avec ici $P = XH_n$

On distingue plusieurs cas :

- ❑ $p < n-2$ tous les termes sont nuls car H_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En particulier : $\langle XH_n, H_{p+1}\rangle = \langle H_n, XH_{p+1}\rangle = 0$ car $\deg(XH_{p+1}) = p + 2 < n$.
- ❑ $p = n-2$ il reste $\langle H_n, H_n\rangle - 2\langle XH_n, H_{n-1}\rangle \overset{?}{=} 0$

  $\Leftrightarrow \langle H_n, H_n\rangle - \langle H_n, 2XH_{n-1}\rangle \overset{?}{=} 0$

  $\Leftrightarrow \langle H_n, H_n - 2XH_{n-1}\rangle = 0$ vrai car $H_n - 2XH_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, les coefficients dominants de degré n se simplifiant, et que H_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- ❑ $p = n-1$ il reste $-2\langle XH_n, H_n\rangle$ qui est bien nul comme on l'a vu dans le d).
- ❑ $p = n$ il reste $-2\langle XH_n, H_{n+1}\rangle + 2(n+1)\langle H_n, H_n\rangle \overset{?}{=} 0$

  $\Leftrightarrow -2\langle (XH_n)', H_n\rangle + 2(n+1)\langle H_n, H_n\rangle \overset{?}{=} 0$

  en utilisant la relation $\langle P, H_{n+1}\rangle = \langle P', H_n\rangle$

  $\Leftrightarrow -2\langle H_n + XH_n', H_n\rangle + 2(n+1)\langle H_n, H_n\rangle \overset{?}{=} 0$

  $\Leftrightarrow \langle -2XH_n' + 2nH_n, H_n\rangle \overset{?}{=} 0$

  or $H_n' = 2nH_{n-1}$

  $\Leftrightarrow \langle -4nXH_{n-1} + 2nH_n, H_n\rangle = 0$

  vrai car $-4nXH_{n-1} + 2nH_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, les coefficients dominants de degré n s'annulant, et que H_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

__Méthode 3 :__

Il s'agit de montrer que :

$$\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right)'' - 2x\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right)' + 2n\, e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (2x\, e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + e^{x^2} \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2})' - 2x(2x\, e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + e^{x^2} \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2}) + 2n\, e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x\, e^{x^2} \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} + e^{x^2} \dfrac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} e^{-x^2} + (2n+2)\, e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x\, (-1)^{n+1}\, H_{n+1}(x) + (-1)^{n+2}\, H_{n+2}(x) + (2n+2)\, (-1)^n\, H_n(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2x\, H_{n+1}(x) + H_{n+2}(x) + (2n+2)\, H_n(x) = 0$

qui est bien vérifié d'après la relation d) au rang $n + 2$.

f) $\quad <\Phi(P),Q> = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2} - 2t\, P'(t)Q(t)e^{-t^2}\, dt$

on intègre par parties le produit $P''(t) \times Q(t)e^{-t^2}$

$= - \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\, dt$ expression symétrique entre P et Q.

Le e) montre que H_n est vecteur propre de Φ de valeur propre $2n$. Les H_n étant des vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique Φ avec des valeurs propres distinctes, on retrouve le fait qu'ils sont orthogonaux.

g) Soit $\varphi(t) = \exp(2xt - t^2)$. φ est développable en série entière comme produit des fonctions $t \to \exp(2xt)$ et $t \to \exp(-t^2)$, toutes deux développables en séries entières. On vérifiera que $\varphi'(t) = 2(x - t)\varphi(t)$.

Ecrivons $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ et remplaçons dans l'équation différentielle précédente. On obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} t^n = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} t^n$$

donc $\quad a_1 = 2xa_0$

$\forall\, n \geq 1,\ a_{n+1} = 2xa_n - 2na_{n-1}$

or $a_0 = \varphi(0) = 1 = H_0(x)$, $a_1 = \varphi'(0) = 2x = H_1(x)$, et la récurrence est celle-là même qui est vérifiée par les H_n. Donc, pour tout n, $a_n = H_n(x)$.

Sol.5) a) On procède par récurrence.

Pour $n = 1$, le seul indice à prendre en compte est $k = 0$ et la somme vaut $X = T_1$.

Pour $n = 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \frac{2}{2-k} \binom{2-k}{k} 2^{2-2k-1} X^{2-2k} = 2X^2 - 1 = T_2$

Si la relation est vérifiée jusqu'au rang n, on a :

$$T_{n-1} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n-1}{n-1-k} \binom{n-1-k}{k} 2^{n-2k-2} X^{n-2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (-1)^{k-1} \frac{n-1}{n-k} \binom{n-k}{k-1} 2^{n-2k} X^{n-2k+1} \qquad \text{par changement d'indice}$$

$$2XT_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} 2^{n-2k}\, X^{n-2k+1}$$

$$= 2^n\, X^{n+1} + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} 2^{n-2k}\, X^{n-2k+1}$$

$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ relation de récurrence vérifiée par la famille (T_n)

$$= 2^n\, X^{n+1} + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k \left(\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} + \frac{n-1}{n-k}\binom{n-k}{k-1}\right) 2^{n-2k}\, X^{n-2k+1}$$

$$+ \text{(si } n \text{ est impair égal à } 2p-1)\ (-1)^p \frac{2p-2}{p-1}\binom{2p-1-p}{p-1} 2^{2p-1-2p}\, X^{2p-1-2p+1}$$

Vérifions que, pour $1 \leq k \leq \lfloor n/2\rfloor$, on a :

$$\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} + \frac{n-1}{n-k}\binom{n-k}{k-1} = \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n+1-k}{k}$$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{n}{n-k}\,\dfrac{n-2k+1}{n+1-k} + \dfrac{n-1}{n-k}\,\dfrac{k}{n+1-k} = \dfrac{n+1}{n+1-k}$ en divisant par $\dbinom{n+1-k}{k}$

$\Leftrightarrow \quad n(n-2k+1) + (n-1)k = (n+1)(n-k)$

ce qui est bien vrai. Donc :

$$T_{n+1} = 2^n\, X^{n+1} + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n+1-k}{k} 2^{n-2k}\, X^{n-2k+1}$$

$$+ (-1)^p\, 2^{-1} \text{ (si } n \text{ est impair égal à } 2p-1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^k \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n+1-k}{k} 2^{n-2k}\, X^{n+1-2k}$$

$$+ (-1)^p\, 2^{-1} \text{ (si } n \text{ est impair égal à } 2p-1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor} (-1)^k \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n+1-k}{k} 2^{n-2k}\, X^{n+1-2k}$$

et la récurrence est prouvée.

b) Posons $U_n(x) = (-1)^n \dfrac{2^n\, n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2}\, \dfrac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-1/2}$. On a $U_0(x) = 1 = T_0(x)$ et $U_1(x) = x = T_1(x)$.

On prouve que $U = T$ par récurrence. Si c'est vrai jusqu'au rang n, il suffit de montrer que la quantité suivante est nulle pour tout x :

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n + U_{n-1} = (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2n+2)!} \sqrt{1-x^2}\, \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (1-x^2)^{n+1/2}$$

$$- 2x\, (-1)^n \frac{2^n\, n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2}\, \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-1/2}$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{2^{n-1}\,(n-1)!}{(2n-2)!} \sqrt{1-x^2}\, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1-x^2)^{n-3/2}$$

Après simplification par $(-1)^{n+1} \dfrac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(2n+2)!} \sqrt{1-x^2}$, il faut montrer que :

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (1-x^2)^{n+1/2} + 2x\,(2n+1) \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-1/2} + (2n+1)(2n-1) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1-x^2)^{n-3/2} = 0$$

or $\qquad x \dfrac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^{n-1/2} = \dfrac{d^n}{dx^n} (x(1 - x^2)^{n-1/2}) - n \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1 - x^2)^{n-1/2}$

en utilisant la formule de Leibniz sur l'expression $\dfrac{d^n}{dx^n} (x(1 - x^2)^{n-1/2})$

On obtient donc :

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (1 - x^2)^{n+1/2} + 2(2n + 1) \frac{d^n}{dx^n} (x(1 - x^2)^{n-1/2}) - 2n(2n + 1) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1 - x^2)^{n-1/2}$$
$$+ (2n + 1)(2n - 1) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1 - x^2)^{n-3/2}$$

Cette expression est la dérivée $(n - 1)$-ème de :

$$((1 - x^2)^{n+1/2})'' + 2(2n + 1)(x(1 - x^2)^{n-1/2})' - 2n(2n + 1) (1 - x^2)^{n-1/2}$$
$$+ (2n + 1)(2n - 1) (1 - x^2)^{n-3/2}$$

dont on vérifiera qu'elle est bien nulle.

Sol.6) On a énoncé dans le cours que, pour tout polynôme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$, on a :

$$\int_I P(t)\, w(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\, P(x_{nk})$$

avec :

w une fonction positive sur I permettant de munir $\mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire

$x_{n0}, x_{n1}, ..., x_{nn}$ les $n + 1$ racines du polynôme P_{n+1} de degré $n + 1$, associé à ce produit scalaire,

$a_{nk} = \displaystyle\int_I L_{nk}(t)\, w(t)\, dt$ où $L_{n0}, L_{n1}, ..., L_{nn}$ sont les $n + 1$ polynômes interpolateurs de Lagrange définis par les $n + 1$ nombres $x_{n0}, x_{n1}, ..., x_{nn}$.

On prend donc ici :

$w = 1$

$I = [-1, 1]$

$n = 2$

$P_{n+1} = P_3$ polynôme de Legendre de degré 3 égal à $5X^3 - 3X$, à un facteur près

$x_{20} = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$L_{20} = \dfrac{5}{6} X(X - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$

$L_{21} = -\dfrac{5}{3} (X + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})(X - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$

$L_{22} = \dfrac{5}{6} X(X + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$

$a = a_{20} = \displaystyle\int_{-1}^{1} L_{20} = \frac{5}{9}$

$b = a_{21} = \displaystyle\int_{-1}^{1} L_{21} = \frac{8}{9}$

$c = a_{22} = \int_{-1}^{1} L_{22} = \dfrac{5}{9}$

On obtient donc finalement, pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 5 :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \frac{5}{9}P\Big(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\Big) + \frac{8}{9}P(0) + \frac{5}{9}P\Big(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\Big)$$

On retrouvera ce résultat dans l'annexe I, *Calcul approché d'intégrales*, *méthode de Gauss-Legendre* du chapitre L1/INTEGRAL.PDF.

Sol.7) a) F est un hyperplan car Vect({1}) lui est supplémentaire. En effet, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$P = \underbrace{a_n(X^n + 1) + a_{n-1}(X^{n-1} + 1) + \dots + a_1(X + 1)}_{\in F} + \underbrace{a_0 - a_1 - \dots - a_n}_{\in \mathrm{Vect}(\{1\})}.$$

la décomposition précédente étant unique, compte tenu de la nécessaire égalité des coefficients des termes de degré k.

Il en résulte que $P \in F \Leftrightarrow a_0 - a_1 - \dots - a_n = 0$. Donc F est le noyau de la forme linéaire φ définie par $\varphi(P) = a_0 - \sum_{k\geq 1} a_k$.

La forme linéaire φ n'est pas continue. En effet, $\varphi(1 - X - X^2 - \dots - X^n) = n + 1$ alors que :

$$\| 1 - X - X^2 - \dots - X^n \| = \sqrt{n+1}.$$

Donc, si on prend la suite $P_n = \dfrac{1 - X - X^2 - \dots - X^n}{n + 1}$, alors $\| P_n \|$ tend vers 0, mais pas $\varphi(P_n)$.

Si $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est orthogonal à F, alors pour tout $n \geq 1$, $\langle P, X^n + 1\rangle = 0 = a_n + a_0$ donc tous les a_n sont opposés à a_0, mais les a_n sont nuls pour n assez grand, donc $a_0 = 0$ et $P = 0$.

b) Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$:

$$|\psi(P)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{a_k}{k+1} \right|$$

$$\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}\ \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}}$$

d'après l'inégalité de Schwarz sur $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme euclidienne

$$\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}\ \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}}$$

on notera que la série $\sum \dfrac{1}{(k+1)^2}$ est convergente

$$\leq K \| P \|$$

où K est la constante $\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}}$. Il est résulte que ψ est K-lipschitzienne, donc continue.

Une base de G est donnée par la suite de polynôme $(n+1)X^n - 1$, $n \geq 1$. On obtient une base de $\mathbb{R}[X]$ en rajoutant la constante 1.

Le fait que $G^{\perp} = \{0\}$ se traite d'une façon comparable au a).

Les deux exemples a) et b) sont très ressemblants, la différence étant que les hyperplans F et G sont noyaux d'une forme linéaire non continue dans le cas a) et continue dans le cas b). Le fait que l'orthogonal de ces hyperplans soit nul dans les deux cas montre que cette propriété n'est pas liée à la continuité des formes linéaires qui définissent les hyperplans.

D'autres exemples d'espaces préhilbertients E et de sous-espace vectoriel $F \neq E$ tel que $F^{\perp} = \{0\}$ sont donnés dans le chapitre *Espaces préhilbertiens* L2/PREHILB.PDF.

Sol.8) a) u étant symétrique dans un espace vectoriel euclidien, u est diagonalisable dans une base orthonormée (e_i). Soit λ_i la valeur propre associé au vecteur propre e_i. Pour tout i, on a :

$$0 \leq (u(e_i) \mid e_i) = (\lambda_i e_i \mid e_i) = \lambda_i$$

Prendre pour v l'endomorphisme de matrice diagonale dans la base (e_i), les coefficients de la diagonale étant $\sqrt{\lambda_i}$.

b) La symétrie de u et le fait que $\forall$ P $\in$ E, $(u(P), P) \geq 0$ sont faciles à vérifier.

Supposons par l'absurde qu'il existe un endomorphisme v de E tel que :

$$\forall\ P,\ v^2(P) = u(P) = XP$$

On a donc $v^2(1) = X$. Donc, pour P égal au polynôme $v(1)$, on a $v(P) = v(v(1)) = X$. Si on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$\begin{aligned}
X &= v(P) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\, v(X^k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\, vu^k(1) && \text{car } u^k(1) = X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\, v^{2k+1}(1) && \text{car } u = v^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\, u^k v(1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\, u^k(P) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k P = P^2
\end{aligned}$$

donc $P^2 = X$ ce qui est impossible.

Sol.9) a) f est C^1 sur $]-1, 1[$ et :

$$f'(t) = \frac{2\cos(\theta)(1+t^2)}{1+2t^2\cos(2\theta)+t^4} = \frac{e^{i\theta}}{1+t^2e^{2i\theta}} + \frac{e^{-i\theta}}{1+t^2e^{-2i\theta}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n}\, e^{(2n+1)i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n}\, e^{-(2n+1)i\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n}\, 2\cos((2n+1)\theta)$$

donc, compte tenu du fait que $f(0) = 0$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2\cos((2n+1)\theta)}{2n+1}\, t^{2n+1}$$

b) Pour $t = \sqrt{2} - 1$, $\dfrac{2t}{1-t^2} = 1$, et le a) donne :

$$f(\sqrt{2}-1) = \arctan(\cos(\theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2\cos((2n+1)\theta)}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$$

Les polynômes de Tchebychev T_{2n+1} sont tels que $T_{2n+1}(\cos(\theta)) = \cos((2n+1)\theta)$. On obtient donc :

$$\arctan(\cos(\theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}\, T_{2n+1}(\cos(\theta))$$

et donc, en posant $x = \cos(\theta)$:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}\, T_{2n+1}(x)$$

c) Considérons la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2(\sqrt{2}-1)^{2k+1}}{2k+1}\, T_{2k+1}(x)$. Sachant que $|T_{2k+1}(x)| \le 1$ pour $x \in [-1, 1]$ (puisque, pour un tel x, $T_{2n+1}(x)$ est un cosinus), on peut majorer le reste par :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{2}-1)^{2k+1}}{2k+1} \le \frac{2(\sqrt{2}-1)^{2n+3}}{(2n+3)} \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{2}-1)^{2k} = \frac{2(\sqrt{2}-1)^{2n+3}}{(2n+3)(1-(\sqrt{2}-1)^2)}$$

Pour $n = 11$, ce majorant est inférieur à 10^{-10}.

La série obtenu converge bien plus vite vers arctan que la série alternée usuelle $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$.

Sol.10) a) Puisque $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, on a $\| T_n \|_\infty = 1$ et $\| \dfrac{T_n}{2^{n-1}} \|_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b) S'il existait un polynôme unitaire P de degré n tel que $\| P \|_\infty < \dfrac{1}{2^{n-1}}$, on aurait, pour tout k variant de 0 à n :

$$(P - \frac{T_n}{2^{n-1}})(\cos(\frac{k\pi}{n})) = P(\cos(\frac{k\pi}{n})) - \frac{T_n}{2^{n-1}}(\cos(\frac{k\pi}{n}))$$

$$= P(\cos(\frac{k\pi}{n})) - \frac{1}{2^{n-1}} \cos(k\pi)$$
$$= P(\cos(\frac{k\pi}{n})) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$$

Comme $\left| P(\cos(\frac{k\pi}{n})) \right| < \frac{1}{2^{n-1}}$, on en déduit que :

pour k pair, $(P - \frac{T_n}{2^{n-1}})(\cos(\frac{k\pi}{n})) = P(\cos(\frac{k\pi}{n})) - \frac{1}{2^{n-1}} < 0$

pour k impair, $(P - \frac{T_n}{2^{n-1}})(\cos(\frac{k\pi}{n})) = P(\cos(\frac{k\pi}{n})) + \frac{1}{2^{n-1}} > 0$

Il en résulte que $P - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ change de signe au moins n fois sur l'intervalle $[-1, 1]$, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, s'annule au moins n fois. Or, P et $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ étant tous deux unitaires de degré n, on a $\deg(P - \frac{T_n}{2^{n-1}}) \leq n - 1$. S'annulant au moins n fois, $P - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ est nécessairement nul, donc $P = \frac{T_n}{2^{n-1}}$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\| P \|_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$.

c) On applique le même raisonnement que ci-dessus, mais avec des inégalités larges.

pour k pair, $(P - \frac{T_n}{2^{n-1}})(\cos(\frac{k\pi}{n})) = P(\cos(\frac{k\pi}{n})) - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 0$

pour k impair, $(P - \frac{T_n}{2^{n-1}})(\cos(\frac{k\pi}{n})) = P(\cos(\frac{k\pi}{n})) + \frac{1}{2^{n-1}} \geq 0$

On aboutira à la conclusion $P = \frac{T_n}{2^{n-1}}$ si on montre que $P - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ s'annule au moins n fois. Considérons un intervalle $[\cos(\frac{(k+1)\pi}{n}), \cos(\frac{k\pi}{n})]$, $0 \leq k < n$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $P - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ s'annule sur cet intervalle, en un point x_k.

Si les x_k sont tous distincts, $P - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ est un polynôme de degré $n - 1$ au plus admettant au moins n racines, donc $P - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ est nul et $P = \frac{T_n}{2^{n-1}}$.

Si, pour certaines valeurs de k, $x_{k-1} = x_k$, la seule valeur commune possible est $\cos(\frac{k\pi}{n})$, borne respective gauche et droite des deux intervalles contenant x_{k-1} et x_k. Mais en un tel point $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ admet un extremum valant ± 1, et donc P également, donc $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ et P ont leur dérivée qui s'y annule. Il en résulte que $P - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ admet une racine double en $x_{k-1} = x_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$. Par conséquent, le nombre de racines ainsi décomptées pour $P - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ sera le même que dans le cas précédent.

Sol.11) a) ❑ Pour le polynôme de Legendre P_n, vérifiant l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

on a $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = -2x$, et $w(x) = 1$ sur I = [–1, 1], donc :

$$(w(x)p(x))' = (1 - x^2)' = -2x = w(x)q(x)$$

$$\lim_{x\to\pm 1} w(x)p(x)x^n = 0 \text{ car } p(\pm 1) = 0$$

$$\lambda_n = \frac{(n - n^2)p''}{2} - nq' = n^2 + n$$

❑ Pour le polynôme de Tchebychev T_n, vérifiant l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

on a $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = -x$, $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ sur I =]–1, 1[, donc :

$$(w(x)p(x))' = (\sqrt{1 - x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = w(x)q(x)$$

$$\lim_{x\to\pm 1} w(x)p(x)x^n = \lim_{x\to\pm 1} \sqrt{1 - x^2}\, x^n = 0$$

$$\lambda_n = \frac{(n - n^2)p''}{2} - nq' = n^2$$

❑ Pour le polynôme de Laguerre L_n, vérifiant l'équation différentielle :

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$$

on a $p(x) = x$, $q(x) = 1 - x$, $w(x) = e^{-x}$ sur I = [0, +∞[, donc :

$$(w(x)p(x))' = (xe^{-x})' = (1 - x)e^{-x} = w(x)q(x)$$

$$\lim_{x\to 0} w(x)p(x)x^n = 0 \text{ car } p(0) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} w(x)p(x)x^n = \lim_{x\to\infty} x^{n+1}e^{-x} = 0$$

$$\lambda_n = \frac{(n - n^2)p''}{2} - nq' = n$$

❑ Pour le polynôme d'Hermite H_n, vérifiant l'équation différentielle :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

on a $p(x) = 1$, $q(x) = -2x$, $w(x) = e^{-x^2}$ sur I = $\mathbb{R}$, donc :

$$(w(x)p(x))' = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2} = w(x)q(x)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} w(x)p(x)x^n = \lim_{x\to\pm\infty} x^ne^{-x^2} = 0$$

$$\lambda_n = \frac{(n - n^2)p''}{2} - nq' = 2n$$

b) Vérifions maintenant qu'on retrouve dans chaque cas le polynôme orthogonal de degré n.

❑ Pour les polynômes de Legendre :

$$\frac{1}{w(x)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (w(x)p(x)^n) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} ((1 - x^2)^n)$$

Il est proportionnel à la définition que nous avons prise : $\dfrac{1}{2^n\, n!} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n$

❑ Pour les polynômes de Tchebychev :

$$\frac{1}{w(x)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (w(x)p(x)^n) = \sqrt{1 - x^2}\, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} ((1 - x^2)^{n-1/2})$$

et on montré dans un exercice précédent que T_n est bien proportionnel à cette expression :

$$T_n(x) = (-1)^n \frac{2^n\, n!}{(2n)!} \sqrt{1 - x^2}\, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (1 - x^2)^{n-1/2}$$

❑ Pour les polynômes de Laguerre :

$$\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}(w(x)p(x)^n) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

qui est proportionnel à la définition que nous avons prise : $\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$.

❑ Pour les polynômes d'Hermite :

$$\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}(w(x)p(x)^n) = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

qui est, au signe près, la définition que nous avons prise.

c) On procède par récurrence sur k

Pour $k = 0$, on obtient p^nQ qui est bien un polynôme, avec p^n en facteur et $R_{n0} = Q$

Pour $k = 1 \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{w}(wp^nQ)' &= \frac{1}{w}((wp)'p^{n-1}Q + wp(p^{n-1}Q)') \\ &= \frac{1}{w}(wqp^{n-1}Q + (n-1)wp^{n-1}p'Q + wp^nQ') \qquad \text{car } (wp)' = wq \\ &= qp^{n-1}Q + (n-1)p^{n-1}p'Q + p^nQ' \\ &= p^{n-1}(qQ + (n-1)p'Q + pQ')\end{aligned}$$

qui est bien un polynôme de la forme $p^{n-1}R_{n1}$ avec $R_{n1} = qQ + (n-1)p'Q + pQ'$, polynôme. On peut supposer que le coefficient dominant de Q est 1. Alors le coefficient de $X^{1+\mathrm{deq}(Q)}$ de R_{n1} est :

$$d + 2(n-1)a + a\deg(Q) = d + (2n - 2 + \mathrm{deq}(Q))a.$$

Il est non nul d'après l'hypothèse portant sur $d + \mathbf{N}a$. Ainsi :

$$\deg(R_{n1}) = \deg(Q) + 1$$

Supposons que $\frac{1}{w}(wp^nQ)^{(k)} = p^{n-k}R_{nk}$, avec $k < n$ et R_{nk} polynôme tel que $\deg(R_{nk}) = \deg(Q) + k$.

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{w}(wp^nQ)^{(k+1)} &= \frac{1}{w}((wp^nQ)^{(k)})' \\ &= \frac{1}{w}(wp^{n-k}R_{nk})' \qquad \text{en appliquant l'hypothèse de récurrence} \\ &= p^{n-k-1}R_{n,k+1}\end{aligned}$$

avec $R_{n,k+1}$ polynôme, en appliquant le cas précédent avec $n - k$ au lieu de n et R_{nk} au lieu de Q. On a :

$$R_{n,k+1} = qR_{nk} + (n-k-1)p'R_{nk} + pR_{nk}'$$

et $\deg(R_{n,k+1}) = \deg(R_{nk}) + 1 = \deg(Q) + k + 1$

d) Montrons que, pour tout $k < n$, $<X^k, P_n> = 0$. On a :

$$\begin{aligned}<X^k, P_n> &= \int_I x^k P_n(x)w(x)\,dx \\ &= \int_I x^k \frac{d^n}{dx^n}(w(x)p(x)^n)\,dx \\ &= \left[x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w(x)p(x)^n)\right]_I - k\int_I x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w(x)p(x)^n)\,dx\end{aligned}$$

en intégrant par parties, $[\ ]_I$ désignant la différence des valeurs de la primitive prises aux deux bornes de I.

Dans le c), on a vu que $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w(x)p(x)^n)$ est de la forme $w(x)p(x) \times$ un polynôme. Il en est de même de $x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w(x)p(x)^n)$. Par hypothèse sur w, le produit de wp par un polynôme a une limite nulle aux bornes de I. Donc $\left[x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w(x)p(x)^n)\right]_I = 0$. (Il en sera de même pour les autres dérivées de wp^n qui interviendront ci-dessous). Donc :

$$<X^k, P_n> = -k\int_I x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(w(x)p(x)^n)\, dx$$

En itérant les intégrations par parties, on parvient à :

$$<X^k, P_n> = (-1)^k k!\int_I \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(w(x)p(x)^n)\, dx$$

$$= (-1)^k k!\left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(w(x)p(x)^n)\right]_I$$

$$= 0$$

e) Pour tout polynôme P et Q :

$$<L(P), Q> = \int_I (pP'' + qP')Qw$$

$$= \int_I P''Qpw + P'Qqw$$

$$= \int_I P''Qpw + P'Q(pw)' \qquad \text{en utilisant } (pw)' = qw$$

$$= \int_I (P'Qpw)' - P'Q'pw$$

$$= [P'Qpw]_I - \int_I P'Q'pw$$

$$= -\int_I P'Q'pw$$

car $[P'Qpw]_I = 0$ puisque $P'Qpw$ admet des limites nulles aux bornes de I. L'expression finale obtenue est symétrique en P et Q, donc $<L(P), Q> = <P, L(Q)>$ et L est bien symétrique.

f) On utilise la relation $\frac{w'}{w} = \frac{q-p'}{p}$, tirée de $(pw)' = qw$ pour éliminer les w' dans l'expression $pP_n'' + qP_n'$:

$$P_n' = \left(\frac{1}{w}(wp^n)^{(n)}\right)'$$

$$= -\frac{w'}{w^2}(wp^n)^{(n)} + \frac{1}{w}(wp^n)^{(n+1)}$$

$$= -\frac{q-p'}{pw}(wp^n)^{(n)} + \frac{1}{w}(wp^n)^{(n+1)}$$

puis

$$P_n'' = \left(-\frac{q-p'}{pw}(wp^n)^{(n)} + \frac{1}{w}(wp^n)^{(n+1)}\right)'$$

$$= -\frac{(q' - p'')pw - (q - p')(pw)'}{p^2w^2}(wp^n)^{(n)} - \frac{q - p'}{pw}(wp^n)^{(n+1)} - \frac{w'}{w^2}(wp^n)^{(n+1)} + \frac{1}{w}(wp^n)^{(n+2)}$$
$$= -\frac{(q' - p'')pw - (q - p')qw}{p^2w^2}(wp^n)^{(n)} - 2\,\frac{q - p'}{pw}(wp^n)^{(n+1)} + \frac{1}{w}(wp^n)^{(n+2)}$$
$$= -\frac{(q' - p'')p - (q - p')q}{p^2w}(wp^n)^{(n)} - 2\,\frac{q - p'}{pw}(wp^n)^{(n+1)} + \frac{1}{w}(wp^n)^{(n+2)}$$

donc :

$$pP_n'' + qP_n' = -\frac{(q' - p'')p - (q - p')q}{pw}(wp^n)^{(n)} - 2\,\frac{q - p'}{w}(wp^n)^{(n+1)}$$
$$+ \frac{p}{w}(wp^n)^{(n+2)} - \frac{q(q - p')}{pw}(wp^n)^{(n)} + \frac{q}{w}(wp^n)^{(n+1)}$$
$$= \frac{p'' - q'}{w}(wp^n)^{(n)} + \frac{2p' - q}{w}(wp^n)^{(n+1)} + \frac{p}{w}(wp^n)^{(n+2)}$$

Utilisons ensuite l'indication donnée par l'énoncé.

D'une part :

$$p(wp^n)' = w'p^{n+1} + np'wp^n$$
$$= (q - p')wp^n + np'wp^n$$

en éliminant w'

$$= (q + (n - 1)p')wp^n$$

donc $\quad (p(wp^n)')^{(n+1)} = ((q + (n - 1)p')wp^n)^{(n+1)}$

$$= (q + (n - 1)p')(wp^n)^{(n+1)} + (n + 1)(q' + (n - 1)p'')(wp^n)^{(n)}$$

les autres termes de la formule de Leibniz étant nuls vu les degrés de p et q.

D'autre part :

$$(p(wp^n)')^{(n+1)} = p(wp^n)^{(n+2)} + (n + 1)p'(wp^n)^{(n+1)} + \frac{n(n + 1)}{2}p''(wp^n)^{(n)}$$

En retranchant membre à membre les deux égalités, on obtient :

$$0 = p(wp^n)^{(n+2)} + (2p' - q)(wp^n)^{(n+1)} + \left(\frac{-n^2 + n + 2}{2}p'' - (n + 1)q'\right)(wp^n)^{(n)}$$

On reconnaît dans les deux premiers termes $p(wp^n)^{(n+2)} + (2p' - q)(wp^n)^{(n+1)}$ ceux qui apparaissaient dans l'expression de $pP_n'' + qP_n$. Par conséquent :

$$pP_n'' + qP_n = \frac{p'' - q'}{w}(wp^n)^{(n)} - \frac{1}{w}\left(\frac{-n^2 + n + 2}{2}p'' - (n + 1)q'\right)(wp^n)^{(n)}$$
$$= -\left(\frac{n - n^2}{2}p'' - nq'\right)P_n$$

et on trouve bien l'expression $\lambda_n = \dfrac{n - n^2}{2}p'' - nq'$ demandée.

On a montré que P_n est vecteur propre de l'opérateur L, de valeur propre $-\lambda_n$.

g) Dans les exemples ci-dessous, certains ne satisfont pas les hypothèses exigées, d'autres donnent des familles de polynômes orthogonaux généralisant les familles déjà vues.

❑ Prenons p de degré 2, sans racines réelles, par exemple $p = x^2 + 1$, $q = ax + b$, $I = \mathbb{R}$. On trouve :

$$w(x) = (x^2 + 1)^{a/2-1}\exp(b\arctan(x))$$

w ne vérifie pas la propriété d'intégration de wP, pour P polynôme.

❑ Prenons p de degré 2 ayant une racine double, par exemple $p = x^2$, $q = ax + b$, $I =]0, +\infty[$. On trouve :

$$w(x) = x^{a-2}\exp\left(-\frac{b}{x}\right)$$

w ne vérifie pas la propriété d'intégration de wP, pour P polynôme.

❑ Prenons p de degré 2 ayant deux racines simples, par exemple $p = 1 - x^2$, $q = ax + b$, I =]–1, 1[. On trouve :

$$w(x) = \frac{1}{1-x^2} \exp\left(-\frac{a}{2}\ln(1-x^2) + \frac{b}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$$
$$= (1-x)^{-a/2-b/2-1}\,(1+x)^{-a/2+b/2-1}$$

de la forme $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ en posant $\alpha = -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 1$ et $\beta = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - 1$. On supposera $\alpha > -1$ et $\beta > -1$ (et donc $a + b < 0$ et $b > a$, ou encore $a < b < -a$ avec $a < 0$) de façon que w (et plus généralement wP pour tout polynôme P) soit intégrable en – 1 et en 1. On a bien également :

$$\forall n, \lim_{x\to\pm 1} w(x)p(x)x^n = \lim_{x\to\pm 1} (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} = 0$$

On obtient les **polynômes de Jacobi** :

$$P_n(x) = \frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{n+\alpha}(1-x)^{n+\beta}\right)$$

et $\lambda_n = n^2 + (\alpha + \beta + 1)n$

La famille (P_n) est solution des équations différentielles :

$$(1-x^2)y'' - ((\alpha + \beta + 2)x + \alpha - \beta)y' + (n^2 + (\alpha + \beta + 1)n)y = 0$$

Le cas I =]1, +∞[au lieu de]–1, 1[n'est pas envisageable, car on obtiendra $w(x) = (x-1)^\alpha(x+1)^\beta$, et wP n'est pas intégrable sur]1, +∞[pour tout polynôme P.

Si on prend $\alpha = \beta$, on obtient les **polynômes ultrasphériques de Gegenbauer**.

On retrouve les polynômes de Legendre pour $\alpha = \beta = 0$, et les polynômes de Tchebychev pour $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$.

Pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, ce sont les **polynômes Tchebychev de seconde espèce**.

Pour $\alpha = \beta = 1$, on a :

$$w(x) = 1 - x^2$$
$$\lambda_n = n^2 + 3n$$
$$P_n = \frac{1}{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+1}$$

La famille (P_n) est solution des équations différentielles :

$$(1-x^2)y'' - 4xy' + (n^2 + 3n)y = 0$$

Les $((1-x^2)P_n(x))'$ redonne les polynômes de Legendre, à un facteur près.

❑ Si on prend p de degré 1, par exemple $p = x$, $q = ax + b$, sur I =]0, +∞[, on obtient :

$$w(x) = x^{b-1}\,e^{ax}$$

On supposera $a < 0$ de façon que wP soit intégrable en +∞ pour tout polynôme P, et $b > 0$ pour que wP soit intégrable en 0. On a également :

$$\forall n, \lim_{x\to 0 \text{ ou } +\infty} w(x)p(x)x^n = \lim_{x\to 0 \text{ ou } +\infty} x^{b+n}e^{-x} = 0$$

On a alors :

$$\lambda_n = -an$$
$$P_n = x^{1-b}\,e^{-ax}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+b-1}\,e^{ax})$$

La famille (P_n) est solution des équations différentielles :

$$xy'' + (ax + b)y' - any = 0$$

Pour $a = -1$, on obtient les **polynômes de Laguerre généralisés**. On retrouve les polynômes de Laguerre usuels avec $a = -1$ et $b = 1$.

❑ Si on prend p constant, par exemple $p = 1$, $q = ax + b$ sur $\mathrm{I} = \mathbf{R}$, on obtient :

$$w(x) = \exp(\frac{ax^2}{2} + bx)$$

On prend $a < 0$ pour que les conditions exigées sur w soient satisfaites. On a alors :

$$\mathrm{P}_n = \exp(-\frac{ax^2}{2} - bx)\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\ (\exp(\frac{ax^2}{2} + bx)\ x^n)$$

$$\lambda_n = -an$$

C'est une pseudo-généralisation des polynômes d'Hermite. Par translation et homothétie sur la variable x, on se ramène en effet au cas $q = -2x$.

◆