© 2025 - Gérard Lavau - https://gerardlavau.fr
Vous avez toute liberté pour télécharger, imprimer, photocopier ce cours et le diffuser gratuitement. Toute diffusion à titre onéreux ou utilisation commerciale est interdite sans accord de l'auteur.
Si vous êtes le gestionnaire d'un site sur Internet, vous avez le droit de créer un lien de votre site vers mon site, à condition que ce lien soit accessible librement et gratuitement. Vous ne pouvez pas télécharger les fichiers de mon site pour les installer sur le vôtre.

CALCUL DIFFERENTIEL 2

Plan

I : Fonctions différentiables
- 1) Définition
- 2) Lien entre les deux notions
- 3) Différentiation d'une fonction composée

II : Propriétés
- 1) Gradient
- 2) Inégalité des accroissements finis
- 3) Difféomorphismes, inversion locale
- 4) L'équation des ondes
- 5) Le théorème des fonctions implicites

III : Intégrales curvilignes
- 1) Formes différentielles
- 2) Représentation graphique
- 3) Intégrales curvilignes

Annexe I : Le théorème de Fubini et théorème de Schwarz
Annexe II : Le théorème de Poincaré
Annexe III : La relativité, une histoire de changement de variables
Annexe IV : Les multiplicateurs de Lagrange
Annexe V : Une démonstration du théorème d'inversion locale
- 1) Introduction d'une application contractante
- 2) Existence d'une boule de centre a stable par φ
- 3) Définition des ouverts V et W
- 4) Continuité de f^{-1}
- 5) Différentiabilité de f^{-1}
- 6) Caractère C^1 de f^{-1}

Exercices
- 1) Enoncés
- 2) Solutions

Ce chapitre approfondit les notions déjà rencontrées dans le premier chapitre de calcul différentiel L1/CALCDIF1.PDF. Un dernier complément se trouve dans le chapitre L2/GRADIVRT.PDF.
La lecture du chapitre sur les espaces normés L2/EVNORME.PDF est conseillée, et même indispensable pour la compréhension de certaines passages du présent chapitre.

I : Fonctions différentiables

1- Définition

Pour f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f est dérivable en a s'il existe une constante notée $f'(a)$ telle que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

ou, de manière équivalente, si :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

au voisinage de 0.

Ces deux égalités se généralise aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, ou plus généralement d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, tous deux de dimension finie, sous deux formes possibles.

❑ **Dérivée selon un vecteur**

DÉFINITION

Soit f une application d'un ouvert U *de* E *dans* F *et a un point de* U. *f est* **dérivable en** *a* **selon un vecteur** *v de* E *si l'application* φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* F *définie par* $t \to f(a + tv)$ *est dérivable en* $t = 0$. *On pose :*

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$

On note que la fonction φ est bien définie dans un voisinage de 0, pour t assez petit. $D_v f(a)$ donne le taux de variation de f le long de la droite affine passant par a et de vecteur directeur v.

REMARQUE :

Dans la définition ci-dessus, on a parlé de *point a* et de *vecteur v*, tous deux éléments de E. Cela signifie en fait que E est vu sous deux formes, celle d'un espace affine dont les éléments sont des points, et celle d'un espace vectoriel dont les éléments sont des vecteurs. Si l'on souhaite distinguer clairement les deux formes, la définition prendra la forme suivante :

Soit (A) *un espace affine de direction vectorielle* E, *soit* (B) *un espace affine de direction vectorielle* F. *Soit f une application d'un ouvert* U *de* (A) *dans* (B) *et a un point de* U. *f est* **dérivable en** *a* **selon un vecteur** *v de* E *si l'application* φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* (B) *définie par* $t \to f(a + tv)$ *est dérivable en* $t = 0$. *On pose :*

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$

Ici, $a + hv$ est le translaté du point a par le vecteur hv, et $f(a + hv) - f(a)$ égal au vecteur reliant le point $f(a)$ au point $f(a + hv)$.

La même distinction peut s'effectuer dans l'ensemble du chapitre, en particulier un peu plus loin avec la notion de différentielle, la fonction f s'appliquant sur des points et sa différentielle df sur des vecteurs. Néanmoins, pour ne pas multiplier les noms d'espaces considérés, nous utiliserons le même espace E soit comme espace affine, soit comme espace vectoriel, en notant le plus souvent par a, b, ... les éléments de E vus comme des points, et par u, v, ... les éléments de E vus comme des vecteurs.

EXEMPLE :

❑ Soit $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \to \begin{pmatrix} xy^2 - x \\ 2x^2y \end{pmatrix}$. Prenons $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\varphi(t) = f(a + tv) = \begin{pmatrix} (1-t)(2+3t)^2 - 1 + t \\ 2(1-t)^2(2+3t) \end{pmatrix}$$

et $\quad D_v f(a) = \varphi'(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$

Si E = $\mathbb{R}^n$ de base canonique $(e_1, ..., e_n)$, la dérivée D_i selon le vecteur e_i n'est autre que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ usuelle. En effet, si $a = (a_1, ..., a_n)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est la dérivée en a_i de la fonction :

$$x_i \to f(a_1, ..., x_i, ..., a_n) = f(a + (x_i - a_i)e_i) = \varphi(x_i - a_i)$$

avec $v = e_i$. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est bien égal à $\varphi'(0) = D_i f(a)$. Ainsi, l'opérateur D_i est l'opérateur de dérivation par rapport à la $i^{\text{ème}}$ composante. Si f est de classe C^2 (i.e. f admet des dérivées partielles secondes, et f et toutes ses dérivées sont continues), l'ordre de dérivation de ces dérivées partielles secondes n'intervient pas (théorème de Schwarz), ce qui signifie que $D_i \circ D_j = D_j \circ D_i$. Une démonstration est donnée dans le chapitre L1/CALCDIF1.PDF, et une autre est donnée en annexe I du présent chapitre.

❑ Fonction différentiable

Dans $\mathbb{R}$, La fonction $h \to hf'(a)$ est la meilleure approximation linéaire de $f(a + h) - f(a)$. On l'appelle parfois application linéaire tangente. On généralise cette propriété pour une fonction f de E dans F (ou d'un ouvert U de E dans F) de la façon suivante.

DÉFINITION

Soit f une application d'un ouvert U *de* E *dans* F. *On dit que f est* **différentiable** *en un point a de* U *s'il existe une application linéaire* L *de* E *dans* F *telle que, quand h tend vers* 0 *:*

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\| h \|)$$

L, si elle est existe, est unique. En effet, si Λ vérifie la même définition, on aura pour tout h non nul, quand t tend vers 0, en utilisant la linéarité de L et Λ :

	$f(a + th) = f(a) + tL(h) + o(t) = f(a) + t\Lambda(h) + o(t)$	
donc	$L(h) + o(1) = \Lambda(h) + o(1)$	après simplification par t
et donc	$L(h) = \Lambda(h)$	en passant à la limite
donc	$L = \Lambda$	

L est la meilleure approximation linéaire de l'application $h \to f(a + h) - f(a)$. Cette quantité correspond à la variation de f au premier ordre, d'autant meilleure que la variation h est petite. On note $L = df(a)$ ou df_a, différentielle de f au point a, ou même simplement df, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur a. L'expression de la définition est appelée **développement limité à l'ordre 1** de f en a.

EXEMPLE :

❑ Soit $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \to \begin{pmatrix} xy^2 - x \\ 2x^2y \end{pmatrix}$. Prenons $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$f\begin{pmatrix} 1 + h \\ 2 + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 3h + 4k + k^2 + 4hk + hk^2 \\ 4 + 8h + 2k + 4hk + 4h^2 + 2h^2k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3h + 4k \\ 8h + 2k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2 + 4hk + hk^2 \\ 4hk + 4h^2 + 2h^2k \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ n'est autre que $f(a)$. La partie $\begin{pmatrix} 3h + 4k \\ 8h + 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ est linéaire, de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Le reste $\begin{pmatrix} k^2 + 4hk + hk^2 \\ 4hk + 4h^2 + 2h^2k \end{pmatrix}$ est un $o(\| (h, k) \|)$. En effet, si on prend par exemple

$\| (h, k) \| = \max(|h|, |k|)$ (mais n'importe quelle autre norme ferait l'affaire, en vertu de l'équivalence des normes en dimension finie, voir L2/EVNORME.PDF), on a :

$$0 \leq \frac{k^2}{\| (h, k) \|} \leq |k| \text{ qui tend vers 0 quand } (h, k) \text{ tend vers 0}$$

et de même pour les autres termes. f est donc différentiable en a et sa différentielle admet pour matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, dont on remarquera que les deux colonnes sont respectivement $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$. En effet, $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 - 1 \\ 4xy \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 2x^2 \end{pmatrix}$. Ainsi, dans cet exemple :

$$\mathrm{d}f_a \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k$$

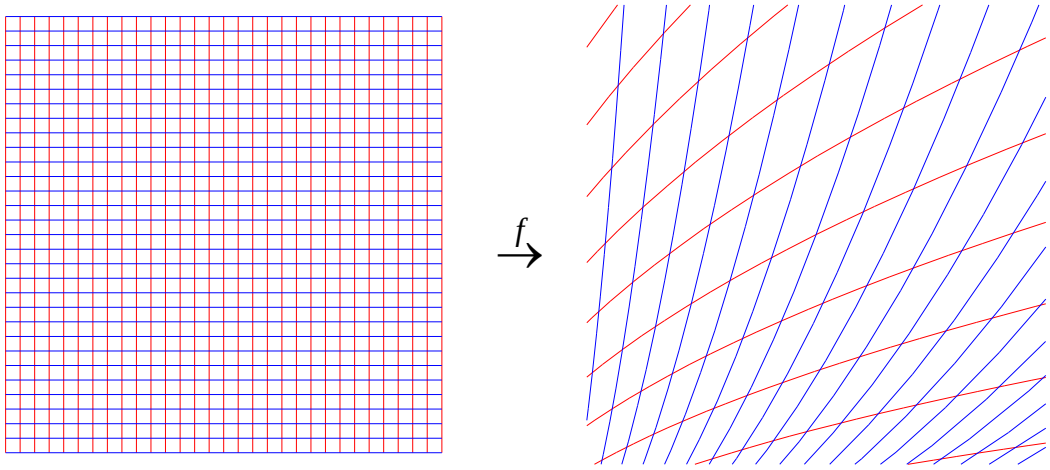
ce qu'on note également (notation différentielle) :

$$\mathrm{d}f_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\, \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\, \mathrm{d}y$$

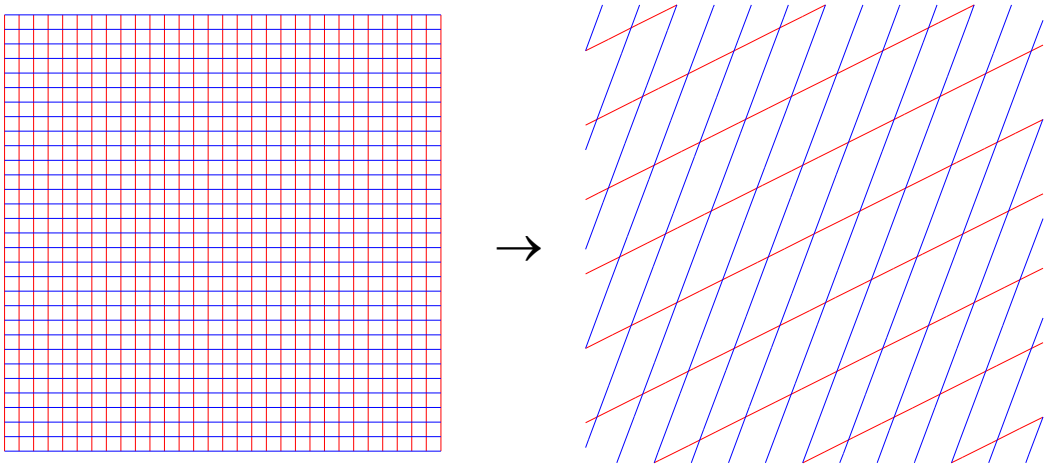
dx (respectivement dy) représentant respectivement la variation relative à x (respectivement à y), autrement dit, l'application $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \to h$ (respectivement $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \to k$).

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE :

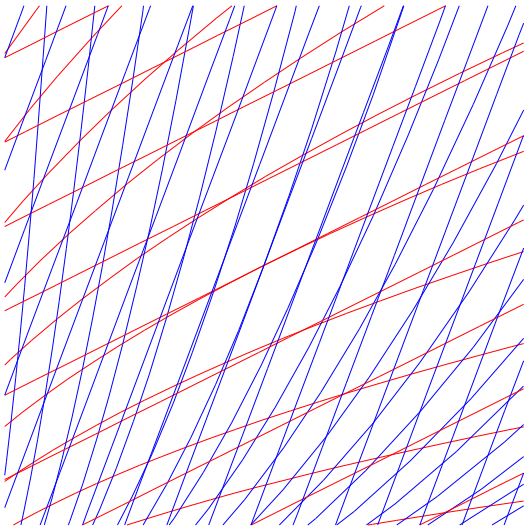
On représente ci-dessous la fonction f au voisinage de a en dessinant ce que devient l'image d'un quadrillage régulier par f. Les courbes en bleu sont les images des droites parallèles à Ox, les courbes en rouge sont les images des droites parallèles à Oy. Le point a est au centre de l'image de gauche et $f(a)$ est au centre de l'image de droite.



Si on remplace la fonction f par l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, autrement dit par son approximation au premier ordre (terme constant + différentielle) au voisinage de a, on obtient la figure suivante :



L'image ressemble à celle de f, mais toute courbure a disparu, de même que, si on applique le même procédé pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la courbe est remplacée par sa tangente. Si on superpose les deux images, on visualise les écarts entre f et son approximation au premier ordre, celle-ci étant d'autant meilleure qu'on se rapproche du centre de la figure $f(a)$.



2- Lien entre les deux notions

Il convient de voir les relations entre dérivée selon un vecteur et différentielle. Notons en premier lieu qu'elles ne sont pas équivalentes en général. Par exemple, une fonction différentiable en a est continue en a. En effet, dans la relation $f(a + h) = f(a) + df_a(h) + o(\| h \|)$, les deux quantités $df_a(h)$ (continuité d'une application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie) et $o(\| h \|)$ tendent toutes deux vers 0 quand h tend vers 0, de sorte que $f(a + h)$ tend bien vers $f(a)$ quand h tend vers 0.

Par contre, si f est dérivable en a selon un vecteur, et même selon *tout* vecteur, on ne peut conclure sur la continuité de f en a. En effet, le fait que f soit dérivable selon un vecteur donne une propriété de f selon les droites passant par a, mais ne suffit pas à définir un comportement local complet de f.

EXEMPLE :

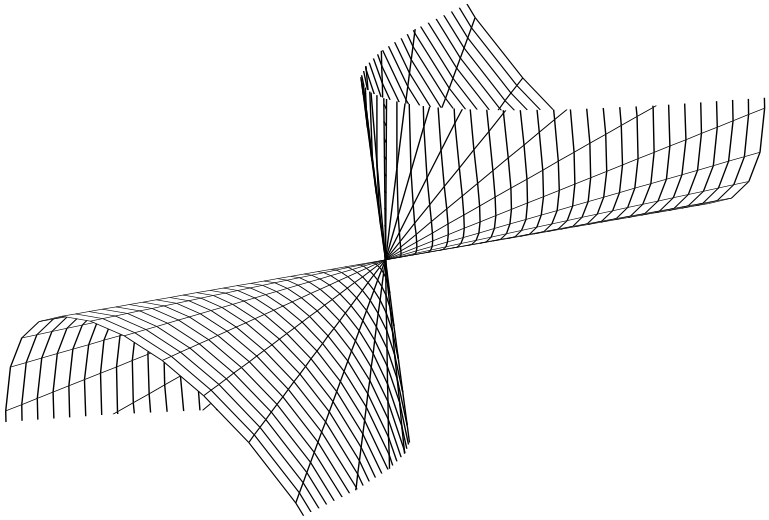
❑ Considérons la fonction f suivante :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Prenons $a = (0, 0)$. f n'est pas continue en a puisque $\lim\limits_{h \to 0} f(h, h) = \lim\limits_{h \to 0} h = 0$ alors que $\lim\limits_{h \to 0} f(h^2, h) = 1$. Cependant f admet une dérivée en a selon n'importe quel vecteur v. En effet, si $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ou plus généralement $v = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$), alors $f(a + tv) = 0$ pour tout t donc est de dérivée nulle, et si $v = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ avec $r \neq 0$, alors $f(a + tv) = \dfrac{ts^2}{r}$ de dérivée $\dfrac{s^2}{r}$.

Ci-dessous, une représentation de la surface $z = f(x, y)$. f est continue selon chaque droite issue de l'origine, mais n'est pas globalement continue en l'origine.



On pourra vérifier que la surface d'équation $z = \dfrac{y^2}{x}$ ou $zx = y^2$ est un cône. Voir le paragraphe traitant des quadriques dans le chapitre L2/CONIQUES.PDF

PROPOSITION

Si f : $U \subset E \to F$ est différentiable en a, alors f est dérivable en a selon n'importe quel vecteur v, et on a :

$$D_v f(a) = df_a(v)$$

<u>Démonstration</u> :

❑ f étant différentiable en a, on a, au voisinage de 0 :

$$f(a + h) = f(a) + df_a(h) + o(\| h \|)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t) = f(a + tv) = f(a) + df_a(tv) + o(\| tv \|)$$

$$= f(a) + t\, df_a(v) + o(t)$$

donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = D_v f(a) = df_a(v)$.

Réciproquement, si f admet des dérivées selon n'importe quel vecteur, et si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors on peut considérer en particuler les dérivées partielles $D_i f(a)$ de f selon les vecteurs de cette base. Mais on a vu précédemment que l'existence de ces dérivées partielles ne suffisait pas à impliquer la continuité de f et encore moins sa différentiabilité. Il convient de renforcer les hypothèses pour conclure.

Si f et toutes ces dérivées partielles sont continues sur U, f est dite C^1 sur U. Montrons alors que f est différentiable.

PROPOSITION
Si f est C^1 *sur* U, *alors f différentiable en tout point de* U.

Démonstration :
❑ La proposition est équivalente à dire que, si f est C^1, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point de U. Cette propriété a été montrée dans le chapitre L1/CALCDIF1.PDF.

Enfin, la notion d'être C^1 ne dépend pas de la base choisie, car si f est C^1 dans une base, alors f est différentiable, la fonction $a \in U \to df_a \in L(E, F)$ est continue, puisque les coefficients de sa matrice s'expriment avec les dérivées partielles de f, donc sont des fonctions continues de a, donc, pour tout v, la dérivée selon v est une fonction continue de a :

$$a \to D_v f(a) = df_a(v)$$

f admettra donc des dérivées partielles continues dans toute base.

EXEMPLES :

❑ Soit $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. On a montré dans les exercices du chapitre L1/CALCDIF1.PDF que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, et admet les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aucune des deux dérivées partielles n'est continue en (0, 0). Donc f n'est pas C^1.
f n'est pas différentiable en (0, 0). En effet, si elle l'était, on aurait :

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + o(\| (x, y) \|)$$
$$= o(\| (x, y) \|)$$

Si on prend par exemple la norme euclidienne, on devrait donc avoir

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)}{\| (x, y) \|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

mais ce n'est pas le cas, comme on le voit en prenant $x = y = t$ et en faisant tendre t vers 0.

❑ Cependant, f peut ne pas être C^1 mais être néanmoins différentiable en tout point. Considérons la fonction :

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

f est continue en tout (x, y), $y \neq 0$, comme produit et composée des conposantes x et y.

f est continue en $(x_0, 0)$ car $\left| y^2 \sin(\frac{x}{y}) \right| \leq y^2$ de limite nulle quand (x, y) tend vers $(x_0, 0)$.

Pour $y \neq 0$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\cos(\frac{x}{y})$, qui admet une limite nulle en $(x_0, 0)$ comme ci-dessus.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\sin(\frac{x}{y}) - \cos(\frac{x}{y})$. Cette fonction n'admet pas de limite en $(x_0, 0)$, même si $x_0 = 0$ (dans ce dernier cas, considérer les limites quand t tend vers 0 de $\frac{\partial f}{\partial y}(0, t)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(t, t)$).

Cherchons les dérivées partielles en $(x_0, 0)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$ est la dérivée en $h = 0$ de la fonction $h \to f(x_0 + h, 0) = 0$. Elle est donc nulle.

On a donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$ est la dérivée en $h = 0$ de la fonction $h \to f(x_0, h)$. Pour $x_0 = 0$, $f(x_0, h) = 0$ et sa dérivée aussi. Si $x_0 \neq 0$, $\frac{f(x_0, h) - f(x_0, 0)}{h} = \frac{f(x_0, h)}{h} = h\sin(\frac{x_0}{h})$ est de limite nulle. Donc on a aussi $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, mais $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0, 0)$.

f n'est donc pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Elle est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{0\}$.

Etant C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} \times \{0\}$, f est différentiable en tout point de cet ensemble.

Bien que n'étant pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$, f admet quand même une différentielle en tout point $(x_0, 0)$. En effet :

$$f(x_0 + h, k) = k^2 \sin(\frac{x_0 + h}{k}) = O(k^2) = o(\| (h, k) \|)$$

$$= f(x_0, 0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) + o(\| (h, k) \|)$$

f est un exemple de fonction différentiable en tout point bien que non C^1.

❑ Il résulte des considérations précédentes que, si on a :

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix}$$

avec $y_i = f_i(x_1, ..., x_n)$ où les f_i sont des fonctions de classe C^1, c'est à dire admettant des dérivées partielles continues, alors f est C^1, et on peut écrire, pour tout i :

$$f_i(x_1 + h_1, ..., x_n + h_n) = f_i(x_1, ..., x_n) + h_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + ... + h_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} + o(\| h \|)$$

$$\Rightarrow \qquad f(x_1 + h_1, ..., x_n + h_n) = f(x_1, ..., x_n) + \mathrm{M}\begin{pmatrix} h_1 \\ ... \\ h_n \end{pmatrix} + \mathrm{o}(\| h \|)$$

où M est la matrice de terme général $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. M est la matrice de l'application linéaire df. M s'appelle la **matrice jacobienne** de l'application f. Si la matrice est carrée, son déterminant est appelé **jacobien** de f.

Plus généralement, pour f : E $\to$ F, la matrice de df_a dans une base $(e_1, ..., e_n)$ donnée de E et une base donnée de F est formée des dérivées partielles de f selon les composantes de x relatives à ces bases. La j-ème colonne de la matrice de df_a est en effet $\mathrm{d}f_a(e_j) = \mathrm{D}_{e_j}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

❑ Un cas particulier est celui où f elle-même est linéaire, auquel cas elle est évidemment égale à son approximation linéaire !

$$f(a + h) = f(a) + f(h)$$
$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}f_a(h) = f(h) \quad \text{pour tout } h$$
$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}f_a = f$$

❑ Soit f : $\mathbb{R} \to$ F. Si f est dérivable en a au sens des applications d'une variable réelle, on a, comme pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \mathrm{o}(h)$$

df_a est alors l'application linéaire $h \in \mathbb{R} \to hf'(a) \in$ F.

3- Différentiation d'une fonction composée

PROPOSITION

Supposons que l'on ait E $\xrightarrow{f}$ F $\xrightarrow{g}$ G *avec f différentiable en a et g en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et* :

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_b \circ \mathrm{d}f_a$$

ce qu'on abrège en $\mathrm{d}(g \circ f) = \mathrm{d}g \circ \mathrm{d}f$.

<u>Démonstration</u> :

❑ On a :

$$f(a + h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \mathrm{o}(\| h \|)$$
$$\Rightarrow \qquad g(f(a + h)) = g(f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \mathrm{o}(\| h \|))$$
$$= g(b) + \mathrm{d}g_b(\mathrm{d}f_a(h) + \mathrm{o}(\| h \|)) + \mathrm{o}(\mathrm{d}f_a(h) + \mathrm{o}(\| h \|))$$

Pour conclure, on utilise le fait qu'une application linéaire u sur un espace vectoriel de dimension finie est lipschitzienne. Son plus petit rapport de Lipschitz, une fois choisies les normes sur son espace de départ et d'arrivée, est noté $||| u |||$ (voir L2/EVNORME.PDF). Donc :

$$\| \mathrm{o}(\mathrm{d}f_a(h) + \mathrm{o}(\| h \|) \| \leq \| \mathrm{d}f_a(h) + \mathrm{o}(\| h \|) \| \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$
$$\leq ||| \mathrm{d}f_a ||| \, \| h \| \, \varepsilon(h) + \mathrm{o}(\| h \|)$$
$$\leq ||| \mathrm{d}f_a ||| \, \mathrm{o}(\| h \|) + \mathrm{o}(\| h \|) = \mathrm{o}(\| h \|)$$

On traite de même $\mathrm{d}g_b(\mathrm{o}(\| h \|))$. Donc :

$$g(f(a + h)) = g(b) + \mathrm{d}g_b(\mathrm{d}f_a(h)) + \mathrm{o}(\| h \|)$$

EXEMPLES :

❑ Supposons que l'on ait $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_q \end{pmatrix}$$

Si la matrice jacobienne de f en a est M de terme général $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ et si la matrice jacobienne de g en $b = f(a)$ est N de terme général $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}$, alors la matrice jacobienne de $g \circ f$ est N × M de terme général :

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

En particulier, la composée de deux fonctions de classe C^1 est de classe C^1 (C'est trivialement vérifié pour la somme ou le produit par un scalaire, ou encore pour le produit usuel de fonctions si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on parle de l'algèbre des fonctions de classe C^1 de E à valeurs dans $\mathbb{R}$).

❑ Si on a :

$$E = \mathbb{R} \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} \mathbb{R} = G$$

$$x \to \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_p(x) \end{pmatrix} \to z = g\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix}$$

(autrement dit, g est une fonction de plusieurs variables, dépendant toutes au moyen de f, d'un même paramètre réel x), alors la formule précédente se réduit à :

$$(g \circ f)' = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k} f_k'$$

❑ Si on a :

$$E = \mathbb{R} \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

Alors $d(g \circ f)_a$ est l'application linéaire $h \in \mathbb{R} \to (g \circ f)'(a)h$.

Comme $d(g \circ f)_a(h) = dg_b(df_a(h)) = dg_b(f'(a)h) = dg_b(f'(a))h$, avec $b = f(a)$, on en déduit que :

$$(g \circ f)'(a) = dg_b(f'(a))$$

ou encore :

$$(g \circ f)'(a) = (dg_b \circ f')(a)$$

Le cas particulier fréquent est donné par :

$$\mathbb{R} \to F \to G$$

$$t \to x = a + th \to g(a + th) = \varphi(t)$$

Alors $\varphi'(0) = dg_a(h)$

II : Propriétés

1- Gradient

Pour f de U inclus dans un espace vectoriel euclidien E à valeurs $\mathbb{R}$, df_a est une forme linéaire. Or toute forme linéaire définie sur un espace vectoriel euclidien provient du produit scalaire. Il existe un vecteur, appelé **gradient** de f en a, tel que :

$$\forall\ \boldsymbol{h},\ df_a(\boldsymbol{h}) = \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{grad}(f)(a)\rangle$$

ou, pour abréger :

$$df(\boldsymbol{h}) = \langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{grad}(f)\rangle$$

Avec deux variables, dans $\mathbb{R}^2$, on obtient :

$$df_a(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial f}{\partial x} h_x + \frac{\partial f}{\partial y} h_y \text{ où } h = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \text{ donc } \boldsymbol{grad}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

EXEMPLES :

❑ Energie potentielle d'un dipôle électrique dans un champ électrique.

Considérons un dipôle électrique portant une charge $-q$ en A et q en B. Notons O le milieu de [AB] et $\boldsymbol{a}$ le vecteur $\boldsymbol{OB}$. Plaçons ce dipôle dans un champ électrique, uniforme ou non, dérivant d'un potentiel électrique V. L'énergie potentielle du dipôle est :

$$E_p = qV(B) - qV(A)$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de O de cette expression.

$$\begin{aligned} E_p &= qV(O + \boldsymbol{a}) - qV(O - \boldsymbol{a}) \\ &= q[V(O) + dV(O)(\boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{a})] - q[V(O) - dV(O)(\boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{a})] \\ &= 2q\,dV(O)(\boldsymbol{a}) + o(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

Or V est une fonction de l'espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}$. La différentielle de V appliquée sur un vecteur $\boldsymbol{a}$ n'est autre que le produit scalaire de $\boldsymbol{a}$ par le gradient de V. Par ailleurs, la différentielle étant linéaire, on peut regrouper $2q$ avec $\boldsymbol{a}$, permettant ainsi d'introduire le moment du dipôle $\boldsymbol{p} = 2q\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{AB}$, ce qui donne :

$$E_p = \langle \boldsymbol{grad}(V)(O), \boldsymbol{p}\rangle + o(\boldsymbol{a})$$

Or $-\boldsymbol{grad}(V)$ n'est autre que le champ électrique $\boldsymbol{E}$

$$= -\langle \boldsymbol{E}(O), \boldsymbol{p}\rangle + o(\boldsymbol{a})$$

En général, on néglige le terme $o(\boldsymbol{a})$ devant le terme principal. On trouve donc la formule classique :

$$E_p = -\langle \boldsymbol{E}, \boldsymbol{p}\rangle$$

le champ électrique étant calculé au centre du dipôle.

❑ Reprenons le même exemple que ci-dessus, mais en nous intéressant cette fois à la résultante des forces appliquées sur le dipôle :

<u>Méthode 1</u> : Ecrivons directement que cette résultante vaut :

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(B) - q\boldsymbol{E}(A)$$

Un développement comparable à celui fait précédemment conduit à :

$$\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{E}(O)(\boldsymbol{p}) + o(\boldsymbol{a}) \text{ approximé en } d\boldsymbol{E}(O)(\boldsymbol{p})$$

Mais cette fois $\boldsymbol{E}$ est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Si on introduit la matrice jacobienne de $\boldsymbol{E}$, relativement à une base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, on aura $\boldsymbol{F}$ de composantes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ p_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= (p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

ce qu'on note sous la forme symbolique suivante :

$\boldsymbol{F} = <\boldsymbol{p}, \boldsymbol{grad}> \boldsymbol{E}$

<u>Méthode 2</u> :

On a vu que l'énergie potentielle du dipôle était $E_p = - <\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p}>$, de sorte que :

$\boldsymbol{F} = - \boldsymbol{grad}(E_p) = \boldsymbol{grad}(<\boldsymbol{E}, \boldsymbol{p}>) = \boldsymbol{grad}(E_x p_x + E_y p_y + E_z p_z)$ avec seulement E_x, E_y, E_z fonctions de x, y et z. $\boldsymbol{F}$ a donc pour composantes :

$$\begin{pmatrix} p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ p_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ p_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On retrouve le résultat précédent si on montre que $\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$, $\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$ et $\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$. Or ces relations expriment que $\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$. Le vecteur dans le membre de gauche s'appelle le **rotationnel** de $\boldsymbol{E}$, noté $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E})$ (ou $\nabla \wedge \boldsymbol{E}$ pour les physiciens). L'égalité avec 0 est vraie car $\boldsymbol{E}$ dérive d'un gradient et on vérifiera que $\boldsymbol{Rot} \circ \boldsymbol{grad}$ est identiquement nul (voir le chapitre L2/GRADIVRT.PDF).

PROPOSITION (Extrema d'une fonction)

Si $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ *est une fonction différentiable admettant un extremum en un point* a *de* U, *alors* $\boldsymbol{grad}(f)(a) = 0$.

<u>Démonstration</u> :

❑ Si f admet un extremum en a, il en est de même, pour tout vecteur h, de la fonction d'une variable réelle $\varphi(t) = f(a + th)$ qui admet un extremum en $t = 0$. Si la fonction f est différentiable, φ est dérivable et on a nécessairement $\varphi'(0) = 0$. Puisque $\varphi'(0) = df_a(h) = <h, \boldsymbol{grad}\, f(a)>$, on a pour tout h, $<h, \boldsymbol{grad}\, f(a)> = 0$, donc $\boldsymbol{grad}(f)(a) = 0$.

On pourra se reporter également à la même question dans le chapitre L1/CALCDIF1.PDF.

2- Inégalité des accroissements finis

PROPOSITION (Inégalité des accroissements finis)

(a) *Soit f différentiable sur un ouvert* U *convexe d'un espace euclidien* E *à valeurs réelles. Alors* :

(a.i) $\exists\, k \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{U}, \| \boldsymbol{grad}(f)(x) \| \leq k \Rightarrow \forall\, (a, b) \in \mathrm{U}^2, \left| f(b) - f(a) \right| \leq k \| b - a \|$

où $\| \ \|$ *est la norme euclidienne.*

(a.ii) *f est constante sur* U $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{grad}(f) = 0$ *sur* U.

(b) *Soit f différentiable sur un ouvert* U *convexe de* E *dans* F.

(b.i) *On suppose qu'il existe un réel k tel qu'en tout point x de* U, *la différentielle* $\mathrm{d}f_x$ *soit lipschitzienne de rapport k. Alors* :

$$\forall\, (a, b) \in \mathrm{U}^2, \| f(b) - f(a) \| \leq k \| b - a \|$$

(b.ii) *f est constante* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{d}f$ *est identiquement nulle.*

U **convexe** signifie que :

$$\forall\, a \in \mathrm{U}, \forall\, b \in \mathrm{U}, \forall\, t \in [0, 1], a + t(b - a) = (1 - t)a + tb \in \mathrm{U}$$

<u>Démonstration</u> :

❑ (a.i) : Le fait que U soit convexe permet de se ramener au cas d'une fonction d'une variable réelle.

Posons $\boldsymbol{u} = b - a$ et considérons $\varphi(t) = f(a + t\boldsymbol{u})$, fonction composée $t \xrightarrow{g} a + t\boldsymbol{u} \xrightarrow{f} f(a + t\boldsymbol{u}) = \varphi(t)$. f et g sont différentiables.

La différentielle de f en $a + t\boldsymbol{u}$ est l'application linéaire :

$$\mathrm{d}f_{a+t\boldsymbol{u}} : \boldsymbol{v} \in \mathrm{E} \to \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{grad}(f)(a + t\boldsymbol{u}) \rangle$$

La différentielle de g en t, fonction dérivable, est simplement le produit par la dérivée :

$$\mathrm{d}g_t : h \in \mathbb{R} \to hg'(t) = h\boldsymbol{u}$$

Donc φ est différentiable en t et sa différentielle est la composée des différentielles ci-dessus :

$$\mathrm{d}\varphi_t : h \in \mathbb{R} \to h\boldsymbol{u} \to \langle h\boldsymbol{u}, \boldsymbol{grad}(f)(a + t\boldsymbol{u}) \rangle = h\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{grad}\, f(a + t\boldsymbol{u}) \rangle$$

φ étant une fonction d'une variable réelle, cela prouve que φ est dérivable en t et que sa dérivée vaut $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{grad}(f)(a + t\boldsymbol{u}) \rangle$. On a alors :

$$\varphi'(t) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{grad}(f)(a + t\boldsymbol{u}) \rangle$$

$\Rightarrow \quad \left| \varphi'(t) \right| \leq \| \boldsymbol{u} \| \, \| \boldsymbol{grad}(f)(a + t\boldsymbol{u}) \|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$\Rightarrow \quad \left| \varphi'(t) \right| \leq k \| \boldsymbol{u} \|$ d'après l'hypothèse sur le gradient de f

$\Rightarrow \quad \left| \varphi(1) - \varphi(0) \right| \leq k \| \boldsymbol{u} \|$ d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction d'une variable réelle φ entre 0 et 1

$\Rightarrow \quad \left| f(b) - f(a) \right| \leq k \| b - a \|$

❑ (a.ii) : Si f est constante, sa différentielle est nulle, donc son gradient aussi.

Réciproquement, si son gradient est identiquement nul, on prend $k = 0$ dans (a.i) et on obtient que, pour tout a et b dans U, $f(b) = f(a)$. Donc f est constante.

❑ (b.i) <u>Cas 1</u> : Si E et F sont tous deux euclidiens, on se ramène au (a.i) de la façon suivante. Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur unitaire de F, colinéaire et de même sens que le vecteur $f(b) - f(a)$. De la sorte :

$$\| f(b) - f(a) \| = \langle f(b) - f(a), \boldsymbol{v} \rangle$$

Considérons alors la fonction $\tilde{f}$ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \in U \to \tilde{f}(x) = <f(x), \boldsymbol{v}>$. $\tilde{f}$ est la composée des deux fonctions $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{<\cdot, \boldsymbol{v}>} <f(x), \boldsymbol{v}>$. La première est différentiable de différentielle df_x. La deuxième est le produit scalaire à droite par $\boldsymbol{v}$, donc est linéaire, donc est égale à sa différentielle. $\tilde{f}$ est donc différentiable et sa différentielle est l'application linéaire :

$$\boldsymbol{u} \in E \to <df_x(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{u}, (df_x)^*(\boldsymbol{v})>$$

où l'application linéaire $(df_x)^* : F \to E$ est l'adjoint de l'application linéaire $df_x : E \to F$ (voir le chapitre L2/PREHILB.PDF pour la notion d'adjoint, qui n'est autre que de vérifier l'égalité ci-dessus). Donc :

$$<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{grad}(\tilde{f})(x)> = d\tilde{f}_x(\boldsymbol{u}) = <\boldsymbol{u}, (df_x)^*(\boldsymbol{v})>$$

Cette égalité étant vraie pour tout $\boldsymbol{u}$, on a :

$$\boldsymbol{grad}(\tilde{f})(x) = (df_x)^*(\boldsymbol{v})$$

Vérifions que, si df_x est lipschitzienne de rapport k, alors $(df_x)^*$ aussi. Soit $\boldsymbol{w}$ un vecteur quelconque de F, et $\boldsymbol{z}$ un vecteur unitaire de E, colinéaire et de même sens de $(df_x)^*(\boldsymbol{w})$. On a :

$$\begin{aligned}
\| (df_x)^*(\boldsymbol{w}) \| &= <(df_x)^*(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}> \\
&= <\boldsymbol{w}, df_x(\boldsymbol{z})> && \text{par définition de l'adjoint} \\
&\leq \| \boldsymbol{w} \| \, \| df_x(\boldsymbol{z}) \| && \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leq k \| \boldsymbol{w} \| \, \| \boldsymbol{z} \| && \text{car } df_x \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \\
&\leq k \| \boldsymbol{w} \| && \text{car } z \text{ est unitaire}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\| \boldsymbol{grad}(\tilde{f})(x) \| &= \| (df_x)^*(\boldsymbol{v}) \| \\
&\leq k \| \boldsymbol{v} \| = k && \text{car } v \text{ est unitaire}
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer (a.i) à la fonction $\tilde{f}$ et on obtient :

$$\left| \tilde{f}(b) - \tilde{f}(a) \right| \leq k \| b - a \|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| <f(b), \boldsymbol{v}> - <f(a), \boldsymbol{v}> \right| \leq k \| b - a \| \quad \text{par définition de } \tilde{f}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| <f(b) - f(a), \boldsymbol{v}> \right| \leq k \| b - a \|$$

$$\Leftrightarrow \quad \| f(b) - f(a) \| \leq k \| b - a \| \quad \text{par définition de } \boldsymbol{v}$$

❑ (b.i) <u>Cas 2</u> : Si E et F sont munis de normes quelconques, on se bornera à effectuer la démonstration dans le cas où f est C^1. La fonction composée $\varphi : t \to a + t(b - a) \to f(a + t(b - a))$ est alors C^1 de dérivée $\varphi'(t) = df_{a+t(b-a)}(b - a)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
f(b) - f(a) &= \varphi(1) - \varphi(0) \\
&= \int_0^1 \varphi'(t) \, dt \\
&= \int_0^1 df_{a+t(b-a)}(b - a) \, dt
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\| f(b) - f(a) \| &\leq \int_0^1 \| df_{a+t(b-a)}(b - a) \| \, dt \\
&\leq \int_0^1 k \| b - a \| \, dt && \text{car } df_x \text{ est } k\text{-lipschitzienne}
\end{aligned}$$

$\leq k \| b - a \|$

Le point délicat est la première inégalité. Elle repose sur la propriété que la norme d'une intégrale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles est inférieure ou égale à l'intégrale de la norme de cette fonction. Pour une fonction en escalier à valeurs vectorielles, c'est simplement l'inégalité triangulaire vérifiée par la norme d'une somme finie. Le cas d'une fonction continue se prouve par passage à la limite en approximant uniformément la fonction continue par une suite de fonctions en escalier.

❑ (b.ii) : Si f est constante, sa différentielle est nulle en tout point.
Réciproquement, si sa différentielle est identiquement nulle, prendre $k = 0$ dans (b.i) et conclure comme on l'a fait dans (a.ii).

Les conclusions du (a.ii) et du (b.ii) s'étendent à des ouverts U plus généraux que des ouverts convexes, à savoir les ouverts connexes (voir leur définition dans le chapitre L3/TOPOLOG.PDF). En effet, (a.ii) et (b.ii) montrent qu'une fonction f dont le gradient ou la différentielle est identiquement nulle est constante sur toute boule de U (puisqu'une boule est convexe). f est alors dite **localement constante**. On montre ensuite que, dans un ouvert connexe, une fonction localement constante est constante. On voit un exemple de ce type de démonstration dans le chapitre L3/HOLOMRPH.PDF.

EXEMPLE :
❑ Soit f définie sur un ouvert convexe tel que df soit égale en tout point à une même application linéaire L. Alors f = L + Cte.
En effet, f – L a une différentielle nulle en tout point sur un ouvert convexe, donc est constante.

3- Difféomorphismes, inversion locale

DEFINITION
Un **difféomorphisme** *f d'un ouvert* U *de* E *sur un ouvert* V *de* F *est une application de classe* C^1, *bijective et telle que sa réciproque est de classe* C^1.

L'application f permet alors d'effectuer des changements de variables. On a nécessairement dim(E) = dim(F). En effet, en notant $g = f^{-1}$ et en se plaçant en un point x quelconque, on a :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}g_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x = \mathrm{d}(\mathrm{Id}_E)_x = \mathrm{Id}_E$$

et de même :

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}f_x \circ \mathrm{d}g_{f(x)} = \mathrm{d}(\mathrm{Id}_F)_{f(x)} = \mathrm{Id}_F$$

ce qui prouve que $\mathrm{d}f_x$ et $\mathrm{d}g_{f(x)}$ sont des isomorphismes linéaires réciproques l'un de l'autre et donc que dim(E) = dim(F).

Il ne suffit pas que f soit bijective et C^1 pour que la réciproque soit C^1. C'est déjà faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (prendre $x \to x^3$).

Il peut être difficile d'expliciter f^{-1} et donc de prouver que f est un difféomorphisme. Pour ce faire, nous disposons des résultats suivants :

THEOREME D'INVERSION LOCALE

Soit f une fonction d'un ouvert U *de* E *dans* F*, de classe* C^1*, et soit a un point de* U*. On suppose que* d$f(a)$ *est inversible. Alors il existe un voisinage* U' *de a inclus dans* U *et un voisinage* W *de* $f(a)$ *tels que f soit un difféomorphisme de* U' *sur* W.

Ce théorème affirme deux choses :

f est bijective de U' sur W,

f^{-1} est C^1.

Par contre, il ne donne pas explicitement la façon de déterminer U' et W.
La démonstration est donnée dans l'annexe VI.

EXEMPLE :

❑ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Le jacobien de f est :

$$\begin{vmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin(\theta)$$

f correspond au changement de variables en coordonnées sphériques. f est localement bijective sauf si $r = 0$, et f^{-1} est C^1.

PROPOSITION

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels de même dimension et soit* $f : U \subset E \to V \subset F$ *une fonction bijective,* C^1 *et telle que son jacobien ne s'annule pas sur* U*. Alors f est un difféomorphisme.*

Autrement dit, pour f bijective et C^1, on saura que f^{-1} est C^1 en se contentant de calculer le jacobien de f et en vérifiant qu'il ne s'annule pas sur U. On n'a pas besoin d'expliciter f^{-1}. Cependant, il peut être difficile de montrer que f est bijective. Pour y parvenir, on est souvent contraint de diminuer la taille de U et de V.

Pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on reconnaîtra le fait que, pour f bijective de classe C^1, f^{-1} est C^1 si f' ne s'annule pas. On sait en outre que, dans ce cas, $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'(f^{-1})}$. Ce n'est que le cas particulier de la formule vue précédemment : si $g = f^{-1}$, df_x et $dg_{f(x)}$ sont réciproques l'un de l'autre. Ou encore, si $y = f(x)$:

$$d(f^{-1})_y = (df_x)^{-1} = (df_{f^{-1}(y)})^{-1}$$

<u>Démonstration</u> :

❑ Le théorème d'inversion locale permet de dire que, pour tout x de E, il existe un voisinage de x et un voisinage de $f(x)$ tels que f^{-1} est C^1 depuis le voisinage de x sur le voisinage de $f(x)$. f^{-1} étant C^1 sur un voisinage de chaque élément de V, f^{-1} est C^1 sur V et f est un difféomorphisme.

EXEMPLES :

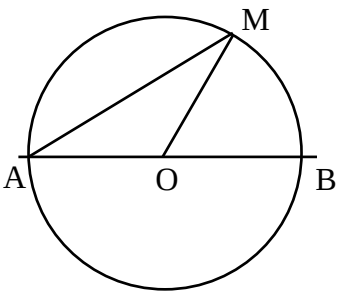
❑ Changement de coordonnées en polaire :

$(r, \theta) \to (x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = f(r, \theta)$ est une fonction de classe C^1.

Sa matrice jacobienne est $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Son jacobien est r. Il est non nul pour r non nul. Cependant, f n'est pas bijective, même si on suppose r non nul. θ est en effet défini à 2π près. Par contre, si on restreint l'espace de départ à $U =]0, \infty[\times]-\pi, \pi[$ et celui d'arrivée à V égal à $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $\{(x,y) \mid y = 0,\ x < 0\}$, alors f est bijective et C^1, donc est un difféomorphisme d'après la proposition. La matrice jacobienne de f^{-1} est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

On a donc $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ce qu'on peut retrouver à partir de $r = \sqrt{x^2+y^2}$, mais on a également $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$ sans qu'il soit nécessaire d'avoir une expression explicite de θ en fonction de (x, y) sur tout le domaine considéré. Une telle expression peut être cependant obtenue de la façon suivante. Soit M le point (x, y). Traçons le cercle de centre O = (0, 0) passant par M. Ce cercle a pour rayon r. Soit A le point $(-r, 0)$ et B le point $(r, 0)$.



L'angle BOM vaut θ, et l'angle BAM vaut $\frac{\theta}{2}$ (voir *angle inscrit* dans L2/GEOMEUCL), de sorte que $\tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{y}{x+r}$. On obtient donc :

$$\theta(x, y) = 2\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$$

On pourra alors vérifier les valeurs trouvées plus haut pour $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial y}$

❑ Soit Γ un arc paramétré de E, donné par le paramétrage $t \in \mathbb{R} \to \varphi(t) \in E$. En un point régulier de Γ (i.e. où la dérivée de φ est non nulle), la tangente est dirigée par le vecteur $\varphi'(t)$. Soit f un difféomorphisme de E dans F. Alors $t \to f(\varphi(t))$ défini un paramétrage de la courbe $f(\Gamma)$ dans F. Si tous les points de Γ sont réguliers, il en est de même de ceux de $f(\Gamma)$ puisque l'on a :

$$(f \circ \varphi)'(t) = df(\varphi(t))(\varphi'(t))$$

En effet, $\varphi'(t)$ étant un vecteur non nul et df étant inversible en tout point, le vecteur ci-dessus est non nul. Il s'agit du vecteur tangent en $f(\varphi(t))$ à $f(\Gamma)$.

4- L'équation des ondes

Les difféomorphismes permettent d'effectuer des changements de variables pouvant rendre des problèmes plus facile à résoudre. On en voit des exemples dans les exercices du chapitre L1/CALCDIF1.PDF portant sur la résolution d'équations aux dérivées partielles, même si le terme *difféomorphisme* n'est pas utilisé dans ledit chapitre. Traitons ici le cas de l'équation des ondes, qui a pour expression :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

où c est une constante strictement positive. f est supposée C^2. En physique, x représente une abscisse, t le temps, c une vitesse, f l'amplitude d'une onde qui se propage. On expliquera plus bas pourquoi on obtient une telle modélisation d'une onde.

❑ <u>*RESOLUTION DE L'EQUATION DES ONDES*</u> :

L'équation se résout en faisant le changement de variables $u = x - ct$ et $v = x + ct$. L'application $(x, t) \to (x - ct, x + ct) = (u, v)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$, de réciproque $(u, v) \to (\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c})$, et donc un difféomorphisme. On a alors :

$$(x, t) \to (u, v) \to F(u, v) = F(x - ct, x + ct) = f(x, t)$$

La dérivation de fonctions composées conduit à :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = -c\frac{\partial F}{\partial u} + c\frac{\partial F}{\partial v}$$

En ce qui concerne la première égalité, elle correspond à la composition de fonctions suivante :

$$(x, t) \to (u, v) \to (\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v})(u, v) = (\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v})(x - ct, x + ct) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$$

En appliquant de nouveau la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}) + \frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

On a utilisé le théorème de Schwarz pour remplacer $\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$ par $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$, les fonctions étant supposées C^2.

Dême :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2})$$

L'équation des ondes se ramène alors à :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \psi(v)$ pour une certaine fonction ψ de classe C^1

$\Leftrightarrow \quad F = \Phi(u) + \Psi(v)$ où Ψ est une primitive de ψ

$\Leftrightarrow \quad f(x, t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct)$

Le résultat s'interprète comme la superposition de deux ondes, l'une Φ se déplaçant vers la droite à la vitesse c, l'autre Ψ vers la gauche à la vitesse $-c$.

EXEMPLES :

❑ Résoudre l'équation des ondes vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall\, x,\ f(x, 0) = \sin(x) \\ \forall\, t,\ f(0, t) = \sin(t) \end{cases}$$

Si $f(x, t)$ représente l'ordonnée à l'instant t d'un point d'une corde vibrante situé à l'abscisse x (on voit un peu plus loin pourquoi une modélisation d'une telle corde vérifie l'équation des ondes), la première égalité donne la position initiale de la corde, et la deuxième décrit le mouvement du point d'abscisse nulle.

On a vu qu'il existe Φ et Ψ telles que : $\forall\, x, \forall\, t,\ f(x, t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct)$. On veut donc que :

$$\begin{cases} \forall\, x,\ \sin(x) = \Phi(x) + \Psi(x) \\ \forall\, t,\ \sin(t) = \Phi(-ct) + \Psi(ct) \end{cases}$$

On peut écrire la deuxième égalité sous la forme : $\forall\, x,\ \Phi(-x) + \Psi(x) = \sin(\frac{x}{c})$ en posant $t = \frac{x}{c}$. Si l'on décompose les fonctions $\Phi = \Phi_p + \Phi_i$ et $\Psi = \Psi_p + \Psi_i$ avec Φ_p et Ψ_p paires, Φ_i et Ψ_i impaires (voir le chapitre L1/ESPVECT.PDF pour la preuve de l'existence et de l'unicité d'une telle décomposition), on obtient les équations :

$$\begin{cases} \Phi_i(x) + \Psi_i(x) = \sin(x) \\ \Phi_p(x) + \Psi_p(x) = 0 \\ -\Phi_i(x) + \Psi_i(x) = \sin(\frac{x}{c}) \end{cases}$$

ce qui permet de déterminer Φ_i et Ψ_i, à savoir :

$$\begin{cases} \Phi_i(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{c}) \\ \Psi_i(x) = \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{c}) \end{cases}$$

Les parties paires vérifient $\psi_p = -\Phi_p = h$ fonction arbitraire paire. Les solutions sont donc :

$$f(x, t) = \frac{1}{2}\sin(x - ct) - \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{c} - t) + \frac{1}{2}\sin(x + ct) + \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{c} + t) + h(x - ct) - h(x + ct)$$

Il ne suffit pas de connaître la position initiale d'une corde vibrante et le mouvement d'un de ses points pour que le mouvement global de la corde soit connu.

❑ g et h étant deux fonctions données (respectivement C^2 et C^1), résoudre l'équation des ondes vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall\, x,\ f(x, 0) = g(x) \\ \forall\, x,\ \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Si $f(x, t)$ représente l'ordonnée à l'instant t d'un point d'une corde vibrante situé à l'abscisse x, la première égalité donne la position initiale de la corde, et la deuxième donne la vitesse initiale de chacun de ses points.

On a vu qu'il existe Φ et Ψ telles que : $\forall\, x, \forall\, t,\ f(x, t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct)$. On veut donc que :

$$\begin{cases} \forall\, x,\ \Phi(x) + \Psi(x) = g(x) \\ \forall\, x,\ -c\Phi'(x) + c\Psi'(x) = h(x) \end{cases}$$

Si on dérive la première égalité, on obtient $\Phi'(x) + \Psi'(x) = g'(x)$, donc :

$$\begin{cases} \Phi'(x) = \dfrac{cg'(x) - h(x)}{2c} \\ \Psi'(x) = \dfrac{cg'(x) + h(x)}{2c} \end{cases}$$

Donc il existe des constantes λ et μ telles que :

$$\left[\begin{array}{l} \Phi(x) = \dfrac{g(x)}{2} - \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^x h(z)\,\mathrm{d}z + \lambda \\[2ex] \Psi(x) = \dfrac{g(x)}{2} + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^x h(z)\,\mathrm{d}z + \mu \end{array}\right.$$

On en déduit que, nécessairement :

$$f(x, t) = \frac{g(x - ct) + g(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(z)\,\mathrm{d}z + \lambda + \mu$$

La condition $f(x, 0) = g(x)$ impose alors que $\lambda + \mu = 0$. On obtient donc la solution unique :

$$f(x, t) = \frac{g(x - ct) + g(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(z)\,\mathrm{d}z$$

On pourra vérifier que la deuxième équation $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = h(x)$ est bien satisfaite.

Ainsi, si on se donne la position initiale de la corde et la vitesse initiale de chacun de ses points, le mouvement de la corde est défini de manière unique.

❑ Pour une onde se propageant dans l'espace de dimension 3, l'équation des ondes s'écrit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

La quantité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ s'appelle **laplacien** de f et se note usuellement Δf.

Résolvons cette équation dans le cas d'une onde sphérique, c'est-à-dire telle que f ne dépende que de la distance r de (x, y, z) à un point O = (0, 0, 0). Dans les exercices du chapitre L1/CALCDIF1.PDF, on a exprimé le laplacien d'une fonction f qui ne dépend que de (r, t). On trouve aussi cette expression dans le chapitre L2/GRADIVRT.PDF :

$$\Delta f = \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

On doit donc résoudre :

$$\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Soit g une fonction de (r, t) telle que $f = \dfrac{g}{r}$. On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{g}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{2g}{r^3} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$$

L'équation des ondes devient :

$$-\frac{2g}{r^3} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{2g}{r^3} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$$

On obtient une équation des ondes ordinaire sur g, dont les solutions sont $\Phi(r - ct) + \Psi(r + ct)$. On obtient donc, pour solutions f :

$$f(r, t) = \frac{1}{r}\Phi(r - ct) + \frac{1}{r}\Psi(r + ct)$$

superposition de deux ondes, la première issue de O, la seconde se dirigeant vers O, et dont l'amplitude tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$.

❑ *EXEMPLES DE MODÉLISATION* :

L'équation des ondes intervient dans de très nombreux domaines en physique. Nous en donnons trois exemples.

- **Equation des ondes en électromagnétisme**. Les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = 0$$
$$\mathrm{div}(\boldsymbol{B}) = 0$$
$$\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B}) = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

où $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ désignent le champ électrique et magnétique, fonction de la position et du temps. μ_0 et ε_0 sont deux constantes. div($\boldsymbol{E}$), appelée **divergence**, désigne la fonction $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$, où ($E_x$, E_y, E_z) sont les composantes de $\boldsymbol{E}$ dans une base donnée (voir le chapitre L2/GRADIVRT.PDF). On suppose les fonctions $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ au moins de classe C^2. On en déduit :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B}))$$ en dérivant la quatrième équation de Maxwell par rapport à t

$$= \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\boldsymbol{Rot}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$$ en utilisant le théorème de Schwarz

$$= -\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E}))$$ en utilisant la troisième équation de Maxwell.

Or, on pourra vérifier que $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E})) = \boldsymbol{grad}(\mathrm{div}(\boldsymbol{E})) - \Delta\boldsymbol{E}$ où $\Delta = \mathrm{div} \circ \boldsymbol{grad}$ est le **laplacien**, appliqué à chaque composante de $\boldsymbol{E}$. Comme div($\boldsymbol{E}$) = 0, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\Delta\boldsymbol{E}$$

On obtient une équation identique pour $\boldsymbol{B}$. Si on se limite à la propagation de l'onde électromagnétique dans une seule direction (onde plane), par exemple selon Ox, et si on suppose $\boldsymbol{E}$ fonction uniquement de x et t, l'équation se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2}$$

L'onde se propage à la vitesse c telle que $c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$.

- **Equation des ondes longitudinales**.

On considère une tige rectiligne de longueur au repos L de masse linéique λ et soumise à des vibrations longitudinales, c'est-à-dire que les points de la tige peuvent se déplacer de part et d'autre de leur position d'équilibre, parallèlement à la tige. On écrira aussi $\lambda = \rho S$ où ρ est la masse

volumique et S l'aire d'une section transversale de la tige. On note $u(x, t)$ le déplacement à l'instant t du point qui était initialement à l'abscisse x. On discrètise le problème en considérant que la tige est constituée de $n + 1$ masses ponctuelles de masse m séparées par n ressorts de raideur k.

La longueur séparant chaque masse est $l = \frac{\mathrm{L}}{n}$, longueur au repos des ressorts. Notons $x_i = \frac{i\mathrm{L}}{n}$ la position au repos de la $i^{\text{ème}}$ masse. Notons u_i le déplacement de la masse i le long de la tige, de sorte que $u_i(t) = u(x_i, t)$. La loi fondamentale de la mécanique appliquée à la $i^{\text{ème}}$ masse (en dehors des deux extrémités) donne :

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2} = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}) = k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

$\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2}$ n'est autre que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ calculé en x_i. Par ailleurs, si n tend vers $+\infty$, l tend vers 0 et l'on peut effectuer un développement limité de u_{i+1} et de u_{i-1} sous la forme :

$$u_{i+1}(t) = u(x_{i+1}, t) = u(x_i + l, t) = u(x_i, t) + l\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{o}(l^2) = u_i + l\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{o}(l^2)$$

les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ étant calculées en x_i et à l'instant t

De même :

$$u_{i-1}(t) = u(x_{i-1}, t) = u(x_i - l, t) = u(x_i, t) - l\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{o}(l^2) = u_i - l\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{o}(l^2)$$

L'équation devient :

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = kl^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{o}(l^2)$$

Relions les quantités m et k à des grandeurs macroscopiques liées à la tige. $\frac{m}{l}$ n'est autre que la masse linéique λ. Par ailleurs, on définit le module d'élasticité d'Young, noté E (en $\mathrm{N}m^{-2}$), comme le coefficient vérifiant :

$$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{L}} = \frac{f}{\mathrm{E}}$$

où f est une force par unité de surface exercée à une extrémité de la tige pour l'allonger de dL. Si S est la section de la tige, la force totale exercée est $\mathrm{F} = f\mathrm{S}$, et l'allongement de chaque ressort sera de $\frac{\mathrm{F}}{k}$. L'allongement total sera $\frac{n\mathrm{F}}{k} = \mathrm{dL}$. La relation $\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{L}} = \frac{f}{\mathrm{E}}$ s'écrit donc $\frac{n\mathrm{F}}{k\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{SE}}$, d'où $k = \frac{n\mathrm{SE}}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{SE}}{l}$.

L'équation $m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = kl^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{o}(l^2)$ devient alors :

$$\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{SE}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{o}(l)$$

Si on fait tendre n vers $+\infty$ et donc l vers 0, on obtient à la limite :

$$\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{SE}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{\mathrm{SE}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\mathrm{E}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

On reconnaît une équation des ondes, avec une vitesse de propagation $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

- **Equation des ondes transversales**

On considère ici une corde rectiligne soumise à une tension T. Un point de la corde est repéré par son abscisse x. On suppose que, à l'instant t, ce point s'écarte de sa position initiale d'une distance $u(x, t)$, perpendiculairement à la corde. Tous les déplacements seront supposés dans le même plan. Comme précédemment on discrétise le problème en supposant que la corde est constituée d'une chapelet de masses m, distantes les unes des autres d'une longueur h. L'abscisse de la i-ème masse est $x = ih$. Son écartement est mesuré suivant un axe y, de sorte que le point déplacé occupe la position $(x, u(x, t))$. Il est soumis à deux forces, l'une due à la tension entre lui-même et le point suivant $(x + h, u(x + h, t))$, l'autre due à la tension entre lui-même et le point précédent $(x – h, u(x – h, t))$. Les projections de ces deux forces sur l'axe y, en supposant u petit devant h ont respectivement pour valeur algébrique $\mathrm{T}\,\frac{u(x + h, t) – u(x, t)}{h}$ et $\mathrm{T}\,\frac{u(x – h, t) – u(x, t)}{h}$. L'application du principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{T}\,\frac{u(x + h, t) – u(x, t)}{h} + \mathrm{T}\,\frac{u(x – h, t) – u(x, t)}{h} = \mathrm{T}\,\frac{u(x + h, t) – 2u(x, t) + u(x – h, h)}{h}$$

Si on effectue un développement limité au second ordre de la fonction :

$$h \to \frac{u(x + h, t) – 2u(x, t) + u(x – h, h)}{h}$$

on obtient :

$$m\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{T}h\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{o}(h)$$

Divisant par h et faisant tendre h vers 0, $\frac{m}{h}$ devient la masse par unité de longueur λ. On obtient l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mathrm{T}}{\lambda}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ayant une vitesse de propagation $c = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\lambda}}$.

5- Le théorème des fonctions implicites

Soit f une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, de classe C^1. Ecrivons-la sous la forme :

$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ f_p(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

On s'intéresse à l'ensemble $\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$. Un point x de cet ensemble est constitué de n coordonnées $(x_1, ..., x_n)$, reliées entre elles par les p relations $f_i(x) = 0$, $1 \leq i \leq p$, ce qui laisse espérer qu'on puisse trouver, au moins localement, $n – p$ composantes indépendantes, les autres s'exprimant en fonction de celles-là. Par exemple, dans le cas où $n = 3$ et $p = 2$, S est l'intersection dans $\mathbb{R}$ des deux surfaces d'équation $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ et $f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$, et est généralement une courbe. On souhaite exprimer deux coordonnées d'un point de cette courbe comme fonction de la troisième, obtenant ainsi un paramétrage de la courbe. Cette intuition est précisée par le théorème suivant :

THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES

Avec les notations précédentes, soit a un point de S. *On suppose que le déterminant* $\det((\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{1\le i\le p,\, n-p+1\le j\le n})$ *est non nul au point a. On note* π *le projecteur suivant* :

$$\pi : (x_1, ..., x_{n-p}, x_{n-p+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \to (x_1, ..., x_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-p}$$

Alors :

(i) *Il existe un voisinage* V *de a et un voisinage* V' *de* $\pi(a)$ *satisfaisant les propriétés suivantes* :

pour tout x élément de $S \cap V$, $\pi(x)$ *est élément de* V',

et *pour tout* $(x_1, ..., x_{n-p})$ *élément de* V', *il existe un unique p-uplet* $(x_{n-p+1}, ..., x_n)$ *tel que* $x = (x_1, ..., x_n)$ *soit élément de* $S \cap V$.

(ii) *L'unicité précédente permet de définir une relation fonctionnelle* :

$$\varphi : (x_1, ..., x_{n-p}) \in V' \to (x_{n-p+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^p$$

Cette fonction φ *est* C^1.

La fonction φ vérifie donc :

$$x \in S \cap V \Leftrightarrow (x_1, ..., x_{n-p}) \in V' \text{ et } (x_{n-p+1}, ..., x_n) = \varphi(x_1, ..., x_{n-p})$$

φ permet de définir un paramétrage de l'ensemble S au voisinage de a :

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_{n-p} \end{pmatrix} \in V' \to x = \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi(\xi) \end{pmatrix} \in S \cap V$$

Les p variables $\begin{pmatrix} x_{n-p+1} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ qui sont définies à partir des paramètres $\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_{n-p} \end{pmatrix}$ sont celles par rapport auxquelles on dérive les p fonctions f_i pour vérifier si le déterminant des dérivées partielles est non nul.

L'hypothèse demandée sur le déterminant exprime que les p différentielles $df_1(a)$ ..., $df_p(a)$ forment un système de p formes linéaires qui est de rang p, donc qui sont linéairement indépendantes, ou encore que les p gradients $\boldsymbol{grad}(f_1)(a)$, ..., $\boldsymbol{grad}(f_p)(a)$ sont des vecteurs linéairement indépendants.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : On applique le théorème d'inversion locale en a à la fonction F : $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_{n-p} \\ f_1(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ f_p(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$. F est C^1 et sa matrice jacobienne est de la forme $\begin{pmatrix} I_{n-p} & O \\ A & B \end{pmatrix}$, où le bloc B est précisément formé des coefficients $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $1 \le i \le p$, $n - p + 1 \le j \le n$. Or on a supposé que $\det(B) \neq 0$. Par conséquent, cette matrice jacobienne $\begin{pmatrix} I_{n-p} & O \\ A & B \end{pmatrix}$ est inversible, et $dF(a)$ aussi. On peut donc inverser localement F. F est

un difféomorphisme d'un voisinage V de a sur un voisinage W de F(a), avec F(a) = $\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_{n-p} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ car a est supposé appartenir à S :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = F^{-1}(y) \in V \leftrightarrow F(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-p} \\ f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = y \in W$$

Appliquons cette correspondance lorsque x est dans S $\cap$ V. Puisque $f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0$ dans ce cas, la correspondance est :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = F^{-1}(y) \in S \cap V \leftrightarrow F(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-p} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_{n-p} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = y \in W \cap H$$

où H est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ d'équations $y_{n-p+1} = \dots = y_n = 0$.

Posons V' = π(W $\cap$ H) et vérifions que V' est un voisinage de $\pi(a)$. Munissons par exemple $\mathbb{R}^n$ de la norme :

$$\| (x_1, \dots, x_n) \| = \text{Max } \{|x_i|, 1 \le i \le n\}$$

W étant un voisinage de F(a), il contient une boule B(F(a), R) de centre F(a) et de rayon R > 0 :

$$B(F(a), R) = \{y \in \mathbb{R}^n, \| y - F(a) \| < R\}$$

$$= \{(y_1, \dots, y_n) \mid \forall\, i \in [\![1, n-p]\!], |y_i - a_i| < R \text{ et } \forall\, i \in [\![n-p+1, n]\!], |y_i| < R\}$$

W $\cap$ H contient B(F(a), R) $\cap$ H = $\{(y_1, \dots, y_{n-p}, 0, \dots, 0) \mid \forall\, i \in [\![1, n-p]\!], |y_i - a_i| < R\}$

V' = π(W $\cap$ H) contient π(B(F(a), R) $\cap$ H) = $\{(y_1, \dots, y_{n-p}) \mid \forall\, i \in [\![1, n-p]\!], |y_i - a_i| < R\}$ qui est la boule de centre $\pi(a)$ et de rayon R. V' est donc bien un voisinage de $\pi(a)$.

Si x est élément de S $\cap$ V, y = F(x) est élément de W $\cap$ H et :

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_{n-p} \end{pmatrix} = \pi(y) \in \pi(W \cap H) = V'$$

Réciproquement, soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-p} \end{pmatrix}$ élément de V' = π(W $\cap$ H), donc image par π d'un élément y de W $\cap$ H. y n'est autre que $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-p} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$. y est élément de W donc il existe un élément x de V tel que F(x) = y. y est aussi élément de H donc l'élément x trouvé vérifie :

$\forall\ i \in [\![1, p]\!],\ f_i(x) = y_{n-p+i} = 0$

donc x appartient aussi à S.

On a donc montré que pour tout $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-p} \end{pmatrix}$ élément de V', il existe $\begin{pmatrix} x_{n-p+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ soit élément de S $\cap$ V. Il suffit de prendre $x = \mathrm{F}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-p} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cette solution x est la seule possible, car si x est un élément de S $\cap$ V vérifiant $\pi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-p} \end{pmatrix}$, alors nécessairement, $\mathrm{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-p} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ et F est bijective.

❑ (ii) : La fonction φ cherchée est constituée des p dernières composantes de F^{-1} appliquée sur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-p} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$. Puisque F est un difféomorphisme, F^{-1} est C^1, donc φ également.

❑ Montrons comment calculer la différentielle de φ. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ de S $\cap$ V, notons $\xi = (x_1, \dots, x_{n-p})$, de sorte que $x = (\xi, \varphi(\xi))$. On a donc $f(\xi, \varphi(\xi)) = f(x) = 0$ pour tout ξ de V'. Différentions la fonction composée $\xi \xrightarrow{\Phi} x = \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi(\xi) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(x) = f(\xi, \varphi(\xi))$. Comme $f \circ \Phi = 0$, on a également :

$$\mathrm{d}f_x \circ \mathrm{d}\Phi_\xi = 0$$

Notons $\mathrm{J}(f)$ la matrice de $\mathrm{d}f_x$ (matrice jacobienne de f en x), élément de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$. En reprenant les notations de la première partie de la démonstration, on a $\mathrm{J}(f) = (\mathrm{A}\ \mathrm{B})$, A élément de $\mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$, B élément de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$. On rappelle que $\det(\mathrm{B}) \neq 0$.

Notons $\mathrm{J}(\varphi)$ la matrice de $\mathrm{d}\varphi_\xi$, élément de $\mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$, et $\mathrm{J}(\Phi)$ celle de $\mathrm{d}\Phi$, élément de $\mathcal{M}_{n,n-p}(\mathbb{R})$. On a $\mathrm{J}(\Phi) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-p} \\ \mathrm{J}(\varphi) \end{pmatrix}$.

La relation $0 = \mathrm{d}f_x \circ \mathrm{d}\Phi_\xi$ s'écrit matriciellement sous la forme :

$$(\mathrm{A}\ \mathrm{B})\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-p} \\ \mathrm{J}(\varphi) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{A} + \mathrm{B}\mathrm{J}(\varphi) = 0$$

$\Leftrightarrow \qquad J(\varphi) = -B^{-1}A$

Notons $\varphi_{n-p+1}, \ldots, \varphi_n$ les p composantes de φ qui donnent les valeurs de $x_{n-p+1}, \ldots, x_n$. L'égalité précédente s'écrit, en ce qui concerne la k-ème colonne, $1 \leq k \leq n-p$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_{n-p+1}}{\partial x_k}(\xi) \\ \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_k}(\xi) \end{pmatrix} = -B^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}(x) \\ \ldots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix}$$

EXEMPLES :

❑ Pour $n = 2$ et $p = 1$, $S = \{(x, y), f(x, y) = 0\}$, définissant une courbe du plan. On peut écrire localement $y = \varphi(x)$ si $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ au point considéré. Cela signifie que le gradient n'est pas colinéaire à Ox et donc que la tangente à la courbe n'est pas parallèle à Oy.

La matrice B se réduit au seul terme $(\dfrac{\partial f}{\partial y})$. La dérivée de φ vaut :

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

expression déjà rencontrée dans le chapitre L1/CALCDIF1.PDF dans la partie traitement des courbes définies par une équation dans le plan.

Par exemple, dans le cas du cercle unité d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ en tout point sauf les deux points $(\pm 1, 0)$. Au voisinage de tout point a du cercle en dehors de ces deux points, il est possible d'exprimer y en fonction de x, à savoir $y = \sqrt{1 - x^2}$ ou $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Pour avoir unicité de la solution, il convient de prendre le voisinage de a suffisamment petit, inclus soit dans $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, soit dans $\mathbb{R} \times]-\infty, 0[$ selon le signe de l'ordonnée de a.

Pour $y > 0$ par exemple, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ qui est bien égal à $-\dfrac{\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - 1)}{\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - 1)} = -\dfrac{x}{y}$.

❑ Dans le cas prédédent, la relation $\varphi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$ permet de voir par récurrence sur k que, si f est C^k, alors φ également. En effet, si la propriété est prouvée jusqu'au rang k, et que f est C^{k+1}, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont C^k, comme φ, donc le second membre est C^k, donc φ' est C^k, donc φ est C^{k+1}.

❑ Si la fonction implicite φ ne peut pas toujours s'exprimer explicitement, un paramètrage plus général de S peut parfois y suppléer. Considérons par exemple la courbe S d'équation :

$$f(x, y) = \exp(x + y) + x + 2y - 1 = 0$$

au voisinage de (0, 0). On a $\frac{\partial f}{\partial y} = \exp(x + y) + 2$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$, donc localement, on peut théoriquement exprimer y en fonction de x, mais il n'en existe pas d'expression explicite sous forme de fonctions classiques. Cependant, il existe un paramétrage de la courbe sous la forme suivante. Prenons comme paramètre t tel que $t = x + y$. (x, y) est élément de S si et seulement si :

$$\left[\begin{array}{l} x + y = t \\ x + 2y = 1 - e^t \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2t - 1 + e^t \\ y = 1 - t - e^t \end{array}\right.$$

Ce dernier paramétrage permet de tracer facilement la courbe.

❑ Pour $n = 3$ et $p = 1$, S = $\{(x, y, z), f(x, y, z) = 0\}$ définissant une surface. On peut écrire localement $z = \varphi(x, y)$ si $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ au point considéré. Cela signifie que le gradient n'est pas parallèle au plan Oxy et donc que le plan tangent à la surface ne contient pas Oz.

La matrice B se réduit au seul terme $(\frac{\partial f}{\partial z})$. Les dérivées partielles de φ sont :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Par exemple, dans le cas de la sphère unité d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ en tout point sauf ceux du cercle unité contenu dans le plan $z = 0$. Au voisinage de tout point de la sphère en dehors de ceux de ce cercle, il est possible d'exprimer z en fonction de (x, y), à savoir $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ou $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Pour $z > 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, qu'on retrouve également avec les expressions respectives suivantes :

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)} = -\frac{x}{z}$$

et $$-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)} = -\frac{y}{z}$$

On procèdera à une vérification analogue pour $z < 0$.

❑ Pour $n = 3$ et $p = 2$, S est une courbe donnée par un système $\left[\begin{array}{l} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{array}\right.$, intersection de la surface Σ_1 d'équation $f_1(x, y, z) = 0$ et de la surface Σ_2 d'équation $f_2(x, y, z) = 0$. On peut trouver

deux fonctions φ_1 et φ_2 telle que $\left[\begin{array}{l} x = \varphi_1(z) \\ y = \varphi_2(z) \end{array}\right.$ au voisinage d'un point M donné si $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$ au point M. Cela signifie que le produit vectoriel $\boldsymbol{grad}(f_1)(\mathrm{M}) \wedge \boldsymbol{grad}_2(\mathrm{M})$ possède une composante non nulle suivant l'axe z. Or $\boldsymbol{grad}(f_1)(\mathrm{M})$ est orthogonal au plan tangent en M à Σ_1 et $\boldsymbol{grad}(f_2)(\mathrm{M})$ est orthogonal au plan tangent en M à Σ_2. $\boldsymbol{grad}(f_1)(\mathrm{M}) \wedge \boldsymbol{grad}(f_2)(\mathrm{M})$ étant non nul, ces deux plans sont distincts et se coupent suivant une droite, la tangente en M à S, qui est dirigée précisément par $\boldsymbol{grad}(f_1)(\mathrm{M}) \wedge \boldsymbol{grad}(f_2)(\mathrm{M})$, vecteur commun aux deux plans. Si sa composante suivant l'axe z est non nulle, cela signifie que cette tangente à S est n'est pas contenue dans le plan Oxy.

Les dérivées de φ_1 et φ_2 se calculent comme suit :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

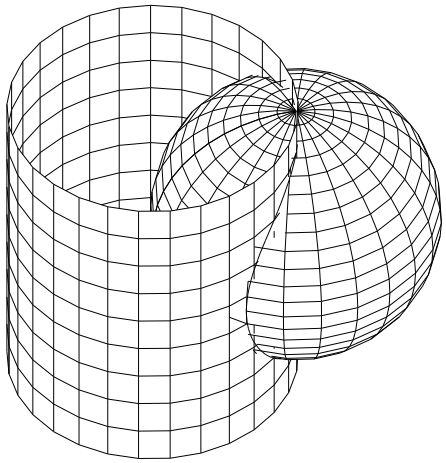
donc
$$\left[\begin{array}{l} \varphi_1' = \dfrac{-\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial z}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial f_2}{\partial y} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial x}} \\ \varphi_2' = \dfrac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial f_1}{\partial z} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial f_2}{\partial z}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial f_2}{\partial y} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial x}} \end{array}\right.$$

Considérons par exemple l'intersection S de la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ et du cylindre $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$. On a :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2(x-1) & 2y \end{vmatrix} = 4y$$

Donc si on prend un point de S en dehors du plan $y = 0$, donc autre que les points $(0, 0, \pm 1)$ on pourra exprimer localement x et y en fonction de z. Par exemple, si $y > 0$, on obtient plus précisément :

$$(x, y, z) \in \mathrm{S} \text{ et } y > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 - z^2}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3 - 2z^2 - z^4}}{2} \end{array}\right.$$



On vérifie qu'on a bien :

$$\frac{dx}{dz} = -z = \varphi_1'(x) = \frac{-\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial z}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial f_2}{\partial y} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial x}} = \frac{-4yz}{4xy - 4y(x-1)} = -z$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{-z - z^3}{\sqrt{3 - 2z^2 - z^4}} = \varphi_2' = \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial f_1}{\partial z} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial f_2}{\partial z}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial f_2}{\partial y} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial f_2}{\partial x}} = \frac{4(x-1)z}{4xy - 4y(x-1)} = \frac{(x-1)z}{y}$$

III : Intégrales curvilignes

1- Formes différentielles

Une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est une application de la forme $\begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} \to a_1h_1 + \dots + a_nh_n$, où les a_i sont des constantes. Une forme différentielle est du même type, mais où on remplace les constantes a_i par des fonctions de variables $(x_1, \dots, x_n)$.

DEFINITION

On appelle **forme différentielle** *de degré* 1 *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *une quantité notée* :

$$\omega = P_1dx_1 + \dots + P_ndx_n$$

où les P_i *sont des fonctions de* U *dans* $\mathbb{R}$.

Elle est de classe C^1 *si, pour tout i,* P_i *est de classe* C^1.

Cette notation signifie la chose suivante. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, on peut définir en ce point la fonction linéaire :

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) \to P_1(x)h_1 + \dots + P_n(x)h_n$$

Les premiers exemples de formes différentielle sont évidemment les différentielles df de fonctions f à valeurs réelles, où $P_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. On se pose alors le problème réciproque. Etant donné une forme différentielle ω, existe-t-il une fonction f telle que $\omega = df$? Si tel est le cas, f est une **primitive** de ω.

Ce problème peut se poser également sous la forme suivante : étant donné un **champ de vecteurs** $\begin{pmatrix} P_1 \\ \dots \\ P_n \end{pmatrix}$ (i.e. une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$) existe-t-il une fonction f telle que $\boldsymbol{grad}(f) = \begin{pmatrix} P_1 \\ \dots \\ P_n \end{pmatrix}$?

Si c'est le cas, on dit que la forme différentielle est **exacte**, ou que le champ de vecteurs **dérive d'un potentiel**. Dans le cas où les fonctions P_i sont de classe C^1, il est nécessaire, d'après le théorème de Schwarz que $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$ pour tout i différent de j, puisque chaque membre devra être égal à $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, avec f primitive de ω, de classe C^2. Pour une forme différentielle $Pdx + Qdy + Rdz$ de $\mathbb{R}^3$, cela s'exprime sous la forme suivante :

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

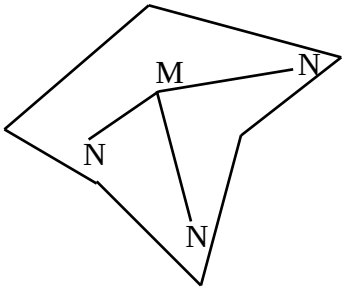
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ (seule relation à utiliser pour la forme } Pdx + Qdy \text{ en dimension 2)}$$

On reconnaît dans le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$ le rotationnel de $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$. Ainsi, pour que (P, Q, R) dérive d'un gradient, il est nécessaire que son rotationnel soit nul.

Malheureusement, ces conditions ne sont pas toujours suffisantes. Une forme différentielle vérifiant les conditions $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$ est dite **fermée**. Elle n'admet donc pas nécessairement de primitive. Nous admettrons cependant que la condition donnée est suffisante localement sur les boules, ou les convexes, ou les ouverts dits étoilés :

DEFINITION

On dit que U *est un* **ouvert étoilé** *de pôle* M *si, pour tout point* N *de* U, *le segment* [MN] *est contenu dans* U.



EXEMPLES :

❑ Un ouvert convexe est étoilé. Tout point peut servir de pôle.

❑ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ est étoilé, de pôle tout point M = $(x, 0)$, avec $x > 0$.

❑ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas étoilé.

Résumons donc les propriétés des formes différentielles :

PROPOSITION

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ *une forme différentielle de classe* C^1, *définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$.

(i) *Si* ω *est exacte, alors* ω *est nécessairement fermée, i.e.* : $\forall\ i, j, \dfrac{\partial P_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial P_j}{\partial x_i}$.

(ii) *Réciproquement, si* ω *est fermée et* ***si* U *est un ouvert étoilé***, *alors* ω *est exacte* (**Théorème de Poincaré**).

<u>Démonstration</u> :

❑ Comme on l'a vu, le (i) est une conséquence directe du théorème de Schwarz.

❑ Le (ii) est démontré pour $n = 3$ dans l'annexe II, première partie du théorème.

EXEMPLES :

❑ Soit $\omega = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,dy$, définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine. On a $P = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ et $Q = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ et :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Donc ω est une forme fermée. Mais le domaine sur lequel elle est définie n'est pas un ouvert étoilé. On ne peut donc affirmer que ω est exacte. Par contre, si on se limite, comme dans le changement en polaire à :

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$$

qui est un ouvert étoilé, alors on est sûr qu'une primitive de ω existe. On pourra vérifier par exemple que ω est la différentielle exacte de $f(x, y) = 2 \arctan\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\right)$. Si O = (0, 0) et M = (x, y), f n'est autre que l'angle θ compris entre $-\pi$ et π de l'axe Ox avec OM, comme on l'a vu plus haut. f ne peut se prolonger à $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. En effet, f tend vers π d'un côté de l'axe $\{(x, 0) \mid x < 0\}$ et vers $-\pi$ de l'autre côté. Il n'y a pas de primitive de ω sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Par contre, $\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$ est une forme exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, différentielle de $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

❑ On considère $\omega(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})\,\mathrm{d}x + \ln(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}y$, définie sur le demi-plan $x > 0$. ω est-elle une forme différentielle exacte ? Si oui, déterminer f telle que $\omega = \mathrm{d}f$.

Posons $\mathrm{P} = \arctan(\frac{y}{x})$ et $\mathrm{Q} = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \mathrm{Q} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$. On a :

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$$

Donc ω est fermé. Le demi-plan étant convexe (donc étoilé), ω est une forme exacte. f existe donc. f doit vérifier :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \arctan(\frac{y}{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \end{cases}$$

Si on intègre la deuxième équation, x étant fixé strictement positif quelconque :

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\int \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \qquad \text{qu'on intègre par parties}$$

$$= \frac{y\ln(x^2+y^2)}{2} - \int \frac{y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{y\ln(x^2+y^2)}{2} - \int 1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{y\ln(x^2+y^2)}{2} - y + \int \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{y\ln(x^2+y^2)}{2} - y + x\arctan(\frac{y}{x}) + \varphi(x)$$

Noter la présence de $\varphi(x)$ dans le résultat final, "constante" d'intégration relativement à y, mais dépendant a priori de x puisque le calcul précédent dépend de la valeur de x que l'on s'est donnée.
On réinjecte dans la première équation et on obtient :

$$\arctan(\frac{y}{x}) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy}{x^2+y^2} + \arctan(\frac{y}{x}) - \frac{xy}{x^2+y^2} + \varphi'(x) = \arctan(\frac{y}{x}) + \varphi'(x)$$

donc $\varphi'(x) = 0$ pour tout x et φ est réellement constante.

Les primitives de ω sont $\frac{y\ln(x^2+y^2)}{2} - y + x\arctan(\frac{y}{x}) + \mathrm{Cte}$.

❑ Résolution générale de $\mathrm{d}f = \mathrm{P}\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\mathrm{d}y$, supposée être une forme exacte, avec P et Q de classe C^1. Cette forme est donc a fortiori fermée, et on suppose donc que P et Q sont C^1 et vérifie la condition $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$. On se place au voisinage d'un point (x_0, y_0) du domaine où P et Q sont définies. L'équation à résoudre équivaut à :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{P} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{Q}$$

Si on considère la deuxième équation, x étant fixé, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{Q} \Leftrightarrow f(x, y) = f(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{Q}(x, s)\, \mathrm{d}s$$

(Le terme $f(x, y_0)$ joue le rôle du terme $\varphi(x)$ de l'exemple précédent).

On reporte dans la première équation, en admettant qu'on puisse permuter le symbole de dérivation par rapport à x et celui d'intégration par rapport à y (ce type de question est l'objet du chapitre L2/SUITESF.PDF)[1] :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{P} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(x, s)\, \mathrm{d}s = \mathrm{P}(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \mathrm{P}(x, y) - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(x, s)\, \mathrm{d}s = \mathrm{P}(x, y) - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(x, s)\, \mathrm{d}s$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \mathrm{P}(x, y) - [\mathrm{P}(x, s)]_{s=y_0}^{s=y} = \mathrm{P}(x, y) - (\mathrm{P}(x, y) - \mathrm{P}(x, y_0))$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \mathrm{P}(x, y_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x, y_0) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{P}(t, y_0)\, \mathrm{d}t + f(x_0, y_0).$$

Ainsi, la solution est $f(x, y) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{P}(t, y_0)\, \mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} \mathrm{Q}(x, s)\, \mathrm{d}s + f(x_0, y_0)$, ce qu'on peut écrire également sous la forme :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{P}(t, y_0)\, \mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} \mathrm{Q}(x, s)\, \mathrm{d}s$$

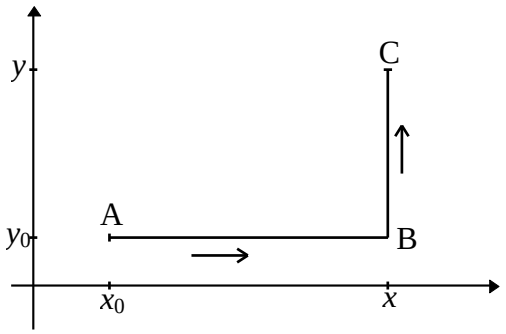
Le membre de droite est une **intégrale curviligne**, qu'on étudie dans le paragraphe III-3 qui suit.

Plus précisément, lorsque t varie de x_0 à x, (t, y_0) décrit le segment parallèle à Ox joignant les points $\mathrm{A} = (x_0, y_0)$ à $\mathrm{B} = (x, y_0)$. Sur ce segment, y est constant, donc dy y est nul, et $\int_{x_0}^{x} \mathrm{P}(t, y_0)\, \mathrm{d}t$ s'écrit aussi $\int_{\mathrm{AB}} \mathrm{P}\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\mathrm{d}y$ (où on a repris la notation x en lieu et place de t).

De même, lorsque s varie de y_0 à y, (x, s) décrit le segment parallèle à Oy joignant B au point $\mathrm{C} = (x, y)$. Sur ce segment, dx y est nul et $\int_{y_0}^{y} \mathrm{Q}(x, s)\, \mathrm{d}s$ s'écrit $\int_{\mathrm{BC}} \mathrm{P}\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\mathrm{d}y$ (où on a repris la notation y en lieu et place de s). Ainsi, en notant Γ la réunion des deux segments [AB] et [BC] :

[1] Appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre de la façon suivante. On se place sur une partie fermée bornée du domaine de définition de la fonction de deux variables dont on prend l'intégrale, et contenant en son intérieur le point où l'on dérive. La fonction de deux variables étant supposée C^1, sa dérivée partielle est continue, donc bornée sur la partie fermée choisie. On peut ainsi satisfaire une hypothèse de domination portant sur la dérivée partielle en majorant sa valeur absolue par une constante. Voir le chapitre L2/SUITESF.PDF pour plus de détails.

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \int_\Gamma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy = \int_\Gamma df$$



Bien évidemment, on aurait pu choisir le chemin reliant les points (x_0, y_0), (x_0, y) et (x, y). Cela aurait correspondu au fait de résoudre l'équation en commençant par intégrer la première équation $\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{P}$ avant la seconde.

On peut aussi définir f par la relation $f(x, y) - f(x_0, y_0) = \int_\Gamma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy$ où Γ est un autre chemin reliant (x_0, y_0) à (x, y), par exemple directement le segment de droite reliant ces deux points si ce segment est inclus dans le domaine où sont définis P et Q (on utilise ce type de calcul dans l'annexe II en fin de chapitre). Nous justifions plus bas dans le chapitre que, si la forme $\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy$ est exacte, le résultat ne dépend que de (x_0, y_0) et (x, y), mais pas du chemin Γ suivi.

Lorsqu'une forme différentielle ω n'est pas exacte, on essaie parfois de trouver une fonction g telle que $g\omega$ soit exacte. Si on trouve une telle fonction g, on dit que g est un **facteur intégrant** de ω. Il se peut qu'aucun facteur intégrant n'existe, ou au contraire qu'il en existe plusieurs.

EXEMPLES :

❑ Soit $\omega = 2x(y - 1)dx - (x^2 - 1)dy$. ω n'est pas fermée car, sauf pour $x = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x(y - 1)) = 2x \neq -2x = \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 + 1)$$

Donc a fortiori, ω n'est pas exacte et n'admet pas de primitive. Cherchons un facteur intégrant g fonction de x. On a alors :

$$g\omega = 2x(y - 1)g(x)\,dx - (x^2 - 1)g(x)\,dy$$

On souhaite que :

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x(y - 1)g(x)) = \frac{\partial}{\partial x}(-(x^2 - 1)g(x))$$

$\Leftrightarrow \quad 2xg(x) = -2xg(x) - (x^2 - 1)g'(x)$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 1)g'(x) = -4xg(x)$

Plaçons sur un intervalle $\mathrm{I} =]-\infty, -1[$ ou bien sur $\mathrm{I} =]-1, 1[$ ou bien sur $\mathrm{I} =]1, +\infty[$. Sur chacun de ces intervalles, une solution g à l'équation différentielle précédente est $g(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)^2}$.

Plaçons-nous sur le domaine $\mathrm{U} = \mathrm{I} \times \mathbb{R}$ qui est convexe, donc ouvert étoilé. g étant choisie de façon que $g\omega$ soit fermée, on est sûr que ω est exacte sur U, donc qu'il existe f telle que $df = g\omega$. On a alors :

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x(y-1)}{(x^2-1)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2-1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x(y-1)}{(x^2-1)^2} \\ f = \dfrac{-y}{x^2-1} + \varphi(x) \end{array}\right. \qquad \text{en ayant intégré la deuxième équation}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x(y-1)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2xy}{(x^2-1)^2} + \varphi'(x) \\ f = \dfrac{-y}{x^2-1} + \varphi(x) \end{array}\right. \qquad \text{en ayant reporté } f \text{ dans la première équation}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \varphi'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2} \\ f = \dfrac{-y}{x^2-1} + \varphi(x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2-1} + \text{Cte} \\ f = \dfrac{-y}{x^2-1} + \varphi(x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad f = \frac{1-y}{x^2-1} + \text{Cte}$$

❑ Une application du résultat précédent est le suivant. Soit à résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \frac{2x(y-1)}{x^2-1}$$

sur l'intervalle I =]–∞, –1[ou bien sur I =]–1, 1[ou bien sur I =]1, +∞[.

Un vecteur tangent en un point quelconque d'une courbe intégrale de cette équation différentielle a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix}$ ou encore $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} x^2-1 \\ 2x(y-1) \end{pmatrix}$. Puisque d$x$ (respectivement dy) est la forme linéaire qui, à un vecteur, associe sa première (respectivement sa deuxième) composante, on a :

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{d}x(\boldsymbol{T}) = x^2-1 \\ \mathrm{d}y(\boldsymbol{T}) = 2x(y-1) \end{array}\right.$$

donc $\omega(\boldsymbol{T}) = (2x(y-1)\mathrm{d}x - (x^2-1)\mathrm{d}y)(\boldsymbol{T}) = 0$

A fortiori, $g\omega(\boldsymbol{T}) = 0 = \mathrm{d}f(\boldsymbol{T})$. Si l'on a un paramétrage $t \to \mathrm{M}(t)$ de la courbe intégrale tel que $\dfrac{\boldsymbol{dM}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{T}$, on en déduit que $\mathrm{d}f(\dfrac{\boldsymbol{dM}}{\mathrm{d}t}) = 0$. Or $\mathrm{d}f(\dfrac{\boldsymbol{dM}}{\mathrm{d}t})$ est la dérivée de la fonction composée $t \to \mathrm{M}(t) \to f(\mathrm{M}(t))$. On a donc $f(\mathrm{M}) = \text{Cte}$ le long de la courbe intégrale. Les courbes intégrales vérifient donc l'équation $\dfrac{1-y}{x^2-1} = \text{Cte}$, ou encore $y = 1 - \text{Cte} \times (x^2-1)$. Ce sont des paraboles (ainsi que la droite $y = 1$ si on prend Cte = 0).

Dans le chapitre L2/EQDIFF2.PDF, on aurait résolu directement cette équation différentielle comme suit. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de dire que, si y prend la valeur 1 en un point, alors y est égale à la constante 1. Dans le cas contraire, y ne prend pas la valeur 1, et on écrit l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{y'}{y-1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

$\Leftrightarrow$ $\ln(|y-1|) = \ln(|x^2-1|) + \text{Cte}$ en intégrant les deux membres par rapport à x

$\Leftrightarrow$ $|y-1| = e^{\text{Cte}}\,|x^2-1|$

$\Leftrightarrow$ $y - 1 = \lambda(x^2 - 1)$

avec λ constante quelconque, positive si $y - 1$ et $x^2 - 1$ sont de même signe, négative s'ils sont de signe contraire, ou même nulle pour retrouver la solution constante 1.
On retrouve bien les mêmes solutions que précédemment.

❑ Plus généralement, soit à résoudre une équation différentielle de la forme $y' = \psi(x, y)$ au moyen d'une forme différentielle. On se place sur un ouvert étoilé U sur lequel ψ est définie, et on considère la forme différentielle $\omega = \psi(x, y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$. Cette forme différentielle n'est en générale pas exacte. Supposons qu'on réussisse à trouver un facteur intégrant continu $g(x, y)$ de ω (toute la difficulté est là), et soit f une primitive de $g\omega$. Alors les courbes intégrales Γ de l'équation différentielle sont incluses dans les courbes de niveau de f, i.e. dans les courbes d'équation $f(x, y) = \text{Cte}$. En effet, soit $x \to y(x)$ une fonction de classe C^1 définie sur un intervalle I, solution de l'équation différentielle. On a :

$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \psi(x, y(x)) - y'(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in \mathrm{I},\ \omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}\right) = 0$ d'après la définition de ω

$\Rightarrow$ $\forall\, x \in \mathrm{I},\ g\omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}\right) = 0$ $g\omega$ étant calculé au point $(x, y(x))$

$\Rightarrow$ $\forall\, x \in \mathrm{I},\ \mathrm{d}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}\right) = 0$ car $g\omega = \mathrm{d}f$

$\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in \mathrm{I},\ \partial_1 f(x, y(x)) + y'(x)\,\partial_2 f(x, y(x)) = 0$ en notant $\mathrm{d}f = \partial_1 f\,\mathrm{d}x + \partial_2 f\,\mathrm{d}y$

$\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in \mathrm{I},\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x)) = 0$ par dérivation d'une fonction composée

$\Leftrightarrow$ $x \to f(x, y(x))$ est une fonction constante sur I

Ainsi Γ est incluse dans une courbe de niveau de f.
Réciproquement, soit (x_0, y_0) un point d'une courbe de niveau de f d'équation $f(x, y) = \lambda$. Supposons que $\partial_2 f(x_0, y_0) \neq 0$. On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites. Il existe un voisinage de (x_0, y_0) tel que, pour tout (x, y) de ce voisinage, la relation $f(x, y) = \lambda$ soit équivalente à une relation fonctionnelle $x \to y(x)$. Pour x dans un voisinage I de x_0 on a alors :

$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x, y(x)) = \lambda$

On peut alors remonter le calcul précédent jusqu'à :

$\forall\, x \in \mathrm{I},\ g\omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}\right) = 0$

i.e. $\forall\, x \in \mathrm{I},\ g(x, y(x))\ \psi(x, y(x)) - g(x, y(x))\ y'(x) = 0$

Comme on a supposé que $\partial_2 f(x_0, y_0) \neq 0$ et que $\partial_2 f(x_0, y_0) = -\,g(x_0, y_0)$, on a $g(x_0, y_0) \neq 0$, et g étant continue, on aura encore $g(x, y(x)) \neq 0$ au voisinage de x_0 (quitte à réduire l'intervalle I). On peut donc simplifier par $g(x, y(x))$, de sorte que la fonction $x \to y(x)$ est bien solution de l'équation différentielle $\psi(x, y(x)) - y'(x) = 0$ initiale au voisinage de x_0.
Ainsi, la courbe de niveau complète est la réunion de courbes intégrales, éventuellement séparée par des points en lesquels $\partial_2 f$ s'annule. Ces points peuvent par exemple correspondre à des points

limites des courbes intégrales où la tangente à la courbe devient parallèle à Oy. Il peut aussi s'agir de points multiples de la courbe de niveau, en lequel il est impossible de définir une fonction $x \to y(x)$.

Reprenons l'exemple précédent :

$$y' = \frac{2x(y-1)}{x^2-1}$$

$$U =]-\infty, -1[\times \mathbb{R} \text{ ou }]-1, 1[\times \mathbb{R} \text{ ou }]1, +\infty[\times \mathbb{R}$$

$$\omega = \frac{2x(y-1)}{x^2-1}\,dx - dy$$ qui est le ω de l'exemple précédent au facteur $x^2 - 1$ près

$$g = \frac{1}{x^2-1}$$ qui est le g de l'exemple précédent au facteur $\frac{1}{x^2-1}$ près

$$g\omega = \frac{2x(y-1)}{(x^2-1)^2}\,dx - \frac{1}{x^2-1}\,dy = df$$

avec $f(x, y) = \dfrac{1-y}{x^2-1}$

On trouvera en exercice des exemples de résolution d'équation différentielle utilisant cette méthode.

❑ En thermodynamique, on montre que la variation de quantité de chaleur δQ reçue au cours d'un échange thermique n'est pas une différentielle exacte, que $\frac{1}{T}$ est un facteur intégrant (où T est la température absolue) et que $\frac{\delta Q}{T}$ est la différentielle exacte dS de l'entropie S. Ainsi, pour une mole d'un gaz parfait, on a :

$$\delta Q = C_v dT + PdV$$

où δQ est la chaleur reçue par une mole de gaz, C_v la capacité (ou chaleur) molaire à volume constant, P la pression, V le volume, T la température en °K. De PV = RT, on tire :

$$\delta Q = C_v dT + RT\,\frac{dV}{V}$$

qui n'est pas une forme différentielle exacte. $\frac{1}{T}$ est facteur intégrant. On a :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = C_v\,\frac{dT}{T} + R\,\frac{dV}{V} \Rightarrow S = C_v \ln(T) + R \ln(V)$$

2- Représentation graphique

Nous proposons dans ce paragraphe une interprétation graphique des formes différentielles de deux variables. Donnons-nous un pas h selon l'axe des x et k selon l'axe des y (le physicien assimilera dx à h et dy à k). On considère dans l'espace de dimension 3 des tuiles en forme de parallélogramme de sommets :

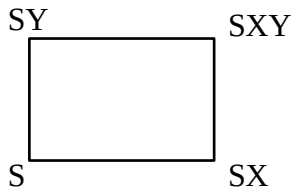
$S = (x, y, 0)$ avec x multiple entier de h et y multiple entier de k

$SX = (x + h, y, P(x, y)h)$

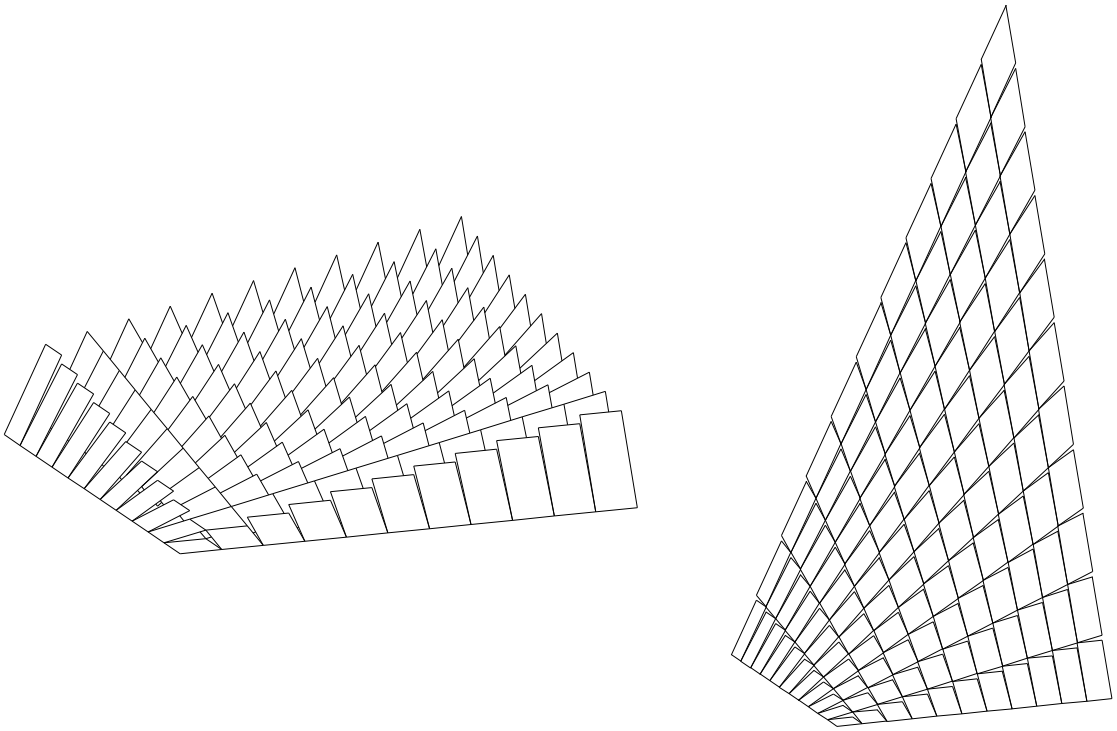
$SXY = (x + h, y + k, P(x, y)h + Q(x, y)k)$

$SY = (x, y + k, Q(x, y)k)$

Si, dans le plan Oxy, Ox est dirigé vers la droite et Oy vers le haut, les sommets sont ainsi disposés dans une tuile vue depuis Oz :



On dispose ces tuiles côte à côte. La forme différentielle sera fermée si, localement, on peut translater les tuiles parallèlement à O*z* de façon à former une surface (aux approximations près d'ordre 2), les tuiles s'attachant les unes aux autres par leurs sommets, chaque tuile étant une partie du plan tangent à la surface au point où le sommet S a été déplacé. La forme sera exacte si ce "tuilage" est possible sur l'ensemble de définition de P et Q. Voici ci-dessous le "tuilage" de la forme exacte $ydx + xdy$, ainsi que le "tuilage" après déplacement des tuiles, donnant la surface $z = xy$.



En effet, si les déplacements sont possibles, une tuile T s'attache :

❑ par son sommet SX au sommet S de la tuile de droite TD et au sommet SY de la tuile en bas à droite TDB

❑ par son sommet SY au sommet S de la tuile du haut TH et au sommet SX de la tuile du haut à gauche TGH,

les tuiles étant disposées comme suit lorsqu'on les regarde depuis O*z* :

TGH	TH	TDH
	T	TD
		TDB

Pour attacher la tuile TDH par son sommet S à la fois au sommet SX de TH et au sommet SY de TD, il faut et il suffit que ces deux sommets soient identiques, donc se trouvent à la même hauteur.

Numériquement, cela se traduit comme suit. Soient (x, y) l'abscisse et l'ordonnée du sommet S de T. Les abscisse et ordonnée de TH sont $(x, y + k)$ et celles de TD sont $(x + h, y)$.
Le sommet SX de TH se trouve, après attachement à la tuile T par le sommet S de TH, à la hauteur :

$$\begin{aligned} z(\text{SX de TH}) &= z(\text{S de TH}) + \mathrm{P}(x, y + k)h \\ &= z(\text{SY de T}) + \mathrm{P}(x, y + k)h \qquad \text{car } z(\text{S de TH}) = z(\text{SY de T}) \\ &= z(\text{S de T}) + \mathrm{Q}(x, y)k + \mathrm{P}(x, y + k)h \end{aligned}$$

Le sommet SY de TD se trouve, après attachement à la tuile T par le sommet S de TD, à la hauteur :

$$\begin{aligned} z(\text{SY de TD}) &= z(\text{S de TD}) + \mathrm{Q}(x + h, y)k \\ &= z(\text{SX de T}) + \mathrm{Q}(x + h, y)k \qquad \text{car } z(\text{S de TD}) = z(\text{SX de T}) \\ &= z(\text{S de T}) + \mathrm{P}(x, y)h + \mathrm{Q}(x + h, y)k \end{aligned}$$

On veut que $z(\text{SX de TH}) = z(\text{SY de TD})$, et donc que :

$$\mathrm{Q}(x, y)k + \mathrm{P}(x, y + k)h = \mathrm{P}(x, y)h + \mathrm{Q}(x + h, y)k$$

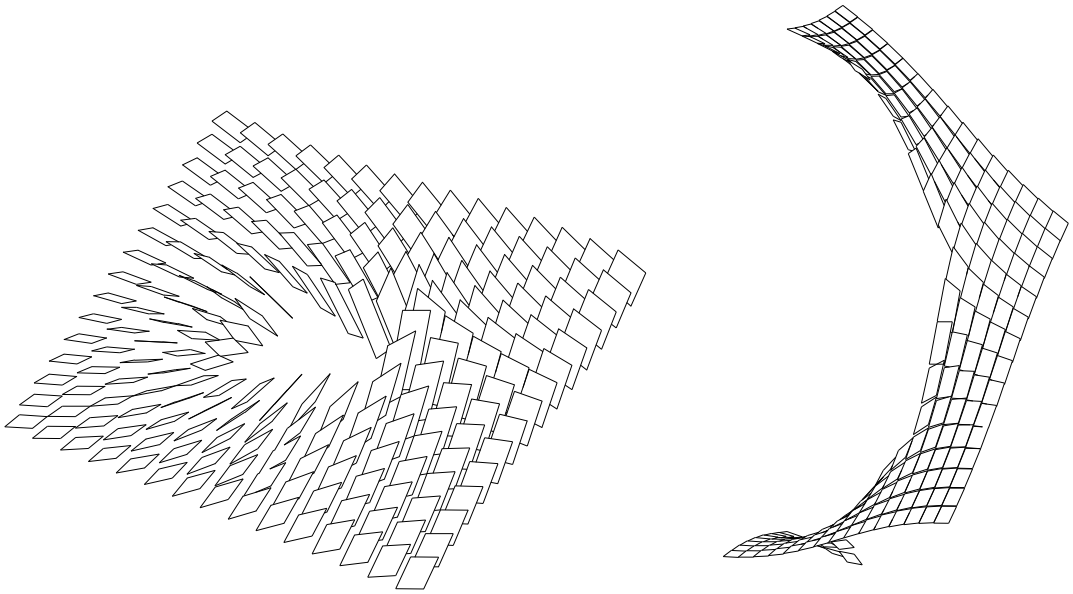
ce qui, après développement au premier ordre en négligeant le reste, conduit à :

$$\mathrm{Q}(x, y)k + \mathrm{P}(x, y)h + hk\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(x, y) = \mathrm{P}(x, y)h + \mathrm{Q}(x, y)k + hk\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(x, y)$$

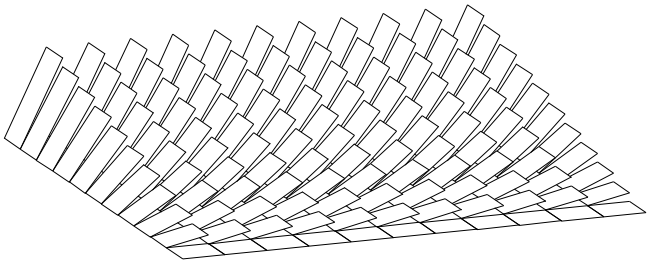
et donc à :

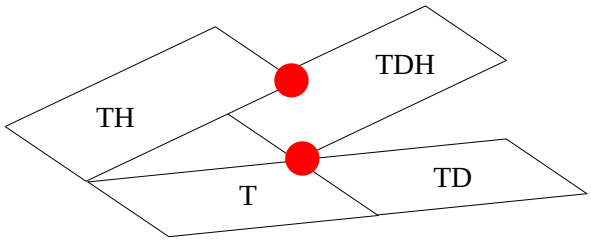
$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(x, y)$$

Le dessin ci-dessous représente le tuilage de la forme fermée égale à $-\dfrac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y$. Nous avons vu précédemment que la condition $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$ permet de déplacer localement les tuiles pour former une surface. Mais on voit ici que l'existence locale de cette surface ne permet pas d'obtenir une existence globale, les tuiles formant un escalier à la Maurits Escher. Après avoir fait un tour autour de l'origine, elles ne peuvent former une surface se refermant. La forme différentielle est fermée, mais pas exacte.



Si la translation verticale des tuiles n'est pas possible localement, la forme n'est pas fermée . Voici ci-dessous le "tuilage" de la forme non exacte $y\mathrm{d}x$. Sur ce dessin, il paraît clair qu'aucun déplacement de tuiles n'est possible pour disposer de façon compatible les tuiles côte à côte. La première rangée devant rester horizontale, les tuiles de la deuxième rangée ne pourront s'y attacher par leur sommet SX.





SX(TH) ≠ SY(TD)

3- Intégrales curvilignes

DEFINITION

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i \mathrm{d}x_i$ *une forme différentielle définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$, *et* Γ *une courbe incluse dans* U, *définie par un paramétrage* $t \in [t_0, t_1] \to x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \in \Gamma$ *de classe* C^1. *On appelle* **intégrale curviligne** *de* ω *le long de* Γ *la quantité* :

$$\int_\Gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(x(t))\, x_i'(t)\, \mathrm{d}t$$

Cette quantité s'appelle également **circulation** *du champ de vecteurs* $(\mathrm{P}_1, ..., \mathrm{P}_n)$ *le long de* Γ.

L'intégrale ne dépend pas du paramétrage choisi, car si $t = \varphi(u)$ avec $t_0 = \varphi(u_0)$ et $t_1 = \varphi(u_1)$, avec φ de classe C^1, alors la formule de changement de variables dans l'intégrale de droite donne :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(x(t))\, x_i'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{u_0}^{u_1} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(x(\varphi(u)))\, x_i'(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, \mathrm{d}u$$

$$= \int_{u_0}^{u_1} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(y(u))\, y_i'(u)\, \mathrm{d}u$$

On obtient l'intégrale curviligne de ω le long de Γ, celle-ci étant maintenant paramétrée par la fonction $u \to y(u) = x(\varphi(u))$.

EXEMPLES :

❑ Considérons $\omega = y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$ et Γ le segment joignant le point (0, 1) au point (1, 0). Un paramétrage possible est donné par $x = t$, $y = 1 - t$, t variant de 0 à 1. D'où :

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^1 (1 - t) + t \,\mathrm{d}t = 1$$

Par contre, si on va de (0, 1) à (1, 0) par le segment [(0, 1), (0, 0)] suivi de [(0, 0), (0, 1)] (couper $\int_\Gamma \omega$ en deux morceaux, chacun correspondant à un segment), on trouvera $\int_\Gamma \omega = 0$. Autrement dit, $\int_\Gamma \omega$ dépend du chemin suivi.

❑ Considérons $\omega = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ et Γ le segment joignant le point (0, 1) au point (1, 0). Reprenons le paramétrage $x = t$, $y = 1 - t$, t variant de 0 à 1. D'où :

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^1 (1 - t) - t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - 2t \,\mathrm{d}t = 0$$

Si on va de (0, 1) à (1, 0) par le segment [(0, 1), (0, 0)] suivi de [(0, 0), (0, 1)], on a toujours $\int_\Gamma \omega = 0$. Dans le cas présent, $\int_\Gamma \omega$ ne dépend pas du chemin suivi. La différence avec l'exemple 1 est que $y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ est une différentielle exacte (à savoir celle de xy) alors que $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$ n'est pas exacte.

PROPOSITION

Si ω est une forme exacte, de primitive f, et si Γ est un chemin parcouru depuis le point M_0 *jusqu'au point* M_1*, alors* $\int_\Gamma \omega = f(\mathrm{M}_1) - f(\mathrm{M}_0)$.

En particulier, si la courbe Γ se referme (i.e. $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_0$), l'intégrale est nulle.

<u>Démonstration</u> :

❑ Si ω est exacte, alors, pour tout i, $\mathrm{P}_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. On a alors, aprés avoir pris un paramétrage de Γ :

$$\int_\Gamma \omega = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(x(t))\, x_i'(t) \,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))\, x_i'(t) \,\mathrm{d}t$$

On reconnaît dans $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))\, x_i'(t)$ la dérivée de la fonction composée :

$$t \to x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \xrightarrow{f} f(x(t))$$

Donc :

$$\int_\Gamma \omega = \left[f(x(t))\right]_{t_0}^{t_1} = f(x(t_1)) - f(x(t_0)) = f(\mathrm{M}_1) - f(\mathrm{M}_0)$$

EXEMPLES :

❑ Pour $\omega = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \mathrm{d}f$ avec $f(x, y) = xy$, et Γ le segment joignant le point $M_0 = (0, 1)$ au point $M_1 = (1, 0)$, on a :

$$\int_\Gamma \omega = f(M_1) - f(M_0) = 0$$

Il est inutile de définir un paramétrage de Γ.

❑ Les formes différentielles et leur intégrale curviligne apparaissent également dans le contexte suivant. Supposons qu'un point se déplace dans l'espace entre les instants t_0 et t_1, suivant une courbe paramétrée $\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) , t_0 \leq t \leq t_1\}$ de classe C^1 depuis le point $M_0 = M(t_0)$ jusqu'en $M_1 = M(t_1)$ et qu'en chaque point soit définie une force $\boldsymbol{F}$ de composantes (P, Q, R), dépendant de x, y et z. On dispose d'un champ de forces. Le travail effectué par cette force le long de Γ est donné par l'intégrale suivante, en utilisant le produit scalaire < , > :

$$W = \int_\Gamma <\boldsymbol{F}, \boldsymbol{dM}> = \int_\Gamma \mathrm{P}\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\mathrm{d}y + \mathrm{R}\mathrm{d}z = \int_\Gamma \omega$$

où ω est la forme différentielle $\mathrm{P}\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\mathrm{d}y + \mathrm{R}\mathrm{d}z$. Par définition, W n'est autre que :

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{P}(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + \mathrm{Q}(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + \mathrm{R}(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\, \mathrm{d}t$$

La notation $\int_\Gamma \mathrm{P}\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\mathrm{d}y + \mathrm{R}\mathrm{d}z$ se justifie par le fait que W dépend a priori de Γ mais ne dépend pas du paramétrage choisi pour le parcourir. Physiquement, un changement de paramétrage correspond au fait de parcourir Γ avec des vitesses différentes. Le travail W dépend du chemin parcouru mais pas de la vitesse à laquelle il est parcouru.

Supposons que la force $\boldsymbol{F}$ **dérive d'une énergie potentielle** E_p. Cela signifie que $-\boldsymbol{grad}(E_p) = \boldsymbol{F}$ (La raison du signe – est que la force indique la direction dans laquelle l'énergie potentielle diminue). Dans ce cas, on a :

$$\omega = <\boldsymbol{F}, \boldsymbol{dM}> = \mathrm{P}\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\mathrm{d}y + \mathrm{R}\mathrm{d}z = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\,\mathrm{d}x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\,\mathrm{d}y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

qui n'est autre que la différentielle de la fonction $f = -E_p$. ω est une forme différentielle exacte, et le travail de la force $\boldsymbol{F}$ le long de Γ est :

$$W = f(M_1) - f(M_0) = E_p(M_0) - E_p(M_1)$$

Il ne dépend que des extrémités de Γ mais pas du chemin suivi.

Inversement, on prouve que si toute circulation du champ de vecteurs ne dépend que des valeurs initiales et finales par une formule :

$$W = \int_{[M_0,M_1]} \mathrm{P}\mathrm{d}x + \mathrm{Q}\mathrm{d}y + \mathrm{R}\mathrm{d}z = E(M_0) - E(M_1)$$

alors le champ de vecteurs dérive du potentiel E. Il suffit pour cela de considérer par exemple un déplacement selon x, alors que y et z restent constant, pour voir que P est la dérivée de – E par rapport à x. De même pour les autres variables.

La relation $E_p(M_0) = E_p(M_1) + W$ est une démonstration du principe de conservation de l'énergie. On notera par ailleurs que, si $\boldsymbol{V} = \dfrac{\boldsymbol{dM}}{dt}$ désigne la vitesse de la particule et $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{dV}}{dt}$ son accélération, égale à $\dfrac{\boldsymbol{F}}{m}$ si m est sa masse, alors :

$$W = \int_\Gamma \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{dM} \rangle = m \int_\Gamma \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{V} \rangle \, dt = m \int_\Gamma \langle \boldsymbol{dV}, \boldsymbol{V} \rangle = \frac{1}{2} m V_1^2 - \frac{1}{2} m V_0^2$$

La relation $E_p(M_0) = E_p(M_1) + W$ s'écrit donc aussi sous la forme :

$$E_p(M_0) + \frac{1}{2} m V_0^2 = E_p(M_1) + \frac{1}{2} m V_1^2$$

et l'on voit apparaître la conservation de l'énergie mécanique, somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

❑ On a déjà vu que $\omega = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,dy$ était une forme fermée, exacte sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$, mais non exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On retrouve ce fait de la façon suivante : si on prend Γ le cercle de centre (0, 0) de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique, on vérifiera que $\displaystyle\int_\Gamma \omega = 2\pi$, par exemple en prenant le paramétrage $t \in [0, 2\pi] \to (\cos(t), \sin(t)$. Le résultat devrait être nul pour une courbe qui se referme si ω était exacte.

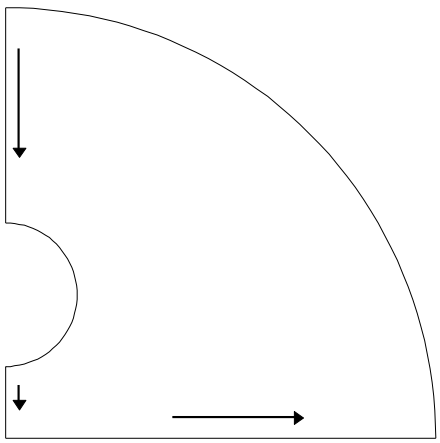
❑ Soit $a > 0$. Nous allons montrer que $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1 + x^2}\,dx = \pi e^{-a}}$

Pour cela nous considérons ici une forme différentielle à coefficients complexes parce que les calculs sont plus simples. Ce que nous avons dit précédemment sur les formes fermées ou exactes reste vrai (il suffirait de séparer partie réelle et imaginaire).

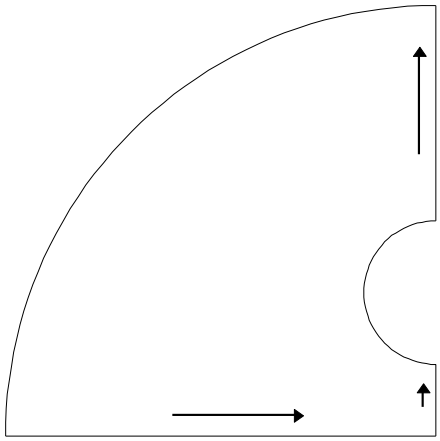
Soit $\omega = \dfrac{\exp(iaz)}{1 + z^2}\,dx + i\,\dfrac{\exp(iaz)}{1 + z^2}\,dy = P\,dx + Q\,dy$, avec $z = x + iy$.

ω est fermée car $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\exp(iaz)}{1 + z^2}\right)\dfrac{dz}{dy} = i\,\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\exp(iaz)}{1 + z^2}\right) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Cependant ω est définie sur $\mathbb{R}^2$ privé des deux points $(0, 1) = i$ et $(0, -1) = -i$.

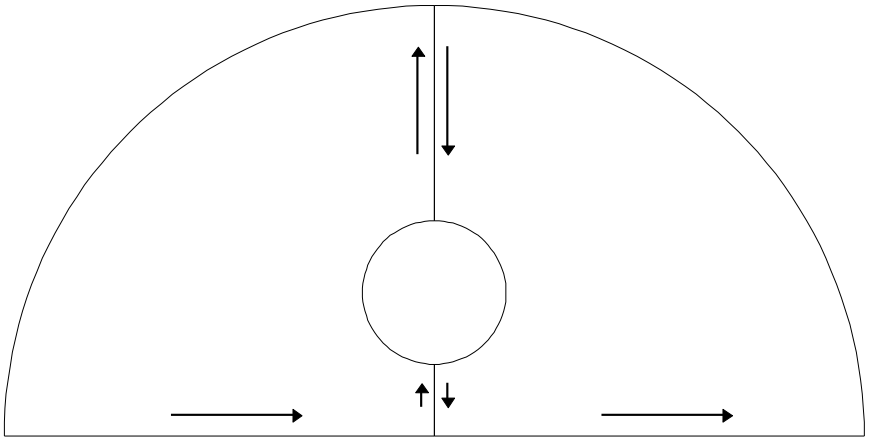
Considérons la courbe Γ_1 suivante : Le grand arc de cercle est de centre (0, 0) de rayon R, le petit cercle de centre (0, 1) de rayon r.



Cette courbe est incluse dans un ouvert étoilé sur laquelle ω est définie, par exemple le plan privé de la demi-droite $\{(x, 1), x \leq 0\}$. ω étant une forme différentielle fermée dans un ouvert étoilé, ω est exacte. Il en résulte que $\int_{\Gamma_1} \omega = 0$ car Γ_1 se referme. Il en sera de même pour Γ_2, courbe symétrique de Γ_1 par rapport à l'axe des ordonnées :



Considérons la réunion des deux courbes.



En tenant compte de la relation de Chasles et du fait que les intégrales de ω sur deux chemins identiques mais parcourus en sens opposés s'annuleront, l'intégrale de ω sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (qui est nulle, rappelons-le) n'est autre que la somme de l'intégrale de ω sur le grand demi-cercle parcouru dans le

sens trigonométrique et de l'intégrale sur le petit cercle parcouru dans le sens inverse au sens trigonométrique. La somme de ces deux intégrales étant nulle, il en résulte que l'intégrale sur le demi-cercle est égale à celle du petit cercle, à condition que ce dernier soit parcouru dans le sens trigonométrique. Ces deux intégrales sont donc indépendantes de R et r. Nous allons faire tendre R vers $+\infty$ et r vers 0.

Sur le grand diamètre, l'intégrale de ω vaut $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{\exp(iax)}{1+x^2}\,dx$ qui tend vers $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iax)}{1+x^2}\,dx$.

Sur le grand demi-cercle lui-même, paramétré par $x = R\cos(\theta)$ et $y = R\sin(\theta)$, $0 \le \theta \le \pi$ (et donc $z = Re^{i\theta}$), on vérifiera que l'intégrale de ω vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\exp(iaz)}{1+z^2}\, iRe^{i\theta}\,d\theta$. Comme on a :

$$\left|\exp(iaz)\right| = \left|\exp(iaR(\cos(\theta) + i\sin(\theta)))\right| = \exp(-aR\sin(\theta)) \le 1$$

on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\exp(iaz)}{1+z^2}\, iRe^{i\theta}\,d\theta$ -ci est majorée en module par $\dfrac{\pi R}{R^2-1}$ qui tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

Sur le petit cercle, paramétré par $x = r\cos(\theta)$ et $y = 1 + r\sin(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ (et donc $z = i + re^{i\theta}$), l'intégrale de ω vaut :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\exp(iaz)}{1+z^2}\, ire^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-a}\,\frac{\exp(iare^{i\theta})}{re^{i\theta}(2i + re^{i\theta})}\, ire^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-a}\,\frac{\exp(iare^{i\theta})}{(2i + re^{i\theta})}\, i\,d\theta$$

Quand r tend vers 0, cette intégrale tend[2] vers $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-a}\,\frac{1}{2i}\, i\,d\theta = \pi e^{-a}$ ce qui permet de conclure.

Le lecteur attentif cherchera où on a utilisé l'hypothèse $a > 0$, et pourquoi le calcul est à corriger si $a < 0$.

Annexe I : Théorème de Fubini et théorème de Schwarz

Ce paragraphe donne une démonstration du théorème de Fubini, admis dans le chapitre L2/INTMULT.PDF sur les intégrales multiples. On en déduit une démonstration du théorème de Schwarz.

THEOREME DE FUBINI

Soit f continue sur $D = [a, b] \times [c, d]$. *Alors :*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right) dy$$

quantité notée $\displaystyle\iint_D f(x, y)\,dxdy$.

<u>Démonstration</u> :

[2] Une hypothèse de domination est à vérifier pour permuter le symbole de limite et le symbole d'intégration : majorer la fonction des deux variables (r, θ) que l'on intègre par une fonction uniquement de θ, intégrable sur $[0, 2\pi]$. Voir le chapitre L2/SUITESF.PDF pour plus de détails, où l'on calcule d'ailleurs l'intégrale demandée d'une autre façon.

❑ Considérons les fonctions $Y \to \int_c^Y \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy$ et $Y \to \int_a^b \int_c^Y f(x, y)\,dy\,dx$. Ces deux fonctions coïncident pour $Y = c$ (elles sont nulles).

La première est de la forme $\int_c^Y g(y)\,dy$ avec $g(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$, fonction continue de y. En effet, pour tout x, $y \to f(x, y)$ est continue et f vérifie une hypothèse de domination : f étant continue sur le domaine D fermé bornée, f est bornée, donc on peut dominer $|f|$ sur D par une constante, qui est intégrable sur $[a, b]$ (Voir le chapitre L2/EVNORME sur le fait qu'une fonction continue sur un fermé borné à valeurs réelles admet un maximum, et le chapitre L2/SUITESF.PDF pour les hypothèses de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, ou un peu plus bas, pour les hypothèses de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre). g étant continue, la fonction $Y \to \int_c^Y g(y)\,dy$ a pour dérivée $g(Y) = \int_a^b f(x, Y)\,dx$.

La seconde fonction est de la forme $\int_a^b F(x, Y)\,dx$ avec $F(x, Y) = \int_c^Y f(x, y)\,dy$. Montrons que $\frac{d}{dY}\int_a^b F(x, Y)\,dx$ est égal à $\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, Y)\,dx$. Pour chaque x, la fonction $F(x,Y)$ est une intégrale fonction de la borne supérieure et de dérivée $\frac{\partial F}{\partial y}(x, Y) = f(x, Y)$ continue. Comme on est sur un fermé borné $[a, b] \times [c, d]$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ est bornée, et l'hypothèse de domination permettant de dériver sous le signe intégrale est vérifiée en prenant une constante majorant $|f|$. $\int_a^b F(x, Y)\,dx$ est donc dérivable par rapport à Y de dérivée $\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(x, Y)\,dt = \int_a^b f(x, Y)\,dt = g(Y)$

Les deux fonctions ayant même dérivée et étant égales en un point sont égales en tout point. Elles le sont en particulier pour $Y = d$. D'où l'égalité demandée.

Le théorème de Schwarz a été démontré dans le chapitre L1/CALCDIF1.PDF, mais le théorème de Fubini lui est directement lié.

THEOREME DE SCHWARZ

Soit f de classe C^2 *sur un ouvert de* $\mathbb{R}^2$. *Alors* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

En effet, considérons un disque quelconque inclus dans l'ensemble de définition de f. Soient (a, c) et (b, d) deux éléments de ce disque. Considérons alors $I(b, d) = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\,dy\,dx$. Comme $y \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est une primitive de la fonction $y \to \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, on a, pour tout x :

$$\int_{y=c}^{y=d} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}(x, d) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, c)$$

Comme $f(x, d) - f(x, c)$ est une primitive de la fonction $x \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, d) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, c)$, on a :

$$\mathrm{I}(b,d) = \int_{x=a}^{x=b} \frac{\partial f}{\partial x}(x, d) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, c)\, \mathrm{d}x = (f(b, d) - f(b, c)) - (f(a, d) - f(a, c))$$

Le théorème de Fubini permet de permuter les deux intégrales et d'écrire :

$$(f(b, d) - f(b, c)) - (f(a, d) - f(a, c)) = \mathrm{I}(b, d) = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Dérivons alors les deux membres par rapport à d. L'intégrale de droite est de la forme $\int_c^d \varphi(y)\, \mathrm{d}y$ (avec $\varphi(y) = \int_{x=a}^{x=b} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\, \mathrm{d}x$, fonction continue de y), dont la dérivée est $\varphi(d) = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, d)\, \mathrm{d}x$.

Le membre de gauche se dérive par rapport à d en $\frac{\partial f}{\partial y}(b, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, d)$. On a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(b, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, d) = \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, d)\, \mathrm{d}x$$

Dérivons maintenant par rapport à b. On obtient dans le membre de gauche :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(b, d) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, d)$$

et dans le membre de droite :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(b, d)$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(b, d) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(b, d)$

Annexe II : Le théorème de Poincaré

Les démontrations qui suivent soulignent la différence entre forme différentielle exacte, qui appartient à ***l'image*** d'un opérateur différentiel δ_1 et forme différentielle fermée (qui appartient au ***noyau*** d'un opérateur différentiel δ_2. Les deux opérateurs sont tels que $\delta_2 \circ \delta_1 = 0$, de sorte que $\mathrm{Im}(\delta_1) \subset \mathrm{Ker}(\delta_2)$, mais il n'y a pas égalité en général. Le théorème de Poincaré donne une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi : l'ouvert U sur lequel on travaille est un ouvert étoilé.

Le (i) est un énoncé du théorème de Poincaré sous forme de champ de vecteurs, équivalent pour $n = 3$ à l'énoncé vu plus haut :

ω forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé $\Rightarrow$ ω exacte

en prenant $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ et f sa primitive.

Le (ii) présente un intérêt pour le physicien et se montre d'une façon comparable au (i). Elle a aussi une interprétation en termes de forme différentielle ω, mais celle-ci est de degré 2 : ω a une expression qui s'écrit sous la forme $\omega = P\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ et sa primitive est une forme différentielle de degré 1. Voir l'annexe suivante pour plus de précision.

TEHOREME DE POINCARE

(i) *Soit* U *un ouvert étoilé de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ *un champ de vecteurs* C^1 *de rotationnel nul défini sur U. Alors ce champ dérive d'un potentiel scalaire* : *il existe f tel que* $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ = ***grad****(f).*

(ii) *Soit* U *un ouvert étoilé de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ *un champ de vecteurs* C^1 *de divergence nulle défini sur U. Alors ce champ dérive d'un potentiel vecteur* : *il existe* ***A*** *tel que* $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ = ***Rot****(****A****).*

Dans le (i), on a δ_1 = ***grad*** et δ_2 = ***Rot***.
Dans le (ii), on a δ_1 = ***Rot*** et δ_2 = div.

<u>Démonstration</u> :
Nous supposerons pour simplifier, que l'origine O appartient à U. Nous noterons ***r*** le point de coordonnées (x, y, z), ou le vecteur joignant O à ce point :

❑·(i) : Comme ***Rot***(***grad***(f)) = 0, l'hypothèse "de rotationnel nul" est nécessaire.

Réciproquement, soit $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$, avec $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ de rotationnel nul. On pose $f(\boldsymbol{r}) = \int_\Gamma \omega$ où Γ est le segment [O, ***r***]. Si on paramétrise ce segment par $t \in [0, 1] \to t\boldsymbol{r}$, on obtient :

$$f(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 xP(tx, ty, tz) + yQ(tx, ty, tz) + zR(tx, ty, tz)\,\mathrm{d}t$$

Calculons le gradient de f. Limitons-nous à sa première composante et montrons qu'on retrouve P. On vérifiera que les hypothèses de domination relatives à la dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre sont satisfaites pour pouvoir écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(xP(tx, ty, tz) + yQ(tx, ty, tz) + zR(tx, ty, tz))\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 P(tx, ty, tz) + tx\frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty, tz) + ty\frac{\partial Q}{\partial x}(tx, ty, tz) + tz\frac{\partial R}{\partial x}(tx, ty, tz)\,\mathrm{d}t$$

Or $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 P(tx, ty, tz) + tx\frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty, tz) + ty\frac{\partial P}{\partial y}(tx, ty, tz) + tz\frac{\partial P}{\partial z}(tx, ty, tz)\,\mathrm{d}t$$

On reconnaît sous l'intégrale la dérivée par rapport à t de la fonction $t \to tP(tx, ty, tz)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{r}) = [tP(tx, ty, tz)]_0^1 = P(x, y, z)$$

Si U n'est pas étoilé, on a seulement une inclusion Im(***grad***) $\subset$ Ker(***Rot***) sans forcément avoir d'égalité. Nous avons déjà vu dans III-1) et III-2) que le champ $\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$ défini sur U privé de l'axe Oz avait un rotationnel nul, mais ne dérivait pas d'un gradient. Cet exemple classique est, à une constante multiplicative près, celui du champ magnétique créé par un courant constant parcourant la droite Oz. La circulation de ce champ le long d'une courbe fermée entourant cette droite n'est pas nulle (théorème d'Ampère) alors qu'elle devrait l'être si le champ dérivait d'un gradient scalaire. Physiquement, il est plus réaliste de considérer que courant parcourt un cylindre d'axe Oz et de rayon r petit. U est alors le domaine $\{(x, y, z), x^2 + y^2 \geq r^2\}$.
On peut montrer[3] que :

$$\mathrm{Ker}(\boldsymbol{Rot}) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{grad}) \oplus \mathrm{HK}$$

où HK (*harmonic knot*) = $\{\boldsymbol{V} \mid \mathrm{div}(\boldsymbol{V}) = 0$ sur U, $\boldsymbol{V}$ est tangent au bord de U et $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{V}) = 0\}$. L'exemple $\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$ est précisément un champ qui est élément de HK. Dans le cas d'un ouvert étoilé, le sous-espace vectoriel HK est réduit au champ nul.

❑ (ii) : Comme div(***Rot***(***A***)) = 0, la condition est nécessaire.
Réciproquement, posons :

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 t \begin{pmatrix}\mathrm{P}(tx, ty, tz)\\ \mathrm{Q}(tx, ty, tz)\\ \mathrm{R}(tx, ty, tz)\end{pmatrix} \wedge \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}t$$

ce qu'on peut écrire encore, en appelant α, β et γ les composantes de $\boldsymbol{A}$:

$$\alpha(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 t\,(z\mathrm{Q}(tx, ty, tz) - y\mathrm{R}(tx, ty, tz))\,\mathrm{d}t$$

$$\beta(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 t\,(x\mathrm{R}(tx, ty, tz) - z\mathrm{P}(tx, ty, tz))\,\mathrm{d}t$$

$$\gamma(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 t\,(y\mathrm{P}(tx, ty, tz) - x\mathrm{Q}(tx, ty, tz))\,\mathrm{d}t$$

On a alors (vérifier les hypothèses de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre) :

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = \int_0^1 t\,(tx\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}(tx, ty, tz) - \mathrm{P}(tx, ty, tz) - tz\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}(tx, ty, tz))\,\mathrm{d}t$$

et $$\frac{\partial\gamma}{\partial y} = \int_0^1 t\,(\mathrm{P}(tx, ty, tz) + ty\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(tx, ty, tz) - tx\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}(tx, ty, tz))\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} = \int_0^1 2t\mathrm{P}(tx,ty,tz) + t^2y\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(tx, ty, tz) - t^2x\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}(tx, ty, tz)$$
$$+ t^2z\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}(tx, ty, tz) - t^2x\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}(tx, ty, tz)\ \mathrm{d}t$$

Or $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z} = 0$

[3] Jason Cantarella, Dennis DeTurck, Herman Glick, Vector Calculus and the Topology of Domains in 3-space, 109:5, Amer. Math. Monthly (mai 2002), 409-442.

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} = \int_0^1 2t\mathrm{P}(tx,ty,tz) \; + t^2x\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}(tx,\,ty,\,tz) + t^2y\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(tx,\,ty,\,tz) + t^2z\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}(tx,\,ty,\,tz)\;\mathrm{d}t$$

On reconnaît sous l'intégrale la dérivée de $t^2\mathrm{P}(tx,\,ty,\,tz)$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} = \left[t^2\mathrm{P}(tx,\,ty,\,tz)\right]_0^1 = \mathrm{P}(x,\,y,\,z)$$

On procède de même pour les autres composantes, conduisant bien à $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} \end{pmatrix}$

EXEMPLE :

❑ Considérons un champ de vecteurs constant $\boldsymbol{B}$. Alors :

$$\boldsymbol{A} = \int_0^1 t\,\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{r}$$

On pourra vérifier que $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$.

Si U n'est pas étoilé, on a seulement une inclusion $\mathrm{Im}(\boldsymbol{Rot}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{div})$ sans forcément avoir d'égalité. Soit U le domaine limité par deux sphères concentriques de rayon R_1 et R_2 :

$$\mathrm{U} = \{(x,\,y,\,z) \mid \mathrm{R}_1^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le \mathrm{R}_2^2\}$$

Soit $\boldsymbol{V} = \frac{1}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r$ où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et $\boldsymbol{e}_r$ est le vecteur unitaire de O vers le point $(x,\,y,\,z)$. $\boldsymbol{V}$ n'est autre que le gradient de $-\frac{1}{r}$. C'est, à une constante multiplicative près, le champ électrique engendré par une particule chargée située à l'origine, ou le champ gravitationnel engendré par une masse ponctuelle.

On a $\mathrm{div}(\boldsymbol{V}) = 0$. En effet, $\boldsymbol{V}$ étant seulement radial, l'expression de la divergence en sphérique est (voir le chapitre L2/GRADIVRT.PDF) :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{V}) = 2\,\frac{\mathrm{V}_r}{r} + \frac{\partial \mathrm{V}_r}{\partial r} \qquad \text{avec } \mathrm{V}_r = \frac{1}{r^2}$$

$$= 0$$

Cependant $\boldsymbol{V}$ ne peut s'exprimer sous forme de rotationnel. En effet, supposons qu'il existe un champ de vecteurs $\boldsymbol{W}$ tels que $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{W})$. Considérons également la sphère de centre O et de rayon R, avec $\mathrm{R}_1 < \mathrm{R} < \mathrm{R}_2$. Cette sphère S constitue une surface dont le bord $\delta\mathrm{S}$ est vide, de sorte que le flux de $\boldsymbol{V}$ à travers la sphère vaut :

$$\int_{\mathrm{S}} \langle \boldsymbol{V},\,\boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathrm{S}} \langle \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{W}),\,\boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\delta\mathrm{S}} \langle \boldsymbol{W},\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\rangle$$

en utilisant le théorème de Stokes. Voir L2/GRADIVRT.PDF

$= 0$ puisque le bord $\delta\mathrm{S}$ de S est vide

Mais par ailleurs, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_r$ de sorte que $\langle \boldsymbol{V},\,\boldsymbol{n}\rangle = \frac{1}{\mathrm{R}^2}$ et que $\int_{\mathrm{S}} \langle \boldsymbol{V},\,\boldsymbol{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma = 4\pi$. D'où une contradiction.

On peut montrer que :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{div}) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{Rot}) \oplus \mathrm{HG}$$

où HG (*harmonic gradients*) = $\{\boldsymbol{V} = \boldsymbol{grad}(\varphi) \mid \mathrm{div}(\boldsymbol{V}) = 0$ et φ est constante sur chaque composante connexe de $\delta\mathrm{U}\}$. On peut montrer que la dimension de HG est un de moins que le nombre de composantes de $\delta\mathrm{U}$. Ainsi, dans l'exemple précédent, $\delta\mathrm{U}$ est constitué des deux sphères S_1 et S_2 et

HG est donc de dimension 1. Le champ $\boldsymbol{V} = \frac{1}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r$ qui est élément de HG en est donc une base, et est un exemple typique dans une des configurations les plus simples de champ de divergence nulle sans être issu d'un rotationnel.

Annexe III : La relativité, une histoire de changement de variables

Considérons dans un référentiel O*xyz* une particule de charge *q* plongée dans un champ électrique $\boldsymbol{E}$ et un champ magnétique $\boldsymbol{B}$. Si la particule se déplace à la vitesse $\boldsymbol{u}$, elle se trouve soumise à la force :

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{B})$$

Plaçons-nous maintenant dans un référentiel O'*x*'*y*'*z*' en translation uniforme par rapport à O*xyz*, selon une vitesse $\boldsymbol{v}$. Dans ce nouveau référentiel, la particule est animée d'une vitesse $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. Appelons $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{B}'$ les champs électrique et magnétique dans le nouveau référentiel. La particule est soumise à la force :

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}' + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{B}')$$

$\boldsymbol{u}$ étant quelconque, l'identification des deux expressions de *f* conduit à poser :

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}' \end{cases}$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} \end{cases}$$

Ainsi, le champ électrique dépend du repère considéré ce qui n'est pas génant en soi. Mais un problème autrement plus grave va se poser. Supposons que $\boldsymbol{v}$ soit colinéaire à O*x* de sorte que les changements de coordonnées d'un point M s'effectueront d'un repère à l'autre selon les transformations dite de Galilée :

$$\begin{array}{ll} x' = x - vt & x = x' + vt \\ y' = y & y = y' \\ z' = z & z = z' \end{array}$$

Le champ électrique sera transformé en :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_x' &= \mathrm{E}_x \\ \mathrm{E}_y' &= \mathrm{E}_y - v\mathrm{B}_z \\ \mathrm{E}_z' &= \mathrm{E}_z + v\mathrm{B}_y \end{aligned}$$

Considérons le théorème de Gauss dont la forme locale s'exprime avec une des équations de Maxwell (celles-ci sont données dans le chapitre L2/GRADIVRT.PDF) dans le référentiel O*xyz* :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Calculons div($\boldsymbol{E}'$) en se plaçant dans le référentiel O*x*'*y*'*z*'. On notera que l'on change à la fois la fonction que l'on dérive ($\boldsymbol{E}'$ au lieu de $\boldsymbol{E}$) et de variables par rapport auxquelles on dérive (*x*', *y*', *z*' au lieu de *x*, *y*, *z*). On utilise la formule de dérivation des fonctions composées pour se ramener à des dérivées par rapport à *x*, *y*, *z* :

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\boldsymbol{E}') &= \frac{\partial \mathrm{E}_x'}{\partial x'} + \frac{\partial \mathrm{E}_y'}{\partial y'} + \frac{\partial \mathrm{E}_z'}{\partial z'} \\ &= \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial(\mathrm{E}_y - v\mathrm{B}_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathrm{E}_z + v\mathrm{B}_y)}{\partial z} \\ &= \mathrm{div}(\boldsymbol{E}) - v\,\frac{\partial \mathrm{B}_z}{\partial y} + v\,\frac{\partial \mathrm{B}_y}{\partial z} \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0} - v\,[\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B})]_x$$

Or une autre équation de Maxwell fournit $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B}) = \mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$, où $\boldsymbol{j}$ est le vecteur densité de courant. Celle-ci montre que $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B})$ est non nul en général, et donc que le théorème de Gauss **N'EST PAS** vérifié dans O'$x'y'z'$. Or l'expérience prouve le contraire. Les expériences électromagnétiques sont identiques dans les deux référentiels. L'expérience est donc en contradiction avec la théorie. Les équations de Maxwell sont-elles fausses ?

Cette question souleva un grave problème à la fin du XIXème. Les équations de Maxwell furent confirmées par les expériences de Hertz et apportaient une explication séduisante aux phénomènes électriques et magnétiques largement étudiés au cours du siècle. Elles unifiaient également électricité et magnétisme en une seule théorie. Elles se trouvaient cependant en contradiction avec le principe de relativité galiléenne qui énonce qu'aucune loi physique ne peut permettre de différencier un référentiel galiléen d'un autre. Et les expériences physiques confirment ce dernier point : le théorème de Gauss est vérifié dans tout repère galiléen. Ou encore l'expérience de Michelson et Morley montre que la vitesse de la lumière est identique dans tout référentiel galiléen. On se trouve alors placé dans la situation contradictoire et apparemment inextricable suivante :

- les expériences montrent que les lois de Maxwell sont vérifiées dans tout référentiel galiléen.
- les calculs montrent que les lois de Maxwell dépendent du référentiel choisi.

La solution consista à modifier les règles de changement de référentiel de façon que les lois de Maxwell ne dépendent plus du référentiel, conformément à l'expérience, conciliant à la fois la validité des lois de Maxwell et le principe de relativité. En particulier, on postule que chaque référentiel dispose d'un temps propre qu'il est impossible de synchroniser avec le temps d'un autre référentiel en translation par rapport au premier. Le changement de référentiel doit donc également modifier le temps, et laisser la vitesse de la lumière invariante. On débouche alors sur la relativité restreinte. Si on note c la vitesse de la lumière et γ la quantité $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ($\gamma = 1$ dans l'approximation classique), on montre que les changements de référentiels galiléens en mécanique classique deviennent en mécanique relativiste :

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad x = \gamma(x' + vt')$$
$$y' = y \qquad y = y'$$
$$z' = z \qquad z = z'$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

On notera que, si $x = ct$ (propagation d'un rayon lumineux dans Oxyz), alors on obtient $x' = ct'$. Quant aux quantités électromagnétiques, elles sont transformées de la façon suivante :

$$\mathrm{E}_x' = \mathrm{E}_x \qquad \mathrm{B}_x' = \mathrm{B}_x \qquad j_x' = \gamma(j_x - v\rho)$$
$$\mathrm{E}_y' = \gamma(\mathrm{E}_y - v\mathrm{B}_z) \qquad \mathrm{B}_y' = \gamma\left(\mathrm{B}_y + \frac{v}{c^2}\mathrm{E}_z\right) \qquad j_y' = j_y$$
$$\mathrm{E}_z' = \gamma(\mathrm{E}_z + v\mathrm{B}_y) \qquad \mathrm{B}_z' = \gamma\left(\mathrm{B}_z - \frac{v}{c^2}\mathrm{E}_y\right) \qquad j_z' = j_z$$
$$\rho' = \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2}j_x\right)$$

On a alors, en utilisant toujours la dérivation de fonctions composées :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{E}') = \frac{\partial E_x'}{\partial x'} + \frac{\partial E_y'}{\partial y'} + \frac{\partial E_z'}{\partial z'}$$

$$= \gamma \frac{\partial E_x}{\partial x} + \gamma \frac{v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \gamma \frac{\partial(E_y - vB_z)}{\partial y} + \gamma \frac{\partial(E_z + vB_y)}{\partial z}$$

$$= \gamma\, \mathrm{div}(\boldsymbol{E}) + \gamma \frac{v}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \gamma v[\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B})]_x$$

Or $\quad [\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B})]_x = \mu_0 j_x + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{div}(\boldsymbol{E}') = \gamma\, \mathrm{div}(\boldsymbol{E}) - \gamma v \mu_0 j_x$

$$= \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x\right) \qquad \text{car } \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$= \frac{\rho'}{\varepsilon_0}$$

Ainsi, le théorème de Gauss est vérifié dans le repère O$x'y'z'$. Il en serait de même des autres équations de Maxwell.

On notera que, si un système matériel ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière, c'est parce que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ et que la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie dans $\mathbb{R}$!! ☺

Annexe IV : Les multiplicateurs de Lagrange

Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, C^1 sur U. On se pose la question de trouver en quels points X_0 de U f admet un extremum. Sans condition supplémentaire, une condition nécessaire est donnée par $\boldsymbol{grad}(f)(X_0) = 0$. Mais nous souhaitons de plus que les points $X = (x_1, \dots x_n)$ soient astreints à vérifier des conditions supplémentaires données par :

$g_1(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$
$g_2(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$
...
$g_p(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$

où $g_1, \dots, g_p$ sont des fonctions C^1 de U dans $\mathbb{R}$. Nous considérons $g_1, \dots, g_p$ comme les composantes d'une fonction $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1, de sorte qu'on peut abrèger les contraintes $g_1(X) = \dots = g_p(X) = 0$ sous la forme $G(X) = 0$. Notons S la partie de U définie par ces contraintes :

$S = \{X \in U, G(X) = 0\}$

La condition cherchée pour que f admette un extremum sur S n'est plus l'annulation du gradient de f.

Imaginons par exemple que $f(x, y)$ soit l'altitude z en un point de la Terre repéré par sa latitude x et sa longitude y. Un maximum local de f correspond par exemple au sommet d'une colline. Mais si on impose une condition supplémentaire $g(x, y) = 0$, alors x et y sont liés, et ne permettent pas forcément d'aller au sommet de la colline. Tout au plus pourra-t-on suivre un sentier S à flanc de colline, et la recherche de l'altitude maximale le long de ce sentier ne correspondra pas au sommet de la colline, et donc ne sera pas obtenu par l'annulation des dérivées partielles de f. Quelles sont alors les nouvelles conditions vérifiées par un extremum de f sous la contrainte des conditions imposées par les g_i ?

PROPOSITION

Avec les notations précédentes, on suppose qu'en tout point X *de* U, *les vecteurs* $\boldsymbol{grad}(g_1)(X)$, $\boldsymbol{grad}(g_2)(X)$, ..., $\boldsymbol{grad}(g_p)(X)$ *sont linéairement indépendants. Alors* :

(i) *En tout point* X_0 *de* S, *le sous-espace tangent à* S *en* X_0 *est de dimension* $n - p$.

(ii) *Ce sous-espace tangent est le sous-espace affine passant par* X_0 *et orthogonal à* $\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0)$, $\boldsymbol{grad}(g_2)(X_0)$, ..., $\boldsymbol{grad}(g_p)(X_0)$.

(iii) *Les extrema de* f *sur* S *se cherchent parmi les points* X_0 *pour lesquels* $\boldsymbol{grad}(f)(X_0)$ *est orthogonal à ce sous-espace tangent. Autrement dit* :

$$\exists\ (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \boldsymbol{grad}(f)(X_0) = \lambda_1\, \boldsymbol{grad}(g_1)(X_0) + ... + \lambda_p\, \boldsymbol{grad}(g_p)(X_0)$$

Les λ_i s'appellent **multiplicateurs de Lagrange**.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : Comme nous l'avons fait pour une surface en dimension 3 dans le chapitre L1/CALCDIF1.PDF, nous définissons le sous-espace tangent à S en X_0 comme celui contenant la tangente en X_0 de toute courbe C^1 incluse dans S et passant par X_0. Pour cela, on procède d'abord à une paramétrisation de S au voisinage de X_0. Les vecteurs $\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0)$, ..., $\boldsymbol{grad}(g_p)(X_0)$ ont pour composantes les lignes de la matrice J(G) de $dG(X_0)$ (matrice jacobienne de G en X_0), qui est élément de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$. Puisque ces lignes sont supposées indépendantes, J(G) est de rang p, donc elle possède aussi p colonnes linéairement indépendantes, par exemple les p dernières. La sous-matrice de J(G) constituée des termes situés dans ces p colonnes et les p lignes sont les $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}$, $1 \le i \le p$, $n - p + 1 \le j \le n$. Puisque cette sous-matrice carrée $p \times p$ est de rang p, son déterminant est non nul et nous sommes dans le cadre d'application du théorème des fonctions implicites. Il est possible de trouver un paramétrage de S au voisinage de X_0 de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_{n-p+1} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{n-p+1}(x_1, ..., x_{n-p}) \\ ... \\ \varphi_n(x_1, ..., x_{n-p}) \end{pmatrix} = \varphi(\xi) \qquad \text{en posant } \xi = (x_1, ..., x_{n-p})$$

$(x_1, ..., x_{n-p})$ sont les $n - p$ paramètres d'où se déduisent les p dernières composantes de X, le paramétrage complet de la surface étant $\xi \in \mathbb{R}^{n-p} \to X = \Phi(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi(\xi) \end{pmatrix} \in S \subset \mathbb{R}^n$.

Pour définir une courbe de classe C^1 incluse dans S, il suffit de définir une fonction $t \to \xi(t)$, de sorte que la courbe sera paramétrée par :

$$t \to X(t) = \Phi(\xi(t)) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \varphi(\xi(t)) \end{pmatrix} \in S$$

On peut supposer qu'on passe par X_0 pour la valeur 0 du paramètre. La tangente à cette courbe en X_0 est dirigée par le vecteur X'(0), égal à $d\Phi_{\xi(0)}(\xi'(0))$. Comme $\xi'(0)$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^{n-p}$, on voit que la direction du sous-espace tangent n'est autre que $\mathrm{Im}(d\Phi_{\xi(0)})$. Comme $d\Phi_{\xi(0)} = \begin{pmatrix} I_{n-p} \\ d\varphi_{\xi(0)} \end{pmatrix}$, le bloc supérieur I_{n-p} fait que $d\Phi_{\xi(0)}$ est de rang $n - p$. Donc le sous-espace tangent est bien de dimension $n - p$.

❑ (ii) : Le fait que $\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0)$, $\boldsymbol{grad}(g_2)(X_0)$, ..., $\boldsymbol{grad}(g_p)(X_0)$ soient des vecteurs linéairement indépendants est équivalent à dire que $dG(X_0)$, dont les lignes sont les composantes des susdits gradients, est de rang p, ou encore que $\mathrm{Ker}(dG(X_0))$ est de dimension $n - p$. $\mathrm{Ker}(dG(X_0))$ n'est autre que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à $\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0)$, ..., $\boldsymbol{grad}(g_p)(X_0)$. En effet, pour tout h de $\mathbb{R}^{n,}$ on a les équivalences :

$h \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}G(X_0))$

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{d}G(X_0)(h) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{d}g_i(X_0)(h) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, p]\!],\ <\boldsymbol{grad}(g_i)(X_0), h> = 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, p]\!],\ h \perp \boldsymbol{grad}(g_i)(X_0)$

$\Leftrightarrow \quad h \in \mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0), ..., \boldsymbol{grad}(g_p)(X_0))^{\perp}$

En particulier :

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{d}G(X_0))) &= \dim(\mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0), ..., \boldsymbol{grad}(g_p)(X_0))^{\perp}) \\ &= n - \dim(\mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0), ..., \boldsymbol{grad}(g_p)(X_0))) \\ &= n - p\end{aligned}$$

On montre de même $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(X_0)) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(f)(X_0))^{\perp}$, égalité que nous utiliserons dans le (iii).

Or, au voisinage de X_0, on a :

$$X \in S \Leftrightarrow G(X) = 0 \Leftrightarrow \exists\, \xi,\ X = \Phi(\xi)$$

Φ et G vérifient donc $G \circ \Phi = 0$, avec $\mathbb{R}^{n-p} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{G} \mathbb{R}^p$ et donc, en différentiant en ξ_0 tel que $X_0 = \Phi(\xi_0)$:

$\mathrm{d}(G \circ \Phi)(\xi_0) = 0$

$\Rightarrow \quad \mathrm{d}G(\Phi(\xi_0)) \circ \mathrm{d}\Phi(\xi_0) = 0$

$\Rightarrow \quad \mathrm{d}G(X_0) \circ \mathrm{d}\Phi(\xi_0) = 0$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(\mathrm{d}\Phi(\xi_0)) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{d}G(X_0))$

mais $\mathrm{Im}(\mathrm{d}\Phi(\xi_0))$ dirige le sous-espace tangent à S en X_0, et il est de dimension $n - p$, tout comme $\mathrm{d}G(X_0)$. Cest deux espaces ayant même dimension et l'un étant inclus dans l'autre, ils sont égaux :

$\mathrm{Im}(\mathrm{d}\Phi(\Theta_0)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}G(X_0)) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0), ..., \boldsymbol{grad}(g_p)(X_0))^{\perp}$

❑ (iii) : Compte tenu du paramétrage de S, la recherche des extrema X_0 d'une fonction $f : S \to \mathbb{R}$ revient à chercher les extrema de $f \circ \Phi$ sur $\mathbb{R}^{n-p}$. On cherche en effet X_0 sous la forme $X_0 = \Phi(\xi_0)$, ξ_0 élément de $\mathbb{R}^{n-p}$, sans contrainte sur ξ_0. Une condition nécessaire est donnée par $\boldsymbol{grad}(f \circ \Phi)(\xi_0) = 0$, ou, ce qui revient au même, $\mathrm{d}(f \circ \Phi)(\xi_0) = 0$, donc :

$\mathrm{d}f(\Phi(\xi_0)) \circ \mathrm{d}\Phi(\xi_0) = 0 = \mathrm{d}f(X_0) \circ \mathrm{d}\Phi(\xi_0)$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(\mathrm{d}\Phi(\xi_0)) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(X_0))$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0), ..., \boldsymbol{grad}(g_p)(X_0))^{\perp} \subset \mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(f)(X_0))^{\perp}$

car, d'après (ii), $\mathrm{Im}(\mathrm{d}\Phi(\xi_0)) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0), ..., \boldsymbol{grad}(g_p)(X_0))^{\perp}$

et $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(X_0)) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(f)(X_0))^{\perp}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(f)(X_0)) \subset \mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0), ..., \boldsymbol{grad}(g_p)(X_0))$

En particulier :

$\boldsymbol{grad}(f)(X_0) \in \mathrm{Vect}(\boldsymbol{grad}(g_1)(X_0), ..., \boldsymbol{grad}(g_p)(X_0))$

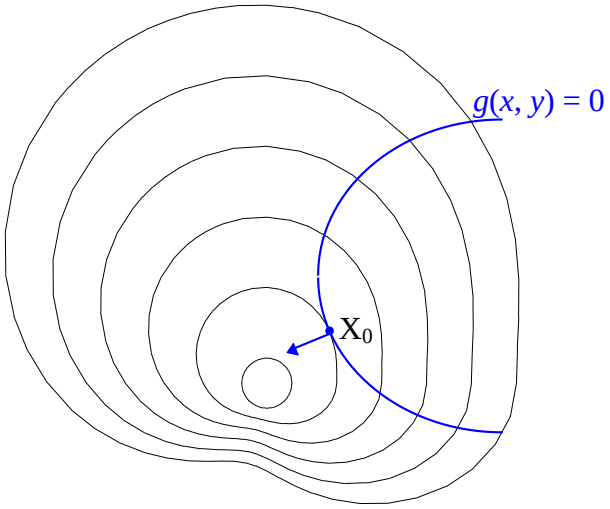
orthogonal au sous-espace tangent à S en X_0

$\Rightarrow \quad \exists\, (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \boldsymbol{grad}(f)(X_0) = \lambda_1 \boldsymbol{grad}(g_1)(X_0) + ... + \lambda_p \boldsymbol{grad}(g_p)(X_0)$

EXEMPLES :

❑ Reprenons notre exemple de $f(x, y)$ altitude en un point (x, y) et de $g(x, y) = 0$ équation implicite d'un sentier à flanc de colline. La recherche de l'altitude maximale le long de ce sentier conduit à résoudre $\boldsymbol{grad}(f)(X_0) = \lambda\, \boldsymbol{grad}(g)(X_0)$. On souhaite donc que les deux gradients soient colinéaires au point cherché X_0. Or $\boldsymbol{grad}(f)$ indique dans quelle direction l'altitude f varie le plus vite. C'est la direction de la ligne de plus grande pente. Par ailleurs, $\boldsymbol{grad}(g)$ est orthogonal à la courbe $g(x, y) = 0$. L'altitude maximale sur le sentier sera donc obtenue en un point X_0 tel que la ligne de plus grande

pente coupera le sentier à angle droit. C'est aussi le point où le sentier et la ligne de niveau $f(x, y) = f(X_0)$ sont tangentes.
Ci-dessous, la courbe imposée $g(x, y) = 0$ est en bleu. Les courbes noires sont diverses lignes de niveau de la fonction f, croissant de l'extérieur vers l'intérieur de la figure. Le vecteur indique la direction commune de $\boldsymbol{grad}(f)(X_0)$ et $\boldsymbol{grad}(g)(X_0)$.



❑ Dans l'exemple précédent, on retrouve la colinéarité des gradients en utilisant le théorème des fonctions implicites. Supposons que $\frac{\partial g}{\partial y}(X_0) \neq 0$. Au voisinage de X_0, la courbe $g(x, y) = 0$ est représentative d'une fonction $y = \varphi(x)$. On cherche le maximum de f le long de cette courbe, et donc le maximum de $x \to f(x, \varphi(x))$. Si ce maximum est en x_0, abscisse de X_0, la dérivée en x_0 de la fonction $x \to f(x, \varphi(x))$ doit être nul. Or cette dérivée vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\, \varphi'(x_0)$. Par ailleurs, on sait que $\varphi'(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(X_0)}$. On a donc en X_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\, \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(X_0)} = 0$$

ou encore :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0)\, \frac{\partial g}{\partial y}(X_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\, \frac{\partial g}{\partial x}(X_0) = 0$$

égalité équivalente à la colinéarité des deux vecteurs :

$$\boldsymbol{grad}(f)(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{grad}(g)(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(X_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(X_0) \end{pmatrix}.$$

❑ Quelle est l'aire maximale d'un rectangle de côtés x et y, dont le périmètre P est donné ?
On prend U =]0, +∞[×]0, +∞[car il est clair qu'un côté de longueur nulle ne présente aucun intérêt. On cherche ici à maximiser $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $g(x, y) = 2x + 2y - P = 0$. Si (x_0, y_0) sont les longueurs cherchées, on écrit qu'il existe λ tel que :

$$\boldsymbol{grad}(f)(x_0, y_0) = \lambda \boldsymbol{grad}(g)(x_0, y_0)$$

donc $\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $x_0 = y_0 = 2\lambda$

Comme $g(x_0, y_0) = 0$, on a nécessairement $x_0 = y_0 = \frac{P}{4}$. Il s'agit du carré.

On vérifie bien que $f(\frac{P}{4}, \frac{P}{4})$ est maximal, puisque :

$$f(\frac{P}{4} + h, \frac{P}{4} + k) = \frac{P^2}{16} + \frac{P}{4}(h + k) + kh \quad \text{et} \quad g(\frac{P}{4} + h, \frac{P}{4} + k) = 2h + 2k = 0$$

$$\Rightarrow \quad h = -k \text{ et } f(\frac{P}{4} + h, \frac{P}{4} + k) = f(\frac{P}{4} + h, \frac{P}{4} - h) = \frac{P^2}{16} - h^2 \leq \frac{P^2}{16}$$

❑ Quel est le parallélépipède de volume donné et de surface minimale ? Si x, y et z sont les dimensions du parallélépipède, on prend ici $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ et $g(x, y, z) = xyz$. La condition $\boldsymbol{grad}(f) = \lambda \boldsymbol{grad}(g)$ donne $\begin{pmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$. Les paires (non ordonnées) $\{y, z\}$, $\{x, z\}$ et $\{x, y\}$ sont toutes trois solutions de l'équation $u + v = \lambda uv$, ou sont les racines du trinôme $X^2 - \lambda\pi X + \pi$, où $\pi = uv$. Comme ce trinôme n'admet que deux racines, cela signifie que $\{y, z\} = \{x, z\} = \{x, y\}$, et donc par exemple :

$(y, z) = (x, z) = (x, y) \Rightarrow x = y = z$
ou $(y, z) = (x, z) = (y, x) \Rightarrow x = y = z$
ou $(y, z) = (z, x) = (x, y) \Rightarrow x = y = z$
etc.
Le parallélépipède est donc un cube.

❑ La méthode décrite peut s'appliquer également à la recherche d'extrema, les contraintes étant des inégalités. On cherche par exemple les extrema de $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ avec les conditions $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$. Il y a deux méthodes possibles :

- <u>Méthode 1</u> :

On étudie f sur la frontière du domaine [0, 1] × [0, 1] pour y déterminer en quels points f est extrémal, et on compare ces extrema avec ceux qu'on trouve dans le domaine ouvert]0, 1[×]0, 1[par annulation du gradient.
Sur {0} × [0, 1], $f(x, y) = -y^2$ de valeurs extrémales 0 et 1.
Sur {1} × [0, 1], $f(x, y) = 1 + y - y^2$ de valeurs extrémales $\frac{5}{4}$ et 1.
Sur [0, 1] × {0}, $f(x, y) = x^2$ de valeurs extrémales 0 et 1.
Sur [0, 1] × {1}, $f(x, y) = x^2 + x - 1$ de valeurs extrémales –1 et 1.
Donc sur la frontière de [0, 1] × [0, 1], les valeurs extrémales de f sont – 1 au point (0, 1) et $\frac{5}{4}$ au point $(1, \frac{1}{2})$.

Sur l'ouvert]0, 1[×]0, 1[, $\boldsymbol{grad}(f) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 2y \end{pmatrix}$ qui ne s'annule pas sur cet ouvert. Il n'y a donc pas d'extremum sur]0, 1[×]0, 1[.

- <u>Méthode 2</u> :

On peut traduire le fait que x et y sont positifs ou nuls en les remplaçant respectivement par des carrés u^2 et v^2, et traduire la condition $u^2 \leq 1$ par $u^2 = 1 - z^2$. De même, $v^2 \leq 1$ se traduira par $v^2 = 1 - t^2$. On introduit ainsi de nouvelles variables. Les fonctions considérées dépendent alors de u, v, z et t. Il s'agit de rechercher les extrema de la fonction F : $(u, v, z, t) \to u^4 + u^2v^2 - v^4 = f(x, y)$ sous les conditions

$$\begin{cases} g_1 = u^2 + z^2 - 1 = 0 \\ g_2 = v^2 + t^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

(u, v, z, t) sont éléments de U = $\mathbb{R}^4$. La relation $\boldsymbol{grad}(\mathrm{F}) = \lambda\boldsymbol{grad}(g_1) + \mu\boldsymbol{grad}(g_2)$ s'écrit :

$$\begin{cases} 4u^3 + 2uv^2 = 2\lambda u \\ 2u^2v - 4v^3 = 2\mu v \\ 2\lambda z = 0 \\ 2\mu t = 0 \end{cases}$$

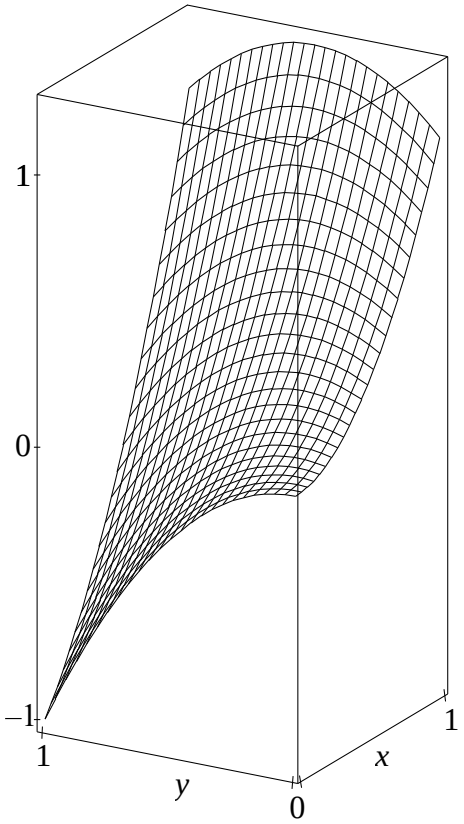
Le système complet à résoudre est :

$$\begin{cases} u^2 + z^2 - 1 = 0 \\ v^2 + t^2 - 1 = 0 \\ u = 0 \text{ ou } 4u^2 + 2v^2 = 2\lambda \\ v = 0 \text{ ou } 2u^2 - 4v^2 = 2\mu \\ z = 0 \text{ ou } \lambda = 0 \\ t = 0 \text{ ou } \mu = 0 \end{cases}$$

dont on vérifiera que les seules solutions sont les suivantes :

- Si $u = v = 0$ alors $x = y = 0$. f est nul en ce point, mais il ne s'agit ni d'un minimum (car $f(x, 0) > 0$ pour $x \neq 0$), ni d'un maximum (car $f(0, y) < 0$ pour $y \neq 0$).
- $u = 0$ et $v = \pm 1 \Rightarrow x = 0$, $y = 1$ et $f(0, 1) = -1$. On remarque que, au voisinage de ce point :
  $$f(x, y) = f(u^2, 1 - t^2) = -1 + u^2 + 2t^2 + u^4 - t^4 - u^2t^2$$
  $$= -1 + u^2 + 2t^2 + o(\| (u, t) \|^2) \geq -1.$$
  On a un minimum local.
- $u = \pm 1$ et $v = 0 \Rightarrow x = 1$, $y = 0$ et $f(1, 0) = 1$. Au voisinage de ce point, on a :
  $$f(x, y) = f(1 - z^2, v^2) = 1 - 2z^2 + v^2 + z^4 - v^2z^2 - v^4$$
  $$= 1 - 2z^2 + v^2 + o(\| (v, z) \|^2).$$
  La quantité $-2z^2 + v^2$ changeant de signe, il n'y a pas d'extremum en ce point.
- $u = \pm 1$ et $v = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 1$, $y = \dfrac{1}{2}$ et $f(1, \dfrac{1}{2}) = \dfrac{5}{4}$. Au voisinage de ce point, on a :
  $$f(1 - z^2, \frac{1}{2} + h) = \frac{5}{4} - \frac{5}{2}z^2 - h^2 + o(\| (h,z) \|^2)$$
  On a un maximum local.
- $u = \pm 1$ et $v = \pm 1 \Rightarrow x = y = 1$ et $f(1, 1) = 1$. Au voisinage de ce point, on a :
  $$f(1 - z^2, 1 - t^2) = 1 - 3z^2 + t^2 + o(\| (t, z) \|^2)$$
  Il n'y a pas d'extremum.

Conclusion : il y a un minimum en (0, 1) et un maximum en $(1, \dfrac{1}{2})$. Ci-dessous, la représentation graphique de la surface $z = f(x, y)$:



❑ **La distribution de Boltzmann**. On considère un milieu en équilibre thermique à la température T, constituées de N particules discernables se répartissant suivant n niveaux d'énergie E_1, ..., E_n, mais de façon que leur énergie moyenne E_m corresponde à une valeur fixée a priori, liée à la température. On suppose ici que les niveaux d'énergie sont en nombre fini. Un raisonnement analogue conduirait à un calcul au moyen de séries pour une répartition discrète infinie, et à un calcul intégral pour une répartition à densité continue.
On suppose que toutes les façons de répartir les N particules parmi les divers niveaux d'énergie en respectant la valeur de l'énergie moyenne sont équiprobables. Chaque répartition s'appelle état microscopique. Soit Ω_{tot} le nombre d'états microscopiques (dont la valeur exacte importe peu). Considérons parmi ceux-ci ceux qui donnent une proportion p_i de particules d'énergie E_i. Il existe alors $N_i = Np_i$ particules d'énergie E_i. Le nombre de façons de répartir les N particules en n paquets $N_1 = Np_1$, $N_2 = Np_2$, ..., $N_n = Np_n$ est $\Omega = \dfrac{N!}{N_1!...N_n!}$ de sorte que la probabilité d'une telle distribution est $\dfrac{\Omega}{\Omega_{tot}} = \dfrac{1}{\Omega_{tot}} \dfrac{N!}{N_1!...N_n!}$. La distribution la plus probable correspond au cas où Ω est le plus grand possible. En thermodynamique, on introduit la quantité $S = k \ln(\Omega)$, appelée entropie, où k s'appelle constante de Boltzmann. La fonction ln étant croissante, la situation la plus probable correspond à S maximal, sous les contraintes suivantes :

$p_1 + ... + p_n = 1$	(relation g_1)
$p_1E_1 + ... + p_nE_n = E_m$	calcul de l'énergie moyenne (relation g_2)

On obtient une expression de S sous forme de fonction continue et même différentiable en utilisant la formule de Stirling (voir le chapitre L2/SUITESF.PDF) ln(N!) = Nln(N) – N + o(N), soit ici, en négligeant le reste o(N) :

$$\frac{S}{k} = \ln(\Omega) = N\ln(N) - N - \sum_{i=1}^{n} (N_i \ln(N_i) - N_i) = N\ln(N) - \sum_{i=1}^{n} N_i \ln(N_i) \quad \text{car } \sum_{i=1}^{n} N_i = N$$

$$= N\ln(N) - \sum_{i=1}^{n} Np_i \ln(Np_i) = N\ln(N) - \sum_{i=1}^{n} Np_i \ln(N) - \sum_{i=1}^{n} Np_i \ln(p_i)$$

$$= -N \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)$$

N et E_m sont donnés. Les variables sont les p_i. Soit f la quantité $\frac{S}{kN}$, de sorte que :

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)\right) = -\ln(p_i) - 1$$

La relation donnée par les multiplicateurs de Lagrange

$$\exists\, \lambda_1, \ldots, \exists\, \lambda_p, \boldsymbol{grad}(f) = \lambda_1 \boldsymbol{grad}(g_1) + \ldots + \lambda_p \boldsymbol{grad}(g_p)$$

s'exprime ici sous la forme, $\boldsymbol{grad}(f) = \lambda\, \boldsymbol{grad}(g_1) + \mu\, \boldsymbol{grad}(g_2)$ ce qui conduit à :

$\forall\, i, -\ln(p_i) - 1 = \lambda + \mu E_i$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, i, \ln(p_i) = -1 - \lambda - \mu E_i$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, i, p_i = \exp(-1 - \lambda - \mu E_i) = C \times \exp(-\mu E_i)$.

La constante C est définie en fonction de μ de façon que $p_1 + \ldots + p_n = 1$, autrement dit :

$$\sum_{i=1}^{n} C \exp(-\mu E_i) = 1$$

L'entropie vaut alors :

$$S = -kN \sum_{i=1}^{n} C \times \exp(-\mu E_i) \times (\ln(C) - \mu E_i)$$

$$= -kN \ln(C) + kN \sum_{i=1}^{n} C \times \exp(-\mu E_i) \times \mu E_i$$

$$= -kN \ln(C) + kN\mu E_m$$

$$= -kN \ln(C) + k\mu E$$

où $E = NE_m$ est l'énergie totale E du système. On a alors $\frac{dS}{dE} = k\mu$, mais par ailleurs, l'étude des gaz parfaits conduit à la relation $\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$, où T est la température absolue. On pose donc $\mu = \frac{1}{kT}$ et la probabilité qu'une particule se trouve à l'énergie E_i est donc proportionnelle à $\exp(-\frac{E_i}{kT})$. Il est remarquable que cette répartition ait été observée dans des domaines très variés, sans rapport avec les gaz parfaits. La constante de Boltzman k est directement liée au choix de l'échelle de température

T. Elle vaut environ 1.38 10^{-23} J/K et correspond également au quotient $\frac{R}{\mathcal{N}}$ où R est la constante des gaz parfaits et $\mathcal{N}$ le nombre d'Avogadro. La détermination de k par observation de répartition de particules selon leur niveau d'énergie dans diverses expériences est un moyen de déterminer le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}$.

Annexe V : Une démonstration du théorème d'inversion locale

Cette démonstration peut être admise au niveau L2. Sa lecture nécessite en effet certaines connaissances qui figurent dans le chapitre L3/METRIQUE.PDF.

On rappelle les hypothèses du théorème d'inversion locale : f est une fonction d'un ouvert U de E dans F, de classe C^1, et a un point de U. On suppose que $df(a)$ est inversible.
Il s'agit de montrer qu'il existe un voisinage U' de a inclus dans U et un voisinage W de $f(a)$ tels que f soit un difféomorphisme de U' sur W.

Pour alléger les notations, notons L l'application linéaire $df(a)$. On pose également $b = f(a)$.

1- Introduction d'une application contractante

Soit y un élément de f(E). On considère la fonction $\varphi : x \in E \to x + L^{-1}(y - f(x))$, qui dépend de y. L^{-1} étant une application linéaire, elle est différentiable et sa différentielle est égale en tout point à elle-même. Par composition, φ est C^1 et sa différentielle en x est :

$$d\varphi(x) = Id_E - L^{-1} \circ df(x) = L^{-1} \circ (L - df(x)) = L^{-1} \circ (df(a) - df(x))$$

Puisque f est C^1, $\lim\limits_{x \to a} df(x) = df(a)$, donc $\lim\limits_{x \to a} d\varphi(x) = 0$, donc on peut choisir $r > 0$, tel que, sur la boule fermée $\overline{B}(a, r)$, $|||\, d\varphi(x) \,||| \leq \frac{1}{2}$. L'expression de $d\varphi(x)$ ne faisant pas intervenir y, ce choix de r ne dépend pas de y.

L'inégalité des accroissements finis permet d'en déduire que, pour tout x et x' de $\overline{B}(a, r)$:

$$\| \varphi(x) - \varphi(x') \| \leq \frac{1}{2} \| x - x' \|$$

φ, application lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1, est une application dite **contractance**.

2- Existence d'une boule de centre *a* stable par φ

Considérons alors dans F la boule ouverte $B(b, \frac{r}{2\, |||\, L^{-1} \,|||})$ et prenons y dans cette boule et l'application φ correspondante. Montrons que, pour un tel y, $\varphi(\overline{B}(a, r)) \subset \overline{B}(a, r)$. Pour tout x dans $\overline{B}(a, r)$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - a &= x - a + L^{-1}(y - f(x)) \\ &= x - a + L^{-1}(f(a) - f(x)) + L^{-1}(y - b) \qquad \text{car } b = f(a) \\ &= \psi(x) + L^{-1}(y - b) \end{aligned}$$

avec $\psi : x \to x - a + L^{-1}(f(a) - f(x))$. ψ, qui diffère de φ de la quantité $L^{-1}(y - b)$ indépendante de x, est C^1 et a même différentielle que φ en tout point, donc, pour tout x de $\overline{B}(a, r)$, $|||\, d\psi(x)\, ||| \leq \frac{1}{2}$. Le théorème des accroissements finis permet alors de dire que :

$$\| \psi(x) - \psi(a) \| \leq \frac{1}{2} \| x - a \| \leq \frac{r}{2} \qquad \text{car } x \in \overline{B}(a, r)$$

$$\Rightarrow \quad \| \psi(x) \| \leq \frac{r}{2} \qquad \text{car } \psi(a) = 0$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \| L^{-1}(y - b) \| &\leq ||| L^{-1} ||| \, \| y - b \| \\ &< ||| L^{-1} ||| \frac{r}{2\, ||| L^{-1} |||} \qquad \text{car } y \in B(b, \frac{r}{2\, ||| L^{-1} |||}) \\ &< \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité triangulaire :

$$\| \varphi(x) - a \| \leq \| \psi(x) \| + \| L^{-1}(y - b) \| < r$$

et $\varphi(x)$ appartient à $B(a, r) \subset \overline{B}(a, r)$.

3- Définition des ouverts U' et W et bijectivité de *f*

φ est une application contractance de $\overline{B}(a, r)$ dans lui-même, qui est une partie fermée d'un espace vectoriel de dimension finie, donc est un espace métrique complet. Le chapitre L3/METRIQUE.PDF explique ce qu'est un espace complet et montre qu'une application contractante sur un tel espace admet un unique point fixe x, i.e. qui vérifie :

$$\varphi(x) = x$$

donc $\quad \exists\, x$ unique $\in \overline{B}(a, r)$, $x + L^{-1}(y - f(x)) = x$

donc $\quad \exists\, x$ unique $\in \overline{B}(a, r)$, $y = f(x)$

Rappelons qu'on a pris y dans la boule $B(b, \frac{r}{2\, ||| L^{-1} |||})$. On vient donc de montrer que tout y de la boule $B(b, \frac{r}{2\, ||| L^{-1} |||})$ admet un unique antécédent dans $\overline{B}(a, r)$. Cet antécédent appartient en fait à la boule ouverte $B(a, r)$. En effet, dans le paragraphe précédent, on a montré que $\| \varphi(x) - a \| < r$, mais $\varphi(x) = x$, donc $\| x - a \| < r$, donc x est élément de $B(a, r)$.

Prenons $W = B(b, \frac{r}{2\, ||| L^{-1} |||})$ et $U' = \{x \in B(a, r), f(x) \in W\}$. f est alors une bijection de U' sur W. Nous considérons désormais la restriction de f à U', que nous continuerons à noter f. Cette restriction f étant continue et W ouvert, U' qui est égal à $f^{-1}(W)$ est ouvert dans $B(a, r)$, et $B(a, r)$ étant lui-même un ouvert de E, U' est un ouvert de E.

4- Continuité de f^{-1}

En reprenant la fonction $\psi : x \to x - a + L^{-1}(f(a) - f(x))$ qui est, comme la fonction φ, lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$ sur $\overline{B}(a, r)$, on a, pour tout y et y' dans W, et en notant x et x' leurs antécédants par f^{-1} dans U' :

$\psi(x) - \psi(x') = x - x' + L^{-1}(f(x') - f(x)) = x - x' + L^{-1}(y' - y)$

$\Rightarrow \quad x - x' - (\psi(x) - \psi(x')) = L^{-1}(y - y')$

$\Rightarrow \quad \| x - x' \| - \| \psi(x) - \psi(x') \| \leq \| x - x' - (\psi(x) - \psi(x')) \| \leq \| L^{-1}(y - y') \| \leq ||| L^{-1} ||| \, \| y - y' \|$

$\Rightarrow \quad \| x - x' \| - \frac{1}{2} \| x - x' \| \leq \| x - x' \| - \| \psi(x) - \psi(x') \| \leq ||| L^{-1} ||| \, \| y - y' \|$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \| x - x' \| \leq ||| L^{-1} ||| \, \| y - y' \|$

$\Rightarrow \quad \| f^{-1}(y) - f^{-1}(y') \| = \| x - x' \| \leq 2 \, ||| L^{-1} ||| \, \| y - y' \|$

Donc f^{-1} est lipschitzienne sur W de rapport $2 \, ||| L^{-1} |||$ donc continue.

5- Différentiabilité de f^{-1}

Soit x_0 un élément de U', et $y_0 = f(x_0)$. Posons $H = df(x_0)$. On a :

$f(x) - f(x_0) = H(x - x_0) + \| x - x_0 \| \, \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

$\Rightarrow \quad y - y_0 = H(x - x_0) + \| x - x_0 \| \, \varepsilon(x)$ en posant $y = f(x)$

$\Rightarrow \quad x - x_0 = H^{-1}(y - y_0) - H^{-1}(\| x - x_0 \| \, \varepsilon(x))$ car H est inversible

$\Rightarrow \quad f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = H^{-1}(y - y_0) - \| x - x_0 \| \, H^{-1}(\varepsilon(x))$

Pour conclure que f^{-1} est différentiable en y_0, de différentielle H^{-1}, il suffit que montrer que :

$\| x - x_0 \| \, H^{-1}(\varepsilon(x)) = o(\| y - y_0 \|)$ quand y tend vers y_0

Or l'égalité $x - x_0 = H^{-1}(y - y_0) - \| x - x_0 \| \, H^{-1}(\varepsilon(x))$ entraîne :

$\| x - x_0 \| \leq \| H^{-1}(y - y_0) \| + \| x - x_0 \| \, \| H^{-1}(\varepsilon(x)) \|$

$\leq ||| H^{-1} ||| \, \| y - y_0 \| + \| x - x_0 \| \, \| H^{-1}(\varepsilon(x)) \|$

$\Rightarrow \quad \| x - x_0 \| - \| x - x_0 \| \, \| H^{-1}(\varepsilon(x)) \| \leq ||| H^{-1} ||| \, \| y - y_0 \|$

$\Rightarrow \quad \| x - x_0 \| \, (1 - \| H^{-1}(\varepsilon(x)) \|) \leq ||| H^{-1} ||| \, \| y - y_0 \|$

Quand y tend vers y_0, $x = f^{-1}(y)$ tend vers $x_0 = f^{-1}(y_0)$ car nous avons vu que f^{-1} était continue, donc $\varepsilon(x)$ tend vers 0 ainsi que son image par H^{-1}, car H^{-1} est continue. On peut donc se placer sur un voisinage de y_0 tel que, pour y dans ce voisinage, $\| H^{-1}(\varepsilon(x)) \| \leq \frac{1}{2}$, et donc $(1 - \| H^{-1}(\varepsilon(x)) \|) \geq \frac{1}{2}$. On obtient :

$\| x - x_0 \| \leq 2 \, ||| H^{-1} ||| \, \| y - y_0 \|$

donc $\| x - x_0 \| \, \| H^{-1}(\varepsilon(x)) \| \leq 2 \, ||| H^{-1} ||| \, \| y - y_0 \| \, \| H^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y))) \| = o(\| y - y_0 \|)$

car $\lim\limits_{y \to y_0} H^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y))) = \lim\limits_{x \to x_0} H^{-1}(\varepsilon(x)) = 0$.

Ainsi, f^{-1} est différentiable en y_0, de différentielle $d(f^{-1})(y_0) = H^{-1} = (df(x_0))^{-1}$.

6- Caractère C^1 de f^{-1}

Il reste à montrer que f^{-1} est C^1, i.e. que l'application $y \to d(f^{-1})(y)$ est continue. Cette application est la composée de :

$$y \xrightarrow{f^{-1}} x = f^{-1}(y) \xrightarrow{df} df(x) \xrightarrow{-1} (df(x))^{-1} = d(f^{-1})(y)$$

La première flèche $\xrightarrow{f^{-1}}$ est continue. La seconde flèche $\xrightarrow{df}$ est continue car f est C^1, ce qui signifie que $df(x)$ dépend continûment de x. La troisième flèche $\xrightarrow{-1}$ est l'application qui, à une application linéaire inversible, associe son inverse. Elle est continue comme on le voit plus facilement sur les matrices : l'application qui, à une matrice inversible, associe la matrice inverse est continue, car l'expression de la matrice inverse en fonction de la comatrice (voir le chapitre L1/DETERMNT.PDF) montre que tous les coefficients de la matrice inverse s'expriment

continûment à partir des coefficients de la matrice initiale. Chacune des flèches étant continue, il en est de même de la composée $y \to \mathrm{d}(f^{-1})(y)$.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Soit $a > 0$, et soit f la fonction définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^a y}{x^4 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue en (0, 0) si et seulement si $a > 2$.

b) Dans ce dernier cas, f est-elle différentiable en (0, 0) ?

Exo.2) Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\| x \|^2}$, où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne. f est une **inversion**.

a) Quelle est la matrice jacobienne J de f en un point quelconque de $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$?

b) Montrer que J est la matrice d'une similitude (produit d'une homothétie par une isométrie). En donner les éléments caractéristiques.

Exo.3) Dans $\mathbb{R}^{n+1}$, on considère l'hyperplan (H) = $\{(x_1, ..., x_n, 0) \mid \forall\ i,\ x_i \in \mathbb{R}\}$, la sphère unité $S^n = \{(y_1, ..., y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = 1\}$ et les deux points N = (0, 0, ..., 0, 1) et P = (0, 0, ..., 0, – 1), appelés respectivement pôle nord et pôle sud de S^n. Pour tout x élément de $\mathbb{R}^n$, on considère le point M de (H) de coordonnées $(x, 0)$ et le point M' autre que N intersection de S^n et de la droite (MN). On définit ainsi une fonction $f : x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \to \mathrm{M}' = f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ f_{n+1}(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix} \in S^n$. La transformation M' $\to$ M s'appelle **projection stéréographique** de S^n sur (H) de pôle N. f en est la réciproque (abstraction faite de la dernière composante nulle des points de (H)).

a) Donner l'expression de $f(x)$ en fonction des composantes de x. On pourra poser $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

b) Pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on forme la matrice jacobienne J de f, de terme général $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Calculer les coefficients de la matrice J.

c) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par la différentielle $\mathrm{d}f_x$ est une base orthogonale du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal à $f(x)$. Quelle est la norme euclidienne des vecteurs de cette base ?

d) Soit $g : \mathbb{R}^n \to S^n$ la projection stéréographique réciproque de pôle P. Montrer que $g^{-1} \circ f$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur lui-même.

Exo.4) Toutes les fonctions sont supposées C^1. E et F désigne deux espaces vectoriels de dimension finie, E étant euclidien. On dispose de plusieurs notions voisines :

Pour f de E dans F, on utilise la notion de différentielle df_a

Pour f de $\mathbb{R}$ dans F, on utilise celle de dérivée $f'(a)$. Quel rapport avec df_a ?

Pour f de E euclidien dans $\mathbb{R}$, on utilise celle de gradient $\boldsymbol{grad}(f)(a)$. Quel rapport avec df_a ?

Pour $f : E \to F$, et $g : F \to G$, on a $d(g \circ f)_a = dg_b \circ df_a$, avec $b = f(a)$.

a) Pour $f : \mathbb{R} \to F$ et $g : F \to G$, exprimer $(g \circ f)'$ en fonction de dg et f'

b) Pour $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to G$, exprimer $d(g \circ f)$ en fonction de g' et de $\boldsymbol{grad}(f)$

c) Pour $f : E \to F$ et $g : F \to \mathbb{R}$, exprimer $\boldsymbol{grad}(g \circ f)$ en fonction de $\boldsymbol{grad}(g)$ et df

d) Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to F$, exprimer $(g \circ f)'$ en fonction de g' et f'

e) Pour $f : \mathbb{R} \to E$ et $g : E \to \mathbb{R}$, exprimer $(g \circ f)'$ en fonction de $\boldsymbol{grad}(g)$ et f'

f) Pour $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, exprimer $\boldsymbol{grad}(g \circ f)$ en fonction de g' et $\boldsymbol{grad}(f)$.

Exo.5) Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

a) Montrer que f est est C^1 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Donner un exemple de fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que g ne soit pas continue en au moins un point.

c) Montrer que, si f est C^2, alors g est différentiable.

Exo.6) Lors d'un passage en coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$, Gaston constate que $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta)$ et que :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos(\theta)$$

On a donc $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \dfrac{\partial r}{\partial x}$ alors que Gaston aurait plutôt pensé que $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial r}{\partial x}}$. Dans le cas d'un changement de variable général bijectif $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$, quelle relation y a-t-il entre $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ et $\dfrac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}$?

Exo.7) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x + y, xy)$. Déterminer deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$, les plus grands possibles, tels que f soit un C^1-difféomorphisme de U sur V.

Exo.8) Pour tout n, on note U_n l'ouvert $U_n = \mathbb{R}^n - \{0\}$. Déterminer :

a) un difféomorphisme de $\{(x, y), x^2 + y^2 > 1\}$ sur U_2.

b) un difféomorphisme de $\{(x, y), x^2 - y^2 > 1\}$ sur $U_1 \times \mathbb{R}$.

c) un difféomorphisme de $\{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 > 1)$ sur U_3.

d) un difféomorphisme de $\{(x, y, z), x^2 + y^2 - z^2 > 1)$ sur $U_2 \times \mathbb{R}$.

e) un difféomorphisme de $\{(x, y, z), x^2 - y^2 - z^2 > 1)$ sur $U_1 \times \mathbb{R}^2$.

f) un difféomorphisme de $\{(x_1, ..., x_n), x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 - x_{k+1}^2 - ... - x_n^2 > 1\}$ sur ... ?

Exo.9) Soit (E, < , >) un espace vectoriel euclidien de dimension n, et $\mathcal{S}$(E) l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques (on dit aussi auto-adjoints, revoir au besoin le chapitre L2/PREHILB.PDF) de E. On dit qu'un endomorphisme symétrique u de E est **défini positif**, si, pour tout x non nul de E, $<u(x), x>$ est strictement positif. Soit U l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs de E.

a) Pour tout u de $\mathcal{S}$(E), on pose $m(u) = \text{Inf}\{<u(x), x>, x \in \text{B}\}$ où B est la boule unité de E. Montrer que u appartient à U si et seulement si $m(u) > 0$.

b) En déduire que U est un ouvert de $\mathcal{S}$(E).

c) Montrer que l'application $f : v \in \text{U} \subset \text{E} \to v^2 \in \text{U}$ est bijective.

d) Montrer que f est un C^1-difféomorphisme.

e) Quelle est la différentielle de f^{-1} ?

Exo.10) On se place dans le disque D ouvert de centre O = (0, 0), de rayon 1, privé de son centre O.

a) x et y étant deux fonctions de classe C^1 de la variable réelle t à valeurs réelles, résoudre les systèmes différentiels (1) $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ et (2) $\begin{cases} x' = -x - \dfrac{y}{\ln(x^2+y^2)} \\ y' = -y + \dfrac{x}{\ln(x^2+y^2)} \end{cases}$. Pour le second système, on pourra poser $z = x + iy = re^{i\theta}$ avec r module de z et θ son argument, et résoudre le système vérifié par r et θ, suffisés fonctions C^1 de t (l'existence du couple (r, θ) en tant que fonctions C^1 n'est pas tout à fait évident et sera ici admise. Une preuve rigoureuse est donnée dans le chapitre L3/HOLOMRPF.PDF dans la partie relative au théorème du relèvement).Tracer les courbes paramétrées $t \to (x(t), y(t))$ des solutions trouvées dans chaque cas.

b) Déterminer un difféomorphisme $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \text{D}$ tel que les courbes intégrales de (1) aient pour images par h les courbes intégrales de (2).

Exo.11) On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'équation $\boldsymbol{Rot}\begin{pmatrix} \text{P} \\ \text{Q} \\ \text{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xyz - y \\ y - y^2 z \\ 2x - z \end{pmatrix}$, où P, Q, R sont trois fonctions C^1 de (x, y, z).

a) Chercher les solutions vérifiant R = 0 et $\text{Q}(x, y, 0) = 0$ pour tout (x, y)

b) Vérifier que $\begin{pmatrix} \text{P} \\ \text{Q} \\ \text{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz + x^2 \\ yz + x^2 \\ xy^2 z \end{pmatrix}$ est solution.

c) Déterminer une fonction f telle que l'ajout de $\boldsymbol{grad}(f)$ à la solution a) donne la solution b). Cet exercice est un cas particulier du théorème de Poincaré exposé dans l'annexe II[4].

Exo.12) Vérifier qu'une fonction $y = \varphi(x)$ est bien définie implicitement au voisinage de (1, 1) par $x^3 + y^3 = xy + 1$. Donner un développement limité à l'ordre 4 de φ au voisinage de 1.

Exo.13) a) Montrer qu'au voisinage de $(2, -e, e)$, la relation $x + y + z - 1 - \ln(z) = 0$ définit une fonction $z = \Phi(x, y)$.

---

[4] Pour une généralisation, voir : Shirley Llamado Yap, The Poincaré lemma and an elementary construction of vector potentials, 116:3, Amer. Math. Monthly, (mars 2009), 261-267.

b) Donner les dérivées partielles premières de Φ en $(2, -e)$.

c) Donner les dérivées partielles secondes de Φ en $(2, -e)$.

Exo.14) Utilisation d'une forme différentielle pour résoudre une équation différentielle : Pour chacune des formes différentielles ω_0 suivantes, dire si elle est exacte. Si ce n'est pas le cas, la multiplier par un facteur intégrant g adéquat. Trouver ensuite une primitive f de $\omega = g\omega_0$ sur un ouvert convexe ou étoilé convenable. Déterminer enfin les courbes intégrales de l'équation différentielle indiquée.

a) $\omega_0(x, y) = (xy + 1 - y^2)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y$, $g(x, y) = \dfrac{x}{1 + xy}$, $y' = \dfrac{xy + 1 - y^2}{xy}$.

b) $\omega_0(x, y) = (y^2 + e^x)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y$, g fonction de x, $y' = y + \dfrac{e^x}{y}$.

Exo.15) Dans $\mathbb{R}^2$, soit A = (0, 1), B = (1, 1) et C = (0, 2). On considère le chemin Γ constitué :

du segment [CA]

du segment [AB]

de l'arc BC, de centre A et de rayon 1

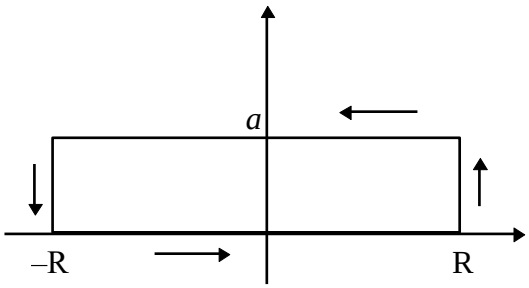
Soit $\omega = \dfrac{2xy\,\mathrm{d}x + (1 - x^2)\,\mathrm{d}y}{y^2}$. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ de deux façons.

Exo.16) On considère la forme différentielle ω définie par :

$$\omega = \exp(-x^2 + y^2)\cos(2xy)\,\mathrm{d}x + \exp(-x^2 + y^2)\sin(2xy)\,\mathrm{d}y$$

a) Montrer que ω est exacte.

b) On considère le chemin Γ suivant, parcourant un rectangle de largeur 2R et de hauteur a dans le sens trigonométrique :



Que vaut $\displaystyle\int_\Gamma \omega$?

c) Majorer l'intégrale de ω sur les deux segments latéraux et montrer qu'elles tendent vers 0 quand R tend vers l'infini.

d) En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x + ia)^2)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de a.

e) Donner une autre démonstration de cette propriété.

Exo.17) Pour tout (x, y) réels, on considère le complexe $z = x + iy$. On note $\mathrm{d}z$ la forme linéaire à valeur dans $\mathbb{C}$ égale à $\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$. On considère la forme différentielle suivante, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

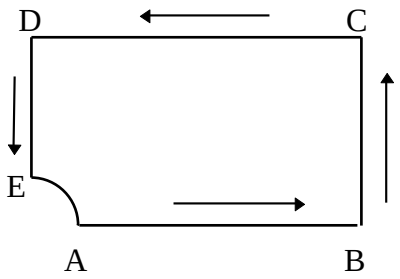
$$\omega = \mathrm{Re}\left(\frac{2z}{e^z - 1}\,\mathrm{d}z\right)$$

a) Vérifier que $\omega = \dfrac{x(\cos(y) - e^{-x}) + y\sin(y)}{\mathrm{ch}(x) - \cos(y)}\,\mathrm{d}x - \dfrac{y(\cos(y) - e^{-x}) - x\sin(y)}{\mathrm{ch}(x) - \cos(y)}\,\mathrm{d}y$

b) Vérifier que ω est une forme différentielle fermée.

c) Montrer que les fonctions $\dfrac{x(\cos(y) - e^{-x}) + y\sin(y)}{\mathrm{ch}(x) - \cos(y)}$ et $\dfrac{y(\cos(y) - e^{-x}) - x\sin(y)}{\mathrm{ch}(x) - \cos(y)}$ admettent une limite quand (x, y) tendent vers $(0, 0)$.

d) Que dire de $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ où Γ est le chemin suivant ?



avec $0 < a < b$ et $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(b, \pi)$, $D(0, \pi)$, $E(0, a)$.

e) On fait tendre a vers 0 et b vers $+\infty$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x$.

f) Procéder de même avec $\omega = \mathrm{Im}\left(\dfrac{2z}{e^z - 1}\,\mathrm{d}z\right)$ pour en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exo.18) Dans ce chapitre, nous avons essentiellement utilisé la notion de différentielle pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Voici des exemples de différentielles pour des fonctions définies sur l'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour chaque fonction suivante, montrer qu'elle est différentiable et déterminer sa différentielle :

a) $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to M^2$

b) $M \in GL_n(\mathbb{R}) \to M^{-1}$

c) $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \det(M)$

2- Solutions

Sol.1) a) Pour $a \leq 2$ et pour tout $m > 0$, on a $\left|f(x, mx^2)\right| = \dfrac{m|x|^{a+2}}{(1 + m^2)x^4} = \dfrac{m}{1 + m^2}\,|x|^{a-2}$. Cette quantité tend vers l'infini si $a < 2$ quand x tend vers 0, et vers $\dfrac{m}{1 + m^2}$ si $a = 2$, et non vers $f(0, 0) = 0$. Donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Pour $a > 2$, on a :

$$|x|^a|y| = |x|^{1+a/2} \times |x|^{-1+a/2}|y| \leq \frac{1}{2}\left(|x|^{a+2} + |x|^{a-2}y^2\right) \quad \text{en utilisant } |uv| \leq \frac{u^2 + v^2}{2}$$

donc, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{|x|^{a+2}}{x^4 + y^2} + \frac{|x|^{a-2}y^2}{x^4 + y^2}\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{|x|^{a+2}}{x^4} + \frac{|x|^{a-2}y^2}{y^2}\right) = |x|^{a-2} \to 0 \text{ quand } (x, y) \text{ tend vers } (0, 0)$$

Donc f est continue en (0, 0)

b) Toujours pour $a > 2$, la dérivée de f en (0, 0) suivant le vecteur (u, v) est la dérivée en 0 de la fonction $t \to |t|^{a-2}t\,\frac{|u|^a v}{t^4u^4 + v^2}$ et est donc nulle. En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. f est différentiable en (0, 0) si et seulement si :

$$f(x, y) = f(0, 0) + x\,\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y\,\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + o(x, y) = o(x, y)$$

Ce sera bien le cas si $a > 3$ d'après l'inégalité du a) $|f(x, y)| = O(|x|^{a-2}) = o(|x|) = o(x, y)$. Mais c'est faux si $2 < a \leq 3$. En effet, dans ce cas :

$$|f(x, x^2)| = \frac{|x|^{a+2}}{2x^4} = \frac{|x|^{a-2}}{2}$$

qui n'est pas un $o(x, y)$. Donc f n'est pas différentiable en (0, 0), bien qu'y admettant des dérivées partielles selon n'importe quel vecteur (mais f n'est pas C^1).

Sol.2) ❑ On note x_i les composantes de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $f_i(x)$ celles de $f(x)$, de sorte que :

$$f_i(x) = \frac{x_i}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

a) Le terme général de J est $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{cases} -\frac{2x_ix_j}{\|x\|^4} \text{ si } i \neq j \\ \frac{\|x\|^2 - 2x_i^2}{\|x\|^4} \text{ si } i = j \end{cases}$.

b) Prenons $\lambda = \frac{1}{\|x\|^2}$ et $P = \frac{J}{\lambda}$. Le terme général de P est $P_{ij} = \begin{cases} -\frac{2x_ix_j}{\|x\|^2} \text{ si } i \neq j \\ \frac{\|x\|^2 - 2x_i^2}{\|x\|^2} \text{ si } i = j \end{cases}$. On peut remarquer que $P = I_n - \frac{2xx^T}{\|x\|^2}$. Appliquée sur un vecteur y de $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$Py = y - \frac{2xx^Ty}{\|x\|^2} = y - 2\,\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}\,x$$

où $\langle x, y\rangle$ est le produit scalaire de x par y. P est la matrice de la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à x, qui est une isométrie, et J est le produit de cette isométrie par l'homothétie de rapport λ.

❑ On peut chercher directement la différentielle de f en écrivant que :

$$f(x + h) = \frac{x + h}{\|x + h\|^2} = \frac{x + h}{\|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2} = \frac{1}{\|x\|^2}\left(1 - 2\,\frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|^2} + o(h)\right)(x + h)$$
$$= f(x) + \frac{1}{\|x\|^2}\left(h - 2\,\frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|^2}\,x\right) + o(h)$$

On retrouve que la différentielle de f est l'application $h \to \frac{1}{\| x \|^2}\left(h - 2\,\frac{<x, h>}{\| x \|^2}\,x\right)$, composée de l'homothétie de rapport $\frac{1}{\| x \|^2}$ et de la réflexion P par rapport à l'hyperplan orthogonal à x.

Sol.3) a) Si $x = (x_1, ..., x_n)$, alors M = $(x_1, ..., x_n, 0)$. Posons M' = $(y_1, ..., y_{n+1})$. Puisque M, M' et N sont alignés, il existe λ (non nul car M' $\neq$ N) tel que M' = λM + $(1 - \lambda)$N, i.e. :

$\forall\ i \leq n,\ y_i = \lambda x_i$

et $\quad y_{n+1} = 1 - \lambda$

On veut que $\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = 1$, ce qui donne :

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (1 - \lambda)^2 = 1$$

$\Leftrightarrow \quad \lambda^2(r^2 + 1) - 2\lambda = 0 \qquad$ en développant

$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2}{r^2 + 1} \qquad$ car $\lambda \neq 0$

Ainsi, $f(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{r^2 + 1}\begin{pmatrix} 2x_1 \\ ... \\ 2x_n \\ r^2 - 1 \end{pmatrix}$.

b) Le terme général de la matrice de J vaut :

si $i \leq n$ et $i \neq j$, $\qquad J_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{2x_i}{r^2 + 1} = -\frac{4x_ix_j}{(r^2 + 1)^2}$

si $i = j \leq n$, $\qquad J_{jj} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{2x_j}{r^2 + 1} = \frac{2}{r^2 + 1} - \frac{4x_j^2}{(r^2 + 1)^2}$

si $i = n + 1$ $\qquad J_{n+1,j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} = \frac{4x_j}{(r^2 + 1)^2}$

c) Si on note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $df_x(e_j)$ a pour composantes la j-ème colonne de J, et donc :

$$df_x(e_j) = -\frac{4x_j}{(r^2 + 1)^2}\begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{r^2 + 1}\,e_j$$

alors que $f(x) = \frac{1}{r^2 + 1}\begin{pmatrix} 2x \\ r^2 - 1 \end{pmatrix}$.

donc $\quad <df_x(e_j), f(x)> = -\frac{4x_j}{(r^2 + 1)^3} \times (2r^2 - r^2 + 1) + \frac{2}{r^2 + 1}\frac{2x_j}{r^2 + 1} = 0.$

On a montré que les $df_x(e_j)$ étaient tous orthogonaux à $f(x)$. On peut obtenir ce résultat plus rapidement en remarquant que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $<f(x), f(x)> = 1$, donc en différentiant en x, on a, pour tout h élément de $\mathbb{R}^n$, $<f(x), df_x(h)> = 0$.

Montrons que les $df_x(e_j)$ sont orthogonaux deux à deux. Pour $i \neq j$:

$$<df_x(e_i), df_x(e_j)> = \frac{16x_ix_j}{(r^2 + 1)^4}(r^2 + 1) - \frac{8x_jx_i}{(r^2 + 1)^3} - \frac{8x_ix_j}{(r^2 + 1)^3} = 0$$

donc la base formée des $df_x(e_i)$ est orthogonale.

$$<\mathrm{d}f_x(e_j), \mathrm{d}f_x(e_j)> = \frac{16x_j^2}{(r^2+1)^4}(r^2+1) - \frac{16x_j^2}{(r^2+1)^3} + \frac{4}{(r^2+1)^2} = \frac{4}{(r^2+1)^2}$$

donc, pour tout i, $\| \mathrm{d}f_x(e_j) \| = \dfrac{2}{r^2+1}$.

On a montré que l'image d'une base de $\mathbb{R}^n$ par la différentielle de f en x est une base de l'hyperplan tangent à la sphère S^n en $f(x)$, la différentielle préservant l'orthogonalité. La projection stéréographique réciproque f^{-1} sur H permet d'établir au voisinage de tout point $f(x)$ une carte locale plane de la sphère S^n. Cette projection conserve les angles.

d) On reprendra le calcul du a), en changeant N en P :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = \frac{1}{r^2+1}\begin{pmatrix} 2x_1 \\ \dots \\ 2x_n \\ 1-r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \| x \|^2$$

et réciproquement, $x_i = \dfrac{y_i(r^2+1)}{2}$ pour i variant de 1 à n et $\dfrac{1-r^2}{1+r^2} = y_{n+1}$, donc $r^2 = \dfrac{1-y_{n+1}}{1+y_{n+1}}$ et $\dfrac{r^2+1}{2} = \dfrac{1}{1+y_{n+1}}$. Donc :

$$g^{-1}(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = \frac{1}{1+y_{n+1}}\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Donc, pour x dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (et donc tel que $r \neq 0$) :

$$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}\left(\frac{2x_1}{r^2+1}, \dots, \frac{2x_n}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1}\right) = \frac{1+r^2}{2r^2}\begin{pmatrix} \dfrac{2x_1}{r^2+1} \\ \dots \\ \dfrac{2x_n}{r^2+1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{x}{\| x \|^2}$$

On obtient l'inversion $x \to \dfrac{x}{\| x \|^2}$ définie dans l'exercice précédent. $g^{-1} \circ f$ réalise un changement de carte. On passe d'une représentation plane sur (H) de la sphère S^n de pôle N (celui-ci étant rejeté à l'infini et le pôle P étant à l'origine) en une représentation plane sur (H) de S^n de pôle P (celui-ci étant rejeté à l'infini et le pôle N étant ramené à l'origine). Ou encore, pour la sphère terrestre en dimension 3, on passe d'une carte plane où l'antarctique est au centre et le pôle nord rejeté à l'infini en une carte plane où l'arctique est au centre et le pôle sud rejeté à l'infini. Au voisinage de chaque point, le changement de carte est une similitude.

Sol.4) On rappelle que :

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to F$, $\mathrm{d}f_a(h) = hf'(a)$ pour tout h réel.

Pour une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ avec E euclidien, $\mathrm{d}f_a(h) = <\boldsymbol{grad}(f)(a), h>$ pour tout vecteur h.

a) Pour tout h réel :

$$h(g \circ f)'(a) = \mathrm{d}(g \circ f)_a(h) = (\mathrm{d}g_b \circ \mathrm{d}f_a)(h) \qquad \text{où } b = f(a)$$
$$= \mathrm{d}g_b(hf'(a)) = h\mathrm{d}g_b(f'(a))$$

$\Rightarrow \quad (g \circ f)'(a) = \mathrm{d}g_b(f'(a))$

b) Pour tout élément h de E :

$\mathrm{d}(g \circ f)(a)(h) = (\mathrm{d}g_b \circ \mathrm{d}f_a)(h) = \mathrm{d}g_b(<\boldsymbol{grad}(f)(a), h>)$

$= <\boldsymbol{grad}(f)(a), h>\ g'(b)$

$\Rightarrow \quad \mathrm{d}(g \circ f)(a) = <\boldsymbol{grad}(f)(a), \boldsymbol{.}\ > g'(b)$

c) $<\boldsymbol{grad}(g \circ f)(a), h> = \mathrm{d}(g \circ f)(a)(h) = (\mathrm{d}g_b \circ \mathrm{d}f_a)(h)$

$= <\boldsymbol{grad}(g)(b), \mathrm{d}f_a(h)>$

$= <\mathrm{d}f_a{}^*(\boldsymbol{grad}(g)(b)), h>$

où * désigne l'adjoint d'une application linéaire.

Revoir au besoin le chapitre L2/PREHILB.PDF

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{grad}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}f_a{}^*(\mathbf{grad}(g)(b))$

d) $h(g \circ f)'(a) = \mathrm{d}(g \circ f)(a)(h) = (\mathrm{d}g_b \circ \mathrm{d}f_a)(h)$

$= \mathrm{d}g_b(hf'(a)) = hf'(a)g'(b)$

$\Rightarrow \quad (g \circ f)'(a) = f'(a)g'(b)$

e) $h(g \circ f)'(a) = \mathrm{d}(g \circ f)(a)(h) = (\mathrm{d}g_b \circ \mathrm{d}f_a)(h)$

$= \mathrm{d}g_b(hf'(a)) = <\boldsymbol{grad}(g)(b), hf'(a)>$

$\Rightarrow \quad (g \circ f)'(a) = <\boldsymbol{grad}(g)(b), f'(a)>$

f) $<\boldsymbol{grad}(g \circ f)(a), h> = \mathrm{d}(g \circ f)(a)(h) = (\mathrm{d}g_b \circ \mathrm{d}f_a)(h)$

$= \mathrm{d}g_b(<\boldsymbol{grad}(f)(a), h>) = g'(b)<\boldsymbol{grad}(f)(a), h>$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{grad}(g \circ f)(a) = g'(b)\ \boldsymbol{grad}(f)(a)$

Sol.5) a) ❑ Supposons f de classe C^1. g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$, comme différences et quotient de fonctions continues (dont les fonctions $(x, y) \to f(x)$ et $(x, y) \to f(y)$). Reste à étudier la continuité de g en un point (c, c), point quelconque de la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $x \neq y$, l'égalité des accroissements finis donne l'existence d'un élément z compris entre x et y tel que $g(x, y) = f'(z)$. Cette égalité est également vérifiée si $x = y$ en prenant $z = x = y$. Quand x et y tendent vers c, z également, et puisque f' est supposée continue, $f'(z)$ tend vers $f'(c)$. On a ainsi montré que, pour tout c, $\lim\limits_{(x,y)\to(c,c)} g(x, y) = f'(c) = g(c, c)$

donc g est également continue en tout point de la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

❑ Réciproquement, soit g continue sur $\mathbb{R}^2$. Il s'agit de à montrer que f' est continue. Soit c un réel et $\varepsilon > 0$. Comme on sait que $\lim\limits_{(x,y)\to(c,c)} g(x, y) = g(c, c) = f'(c)$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour x et y éléments distincts de $]c - \alpha, c + \alpha[$, on a :

$$\left| f'(c) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \varepsilon$$

Pour tout d tel que $|c - d| < \alpha$, prenons x (dépendant de d) assez proche de d pour que l'on ait à la fois $|c - x| < \alpha$ et $\left| f'(d) - \dfrac{f(x) - f(d)}{x - d} \right| < \varepsilon$, ce qui est possible car f est dérivable en d. On a alors :

$$|f'(c) - f'(d)| \leq \left| f'(c) - \frac{f(x) - f(d)}{x - d} \right| + \left| \frac{f(x) - f(d)}{x - d} - f'(d) \right| < 2\varepsilon$$

On a montré que :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0, \forall\ d \in\ ]c - \alpha, c + \alpha[, |f'(c) - f'(d)| < 2\varepsilon$$

ce qui est la définition de $\lim\limits_{d\to c} f'(d) = f'(c)$. On a prouvé que f' est continue en tout point c de I, donc f est C^1 sur I.

b) La fonction $f : x \to \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle en 0 (revoir au besoin le chapitre L1/DERIVEE.PDF).

Par l'absurde, si g était continue en (0, 0), on devrait avoir, en prenant $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ et $y_n = \dfrac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = g(0, 0) = f'(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n - y_n} = 0 \qquad \text{car } f(x_n) = x_n^2 \text{ et } f(y_n) = -y_n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n/y_n + y_n/x_n}{1/y_n - 1/x_n} = 0$$

Or le membre de gauche vaut $-\dfrac{2}{\pi}$.

c) Au voisinage de (x_0, y_0) avec $x_0 \neq y_0$, g est différentiable car C^1 comme quotient de différences de fonctions C^1. Considérons maintenant le cas $y_0 = x_0$. Pour simplifier les notations, on peut, par translation de variable, supposer que $x_0 = 0$. On prendra également comme norme sur $\mathbb{R}^2$:

$$\| (x, y) \| = |x| + |y|$$

Considérons la fonction $\varphi : x \to f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2 f''(0)}{2}$, partie principale au second ordre de la fonction f en 0. On a $\varphi'(x) = f'(0) + xf''(0)$, et, pour $x \neq y$:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2}(x + y)$$

La fonction $\gamma : (x, y) \to \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y \\ \varphi'(x) \quad \text{ si } x = y \end{cases}$ est donc différentiable en (0, 0), de différentielle $(x, y) \to \dfrac{f''(0)}{2}(x + y)$, que x soit différent de y ou pas, le reste du développement limité étant nul.

Raisonnons alors sur les fonctions $F = f - \varphi$ et $G = g - \gamma$, de sorte que :

$$G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y \\ F'(x) \quad \text{ si } x = y \end{cases}$$

F est C^2, et a $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$, $F''(0) = 0$,

Montrons que G est différentiable de différentielle nulle. Il en résultera que g est différentiable en (0, 0), de même différentielle que celle de γ calculée précédemment. Il s'agit donc de montrer que $G(x, y) = o(\| (x, y) \|)$ quand (x, y) tend vers 0.

Au voisinage de 0, $F'(t) = F'(0) + tF''(0) + o(t) = o(t)$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall\, t \in]-\alpha, \alpha[, \ |F'(t)| \leq \varepsilon |t|$$

Donc :

si $-\alpha < x = y < \alpha$:

$$|G(x, y)| = |F'(x)| \leq \varepsilon |x| \leq \varepsilon \| (x, y) \|$$

et si $x \neq y$, éléments de $]-\alpha, \alpha[$:

$$\left|F(x) - F(y)\right| = \left|\int_x^y F'(t)\,dt\right| \leq \left|y - x\right| \text{ Sup}\{\varepsilon\left|t\right|,\ t \text{ entre } x \text{ et } y\}$$

donc $\left|G(x, y)\right| \leq \varepsilon$ Sup$\{\left|t\right|$, t entre x et $y\} \leq \varepsilon(\left|x\right| + \left|y\right|) = \varepsilon \parallel (x, y) \parallel$

On a donc montré que :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0,\ \forall\ (x, y) \in\ ]-\alpha, \alpha[\ \times\ ]-\alpha, \alpha[,\ \left|G(x, y)\right| = \ \varepsilon \parallel (x, y) \parallel$$

ce qui est la définition de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{G(x, y)}{\parallel (x, y) \parallel} = 0$ ou de $G(x, y) = o(\parallel (x, y) \parallel)$.

Sol.6) Considérons la composée $(x, y) \to (u, v) \to (x, y)$. Si calcule les dérivées partielles par rapport à x de cette fonction composée, on obtient :

$$1 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

donc, en multipliant la première égalité par $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ et la seconde par $\dfrac{\partial x}{\partial v}$:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

et en retranchant membre à membre :

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}$$

et donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}$$

ou encore :

$$\frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}}$$

Par conséquent, il y a un terme correctif $\dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}}$ à retrancher à $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ pour obtenir $\dfrac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}$.

Une autre démonstration, plus rapide, utilise les matrices jacobiennes. Si J est la matrice jacobienne de l'application $(u, v) \to (x, y)$, J^{-1} est la matrice jacobienne de l'application $(x, y) \to (u, v)$, de sorte que :

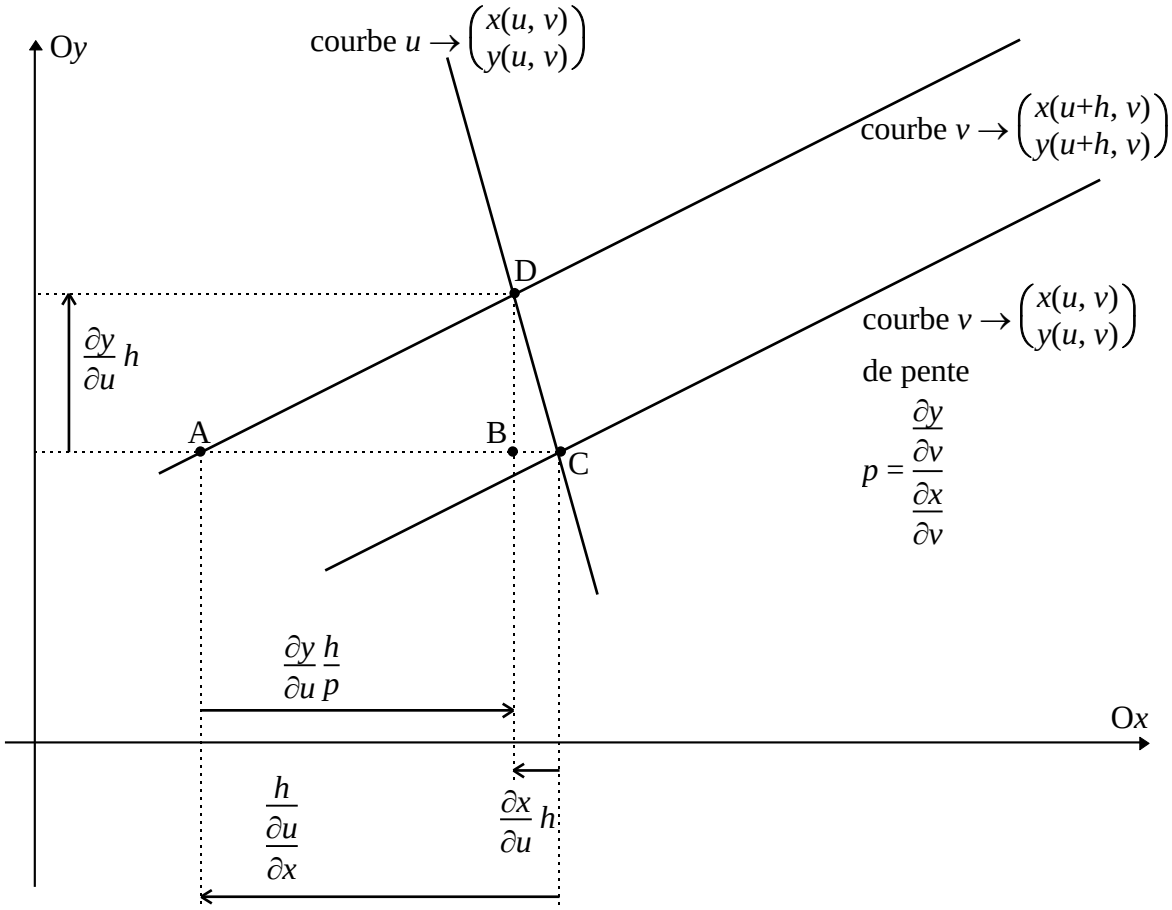
$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

et $$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial v} & -\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \end{pmatrix}$$ en inversant la matrice J

donc $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}$ comme précédemment.

On peut également en donner une démonstration géométrique. Dans la figure ci-dessous, les calculs sont menés au premier ordre, x et y étant fonctions de (u, v), et les courbes représentatives des fonctions partielles $u \to \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$ et $v \to \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$ étant approximées par leur tangente. On se donne une variation h de la variable u :



On a :

$$C = (x(u, v), y(u, v))$$
$$D = (x(u + h, v), y(u + h, v))$$
$$B = (x(u + h , v), y(u, v))$$

donc les différences de coordonnées sont, au premier ordre :

$$y_D - y_A = y_D - y_B = y_D - y_C = y(u + h, v) - y(u, v) = \frac{\partial y}{\partial u} h$$

$$x_B - x_C = x(u + h, v) - x(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} h$$

Par ailleurs, $\dfrac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = p = \dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}}$, pente de (AD). Donc :

$$x_B - x_A = x_D - x_A = \frac{y_D - y_A}{p} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{h}{p}$$

Enfin :

$$A = (x(u + h, v + k), y(u + h, v + k) \quad \text{pour une certaine valeur de } k$$

k est tel que $y(u + h, v + k) = y(u, v)$. Pour cette même ordonnée y, u varie de la quantité h quand l'abscisse x varie de x_C à x_A. Si on voit u comme fonction de (x, y), on a donc, au premier ordre :

$$h = u(x_A, y) - u(x_C, y) = (x_A - x_C)\frac{\partial u}{\partial x}$$

donc $\quad x_A - x_C = \dfrac{h}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}$

On conclut alors que :

$$x_A - x_C = x_A - x_B + x_B - x_C$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{h}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} = -\frac{\partial y}{\partial u}\frac{h}{p} + \frac{\partial x}{\partial u} h$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} = -\frac{\partial y}{\partial u}\frac{1}{p} + \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}} \text{ comme précédemment.}$$

Sol.7) ❑ Posons $(u, v) = f(x, y)$. f n'est pas bijective sur $\mathbb{R}^2$ puisque $f(x, y) = f(y, x)$.

f est C^1 de matrice jacobienne $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} = x - y$. Pour que f soit un difféomorphisme, il est nécessaire que cette matrice soit inversible, et donc que x soit différent de y. Comme (x, y) a même image que (y, x), on peut prendre $U = \{(x, y) \mid x > y\}$ et $V = f(U)$. Il reste à montrer que V est un ouvert et que f est bien bijective de U sur V. On a $u = x + y$ et $v = xy$, donc :

$$u^2 - 4v = (x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 > 0$$

donc $V \subset \{(u, v) \mid u^2 - 4v > 0\}$.

Réciproquement, si (u, v) est tel que $u^2 - 4v > 0$, alors il existe un unique couple (x, y) antécédent de (u, v) par f et tel que $x > y$. Ce sont les racines du trinôme $X^2 - uX + v$, à savoir :

$$(x, y) = \left(\frac{u + \sqrt{u^2 - 4v}}{2}, \frac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2}\right) = f^{-1}(u, v)$$

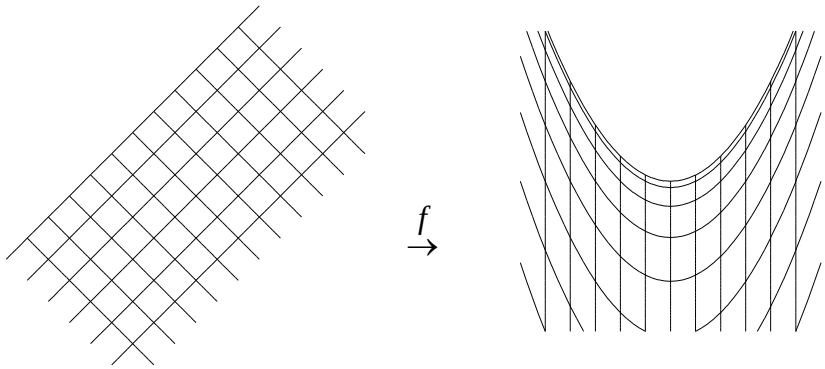
On a alors montré que V = $\{(u, v) \mid u^2 - 4v > 0\}$.

f est bijective de U sur V, C^1 sur U et sa différentielle est inversible en tout point de U. La proposition du cours qui suit le théorème d'inversion locale suffit pour conclure que f est un difféomorphisme, i.e. que f^{-1} est différentiable et que sa différentielle est une fonction continue de (u, v) (ce qu'on peut aussi directement voir puisqu'on connaît l'expression de f^{-1}. On pourra également vérifier que l'inverse $\frac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$ de la matrice jacobienne $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$ de f est la matrice jacobienne de f^{-1}).

❑ On peut représenter l'image d'un quadrillage de U :

Pour $c > 0$, les droites $y = x - c$ ont pour image les paraboles $(u, v) = (c + 2y, y^2 + cy)$, d'équation $v = \frac{u^2 - c^2}{4}$. En particulier la frontière $x = y$ a pour image $v = \frac{u^2}{4}$

Pour c quelconque, les demi-droites $y = -x + c$, $x > \frac{c}{2} > y$, ont pour image les demi-droites $(u, v) = (c, cy - y^2)$, soit $u = c$, $v < \frac{c^2}{4}$. On obtient le dessin suivant :



Le demi-plan U semble projeté sur un paraboloïde hyperbolique (voir L2/CONIQUES.PDF). Prenons X = $x + y$ et Y = $x - y$. On s'intéresse au demi-plan $x > y$ ou Y > 0. Au point (X, Y) du demi-plan, on associe le point (X, Y, Z) du paraboloïde tel que Z = $\frac{X^2 - Y^2}{4}$, puis on projette sur le plan OXZ, ce qui donne le point $\left(X, \frac{X^2 - Y^2}{4}\right) = (x + y, xy)$.

Sol.8) On peut prendre par exemple :

a) $f : (x, y) \to (u, v) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)(x, y)$

Si $x^2 + y^2 > 1$, alors $u^2 + v^2 = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 > 0$. Donc $f(x, y)$ est élément de U_2. f a été construit de façon que le cercle unité, frontière de U_2, ait pour image par f le singleton $\{0\}$.

On déduit de l'égalité précédente la relation $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{u^2 + v^2} + 1$, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2} + 1}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{u^2 + v^2} + 1}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

donc nécessairement, la réciproque f^{-1} est donnée par :

$$(u, v) \in U_2 \to (x, y) = (1 + \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}})\ (u, v)$$

On vérifie qu'on a bien toujours $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{u^2 + v^2} + 1$, donc $\sqrt{x^2 + y^2} > 1$. f est donc bien une bijection de $\{(x, y), x^2 + y^2 > 1\}$ sur U_2. f et f^{-1} sont C^1, donc f est un difféomorphisme.

b) $\quad f : (x, y) \to (u, v) = ((1 - \frac{\sqrt{1 + y^2}}{|x|})\ x, y)$

Si $x^2 - y^2 > 1$, $|x| > \sqrt{1 + y^2}$, donc $u \neq 0$. Donc $f(x, y) \in U_1 \times \mathbb{R}$.

f a été construit de façon que les deux branches d'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$, formant la frontière du domaine $\{(x, y), x^2 - y^2 > 1\}$, aient pour image l'axe des ordonnées.

Pour le calcul de f^{-1}, on a $y = v$ et :

$$u = (1 - \frac{\sqrt{1 + y^2}}{|x|})\ x = (1 - \frac{\sqrt{1 + v^2}}{|x|})\ x$$

donc :

$$|u| = (1 - \frac{\sqrt{1 + v^2}}{|x|})\ |x| \qquad \text{car } 1 - \frac{\sqrt{1 + v^2}}{|x|} = 1 - \frac{\sqrt{1 + y^2}}{|x|} > 0 \text{ si } x^2 - y^2 > 1$$

donc :

$$|x| = |u| + \sqrt{1 + v^2}$$

$$\frac{\sqrt{1 + v^2}}{|x|} = \frac{\sqrt{1 + v^2}}{|u| + \sqrt{1 + v^2}}$$

$$1 - \frac{\sqrt{1 + v^2}}{|x|} = \frac{|u|}{|u| + \sqrt{1 + v^2}}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{1 + v^2}}{|x|}} = 1 + \frac{\sqrt{1 + v^2}}{|u|}$$

Donc nécessairement, f^{-1} est donné par :

$$(u, v) \to (x, y) = ((1 + \frac{\sqrt{1 + v^2}}{|u|})\ u, v)$$

On a bien :

$$x^2 - y^2 = (1 + \frac{\sqrt{1 + v^2}}{|u|})^2\ u^2 - v^2$$

$$= u^2 + 2|u|\sqrt{1 + v^2} + 1$$

$$> 1$$

Donc f est bien une bijection de $\{(x, y), x^2 - y^2 > 1\}$ sur $U_1 \times \mathbb{R}$. f et f^{-1} sont C^1, donc f est un difféomorphisme.

c) $(x, y, z) \to (1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}})\,(x, y, z)$. La réciproque est donnée par :

$$(u, v, w) \to (1 + \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}})\,(u, v, w)$$

Le raisonnement est analogue à celui du a).

d) $(x, y, z) \to ((1 - \frac{\sqrt{1 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}})\,x, (1 - \frac{\sqrt{1 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}})\,y, z)$

On tient le même raisonnement qu'au b) en remplaçant x par (x, y), $|x|$ par $\sqrt{x^2 + y^2}$, u par (u, v), $|u|$ par $\sqrt{u^2 + v^2}$. La réciproque est :

$$(u, v, w) \to ((1 + \frac{\sqrt{1 + w^2}}{\sqrt{u^2 + v^2}})\,u, (1 + \frac{\sqrt{1 + w^2}}{\sqrt{u^2 + v^2}})\,v, w)$$

e) $(x, y, z) \to ((1 - \frac{\sqrt{1 + y^2 + z^2}}{|x|})\,x, y, z)$

La réciproque est :

$$(u, v, w) \to ((1 + \frac{\sqrt{1 + v^2 + w^2}}{|u|})\,u, v, w)$$

On tient le même raisonnement qu'au b) en remplaçant y par (y, z) et v par (v, w).

f) Vérifier qu'on définit un difféomorphisme de $\{(x_1, ..., x_n), \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 > 1\}$ sur $U_k \times \mathbb{R}^{n-k}$ par :

$$(x_1, ..., x_n) \to (1 - \frac{\sqrt{1 + x_{k+1}^2 + ... + x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_k^2}}) \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_k \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ x_{k+1} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

La réciproque est :

$$(u_1, ..., u_n) \to (1 + \frac{\sqrt{1 + u_{k+1}^2 + ... + u_n^2}}{\sqrt{u_1^2 + ... + u_k^2}}) \begin{pmatrix} u_1 \\ ... \\ u_k \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ u_{k+1} \\ ... \\ u_n \end{pmatrix}$$

Sol.9) a) Supposons $m > 0$. Pour tout x non nul de E, posons $y = \frac{x}{\| x \|}$. y appartient à B et :

$$<u(x), x> = \| x \|^2 <u(y), y> \geq \| x \|^2 m(u) > 0$$

donc u appartient à U.

Réciproquement, l'application $x \in B \to <u(x), x>$ est continue sur le fermé borné B de E, espace vectoriel normé de dimension fini, donc atteint son minimum $m(u)$ en un élément x_0 de B (revoir au besoin le chapitre L2/EVNORME.PDF). Donc, si u appartient à U, on a :

$$m(u) = <u(x_0), x_0> > 0$$

b) Soit $u \in$ U et $v \in \mathcal{S}$(E) telle que $|||\ u - v\ ||| < \dfrac{m(u)}{2}$ (en notant $|||\ \ |||$ la norme d'endomorphisme subordonnée à la norme euclidienne de E). Alors, pour tout x dans B :

$$\begin{aligned}
\left|<v(x), x> - <u(x), x>\right| &\leq \|\ (u - v)(x)\ \|\ \|\ x\ \| && \text{d'après l'inégalité de Schwarz}\\
&\leq |||\ u - v\ |||\ \|\ x\ \|^2 && \text{d'après la définition de } |||\ ||| \\
&\leq |||\ u - v\ ||| && \text{car } x \in \text{B}\\
&< \frac{m(u)}{2}
\end{aligned}$$

donc $<v(x), x> \geq <u(x), x> - \dfrac{m(u)}{2} \geq \dfrac{m(u)}{2} > 0$ donc $v \in$ U.

c) Si v est élément de U, v^2 est bien élément de U. En effet, v^2 est symétrique, et pour tout x non nul, on a :

$$\begin{aligned}
<v^2(x), x> &= <v(v(x)), x>\\
&= <v(x), v(x)> && \text{car } v \text{ est symétrique}\\
&= \|\ v(x)\ \|^2\\
&> 0
\end{aligned}$$

car $v(x)$ est non nul puique $<v(x), x> > 0$.

Montrons la surjectivité de f. Soit u appartenant à U. Montrons qu'il existe v appartenant à U tel que $u = f(v) = v^2$. On utilise le fait que, u étant symétrique, u est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres (voir L2/PREHILB.PDF). Notons d_i la valeur propre associée à e_i. u étant défini positif, on a :

$$0 < <u(e_i), e_i> = <d_ie_i, e_i> = d_i\ \|\ e_i\ \|^2$$

donc $d_i > 0$. Notons v l'endomorphisme de E défini par : $\forall\ i,\ v(e_i) = \sqrt{d_i}\ e_i$. v est un endomorphisme symétrique puisque sa matrice est diagonale donc symétrique dans la base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$. v est défini positif car, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ non nul, on a :

$$<v(x), x> = <\sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{d_i}\ e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i\ e_i> = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\sqrt{d_i} > 0$$

Ainsi, v est élément de U.

Enfin, $v^2 = u$ car, pour tout i, $v^2(e_i) = \sqrt{d_i}^2\ e_i = d_ie_i = u(e_i)$.

Donc f est surjective.

Montrons l'injectivité de f. Si w est un élément de U tel que $w^2 = u = v^2$ (avec le v trouvé précédemment), alors w, étant symétrique défini positif, est diagonalisable dans une base orthonormée (ε_i) avec des valeurs propres $\lambda_i > 0$. Dans la même base, $u = w^2$ admet les valeurs propres λ_i^2. Donc l'ensemble des λ_i^2 est égal à l'ensemble $\{d_i\}$ des valeurs propres de u. Donc, puisque les λ_i sont strictement positifs, les valeurs propres λ_i de w sont les mêmes que les valeurs propres $\sqrt{d_j}$ de v. De plus, un sous-espace propre E_λ pour une valeur propre λ de w est le sous-espace propre de u pour la valeur propre $\lambda^2 = d$, et aussi le sous-espace propre de v pour la valeur propre $\sqrt{d}$. w et v ont donc les mêmes sous-espaces propres associés aux mêmes valeurs propres. w et v sont donc égaux.

d) Cherchons la différentielle de f en v, élément de U. Pour tout h de $\mathcal{S}$(E) assez petit pour que $v + h$ soit encore élément de U (ce qui est possible car U est ouvert), on a :

$$\begin{aligned}
f(v + h) &= (v + h)^2 = v^2 + v \circ h + h \circ v + h^2\\
&= f(v) + v \circ h + h \circ v + \text{o}(h)
\end{aligned}$$

h^2 est un o(h) car $|||\, h^2 \,||| \leq |||\, h \,|||^2 = |||\, h \,|||\, \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

De plus, $h \to v \circ h + h \circ v$ est linéaire. Donc f est différentiable en v de différentielle :

$$\mathrm{d}f_v(h) = v \circ h + h \circ v$$

On a ici une généralisation de la différentielle en v de la fonction $v \in \mathbb{R} \to v^2 \in \mathbb{R}$, cette différentielle étant $h \to 2hv$.

En outre, l'application $v \to \mathrm{d}f_v$ est elle aussi linéaire, donc continue. Donc f est C^1 et bijective.

Pour montrer que f est un difféomorphisme, il suffit de montrer que, pour tout v de U, $\mathrm{d}f_v$ est inversible. Puisque $\mathrm{d}f_v$ est un endomorphisme sur L(E), espace vectoriel de dimension finie, il suffit de montrer que $\mathrm{d}f_v$ est injective. Soit donc h appartenant au noyau de $\mathrm{d}f_v$. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de v, de valeurs propres $\lambda_i > 0$. On a, pour tout i :

$$0 = (v \circ h + h \circ v)(e_i)$$

$$\Rightarrow \quad v(h(e_i)) = -\, h(v(e_i)) = -\, h(\lambda_i e_i) = -\, \lambda_i h(e_i)$$

$$\Rightarrow \quad h(e_i) = 0$$

car si $h(e_i) \neq 0$, $h(e_i)$ serait un vecteur propre de v de valeur propre $-\, \lambda_i < 0$, ce qui est absurde puisque toutes les valeurs propres de v sont strictement positives.

Donc $h = 0$ et $\mathrm{d}f_v$ est bien injective. Ainsi, f est un difféomorphisme.

e) Pour tout u de U, On a $\mathrm{d}(f^{-1})_u = (\mathrm{d}f_v)^{-1}$ où $v = f^{-1}(u)$. Donc, pour tout endomorphisme l assez petit :

$$h = \mathrm{d}(f^{-1})_u(l)$$

$$\Leftrightarrow \quad l = \mathrm{d}f_v(h) = v \circ h + h \circ v$$

Notons $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de v de valeurs propres $\sqrt{d_i}$. On a $v(e_i) = \sqrt{d_i} e_i$. Le terme général de la matrice de l dans la base $(e_1, ..., e_n)$ est $<l(e_j), e_i>$. Nous allons déterminer le terme général de la matrice de h en fonction de ceux de l. L'égalité $l = v \circ h + h \circ v$ donne, pour tout (i, j) :

$$\begin{aligned}
<l(e_j), e_i> &= <(v \circ h + h \circ v)(e_j), e_i> \\
&= <v(h(e_j)), e_i> \; + <h(v(e_j)), e_i> \\
&= <h(e_j), v(e_i)> \; + <h(v(e_j)), e_i> \\
&\qquad\qquad \text{car } v \text{ est symétrique} \\
&= <h(e_j), \sqrt{d_i} e_i> + <h(\sqrt{d_j} e_j), e_i> \\
&= (\sqrt{d_i} + \sqrt{d_j})\, <h(e_j), e_i>
\end{aligned}$$

donc $\quad <h(e_j), e_i> = \dfrac{1}{\sqrt{d_i} + \sqrt{d_j}} <l(e_j), e_i>$

Le coefficient $\dfrac{1}{\sqrt{d_i} + \sqrt{d_j}}$ est l'analogue matriciel de $\dfrac{1}{2\sqrt{d}}$, dérivée de $d \in \mathbb{R} \to \sqrt{d} \in \mathbb{R}$.

Sol.10) a) Dans le premier cas, il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout t, $x(t) = \lambda e^{-t}$ et $y(t) = \mu e^{-t}$. Les courbes des solutions sont :

si $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, les demi-droites d'origine O, O étant exclu

si $(l, \mu) = (0, 0)$, le singleton {O}.

O est attractif, dans le sens où $\lim\limits_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$.

Dans le second cas :

$$z' = -\, z + \frac{iz}{\ln(r^2)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad r'e^{i\theta} + ir\theta' e^{i\theta} = -re^{i\theta} + \frac{ire^{i\theta}}{\ln(r^2)}$$

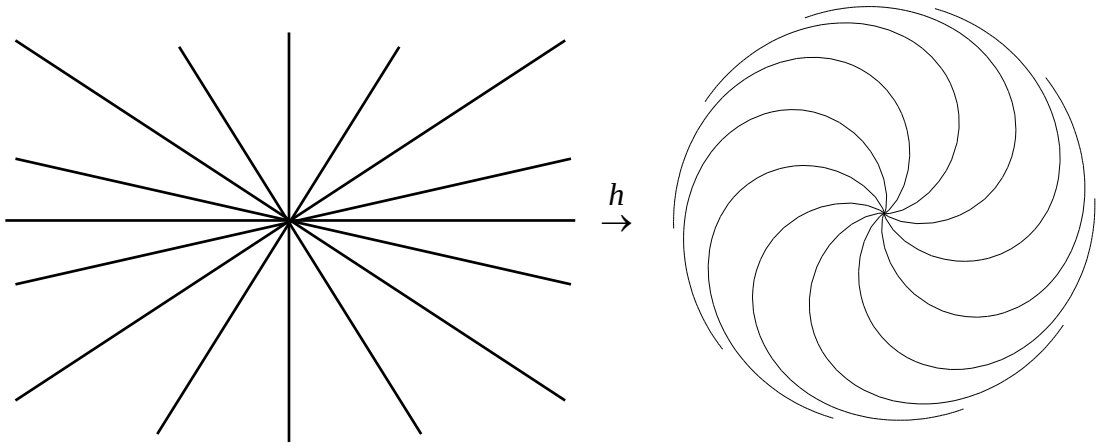
$$\Leftrightarrow \qquad r' + ir\theta' = -r + \frac{ir}{\ln(r^2)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} r' = -r \\ \theta' = \dfrac{1}{2\ln(r)} \end{array}\right.$$

donc il existe une constante C (strictement positive car $r > 0$) telle que $r = Ce^{-t}$. Donc :

$$\theta' = \frac{1}{2(\ln(C) - t)}$$

donc il existe une constante θ_0 telle que $\theta = \theta_0 - \frac{1}{2}\ln(|\ln(C) - t|)$. Quitte à changer d'origine des temps, on peut supposer C = 1 et prendre $r = e^{-t}$, et $\theta = \theta_0 - \frac{1}{2}\ln(|t|)$, ce qui simplifie les notations. Les courbes intégrales s'obtiennent par rotation d'angle θ_0 à partir de la courbe vérifiant $r = e^{-t}$ et $\theta = -\frac{1}{2}\ln(|t|)$. Le cercle de rayon 1 est asymptote quand t tend vers 0. r est une fonction décroissante de t. Quant t croît de $-\infty$ à 0, on est à l'extérieur du disque D et θ croît indéfiniment. Les courbes intégrales sont des spirales s'enroulant dans le sens trigonométrique. Quand t croît de 0 à $+\infty$, on est à l'intérieur du disque D et θ décroît indéfiniment. Les spirales s'enroulent dans le sens inverse au sens trigonométrique et s'enroulent autour de l'origine. Ci-dessous à droite, on a seulement représenté les courbes intégrales intérieures à D.



b) Les courbes intégrales de (1) sont définies par l'angle θ_0 définissant la pente de la demi-droite. Elles sont paramétrées par exemple par $u \in \mathbb{R} \to (x, y) = (\cos(\theta_0)e^{-u}, \sin(\theta_0)e^{-u})$.

Les courbes intégrales de (2) sont données par le paramètre θ_0 intervenant dans la définition de $\theta = \theta_0 - \frac{1}{2}\ln|\ln(r)|$ avec $r = e^{-t}$, $t \in]0, +\infty[$. Convenons qu'il s'agisse du même θ_0 et prenons $t = e^u$, de façon que, lorsque u décrit $\mathbb{R}$, t décrit $]0, +\infty[$. Définissons h de façon que :

$$h((\cos(\theta_0)e^{-u}, \sin(\theta_0)e^{-u}) = (\cos(\theta)e^{-t}, \sin(\theta)e^{-t}) = (X, Y)$$

Quand $(x(u), y(u))$ décrit une courbe intégrale de (1), $(X(t), Y(t))$ décrit une courbe intégrale de (2). On a :

$$r = e^{-t} = \exp(-e^u) = \exp(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) = \sqrt{X^2+Y^2}$$

$$t = \left|\ln(r)\right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos(\theta_0) = xe^u = tx = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin(\theta_0) = ye^u = ty = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \theta_0 + \frac{\ln(x^2+y^2)}{4}$$

$$\cos(\theta) = \cos(\theta_0)\cos(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) - \sin(\theta_0)\sin(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4})$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4})$$

$$\sin(\theta) = \sin(\theta_0)\cos(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) + \cos(\theta_0)\sin(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4})$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}))$$

Finalement $(X, Y) = h(x, y)$ avec :

$$\left[\begin{array}{l} X = \exp(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})\,(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4})) \\ Y = \exp(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})\,(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4})) \end{array}\right.$$

Réciproquement, on peut calculer h^{-1} comme suit. On a $\exp(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) = \sqrt{X^2+Y^2}$, donc :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) \\ \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}\cos(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) + \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\sin(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\cos(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) - \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}\sin(\frac{\ln(x^2+y^2)}{4}) \end{array}\right.$$

et comme $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\ln(\sqrt{X^2+Y^2}) = \left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|$, on a :

$$\frac{\ln(x^2+y^2)}{4} = -\frac{1}{2}\ln\left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|$$

et donc :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}\cos(\frac{1}{2}\ln\left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|) - \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\sin(\frac{1}{2}\ln\left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|) \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\cos(\frac{1}{2}\ln\left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|) + \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}\sin(\frac{1}{2}\ln\left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|) \end{array}\right.$$

et enfin :

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|\sqrt{X^2+Y^2}}\,(X\cos(\frac{1}{2}\ln\left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|) - Y\sin(\frac{1}{2}\ln\left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|)) \\ y = \dfrac{1}{\left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|\sqrt{X^2+Y^2}}\,(Y\cos(\frac{1}{2}\ln\left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|) + X\sin(\frac{1}{2}\ln\left|\ln(\sqrt{X^2+Y^2})\right|)) \end{array}\right.$$

Sol.11) a) La première composante du rotationnel donne l'équation :

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} = 2xyz - y$$

$\Leftrightarrow \quad Q = -xyz^2 + yz + \psi(x, y)$ où ψ est une fonction quelconque de classe C^1

mais comme $Q(x, y, 0) = 0$, $\psi = 0$, donc $Q = -xyz^2 + yz$.

La deuxième composante du rotationnel donne l'équation :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = y - y^2 z$$

$\Leftrightarrow \quad P = yz - \dfrac{y^2z^2}{2} + \varphi(x, y)$ où φ est une fonction quelconque de classe C^1

La troisième composante donne alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - z$$

$$\Leftrightarrow \quad -yz^2 - z + yz^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x - z$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2x$$

$\Leftrightarrow \quad \varphi = -2xy + \theta(x)$ où θ est une fonction quelconque de classe C^1

Donc :

$$\left[\begin{array}{l} P = yz - \dfrac{y^2z^2}{2} - 2xy + \theta(x) \\ Q = -xyz^2 + yz \\ R = 0 \end{array}\right.$$

b) Pas de difficulté particulière.

c) On cherche f tel que

$$\left[\begin{array}{l} yz - \dfrac{y^2z^2}{2} - 2xy + \theta(x) + \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz + x^2 \\ -xyz^2 + yz + \dfrac{\partial f}{\partial y} = yz + x^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy^2 z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2 + \dfrac{y^2z^2}{2} + 2xy - \theta(x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + xyz^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy^2 z \end{array}\right.$$

On résout par exemple de la façon suivante. La dernière équation a pour solution $f = \frac{xy^2z^2}{2} + g(x, y)$, avec g C^1 quelconque, qu'on reporte dans la deuxième équation, ce qui conduit à $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2$, donc $g(x, y) = x^2y + h(x)$ avec h C^1 quelconque. Donc les solutions des deux dernières équations sont $f = x^2y + \frac{xy^2z^2}{2} + h(x)$, qu'on reporte dans la première équation, ce qui conduit à $h'(x) = x^2 - \theta(x)$, donc $h(x) = \frac{x^3}{3} - \int \theta(x)\,dx$, et finalement :

$$f = \frac{x^3}{3} + \frac{xy^2z^2}{2} + x^2y - \int \theta(x)\,dx$$

Sol.12) Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy - 1$. On a bien $f(1, 1) = 0$.
Puis $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - x$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites s'applique. Comme f est C^∞, φ également. Un développement limité de φ existe donc à tout ordre au voisinage de 1. Plutôt que d'utiliser une formule de Taylor en itérant le calcul des dérivées de φ à partir de l'expression $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$, il vaut mieux utiliser la relation $\forall\, x$, $f(x, \varphi(x)) = 0$ avec :

$$\varphi(x) = 1 + a(x - 1) + b(x - 1)^2 + c(x - 1)^3 + d(x - 1)^4 + o((x - 1)^4)$$

les coefficients a, b, c, d étant à déterminer.
On a ainsi, au premier ordre :

$$\varphi(x) = 1 + a(x - 1) + o(x - 1)$$

et $\quad 0 = f(x, \varphi(x)) = ... = (2a + 2)(x - 1) + o(x - 1) \Rightarrow a = -1$

puis :

$$\varphi(x) = 1 - (x - 1) + b(x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$$

et $\quad 0 = f(x, \varphi(x)) = ... = (2b + 7)(x - 1)^2 + o((x - 1)^2) \Rightarrow b = -\frac{7}{2}$

puis :

$$\varphi(x) = 1 - (x - 1) - \frac{7(x - 1)^2}{2} + c(x - 1)^3 + o((x - 1)^3)$$

et $\quad 0 = f(x, \varphi(x)) = ... = (2c + \frac{49}{2})(x - 1)^3 + o((x - 1)^3) \Rightarrow c = -\frac{49}{4}$

et enfin :

$$\varphi(x) = 1 - (x - 1) - \frac{7(x - 1)^2}{2} - \frac{49(x - 1)^3}{4} + d(x - 1)^4 + o((x - 1)^4)$$

et $\quad 0 = f(x, \varphi(x)) = ... = (2d + 112)(x - 1)^3 + o((x - 1)^3) \Rightarrow d = -56$

Finalement :

$$\varphi(x) = 1 - (x - 1) - \frac{7(x - 1)^2}{2} - \frac{49(x - 1)^3}{4} - 56(x - 1)^4 + o((x - 1)^4)$$

Sol.13) a) Soit $f(x, y, z) = x + y + z - 1 - \ln(z)$. f est C^1. On a bien $f(2, -e, e) = 0$. Puis :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 1 - \frac{1}{z} \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial z}(2, -e, e) \neq 0$$

donc, au voisinage de $(2, -e, e)$, on peut exprimer z comme fonction de (x, y).

b) Dans ce voisinage, on a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{1 - z} \quad \text{ou, mieux, } \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \frac{\Phi(x, y)}{1 - \Phi(x, y)}$$

et de même pour $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$. En particulier, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(2, -e) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(2, -e) = \frac{e}{1 - e}$

c) On dérive les relations $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = \frac{\Phi(x, y)}{1 - \Phi(x, y)}$ par rapport à x et y, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi(x, y)}{1 - \Phi(x, y)} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \frac{1}{(1 - \Phi(x, y))^2} = \frac{\Phi(x, y)}{(1 - \Phi(x, y))^3}$$

et de même pour $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x, y)$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}(x, y)$. Les dérivées secondes valent toutes $\frac{e}{(1 - e)^3}$ au point considéré.

Sol.14) a) ω_0 n'est pas fermée car la fonction $\frac{\partial}{\partial y}(xy + 1 - y^2) = x - 2y$ n'est égale à la fonction $\frac{\partial}{\partial x}(-xy) = -y$ sur aucun ouvert de $\mathbb{R}^2$. A fortiori, elle n'est pas exacte.

$\omega = g\omega_0 = \frac{x(xy + 1 - y^2)}{1 + xy} dx - \frac{x^2 y}{1 + xy} dy$ est une forme fermée car :

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x(xy + 1 - y^2)}{1 + xy} = -\frac{xy(2 + xy)}{(1 + xy)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2 y}{1 + xy}\right)$$

De plus, chacun des ouverts suivants est étoilé :

$$U_1 = \{(x, y), x < 0 \text{ et } xy + 1 < 0\} = \{(x, y), x < 0 \text{ et } y > -\frac{1}{x}\}$$

$$U_2 = \{(x, y), x > 0 \text{ et } xy + 1 < 0\} = \{(x, y), x > 0 \text{ et } y < -\frac{1}{x}\}$$

$$U_3 = \{(x, y), xy + 1 > 0\} = \{(x, y), (x > 0 \text{ et } y > -\frac{1}{x}) \text{ ou } (x = 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } y < -\frac{1}{x})\}$$

U_1 est convexe comme étant un domaine de la forme $y > -\frac{1}{x}$ avec $-\frac{1}{x}$ fonction convexe (revoir au besoin le chapitre L1/DERIVEE.PDF).

U_2 est convexe car symétrique de U_1 par la symétrie centrale de centre l'origine.

U_3 est étoilé de pôle l'origine O. En effet, si $M = (x, y)$ est élément de U_3 et si t est élément de $[0, 1]$, alors $t \in [0, 1] \to (tx)(ty) + 1$ est une fonction monotone variant de 1 à $xy + 1 > 0$, donc elle est constamment strictement positive, de sorte que [OM] est inclus dans U_3.

Sur chacun de ces ouverts étoilés, ω est une forme fermée, donc exacte. On peut en trouver des primitives f. f satisfait :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x(xy + 1 - y^2)}{1 + xy} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x^2 y}{1 + xy} = -x + \dfrac{x}{1 + xy} \end{cases}$$

La deuxième équation donne $f(x, y) = -xy + \ln(|1 + xy|) + \varphi(x)$, φ étant une fonction C^1 quelconque.
Reportant dans la première équation, on obtient :

$$-y + \frac{y}{1 + xy} + \varphi'(x) = \frac{x(xy + 1 - y^2)}{1 + xy}$$

donc $\varphi'(x) = x$ et $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{2} + \text{Cte}$.

Donc $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} - xy + \ln(|1 + xy|) + \text{Cte}$

Les courbes intégrales ont pour équation implicite $\dfrac{x^2}{2} - xy + \ln(|1 + xy|) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) On trouvera par exemple comme facteur intégrant $g(x) = 2e^{-2x}$. Une primitive de $g\omega_0$ est $f(x, y) = -e^{-2x} y^2 - 2e^{-x}$. Les courbes intégrales vérifient l'équation $e^{-2x} y^2 + 2e^{-x} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sol.15) ❑ On peut calculer l'intégrale curviligne en paramétrant les trois morceaux de Γ.

CA est paramétré par $t \to (0, t)$, t décroissant de 2 à 1.

$$\int_{CA} \omega = \int_2^1 \frac{1}{y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_2^1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

AB est paramétré par $t \to (t, 1)$, t croissant de 0 à 1.

$$\int_{AB} \omega = \int_0^1 2x\,dx = 1$$

BC est paramétré par $t \to (\cos(t), 1 + \sin(t))$, t croissant de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_{BC} \omega &= \int_0^{\pi/2} \frac{-2\cos(t)(1 + \sin(t))\sin(t) + (1 - \cos^2(t))\cos(t)}{(1 + \sin(t))^2}\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{-2\cos(t)\sin(t) - \sin^2(t)\cos(t)}{(1 + \sin(t))^2}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{-2u - u^2}{(1 + u)^2}\,du \qquad \text{en posant } u = \sin(t) \\ &= \int_0^1 -1 + \frac{1}{(1 + u)^2}\,du \\ &= -1 + \left[-\frac{1}{1 + u}\right]_0^1 = -1 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\int_\Gamma \omega = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0$$

❑ On est plus judicieux de remarquer que $\omega = \frac{2x}{y}\,\mathrm{d}x + \frac{1-x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y$ est une forme fermée sur l'ouvert étoilé $\{(x, y), y > 0\}$, donc est une forme exacte. Comme on l'intégre sur une courbe qui se referme, l'intégrale est nulle.

❑ On peut retrouver les résultats du premier calcul à partir d'une primitive f de ω, par exemple $f(x, y) = \frac{x^2-1}{y}$. On a alors :

$$\int_{CA} \omega = f(A) - f(C) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{AB} \omega = f(B) - f(A) = 0 + 1 = 1$$

$$\int_{BC} \omega = f(C) - f(B) = -\frac{1}{2}$$

Sol.16) a) Posons $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. Alors :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \exp(-x^2 + y^2)(2y\cos(2xy) - 2x\sin(xy)) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

donc ω est une forme fermée sur $\mathbb{R}^2$, ouvert étoilé. Donc ω est une forrme exacte.

b) Comme on intègre une forme différentielle exacte sur un chemin Γ qui se referme, $\int_\Gamma \omega = 0$.

c) Pour le segment latéral de droite, par exemple :

$$\left|\int_0^a \exp(-R^2 + y^2)\sin(2Ry)\,\mathrm{d}y\right| \leq \int_0^a \exp(-R^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = \exp(-R^2)\int_0^a \exp(y^2)\,\mathrm{d}y$$

qui tend vers 0 quand R tend vers l'infini. On procède de même pour le segment latéral de gauche.

d) On a vu que $\int_\Gamma \omega = 0$. En découpant l'intégrale selon les quatre segments qui constituent Γ, on obtient :

$$\forall\, R,\ \int_{-R}^{R} \exp(-x^2)\mathrm{d}x + \int_0^a \exp(-R^2 + y^2)\sin(2Ry)\,\mathrm{d}y$$
$$+ \int_R^{-R} \exp(-x^2 + a^2)\cos(2xa)\,\mathrm{d}x + \int_a^0 \exp(-R^2 + y^2)\sin(-2Ry)\,\mathrm{d}y = 0$$

On passe à la limite quand R tend vers l'infini en utilisant le fait que, d'après c), les deux intégrales $\int_0^a$ et $\int_a^0$ tendent vers 0, ce qui donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x + \int_{\infty}^{-\infty} \exp(-x^2 + a^2)\cos(2xa)\,\mathrm{d}x = 0$$

ou encore :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \int_{\infty}^{-\infty} \exp(-x^2 + a^2)\cos(2xa)\,\mathrm{d}x$$

Mais :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x+ia)^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2+a^2-2iax)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2+a^2)\cos(2xa)\,\mathrm{d}x$$

puisque la partie imaginaire de l'intégrale est nulle (à cause de l'imparité de la fonction à intégrer). Donc, pour tout a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x+ia)^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x$$

e) On aurait pu considérer la fonction $a \to \mathrm{F}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x+ia)^2)\,\mathrm{d}x$. On a alors :

$$\mathrm{F}'(a) = \int_{-\infty}^{\infty} -2i(x+ia)\exp(-(x+ia)^2)\,\mathrm{d}x = \left[i\exp(-(x+ia)^2)\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Pour dériver l'intégrale dépendant du paramètre a, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination pour justifier la dérivation sous le signe intégral (voir le chapitre L2/SUITESF.PDF). On se place sur un intervalle]–A, A[contenant le réel en lequel on veut effectuer la dérivation. Pour tout a dans]–A, A[et tout x réel, on a :

$$\left|-2i(x+ia)\exp(-(x+ia)^2)\right| \le 2\sqrt{x^2+a^2}\exp(-x^2+a^2) \le 2\sqrt{x^2+\mathrm{A}^2}\exp(-x^2+\mathrm{A}^2)$$

Le majorant est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, permettant de satisfaire l'hypothèse de domination. Dans le chapitre L2/INTMULT.PDF, on montre que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. On a donc montré dans cet exercice que, pour tout a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x+ia)^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Sol.17) a) $\omega = \mathrm{Re}\left(\frac{2x+2iy}{e^{x+iy}-1}(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)\right)$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{(2x+2iy)(e^{x-iy}-1)}{(e^{x+iy}-1)(e^{x-iy}-1)}(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{(2x+2iy)(e^x\cos(y)-1-ie^x\sin(y))}{e^{2x}-2e^x\cos(y)+1}(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{2x(e^x\cos(y)-1)+2ye^x\sin(y)+i(2y(e^x\cos(y)-1)-2xe^x\sin(y))}{e^{2x}-2e^x\cos(y)+1}(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)\right)$$
$$= \frac{2x(e^x\cos(y)-1)+2ye^x\sin(y)}{e^{2x}-2e^x\cos(y)+1}\mathrm{d}x - \frac{2y(e^x\cos(y)-1)-2xe^x\sin(y)}{e^{2x}-2e^x\cos(y)+1}\mathrm{d}y$$
$$= \frac{2x(\cos(y)-e^{-x})+2y\sin(y)}{e^x-2\cos(y)+e^{-x}}\mathrm{d}x - \frac{2y(\cos(y)-e^{-x})-2x\sin(y)}{e^x-2\cos(y)+e^{-x}}\mathrm{d}y$$
$$= \frac{x(\cos(y)-e^{-x})+y\sin(y)}{\mathrm{ch}(x)-\cos(y)}\mathrm{d}x - \frac{y(\cos(y)-e^{-x})-x\sin(y)}{\mathrm{ch}(x)-\cos(y)}\mathrm{d}y$$

b) Vérification dont la seule difficulté est due aux calculs assez fastidieux... Une vérification directe du caractère fermé de ω en utilisant la fonction complexe $\frac{2z}{e^z-1}$ repose sur la notion de fonction holomorphe. Voir *conditions de Cauchy* dans le chapitre L3/HOLOMRPH.PDF.

c) Effectuons un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de (0, 0). Posons $r^2 = x^2 + y^2$ et remarquons que $o(x^2) = o(r^2)$, $xo(y) = o(r^2)$, etc... :

$$\frac{x(\cos(y) - e^{-x}) + y\sin(y)}{\mathrm{ch}(x) - \cos(y)} = \frac{x(1 - o(y) - 1 + x + o(x)) + y^2 + o(y^2)}{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + o(r^2)}{\frac{x^2 + y^2}{2} + o(r^2)}$$

$$= \frac{r^2 + o(r^2)}{\frac{r^2}{2} + o(r^2)} \to 2 \text{ quand } (x, y) \text{ tend vers } (0, 0)$$

On vérifiera de même que $\frac{y(\cos(y) - e^{-x}) - x\sin(y)}{\mathrm{ch}(x) - \cos(y)}$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers (0, 0).

On peut aussi utiliser la forme complexe de $\omega = \mathrm{Re}\left(\frac{2z}{e^z - 1}\,\mathrm{d}z\right)$ qui tend vers $\mathrm{Re}(2\mathrm{d}z) = 2\mathrm{d}x$ quand z tend vers 0.

d) Vérifions que Γ est incluse dans un ouvert étoilé sur lequel ω est défini. Etant fermée sur un ouvert étoilé, ω sera alors une forme exacte, et Γ se refermant, on aura $\int_\Gamma \omega = 0$.

ω est défini en tout (x, y) tel que $\mathrm{ch}(x) \neq \cos(y)$. Or $\mathrm{ch}(x) \geq 1 \geq \cos(y)$, donc $\mathrm{ch}(x) \neq \cos(y)$ si et seulement si (x, y) est différent des couples $(0, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. L'ouvert étoilé peut être par exemple le suivant (qui est convexe) : $\{(x, y) \mid y > x, y < \frac{3\pi}{2}\}$.

e) Quand a tend vers 0 et b tend vers $+\infty$, $\int_{AB} \omega$ tend vers :

$$\int_0^\infty \frac{x\,(1 - e^{-x})}{\mathrm{ch}(x) - 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x\,e^{-x/2}\,\mathrm{sh}(x/2)}{\mathrm{sh}^2(x/2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x\,e^{-x/2}}{\mathrm{sh}(x/2)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \frac{2x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

$\int_{BC} \omega$ tend vers 0, car [BC] étant paramétré par $y \in [0, \pi] \to (b, y)$, on a :

$$\left|\int_{BC} \omega\right| = \left|\int_0^\pi -\frac{y(\cos(y) - e^{-b}) - b\sin(y)}{\mathrm{ch}(b) - \cos(y)}\,\mathrm{d}y\right|$$

$$\leq \int_0^\pi \left|-\frac{y(\cos(y) - e^{-b}) - b\sin(y)}{\mathrm{ch}(b) - \cos(y)}\right|\,\mathrm{d}y$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{2\pi + b}{\mathrm{ch}(b) - 1}\,\mathrm{d}y = \frac{2\pi + b}{\mathrm{ch}(b) - 1}\,\pi \text{ qui tend vers 0 quand } b \text{ tend vers } +\infty.$$

$\int_{CD} \omega$ tend vers :

$$\int_0^\infty \frac{x\,(1+e^{-x})}{\mathrm{ch}(x)+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x\,e^{-x/2}\,\mathrm{ch}(x/2)}{\mathrm{ch}^2(x/2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x\,e^{-x/2}}{\mathrm{ch}(x/2)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \frac{2x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$$

$\int_{\mathrm{DE}} \omega$ tend vers $\int_0^\pi \frac{y(\cos(y)-1)}{1-\cos(y)}\,\mathrm{d}y = -\int_0^\pi y\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi^2}{2}$.

$\int_{\mathrm{EA}} \omega$ tend vers 0, car les composantes de ω selon dx et dy sont bornées au voisinage de (0, 0) d'après c), et que la longueur du chemin EA tend vers 0 quand a tend vers 0. Plus précisément, si M est une borne des composantes de ω et si on paramétrise EA par $\theta \to (a\cos(\theta),\ a\sin(\theta))$, θ décroissant de $\frac{\pi}{2}$ à 0, on a d$x = -a\sin(\theta)$ et d$y = a\cos(\theta)$, et :

$$\left|\int_{\mathrm{EA}} \omega\right| \leq \int_0^\pi \mathrm{M}\,a\sin(\theta) + \mathrm{M}a\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{O}(a) \text{ de limite nulle}$$

Comme $0 = \int_\Gamma \omega = \int_{\mathrm{AB}} \omega + \int_{\mathrm{BC}} \omega + \int_{\mathrm{CD}} \omega + \int_{\mathrm{DE}} \omega + \int_{\mathrm{EA}} \omega$, le passage à la limite dans cette égalité donne :

$$0 = \int_0^\infty \frac{2x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{2x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{2}$$

Donc :

$$\frac{\pi^2}{2} = \int_0^\infty \frac{2x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{2x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{4x\,e^x}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x$$

donc $\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$

f) ω prend maintenant la valeur $\frac{y(\cos(y)-e^{-x})-x\sin(y)}{\mathrm{ch}(x)-\cos(y)}\,\mathrm{d}x + \frac{x(\cos(y)-e^{-x})+y\sin(y)}{\mathrm{ch}(x)-\cos(y)}\,\mathrm{d}y$

On vérifiera que ω est fermée et que ses composantes tendent respectivement vers 0 et 2. On prend le même domaine étoilé contenant Γ et sur lequel ω est exacte. On a encore :

$$0 = \int_\Gamma \omega = \int_{\mathrm{AB}} \omega + \int_{\mathrm{BC}} \omega + \int_{\mathrm{CD}} \omega + \int_{\mathrm{DE}} \omega + \int_{\mathrm{EA}} \omega,$$

avec, quand a tend vers 0 et b vers $+\infty$:

$$\int_{\mathrm{AB}} \omega = 0$$

$$\int_{\mathrm{BC}} \omega \text{ tend vers } 0$$

$$\int_{\mathrm{CD}} \omega \text{ tend vers } \int_0^\infty \frac{\pi(1+e^{-x})}{\mathrm{ch}(x)+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\pi e^{-x/2}}{\mathrm{ch}(x/2)}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$$

$$= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)} \qquad \text{en posant } u = e^x$$

$$= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\pi \ln(2)$$

$$\int_{\mathrm{DE}} \omega \text{ tend vers } -\int_0^{\pi} \frac{y\sin(y)}{1-\cos(y)}\,\mathrm{d}y = -\int_0^{\pi} \frac{y}{\tan(y/2)}\,\mathrm{d}y = -4\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\mathrm{EA}} \omega \text{ tend vers } 0$$

Donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(2)$

Une variante de cet exercice, utilisant directement la fonction à valeurs complexes $\dfrac{z}{e^z - 1}$, est proposée dans les exercices de L3/HOLOMRPH.PDF.

Sol.18) a) Pour $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}^2$, on a, pour toute matrice H :

$$f(\mathrm{M}+\mathrm{H}) = (\mathrm{M}+\mathrm{H})^2 = \mathrm{M}^2 + \mathrm{MH} + \mathrm{HM} + \mathrm{H}^2 = \mathrm{M}^2 + \mathrm{MH} + \mathrm{HM} + \mathrm{o(H)}$$

avec $\mathrm{H} \to \mathrm{MH} + \mathrm{HM}$ linéaire. Donc f est différentiable en M et $\mathrm{d}f_{\mathrm{M}}(\mathrm{H}) = \mathrm{MH} + \mathrm{HM}$, équivalent matriciel de la différentielle $h \to 2xh$ de la fonction réelle $x \to x^2$.

$\mathrm{H}^2 = \mathrm{o(H)}$ car si on prend par exemple pour norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|\mathrm{H}\| = \mathrm{Max}\{|h_{ij}|,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n\}$$

il n'est pas difficile de voir que $\|\mathrm{H}^2\| \le n\,\|\mathrm{H}\|^2$, donc $\displaystyle\lim_{\mathrm{H}\to 0} \frac{\|\mathrm{H}^2\|}{\|\mathrm{H}\|} = 0$.

b) $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}^{-1}$ est différentiable de différentielle $\mathrm{d}f_{\mathrm{M}}(\mathrm{H}) = \mathrm{H} = -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{HM}^{-1}$, équivalent matriciel de la différentielle $-\dfrac{h}{x^2}$ de la fonction réelle $x \to \dfrac{1}{x}$. En effet, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, image réciproque de l'ouvert $]-\infty, 0[\ \cup\ [0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue det (revoir au besoin le chapitre L2/EVNORME.PDF). Donc, pour U assez petit, $\mathrm{I}_n + \mathrm{U}$ est inversible et l'on a :

$$\mathrm{I}_n = (\mathrm{I}_n - \mathrm{U})(\mathrm{I}_n + \mathrm{U}) + \mathrm{U}^2$$

donc $\quad (\mathrm{I}_n + \mathrm{U})^{-1} = \mathrm{I}_n - \mathrm{U} + \mathrm{U}^2(\mathrm{I} + \mathrm{U})^{-1}$

$$= \mathrm{I}_n - \mathrm{U} + \mathrm{o(U)} \qquad \text{quand U tend vers 0}$$

Pour tout M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on peut donc écrire, pour H assez petit pour que M + H reste inversible :

$$(\mathrm{M}+\mathrm{H})^{-1} = (\mathrm{M}(\mathrm{I}_n + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}))^{-1} = (\mathrm{I}_n + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H})^{-1}\mathrm{M}^{-1}$$

$$= (\mathrm{I}_n - \mathrm{M}^{-1}\mathrm{H} + \mathrm{o(H)})\mathrm{M}^{-1}$$

$$= \mathrm{M} - \mathrm{M}^{-1}\mathrm{HM} + \mathrm{o(H)}$$

La fonction $\mathrm{H} \to -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{HM}$ étant linéaire, il s'agit de la différentielle de f en M.

c) Commençons par chercher la différentielle de det en I_n. Notons $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $h_1, ..., h_n$ les colonnes d'une matrice H, et h_{ij} son terme général :

$$\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{H}) = \det(e_1 + h_1, ..., e_n + h_n)$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} \det(e_1, ..., e_{i-1}, h_i, e_{i+1}, ..., e_n) + \mathrm{o(H)}$$

en développant le déterminant au moyen de la multilinéarité.

Tous les déterminants ayant au moins deux variables h_i et h_j sont des o(H).

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} h_{ii} + o(H)$$

$$= 1 + \mathrm{Tr}(H) + o(H) \qquad \text{où Tr désigne la trace}$$

Supposons maintenant M inversible :

$$\det(M + H) = \det(M)\det(I_n + M^{-1}H) = \det(M)(1 + \mathrm{Tr}(M^{-1}H) + o(H))$$
$$= \det(M) + \det(M)\mathrm{Tr}(M^{-1}H) + o(H)$$

L'application $H \to \det(M)\mathrm{Tr}(M^{-1}H)$ est linéaire. Il s'agit de la différentielle de det en M.

Sachant que $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\,\mathrm{Com}(M)^T$, où Com(M) est la comatrice de M (revoir le chapitre L1/DETERMNT.PDF), on peut aussi écrire cette différentielle sous la forme $\mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(M)^T H)$.

Montrons que l'application linéaire $H \to \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(M)^T H)$ est la différentielle de det en M, y compris pour M non inversible. Notons $m_1, ..., m_n$ ses colonnes et C_{ij} le cofacteur du terme (i, j) de M. On a :

$$\det(M + H) = \det(m_1 + h_1, ..., m_n + h_n)$$

$$= \det(M) + \sum_{i=1}^{n} \det(m_1, ..., m_{i-1}, h_i, m_{i+1}, ..., m_n) + o(H)$$

$$= \det(M) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ki}h_{ki} + o(H)$$

en développant $\det(m_1, ..., m_{i-1}, h_i, m_{i+1}, ..., m_n)$ par rapport à sa i-ème colonne h_i.

$$= \det(M) + \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Com}(M)^T H)_{ii} + o(H)$$

$$= \det(M) + \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(M)^T H) + o(H)$$

raisonnement qu'on aurait pu tenir dès le début.

Un cas particulier intéressant est celui où H est de la forme XY^T, avec X et Y deux colonnes éléments de $\mathbb{R}^n$. Les colonnes h_i sont toutes colinéaires à X, de sorte que, ci-dessus, le o(H) est rigoureusement nul. D'autre part :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(M)^T H) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}(M)^T XY^T)$$
$$= \mathrm{Tr}(Y^T \mathrm{Com}(M)^T X) \qquad \text{en vertu de la formule } \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$
$$= Y^T \mathrm{Com}(M)^T X \qquad \text{car } Y^T\mathrm{Com}(M)^T X \text{ est une matrice } 1 \times 1 \text{ dont le terme unique est égal à la trace}$$

donc $\det(M + XY^T) = \det(M) + Y^T\mathrm{Com}(M)^T X = \det(M)(1 + Y^T M^{-1} X)$

résultat déjà vu et démontré de diverses autres façons dans les exercices du chapitre L1/DETERMNT.PDF.

◆