COMPLEMENTS DE CALCUL DIFFERENTIEL

GRADIENT, DIVERGENCE, ROTATIONNEL

Plan

Ce chapitre est un approfondissement du chapitre de calcul différentiel L1/CALCDIF1.PDF et L2/CALCDIF2.PDF, essentiellement destiné aux sciences physiques.
Il est nécessaire d'avoir connaissance du chapitre sur les intégrales multiples L2/INTMULT.PDF.

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure d'espace euclidien orienté. Dans tout ce chapitre, le produit vectoriel de deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est noté $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, la notation $\wedge$ étant, comme on le verra, réservée à un autre usage.

Dans tout le chapitre, X (ou Y) désigne un **champ de vecteurs**, i.e. une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. L'ensemble de départ $\mathbb{R}^3$ est vu comme un espace affine. L'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^3$ est vu comme un espace vectoriel. A chaque point (x, y, z) de l'espace de départ, X associe un vecteur $X(x, y, z)$ de l'espace d'arrivée.
f ou g est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, ou **champ scalaire**. A chaque point (x, y, z) de l'espace de départ, f associe un scalaire $f(x, y, z)$.
h désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Toutes ces fonctions sont de classe C^1 (ou parfois C^2).
df désigne la différentielle de f. En tout point $A = (x, y, z)$, df_A est une forme linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
dX désigne la différentielle de X. En tout point $A = (x, y, z)$, dX_A est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (souvent noté dX pour alléger les notations, le point A où l'on effectue le calcul étant sous-entendu). dX* est l'opérateur adjoint de dX, dont la matrice dans une base orthonormée est la transposée de la matrice de dX (voir le chapitre L2/PREHILB.PDF pour la notion d'*adjoint*). Pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^3$, dX* vérifie :

$$<dX(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{u}, dX^*(\boldsymbol{v})>$$

Plus généralement, pour tout endomorphisme φ d'un espace vectoriel euclidien E, son adjoint φ^* est l'endomorphisme vérifiant : $\forall\, \boldsymbol{u} \in E, \forall\, \boldsymbol{v} \in E, <\varphi(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{u}, \varphi^*(\boldsymbol{v})>$.

On utilisera fréquemment la notion de produit mixte dans $\mathbb{R}^3$ (revoir au besoin cette notion dans le chapitre L1/DETERMNT.PDF). Pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ de $\mathbb{R}^3$, le produit mixte est le déterminant des trois vecteurs dans une base orthonormée directe, et l'on a :

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = <\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}> = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}] = -[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}] = \text{etc.}$$

I : Formulaire

1- Définitions

On peut définir les notions de gradient, divergence et rotationnel aux moyens des composantes dans $\mathbb{R}^3$, ou au moyen de définition purement vectorielles indépendamment de toute base de $\mathbb{R}^3$. Cette dernière façon de procéder permet de définir ces notions dans tout espace euclidien orienté de dimension 3. Voici ces définitions :

(def.i) Le **gradient** de f vérifie la relation suivante :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3,\ \mathrm{d}f(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{grad}(f), \boldsymbol{u} \rangle}$$. Voir L2/CALCDIF2.PDF.

Dans une base orthonormée donnée, si $\boldsymbol{u}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{d}f(\boldsymbol{u}) = \dfrac{\partial f}{\partial x} h + \dfrac{\partial f}{\partial y} k + \dfrac{\partial f}{\partial z} l$ et on retrouve le fait que $\boldsymbol{grad}(f)$ a pour composantes $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$.

(def.ii) La **divergence** de X est définie par $\boxed{\mathrm{div}(X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{d}X)}$, où Tr désigne la trace de l'endomorphisme dX. Vérifions la cohérence de cette définition avec la définition usuelle par composantes. Si le champ de vecteurs X a pour composantes $\begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix}$ dans une base quelconque, alors dX est un endomorphisme dont la matrice est $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} & \dfrac{\partial X_x}{\partial y} & \dfrac{\partial X_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial X_y}{\partial x} & \dfrac{\partial X_y}{\partial y} & \dfrac{\partial X_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial X_z}{\partial x} & \dfrac{\partial X_z}{\partial y} & \dfrac{\partial X_z}{\partial z} \end{pmatrix}$. On constate que Tr(J) donne bien l'expression de la divergence :

$$\mathrm{div}(X) = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

Le **laplacien** d'une fonction f de classe C^2 est la divergence du gradient : $\boxed{\Delta f = \mathrm{div}(\boldsymbol{grad}(f))}$. Dans une base orthonormée, son expression est $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

(def.iii) On définit le **rotationnel** de X comme le vecteur tel que :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{Rot}(X) \times \boldsymbol{u} = (\mathrm{d}X - \mathrm{d}X^*)(\boldsymbol{u})}$$

On rappelle que $\times$ désigne ici le produit vectoriel.
Là aussi, la cohérence de cette définition avec la définition par composantes est facile. Dans une base orthonormée directe, dX*, opérateur adjoint de dX, a pour matrice J^T, et dX – dX* est un

opérateur antisymétrique de matrice $\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial X_x}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial x} & \frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial x} \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y} & 0 & \frac{\partial X_y}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial y} \\ \frac{\partial X_z}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial z} & \frac{\partial X_z}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice, appliquée sur un vecteur ***u***, donne bien les composantes de ***Rot***(X) × ***u***, ***Rot***(X) ayant pour composantes $\begin{pmatrix} \frac{\partial X_z}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial z} \\ \frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial x} \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y} \end{pmatrix}$.

2- Enoncés

PROPRIETES

On dispose des identités suivantes

a) ***Rot***(***grad***(f)) = 0

b) div(***Rot***(X)) = 0

c) ***grad***(fg) = g ***grad***(f) + f ***grad***(g)

d) ***grad***($h \circ f$) = ($h' \circ f$) ***grad***(f)

e) ***grad***(<X, Y>) = dX*(Y) + dY*(X)

f) div(fX) = <***grad***(f), X> + f div(X)

g) div(X × Y) = <***Rot***(X),Y> – <X, ***Rot***(Y)>

h) ***Rot***(fX) = ***grad***(f) × X + f ***Rot***(X)

i) ***Rot***(X × Y) = (dX(Y) – div(X)Y) – (dY(X) – div(Y)X)

j) ***Rot***(***Rot***(X)) = ***grad***(div(X)) – ΔX *où* ΔX *désigne le vecteur tel que, pour tout vecteur* ***z***, <ΔX, ***z***> = Δ(<X, ***z***>).

Démonstration :

❑ Toutes les formules peuvent se montrer en effectuant les calculs composante par composante dans une base donnée (orthonormée pour le gradient, orthonormée directe pour le rotationnel), en utilisant les expressions du gradient, de la divergence et du rotationnel à partir des dérivées partielles des fonctions ou des composantes des champs de vecteurs sur lesquels ils s'appliquent. Ce calcul, bien que sans difficulté, peut se révéler parfois fastidieux. Voici par exemple la preuve de la formule g) :

div(X × Y) = <***Rot***(X),Y> – <X, ***Rot***(Y)>

Prenons X de composantes $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$, et Y de composantes $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$X \times Y = \begin{pmatrix} QW - RV \\ RU - PW \\ PV - QU \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}(X \times Y) = \frac{\partial}{\partial x}(QW - RV) + \frac{\partial}{\partial y}(RU - PW) + \frac{\partial}{\partial z}(PV - QU)$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} W + Q \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial x} V - R \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} U + R \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$- \frac{\partial P}{\partial y} W - P \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} V + P \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial z} U - Q \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})U + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})V + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})W$$

$$- P(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}) - Q(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}) - R(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y})$$

et l'on reconnaît $\langle \boldsymbol{Rot}(X), Y\rangle - \langle X, \boldsymbol{Rot}(Y)\rangle$.

3- Preuve par définition intrinsèque des opérateurs différentiels

Les formules peuvent se montrer sans ce recours aux composantes, en utilisant uniquement les propriétés du produit vectoriel et du produit scalaire, et les définitions intrinsèques du gradient, de la divergence et du rotationnel indépendamment de toute base. Elles permettent de voir que les notions introduites s'appliquent à tout espace euclidien orienté de dimension 3.

On aura besoin des propriétés différentielles suivantes :

LEMMES DIFFERENTIELS

(diff.i) *Pour tout vecteur* $\boldsymbol{u}$*, la différentielle de* $\langle X, \boldsymbol{u}\rangle$ *est l'endomorphisme* $\boldsymbol{v} \to \langle dX(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}\rangle$, *noté* $\langle dX, \boldsymbol{u}\rangle$.

(diff.ii) *La différentielle de* $\langle X, Y\rangle$ *est l'endomorphisme* $\boldsymbol{v} \to \langle dX(\boldsymbol{v}), Y\rangle + \langle X, dY(\boldsymbol{v})\rangle$, *noté* $\langle dX, Y\rangle + \langle X, dY\rangle$.

(diff.iii) *Pour tout vecteur* $\boldsymbol{u}$*, la différentielle de* $X \times \boldsymbol{u}$ *est l'endomorphisme* $\boldsymbol{v} \to dX(\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u}$, *noté* $dX \times \boldsymbol{u}$.

(diff.iv) *La différentielle de* $X \times Y$ *est l'endomorphisme* $\boldsymbol{v} \to dX(\boldsymbol{v}) \times Y + X \times dY(\boldsymbol{v})$, *noté* $dX \times Y + X \times dY$.

(diff.v) *La différentielle de* fg *est* $g\, df + f\, dg$.

(diff.vi) *La différentielle de* $h \circ f$ *est* $(h' \circ f)\, df$.

(diff.vii) *La différentielle de* fX *est l'endomorphisme* $\boldsymbol{v} \to d(fX) = df(\boldsymbol{v})\, X + f\, dX(\boldsymbol{v})$, *noté* $df\, X + f\, dX$.

<u>Démonstration</u> :

Soit A un point de $\mathbb{R}^3$.

❑ (diff.i) : Quand $\boldsymbol{v}$ tend vers 0, on a :

$$\langle X(A + \boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}\rangle = \langle X(A) + dX_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}\rangle$$
$$= \langle X(A), \boldsymbol{u}\rangle + \langle dX_A(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}\rangle + o(\boldsymbol{v})$$

et la partie linéaire en $\boldsymbol{v}$ du développement limité est $\langle dX_A(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}\rangle$. Donc $\langle X, \boldsymbol{u}\rangle$ est différentiable et sa différentielle $d(\langle X, \boldsymbol{u}\rangle)$ est $\langle dX, \boldsymbol{u}\rangle$.

❑ (diff.ii) : Quand $\boldsymbol{v}$ tend vers 0, on a :

$$\langle X(A + \boldsymbol{v}), Y(A + \boldsymbol{v})\rangle = \langle X(A) + dX_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v}), Y(A) + dY_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v})\rangle$$
$$= \langle X(A), Y(A)\rangle + \langle dX_A(\boldsymbol{v}), Y(A)\rangle + \langle X(A), dY_A(\boldsymbol{v})\rangle + o(\boldsymbol{v})$$

et la partie linéaire du développement limité est $\langle dX_A(\boldsymbol{v}), Y(A)\rangle + \langle X(A), dY_A(\boldsymbol{v})\rangle$. Donc $\langle X, Y\rangle$ est diffrentiable et l'on a : $d(\langle X, Y\rangle) = \langle dX, Y\rangle + \langle X, dY\rangle$.

❑ (diff.iii) : démonstration identique à (diff.i) en remplaçant produit scalaire par produit vectoriel. On écrira : $d(X \times \boldsymbol{u}) = dX \times \boldsymbol{u}$.

❑ (diff.iv) : démonstration identique à (diff.ii) en remplaçant produit scalaire par produit vectoriel. On écrira : $d(X \times Y) = dX \times Y + X \times dY$.

❑ (diff.v) : Quand $\boldsymbol{v}$ tend vers 0, on a :

$$\begin{aligned}(fg)(A + \boldsymbol{v}) &= f(A + \boldsymbol{v})g(A + \boldsymbol{v}) \\ &= (f(A) + df_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v}))(g(A) + dg_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v})) \\ &= f(A)g(A) + df_A(\boldsymbol{v})g(A) + f(A)dg_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v}) \\ &= f(A)g(A) + g(A)df_A(\boldsymbol{v}) + f(A)dg_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

et la partie linéaire du développement limité est $g(A)df_A(\boldsymbol{v}) + f(A)dg_A(\boldsymbol{v})$. Donc fg est différentiable et $d(fg) = g\, df + f\, dg$.

❑ (diff.vi) : Quand $\boldsymbol{v}$ tend vers 0, on a :

$$\begin{aligned}(h \circ f)(A + \boldsymbol{v}) &= h(f(A) + df_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v})) \\ &= h(f(A)) + h'(f(A))df_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

et la partie linéaire du développement limité est $h'(f(A))df_A(\boldsymbol{v})$. Donc $h \circ f$ est différentiable et $d(h \circ f) = (h' \circ f)\, df$.

❑ (diff.vii) : Quand $\boldsymbol{v}$ tend vers 0, on a :

$$\begin{aligned}f(A + \boldsymbol{v})X(A + \boldsymbol{v}) &= (f(A) + df_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v}))(X(A) + dX_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v})) \\ &= f(A)X(A) + df_A(\boldsymbol{v})X(A) + f(A)dX_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

et la partie linéaire du développement limité est $df_A(\boldsymbol{v})X(A) + f(A)dX_A(\boldsymbol{v})$. Donc fX est différentiable et $d(fX) = df\, X + f\, dX$.

On utilisera aussi les propriétés suivantes d'algèbre linéaire :

LEMMES LINEAIRES

(lin.i) *Soit* φ *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$. *Alors, pour tous vecteurs* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, *on a* :

$$\det(\varphi(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \det(\boldsymbol{u}, \varphi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) + \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \varphi(\boldsymbol{w})) = \mathrm{Tr}(\varphi) \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

où $\mathrm{Tr}(\varphi)$ *est la trace de* φ.

(lin.ii) *Pour tous vecteurs* $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$, *la trace de l'opérateur* $\varphi : \boldsymbol{w} \to \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle \boldsymbol{v}$ *est* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$.

(lin.iii) *Soit* φ *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$, *et* Ω *le vecteur associé tel que* :

$$\forall\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3,\ (\varphi - \varphi^*)(\boldsymbol{w}) = \Omega \times \boldsymbol{w}$$

Alors, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, *l'endomorphisme* $\boldsymbol{w} \to \varphi(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u}$ *admet pour trace* $\langle \Omega, \boldsymbol{u}\rangle$.

(lin.iv) *Pour tous vecteurs* $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$, *l'adjoint de l'endomorphisme* $\boldsymbol{w} \to \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle\, \boldsymbol{v}$ *est l'endomorphisme* $\boldsymbol{z} \to \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}\rangle\, \boldsymbol{u}$.

(lin.v) *Pour tous vecteurs* $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$, *l'endomorphisme* $\varphi : \boldsymbol{w} \to \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle\, \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle\, \boldsymbol{u}$ *est antisymétrique et le vecteur* Ω *associé est* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

(lin.vi) *Pour tout endomorphisme* φ *et tout vecteur* $\boldsymbol{u}$, *l'adjoint de l'endomorphisme* $\boldsymbol{w} \to \varphi(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u}$ *est l'endomorphisme* $\boldsymbol{v} \to \varphi^*(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$.

(lin.vii) *Pour tout endomorphisme* φ *de* $\mathbb{R}^3$ *et tout vecteur* $\boldsymbol{u}$, *l'endomorphisme* $\boldsymbol{w} \to \varphi(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} - \varphi^*(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})$ *est un endomorphisme antisymétrique, et le vecteur* Ω *associé est* $\varphi(\boldsymbol{u}) - \mathrm{Tr}(\varphi)\boldsymbol{u}$.

<u>Démonstration</u> :

❑ (lin.i) : On remarque que le membre de gauche est une forme trilinéaire alternée, donc est proportionnelle au déterminant. Pour vérifier que le coefficient de proportionnalité est $\mathrm{Tr}(\varphi)$, prendre pour $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et une matrice de φ.

La propriété que l'on vient de montrer est d'ailleurs valide en toute dimension finie, indépendamment de la base où s'effectue le calcul du déterminant : voir la notion de *trace* dans le chapitre L1/LINEF.PDF.

❑ (lin.ii) : Cette propriété est vraie dans un espace euclidien de dimension quelconque. Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée, la trace de φ vaut :

$$\mathrm{Tr}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \langle\varphi(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\boldsymbol{u}, e_i\rangle\langle\boldsymbol{v}, e_i\rangle = \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$$

❑ (lin.iii) : Ω existe et est unique car $\varphi - \varphi^*$ est un opérateur antisymétrique de $\mathbf{R}^3$ (voir la notion d'*endomorphisme antisymétrique* dans le chapitre L2/PREHILB.PDF).

Pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, considérons l'endomorphisme $\varphi(.) \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ défini par :

$$\boldsymbol{w} \to \varphi(\boldsymbol{w}) \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \langle\varphi(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}\rangle\, \boldsymbol{u} - \langle\varphi(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}\rangle\, \boldsymbol{v}$$

d'après la formule du double produit vectoriel.
Voir le chapitre L1/DETERMNT.PDF

$$= \langle\boldsymbol{w}, \varphi^*(\boldsymbol{v})\rangle\, \boldsymbol{u} - \langle\boldsymbol{w}, \varphi^*(\boldsymbol{u})\rangle\, \boldsymbol{v}$$

d'après la définition de l'adjoint

D'après (lin.ii), cet endomorphisme a pour trace :

$$\langle\boldsymbol{u}, \varphi^*(\boldsymbol{v})\rangle - \langle\boldsymbol{v}, \varphi^*(\boldsymbol{u})\rangle = \langle\varphi(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle - \langle\varphi^*(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle = \langle(\varphi - \varphi^*)(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle$$
$$= \langle\Omega \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = [\Omega, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = \langle\Omega, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\rangle$$

On a ainsi montré que $\mathrm{Tr}(\varphi(.) \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})) = \langle\Omega, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\rangle$. Mais $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ décrit tous les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ quand $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ varient. Donc, remplaçant $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ par $\boldsymbol{u}$, on conclut que $\mathrm{Tr}(\varphi(.) \times \boldsymbol{u}) = \langle\Omega, \boldsymbol{u}\rangle$.

❑ (lin.iv) : Il suffit de remarquer que, pour tous vecteurs $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{z}$:

$$\langle\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}\rangle = \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle\, \langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}\rangle = \langle\langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}\rangle\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle$$

❑ (lin.v) : Pour tous vecteurs $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{z}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle\varphi(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}\rangle &= \langle\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle\, \boldsymbol{v} - \langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}\rangle \\ &= \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle\langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}\rangle - \langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}\rangle \\ &= \langle\boldsymbol{w}, \langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}\rangle\, \boldsymbol{u} - \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}\rangle\, \boldsymbol{v}\rangle \\ &= -\langle\boldsymbol{w}, \varphi(\boldsymbol{z})\rangle\end{aligned}$$

Donc φ est antisymétrique. On aurait pu dire aussi directement que φ est la différence entre l'endomorphisme de (lin.iv) et son adjoint, donc est antisymétrique.

Par ailleurs, on reconnaît dans l'expression de $\varphi(\boldsymbol{w})$ un double produit vectoriel (voir L1/DETERMNT.PDF):

$$\varphi(\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \Omega \times \boldsymbol{w}$$

❑ (lin.vi) : Pour tous vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$, on a :

$$\langle\varphi(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = [\varphi(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = \langle\varphi(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{w}, \varphi^*(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})\rangle$$

On écrira que l'adjoint de $\varphi \times \boldsymbol{u}$ est $\varphi^*(\boldsymbol{u} \times .)$.

❑ (lin.vii) : L'endomorphisme $\boldsymbol{w} \to \varphi(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} - \varphi^*(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})$ est antisymétrique d'après (lin.vi), puisqu'on effectue la différence entre l'endomorphisme $\boldsymbol{w} \to \varphi(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u}$ et son adjoint. Pour montrer que $\Omega = \varphi(\boldsymbol{u}) - \mathrm{Tr}(\varphi)\boldsymbol{u}$, il reste à vérifier que, pour tout vecteur $\boldsymbol{w}$:

$$\varphi(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} - \varphi^*(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) = (\varphi(\boldsymbol{u}) - \mathrm{Tr}(\varphi)\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{w}$$

ou que, pour tout $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{z}$:

$$\begin{aligned}
& <\varphi(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} - \varphi^*(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}> = <(\varphi(\boldsymbol{u}) - \mathrm{Tr}(\varphi)\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}> \\
\Leftrightarrow\ & <\varphi(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}> - <\varphi^*(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}> = <\varphi(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}> - <\mathrm{Tr}(\varphi)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}> \\
\Leftrightarrow\ & <\varphi(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}> - <\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}, \varphi(\boldsymbol{z})> = <\varphi(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}> - <\mathrm{Tr}(\varphi)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}> \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{Tr}(\varphi)<\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}> = <\varphi(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}> - <\varphi(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}> + <\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}, \varphi(\boldsymbol{z})> \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{Tr}(\varphi)\,[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}] = [\varphi(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}] - [\varphi(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}] + [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \varphi(\boldsymbol{z})] \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{Tr}(\varphi)\,[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}] = [\varphi(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}] + [\boldsymbol{u}, \varphi(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}] + [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \varphi(\boldsymbol{z})]
\end{aligned}$$

qui est bien vrai d'après (lin.i).

On peut maintenant procéder aux démonstrations des énoncés du formulaire. Celles-ci sont plus abstraites que les simples dérivations termes à termes mais constituent un bon entraînement à la maîtrise des outils différentiels.

a) Preuve de $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{grad}(f)) = 0$:

Pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, on a, d'après (def.iii) :

$$\begin{aligned}
<\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> &= <(\mathrm{dX} - \mathrm{dX}^*)(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> \\
&= <\mathrm{dX}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <\mathrm{dX}^*(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> \\
&= <\mathrm{dX}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <\mathrm{dX}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}>
\end{aligned}$$

Or, d'après (diff.i), $<\mathrm{dX}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> = \mathrm{d}(<\mathrm{X}, \boldsymbol{v}>)(\boldsymbol{u})$ et $<\mathrm{dX}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}> = \mathrm{d}(<\mathrm{X}, \boldsymbol{u}>)(\boldsymbol{v})$. Donc :

$$<\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = \mathrm{d}(<\mathrm{X}, \boldsymbol{v}>)(\boldsymbol{u}) - \mathrm{d}(<\mathrm{X}, \boldsymbol{u}>)(\boldsymbol{v})$$

Remplaçant X par $\boldsymbol{grad}(f)$. On a :

$$<\mathrm{X}, \boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{grad}(f), \boldsymbol{v}> = \mathrm{d}f(\boldsymbol{v})$$

et $\quad <\mathrm{X}, \boldsymbol{u}> = \mathrm{d}f(\boldsymbol{u})$

donc $\quad <\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = \mathrm{d}(\mathrm{d}f(\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{u}) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{v})$

Ci-dessus, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{v})$ est la dérivée de f selon le vecteur $\boldsymbol{v}$ (voir L2/CALCDIF2.PDF) :

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f$$

et $\mathrm{d}(\mathrm{d}f(\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{u})$ est la dérivée de $\mathrm{d}f(\boldsymbol{v})$ (ou de $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f$) selon le vecteur $\boldsymbol{u}$:

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f(\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{u}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}(\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f) = (\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}})(f)$$

L'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \mathrm{d}(\mathrm{d}f(\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{u}) = (\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}})(f)$ est bilinéaire. On la note d^2f et on l'appelle **différentielle seconde** de f. Si f est C^2, le théorème de Schwarz énonce que $\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}$, donc d^2f est un opérateur symétrique :

$$\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} \circ \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}})(f) = (\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} \circ \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}})(f) = \mathrm{d}^2f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& \forall\, \boldsymbol{u}, \forall\, \boldsymbol{v}, <\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{grad}(f)) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = \mathrm{d}^2f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \mathrm{d}^2f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0 \\
\Rightarrow\ & \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{grad}(f)) \times \boldsymbol{u} = 0 \\
\Rightarrow\ & \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{grad}(f)) = 0
\end{aligned}$$

b) Preuve de $\mathrm{div}(\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})) = 0$:

Pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}) \times \boldsymbol{u} = (\mathrm{dX} - \mathrm{dX}^*)(\boldsymbol{u})$. Donc, pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$:

$$<\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = <(\mathrm{dX} - \mathrm{dX}^*)(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> = <\mathrm{dX}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <\boldsymbol{u}, \mathrm{dX}(\boldsymbol{v})>$$

Différentions cette relation. Pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, d'une part, sur le membre de gauche :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(<\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>)(\boldsymbol{w}) &= \mathrm{d}(<\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}), \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}>)(\boldsymbol{w}) \\
&= <\mathrm{d}(\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}))(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}> \qquad \text{d'après (diff.i)}
\end{aligned}$$

$= [\mathrm{d}(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$

D'autre part, sur le membre de droite :

$\mathrm{d}(<\mathrm{d}X(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <\boldsymbol{u}, \mathrm{d}X(\boldsymbol{v})>)(\boldsymbol{w}) = <\mathrm{d}(\mathrm{d}X(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}> - <\boldsymbol{u}, \mathrm{d}(\mathrm{d}X(\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{w})>$ d'après (diff.i)

$= <\mathrm{d}^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <\boldsymbol{u}, \mathrm{d}^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})>$

en considérant la différentielle seconde du champ X, qu'on peut définir de la même façon que la différentielle seconde d'une fonction f : $\mathrm{d}^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = \mathrm{d}(\mathrm{d}X(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{w}) = (D_w \circ D_u)(X)$.

d^2X est symétrique, là aussi grâce au théorème de Schwarz. L'ordre de ses deux vecteurs paramètres est donc quelconque. Donc $\mathrm{d}^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = \mathrm{d}^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ et :

$[\mathrm{d}(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = <\mathrm{d}^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <\mathrm{d}^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}>$

On a écrit le membre de droite de façon à faire apparaître une permutation circulaire des trois vecteurs $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. En particulier, on obtient une somme nulle par addition de trois termes de cette forme :

$(<\mathrm{d}^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <\mathrm{d}^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}>) + (<\mathrm{d}^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}> - <\mathrm{d}^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}>)$

$+ (<\mathrm{d}^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}> - <\mathrm{d}^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}>) = 0$

$\Leftrightarrow$ $[\mathrm{d}(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] + [\mathrm{d}(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}] + [\mathrm{d}(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = 0$

$\Leftrightarrow$ $[\mathrm{d}(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{w}, \mathrm{d}(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \mathrm{d}(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{v})] = 0$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Tr}(\mathrm{d}(\boldsymbol{Rot}(X)))\,[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = 0$ d'après (lin.i)

donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{d}(\boldsymbol{Rot}(X))) = 0$ en simplifiant après un choix de $[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ non nul

donc $\mathrm{div}(\boldsymbol{Rot}(X)) = 0$ d'après (def.ii)

c) Preuve de $\boldsymbol{grad}(fg) = g\,\boldsymbol{grad}(f) + f\,\boldsymbol{grad}(g)$:

D'après (diff.v), $\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g$.

Donc, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, en utilisant (def.i) :

$<\boldsymbol{grad}(fg), \boldsymbol{u}> = \mathrm{d}(fg)(\boldsymbol{u}) = g\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{u}) + f\,\mathrm{d}g(\boldsymbol{u}) = g <\boldsymbol{grad}(f), \boldsymbol{u}> + f <\boldsymbol{grad}(g), \boldsymbol{u}>$

$= <g\,\boldsymbol{grad}(f) + f\,\boldsymbol{grad}(g), \boldsymbol{u}>$

donc $\boldsymbol{grad}(fg) = g\,\boldsymbol{grad}(f) + f\,\boldsymbol{grad}(g)$.

d) Preuve de $\boldsymbol{grad}(h \circ f) = (h' \circ f)\,\boldsymbol{grad}(f)$:

D'après (diff.vi), $\mathrm{d}(h \circ f) = (h' \circ f)\,\mathrm{d}f$.

Donc, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, en utilisant (def.i) :

$<\boldsymbol{grad}(h \circ f), \boldsymbol{u}> = \mathrm{d}(h \circ f)(\boldsymbol{u}) = (h' \circ f)\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{u}) = (h' \circ f) <\boldsymbol{grad}(f), \boldsymbol{u}>$

$= <(h' \circ f)\,\boldsymbol{grad}(f), \boldsymbol{u}>$

donc $\boldsymbol{grad}(h \circ f) = (h' \circ f)\,\boldsymbol{grad}(f)$

e) Preuve de $\boldsymbol{grad}(<X, Y>) = \mathrm{d}X^*(Y) + \mathrm{d}Y^*(X)$:

D'après (diff.ii), $\mathrm{d}(<X, Y>) = <\mathrm{d}X, Y> + <X, \mathrm{d}Y>$.

Donc, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, en utilisant (def.i) :

$<\boldsymbol{grad}(<X, Y>), \boldsymbol{u}> = \mathrm{d}(<X, Y>)(\boldsymbol{u}) = <\mathrm{d}X(\boldsymbol{u}), Y> + <X, \mathrm{d}Y(\boldsymbol{u})>$

$= <\boldsymbol{u}, \mathrm{d}X^*(Y)> + <\mathrm{d}Y^*(X), \boldsymbol{u}>$

d'après la définition de l'adjoint

$= <\mathrm{d}X^*(Y) + \mathrm{d}Y^*(X), \boldsymbol{u}>$

donc $\boldsymbol{grad}(<X, Y>) = \mathrm{d}X^*(Y) + \mathrm{d}Y^*(X)$

On peut aussi écrire :

$\boldsymbol{grad}(<X, Y> = \boldsymbol{grad}(\sum_{j=1}^{3} X_j Y_j)$ en notant X_j les composantes de X dans une base orthonormée , et de même pour Y

$= \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{grad}(X_j Y_j)$

$= \sum_{j=1}^{3} Y_j\, \boldsymbol{grad}(X_j) + X_j\, \boldsymbol{grad}(Y_j)$ d'après le c)

$= dX^*(Y) + dY^*(X)$ car les colonnes de la matrice de dX^* sont les $\boldsymbol{grad}(X_j)$

f) Preuve de $\mathrm{div}(fX) = <\mathbf{grad}(f), X> + f\,\mathrm{div}(X)$:
D'après (diff.vii), $d(fX) = df\, X + f\, dX$.
Donc, d'après (def.ii) :

$$\mathrm{div}(fX) = \mathrm{Tr}(d(fX)) = \mathrm{Tr}(df\, X + f\, dX)$$
$$= \mathrm{Tr}(df\, X) + \mathrm{Tr}(f\, dX)$$
$$= \mathrm{Tr}(<\boldsymbol{grad}(f), . >X) + f\, \mathrm{Tr}(dX)$$

où $<\boldsymbol{grad}(f), . >$ est l'opérateur $\boldsymbol{u} \to <\boldsymbol{grad}(f), \boldsymbol{u}> = df(\boldsymbol{u})$
de sorte que $<\boldsymbol{grad}(f), . > = df$

$$= <\boldsymbol{grad}(f), X> + f\, \mathrm{div}(X)$$

d'après (lin.ii) pour le premier terme, et (def.ii) pour le second terme.

g) Preuve de $\mathrm{div}(X \times Y) = <\boldsymbol{Rot}(X), Y> - <X, \boldsymbol{Rot}(Y)>$:
D'après (diff.iv) :

$$d(X \times Y) = dX \times Y + X \times dY$$

On prend la trace :

$$\mathrm{div}(X \times Y) = \mathrm{Tr}(d(X \times Y))$$
$$= \mathrm{Tr}(dX \times Y) + \mathrm{Tr}(X \times dY)$$
$$= \mathrm{Tr}(dX \times Y) - \mathrm{Tr}(dY \times X)$$

D'après (lin.iii), $\mathrm{Tr}(dX \times Y) = <\Omega, Y>$ où Ω est le vecteur associé à l'opérateur antisymétrique $dX - dX^*$. Ce vecteur est précisément $\boldsymbol{Rot}(X)$. Donc $\mathrm{Tr}(dX \times Y) = <\boldsymbol{Rot}(X), Y>$. On obtient bien :

$$\mathrm{div}(X \times Y) = <\boldsymbol{Rot}(X), Y> - <X, \boldsymbol{Rot}(Y)>$$

h) Preuve de $\boldsymbol{Rot}(fX) = \boldsymbol{grad}(f) \times X + f\, \boldsymbol{Rot}(X)$:
D'après (diff.vii) :

$d(fX) = df\, X + f\, dX = <\boldsymbol{grad}(f), .> X + f\, dX$ avec la même convention de notation qu'en f)

On prend l'adjoint, en utilisant (lin.iv) :

$$d(fX)^* = <X, .> \boldsymbol{grad}(f) + f\, dX^*$$

On fait la différence, ce qui donne :

$$d(fX) - d(fX)^* = <\boldsymbol{grad}(f), .> X + f\, dX - <X, .> \boldsymbol{grad}(f) - f\, dX^*$$
$$= <\boldsymbol{grad}(f), .> X - <X, .> \boldsymbol{grad}(f) + f\,(dX - dX^*)$$

Les trois opérateurs $d(fX) - d(fX)^*$, $<\boldsymbol{grad}(f), .> X - <X, .> \boldsymbol{grad}(f)$ et $dX - dX^*$ sont tous antisymétriques et leur vecteur Ω associé respectif est $\boldsymbol{Rot}(fX)$, $\boldsymbol{grad}(f) \times X$ et $\boldsymbol{Rot}(X)$. (Pour le deuxième opérateur, on applique (lin.v)). On a donc :

$$\boldsymbol{Rot}(fX) = \boldsymbol{grad}(f) \times X + f\, \boldsymbol{Rot}(X)$$

i) Preuve de $\boldsymbol{Rot}(X \times Y) = (dX(Y) - \mathrm{div}(X)Y) - (dY(X) - \mathrm{div}(Y)X)$:
D'après (diff.iv), on a :

$$d(X \times Y) = dX \times Y + X \times dY = dX \times Y - dY \times X$$

On passe aux adjoints, en utilisant (lin.vi) :

$$d(X \times Y)^* = dX^*(Y \times .) - dY^*(X \times .)$$

On fait la différence :

$$d(X \times Y) - d(X \times Y)^* = dX \times Y - dX^*(Y \times .) - dY \times X + dY^*(X \times .)$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $d(X \times Y) - d(X \times Y)^*$, $dX \times Y - dX^*(Y \times .)$ et $- dY \times X + dY^*(X \times .)$ sont trois opérateurs antisymétriques, et que leur vecteur Ω respectivement associé est $\boldsymbol{Rot}(X \times Y)$, $dX(Y) - Tr(dX)Y$ ou bien $dX(Y) - div(X)Y$, et $- dY(X) + Tr(Y)X$ ou bien $- dY(X) + div(Y)X$. On utilise (lin.vii) pour traiter les deux endomorphismes du membre de droite.

j) Preuve de $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(X)) = \boldsymbol{grad}(div(X)) - \Delta X$:

L'existence d'un vecteur ΔX tel que, pour tout vecteur $\boldsymbol{z}$, on a $<\Delta X, \boldsymbol{z}> = \Delta(<X, \boldsymbol{z}>)$ provient du fait que, en tout point A de $\mathbb{R}^3$, l'application $\boldsymbol{z} \to \Delta(<X, \boldsymbol{z}>)_A$ est une forme linéaire, donc résulte du produit scalaire de $\boldsymbol{z}$ par un vecteur ΔX_A. Pour tout A, on a donc : $<\Delta X_A, \boldsymbol{z}> = \Delta(<X, \boldsymbol{z}>)_A$. D'où la relation $<\Delta X, \boldsymbol{z}> = \Delta(<X, \boldsymbol{z}>)$.

Si $X = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ et si $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ est léa base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $P = <X, \boldsymbol{i}>$, donc :

$$\Delta P = \Delta(<X, \boldsymbol{i}>) = <\Delta X, \boldsymbol{i}>$$
$$\Delta Q = \Delta(<X, \boldsymbol{j}>) = <\Delta X, \boldsymbol{j}>$$
$$\Delta R = \Delta(<X, \boldsymbol{k}>) = <\Delta X, \boldsymbol{k}>$$

Il en résulte que $\Delta X = \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta R \end{pmatrix}$. Autrement dit, les composantes de ΔX sont les laplaciens des composantes de X.

Pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$:

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{Rot}(X), \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}> &= <\boldsymbol{Rot}(X) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> \\ &= <dX(\boldsymbol{u}) - dX^*(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> \qquad \text{d'après (def.iii)} \\ &= <dX(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <\boldsymbol{u}, dX(\boldsymbol{v})> \end{aligned}$$

Différentions les deux membres, en utilisant (diff.i). Pour tout vecteur $\boldsymbol{w}$:

$$\begin{aligned} <d(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}> &= <d(dX(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}> - <\boldsymbol{u}, d(dX(\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{w})> \\ &= <d^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <d^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}> \\ \text{et aussi} \quad &= <\boldsymbol{w}, d(\boldsymbol{Rot}(X))^*(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})> \qquad \text{par définition de l'adjoint} \end{aligned}$$

Remplaçons $\boldsymbol{w}$ par un produit vectoriel $\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}$:

$$<d(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}), \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}> = <d^2X(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <d^2X(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}>$$
$$<d(\boldsymbol{Rot}(X))^*(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}> = <d^2X(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <d^2X(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}>$$

Permutons $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{z}$ d'une part, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ d'autre part dans la première égalité :

$$<d(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}> = <d^2X(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w}> - <d^2X(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}>$$

Retranchons à cette dernière la deuxiéme égalité :

$$\begin{aligned} <d(\boldsymbol{Rot}(X))(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) - d(\boldsymbol{Rot}(X))^*(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}> &= <d^2X(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w}> - <d^2X(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}> \\ &\quad - <d^2X(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> + <d^2X(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}> \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad <\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(X)) \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}> &= <d^2X(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w}> - <d^2X(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}> \\ &\quad - <d^2X(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> + <d^2X(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}> \\ &\qquad \text{par définitition du rotationnel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad <\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(X)), (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w})> &= <d^2X(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{w}> - <d^2X(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}> \\ &\quad - <d^2X(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> + <d^2X(\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}> \end{aligned}$$

Et en particulier, en prenant $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}$:

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(X)), (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})> &= <d^2X(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}> - <d^2X(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}> \\ &\quad - <d^2X(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> + <d^2X(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}> \end{aligned}$$

Prenons pour $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ une base orthonormée directe, de sorte que $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. On obtient :

$$<\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(X)), \boldsymbol{v}> = <d^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}> - <d^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}> - <d^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> + <d^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}>$$

Intéressons-nous maintenant à $\boldsymbol{grad}(\mathrm{div}(X))$, et donc à $d(\mathrm{div}(X))$. Comme $\mathrm{div}(X) = \mathrm{Tr}(dX)$, on doit donc considérer $d(\mathrm{Tr}(dX))$. Pour tous vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, on a :

$$\mathrm{Tr}(dX)\,[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [dX(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{a}, dX(\boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, dX(\boldsymbol{c})]$$

Différentions cette égalité :

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\, d(\mathrm{Tr}(dX)) = d([dX(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) + d([\boldsymbol{a}, dX(\boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}]) + d([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, dX(\boldsymbol{c})])$$
$$= [d(dX(\boldsymbol{a})), \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{a}, d(dX(\boldsymbol{b})), \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, d(dX(\boldsymbol{c}))]$$

faisans intervenir une différentielle seconde de X, qui est telle que, pour tous vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{v}$, $d(dX(\boldsymbol{a}))(\boldsymbol{v})$ se note $d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$, quantité symétrique par rapport à $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{v}$. Donc :

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\, d(\mathrm{Tr}(dX))(\boldsymbol{v}) = [d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}), \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{a}, d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{c})]$$

$$\Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] <\boldsymbol{grad}(\mathrm{Tr}(dX)), \boldsymbol{v}> = [d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}), \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{a}, d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{c})]$$

d'après la définition du gradient

$$\Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] <\boldsymbol{grad}(\mathrm{div}(X)), \boldsymbol{v}> = [d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}), \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{a}, d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{c})]$$

d'après la définition de la divergence

$$= <d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}), \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}> + <d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}> + <d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{c}), \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}>$$

Remplaçons $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ par la base orthonormée directe $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. On obtient, sachant qu'on a alors $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = 1$:

$$<\boldsymbol{grad}(\mathrm{div}(X)), \boldsymbol{v}> = <d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}> + <d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}> + <d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}>$$
$$= <d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{w}> + <d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}> + <d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}>$$
$$= <d^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}> + <d^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}> + <d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}>$$

car d^2X est symétrique

On observe des termes communs avec $<\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(X)), \boldsymbol{v}>$. Faisons la différence. Il reste :

$$<\boldsymbol{grad}(\mathrm{div}(X)) - \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(X)), \boldsymbol{v}> = <d^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> + <d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}> + <d^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}>$$
$$= <d^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + d^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}>$$

Montrons que $d^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + d^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$ n'est autre que ΔX. Rappelons que $d^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = d(dX(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{u})$, et donc que, pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{z}$:

$$<d^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{z}> = <d(dX(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{z}>$$
$$= d(<dX(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{z}>)(\boldsymbol{u})$$
$$= d(d(<X, \boldsymbol{z}>)(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{u})$$
$$= d(<\boldsymbol{grad}(<X, \boldsymbol{z}>), \boldsymbol{u}>)(\boldsymbol{u})$$
$$= d(<Y, \boldsymbol{u}>)(\boldsymbol{u})$$

en posant $Y = \boldsymbol{grad}(<X, \boldsymbol{z}>)$

$$= <dY(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}>$$

donc :

$$<d^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + d^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}> = <dY(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}> + <dY(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}> + <dY(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{w}>$$
$$= \mathrm{Tr}(dY)$$

la trace étant calculée dans la base orthonormée $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

$$= \mathrm{div}(Y)$$
$$= \mathrm{div}(\boldsymbol{grad}(<X, \boldsymbol{z}>)$$
$$= \Delta(<X, \boldsymbol{z}>)$$
$$= <\Delta X, \boldsymbol{z}>$$

Cette égalité étant vraie pour tout vecteur $\boldsymbol{z}$, on a bien $d^2X(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + d^2X(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = \Delta X$. Si $X = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ et si on prend pour $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ la base canonique $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ de $\mathbf{R}^3$, on a :

$$dX(\boldsymbol{i}) = \frac{\partial X}{\partial x}$$

puis $$d^2X(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = d(dX(\boldsymbol{i}))(\boldsymbol{i}) = d(\frac{\partial X}{\partial x})(\boldsymbol{i}) = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

$$d^2X(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) = \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}$$

$$d^2X(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$

de sorte que $\Delta X = d^2X(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + d^2X(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) + d^2X(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$ comme attendu.

Ainsi, on a, pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$:

$$\langle \boldsymbol{grad}(\mathrm{div}(X)) - \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(X)), \boldsymbol{v} \rangle = \langle \Delta X, \boldsymbol{v} \rangle$$

et donc :

$$\boldsymbol{grad}(\mathrm{div}(X)) - \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(X) = \Delta X$$

II : Formes différentielles alternées

Gradient, rotationnel et divergence sont en fait trois facettes d'un même objet mathématique, les formes différentielles alternées. Bien que celles-ci puissent être définies sur des espace vectoriel de dimension finie quelconque, nous nous limiterons à la dimension 3.

1- Formes différentielles alternées

$\mathbf{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

❑ ω est une <u>*forme de degré* 0</u> définie sur $\mathbf{R}^3$ si c'est simplement une fonction f de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$.

❑ ω est une <u>*forme différentielle de degré* 1</u> définie sur $\mathbf{R}^3$ si, pour tout (x, y, z), $\omega(x, y, z)$ est une forme linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$. Ce concept est exactement celui qui a été introduit dans le chapitre L2/CALCDIF2.PDF en lien avec les intégrales curvilignes. Usuellement, on note $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$, où P, Q et R sont trois fonctions de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$. $\omega(x, y, z)$ est alors la forme linéaire $P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$, qui, à tout vecteur $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$ de $\mathbf{R}^3$ associe $P(x, y, z)h + Q(x, y, z)k + R(x, y, z)l$. $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ sont les formes linéaires qui, à $\boldsymbol{u}$, associe ses composantes respectives h, k, l.

A la forme différentielle ω, on associe le champ de vecteurs $X = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$. La quantité $P(x, y, z)h + Q(x, y, z)k + R(x, y, z)l$ peut être vue indifféremment comme :

la forme linéaire $\omega(x, y, z)$ appliquée sur le vecteur $\boldsymbol{u}$

le produit scalaire $\langle X, \boldsymbol{u} \rangle$ où X est évalué en (x, y, z)

On retrouve en effet le fait que toute forme linéaire sur un espace euclidien peut être définie par un produit scalaire.

❑ ω est une <u>*forme différentielle alternée de degré* 2</u> définie sur $\mathbf{R}^3$ si, pour tout (x, y, z), $\omega(x, y, z)$ est une forme bilinéaire alternée de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$. Il existe alors trois fonctions P, Q et R de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ telles que, si $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} h' \\ k' \\ l' \end{pmatrix}$ (en omettant le point (x, y, z) où s'effectue le calcul pour alléger les notations) :

$$\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathrm{P}\,(kl' - lk') + \mathrm{Q}\,(lh' - hl') + \mathrm{R}\,(hk' - kh')$$
$$= \begin{vmatrix} \mathrm{P} & h & h' \\ \mathrm{Q} & k & k' \\ \mathrm{R} & l & l' \end{vmatrix}$$

En effet, si on note $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, le caractère alterné de ω impose que $\omega(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = 0$ donc il n'y a pas de terme en hh' et de même pour kk' et ll'. Et $\omega(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = -\,\omega(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i})$, donc le coefficient de hk' est opposé à celui de kh'.

Les formes bilinéaires alternées élémentaires qui, à tout couple de vecteurs $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \left(\begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h' \\ k' \\ l' \end{pmatrix}\right)$, associent $kl' - lk'$, $lh' - hl'$ et $hk' - kh'$ sont notées respectivement $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, de sorte que :

$$\omega = \mathrm{P}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{Q}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{R}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

La notation ∧ utilisée ici ne doit pas être confondue avec la notation du produit vectoriel de deux vecteurs, raison pour laquelle nous avons adopté la notation × pour le produit vectoriel, en usage dans le monde anglo-saxon.

A chaque forme différentielle alternée ω de degré 2, on associe le champ de vecteurs $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} \end{pmatrix}$. La quantité $\mathrm{P}\,(kl' - lk') + \mathrm{Q}\,(lh' - hl') + \mathrm{R}\,(hk' - kh')$ peut être vue comme :

la forme bilinéaire alternée ω appliquée sur le couple $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

le produit scalaire $\langle \mathrm{X}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \rangle$ ou le produit mixte $[\mathrm{X}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$

On voit donc qu'un champ de vecteurs X permettra de définir, suivant l'interprétation qu'on lui donne, une forme de degré 1 (en faisant le produit scalaire de ce champ en (x, y, z) par un vecteur $\boldsymbol{u}$) ou bien une forme de degré 2 (en formant le produit mixte de ce champ avec deux autres vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$).

❑ ω est une <u>*forme différentielle alternée de degré* 3</u> définie sur $\mathbf{R}^3$ si, pour tout (x, y, z), $\omega(x, y, z)$ est une forme trilinéaire alternée de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$. Toute forme trilinéaire alternée de $\mathbf{R}^3$ étant proportionnelle au déterminant, il existe alors une fonction S de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tous vecteurs $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} h' \\ k' \\ l' \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} h'' \\ k'' \\ l'' \end{pmatrix}$:

$$\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \mathrm{S} \begin{vmatrix} h & h' & h'' \\ k & k' & k'' \\ l & l' & l'' \end{vmatrix}$$

On note usuellement $\omega = S\, dx \wedge dy \wedge dz$. La quantité $dx \wedge dy \wedge dz$ n'est autre que la forme trilinéaire alternée définissant le produit mixte.
A chaque forme différentielle alternée ω de degré 3, on lui associe son champ scalaire S.

2- Produit (extérieur) de formes différentielles alternées

La notation $\wedge$ permet d'effectuer des produits (dont on peut vérifier qu'ils sont associatifs), dits produits extérieurs, entre deux formes différentielles de la façon suivante, le caractère alterné apparaissant à travers la règle de calcul $dy \wedge dx = - dx \wedge dy$, et en particulier, $dx \wedge dx = 0$.

❑ Si l'une des formes est de degré 0, il s'agit du produit usuel. Il n'y a donc pas de différence entre $P dx$ et $P \wedge dx$ par exemple.

❑ Si les deux formes sont de degré 1, à savoir $\omega = P dx + Q dy + R dz$ et $\omega' = U dx + V dy + W dz$, leur produit extérieur est une forme de degré 2. Le champ de vecteurs associé à ce dernier champ n'est autre que le produit vectoriel des champs associés aux deux formes initiales. En effet :

$$\begin{aligned}\omega \wedge \omega' &= (P dx + Q dy + R dz) \wedge (U dx + V dy + W dz)\\ &= PV\, dx \wedge dy + PW\, dx \wedge dz + QU\, dy \wedge dx + QW\, dy \wedge dz + RU\, dz \wedge dx + RV\, dz \wedge dy\\ &= (QW - RV)\, dy \wedge dz + (RU - PW)\, dz \wedge dx + (PV - QU)\, dx \wedge dy\end{aligned}$$

et le champ final $\begin{pmatrix} QW - RV \\ RU - PW \\ PV - QU \end{pmatrix}$ est bien égal à $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$. On a donc $\omega' \wedge \omega = - \omega \wedge \omega'$.

On peut également remarquer que, appliqué sur un couple de vecteurs $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} h' \\ k' \\ l' \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \omega')(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= (QW - RV)(kl' - lk') + (RU - PW)(lh' - hl') + (PV - QU)(hk' - kh')\\ &= (Ph + Qk + Rl)(Uh' + Vk' + Wl') - (Ph' + Qk' + Rl')(Uh + Vk + Wl)\\ &= \omega(\boldsymbol{u})\omega'(\boldsymbol{v}) - \omega(\boldsymbol{v})\omega'(\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

qui n'est que la généralisation de la même règle sur le produit de deux formes élémentaires de degré 1, par exemple :

$$(dx \wedge dy)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = hk' - kh' = dx(\boldsymbol{u})dy(\boldsymbol{v}) - dx(\boldsymbol{v})dy(\boldsymbol{u})$$

❑ Si $\omega = P dx + Q dy + R dz$ est de degré 1 et $\omega' = U\, dy \wedge dz + V\, dz \wedge dx + W\, dx \wedge dy$ de degré 2, le produit extérieur est une forme de degré 3. En effet :

$$\begin{aligned}\omega \wedge \omega' &= (P dx + Q dy + R dz) \wedge (U\, dy \wedge dz + V\, dz \wedge dx + W\, dx \wedge dy)\\ &= PU\, dx \wedge dy \wedge dz + QV\, dy \wedge dz \wedge dx + RW\, dz \wedge dx \wedge dy\\ &= (PU + QV + RW)\, dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

car le caractère alterné de $\wedge$ donne par exemple $dy \wedge dz \wedge dx = - dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$. Les termes tels que $dx \wedge dz \wedge dx$ sont nuls car $dx \wedge dz \wedge dx = - dx \wedge dx \wedge dz = 0$ puisque $dx \wedge dx = 0$.
Le champ scalaire $PU + QV + RW$ associé au produit final est le produit scalaire des champs de vecteurs $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$ associés aux deux formes initiales.

On pourra vérifier que $\omega' \wedge \omega = - \omega \wedge \omega'$ et que, pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, on a :

$$(\omega \wedge \omega')(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \omega(\boldsymbol{u})\omega'(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \omega(\boldsymbol{v})\omega'(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) + \omega(\boldsymbol{w})\omega'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

le membre de droite étant la plus simple expression trilinéaire antisymétrique qu'on peut obtenir à partir du terme $\omega(\boldsymbol{u})\omega'(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ (voir la partie *Exercices*).

3- Différentielle (extérieure) des formes différentielles alternées

On souhaite définir une différentiation, dite extérieure, qui à une forme différentielle alternée ω associe une forme différentielle $d\omega$ également alternée, de degré un de plus que le degré de ω. Pour cela, on procède comme suit :

❑ Si $\omega = f$ est une forme de degré 0 et de classe C^1, on pose simplement :

$$d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

La différentielle $d\omega$ d'une forme ω de degré 0 est donc une forme différentielle de degré 1, associée au champ de vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \boldsymbol{grad}(f)$. Autrement dit, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$:

$$df(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{grad}(f), \boldsymbol{u} \rangle$$

comme on l'a déjà vu.

Le gradient est le champ de vecteurs associé à la différentielle de degré 1 d'une forme de degré 0 associée à un champ scalaire

❑ Si $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz = P \wedge dx + Q \wedge dy + R \wedge dz$ est une forme de degré 1 de classe C^1 (i.e. P, Q et R sont de classe C^1), on définit $d\omega$ en différentiant P, Q et R avec les règles de calculs $dx \wedge dx = 0$ et $dx \wedge dy = -\,dy \wedge dx$, de sorte que :

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy + \frac{\partial Q}{\partial z}\,dz\right) \wedge dy \\ &\qquad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\,dx + \frac{\partial R}{\partial y}\,dy + \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Ainsi, si ω est une forme de degré 1 associée au champ de vecteurs $X = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$, alors $d\omega$ est une forme de degré 2, associée au champ de vecteurs $\boldsymbol{Rot}(X)$.

Le rotationnel est le champ de vecteurs associé à la différentielle de degré 2 d'une forme de degré 1 associée à un champ de vecteurs

Autrement dit, pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$:

$$d\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{Rot}(X), \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \rangle = [\boldsymbol{Rot}(X), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{Rot}(X) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$$

On peut retrouver la (def.iii) du rotationnel donnée plus haut, en fonction de dX et dX*. En effet, $\omega(\boldsymbol{u}) = \langle X, \boldsymbol{u} \rangle$, donc d'après (diff.i) :

$$d(\omega(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{v}) = \langle dX(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u} \rangle$$

$$= <\begin{pmatrix} \mathrm{dP}(\boldsymbol{v}) \\ \mathrm{dQ}(\boldsymbol{v}) \\ \mathrm{dR}(\boldsymbol{v}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{d}x(\boldsymbol{u}) \\ \mathrm{d}y(\boldsymbol{u}) \\ \mathrm{dz}(\boldsymbol{v}) \end{pmatrix}>$$

$$= \mathrm{dP}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}x(\boldsymbol{u}) + \mathrm{dQ}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}y(\boldsymbol{u}) + \mathrm{dR}(\boldsymbol{v})\mathrm{dz}(\boldsymbol{u})$$

On a par ailleurs :

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{dP} \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{dQ} \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{dR} \wedge \mathrm{dz}$$

donc :

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}) \times \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] &= \mathrm{d}\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \\
&= (\mathrm{dP} \wedge \mathrm{d}x)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\mathrm{dQ} \wedge \mathrm{d}y)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\mathrm{dR} \wedge \mathrm{dz})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \\
&= \mathrm{dP}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}x(\boldsymbol{v}) - \mathrm{dP}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}x(\boldsymbol{u}) + \mathrm{dQ}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}y(\boldsymbol{v}) - \mathrm{dQ}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}y(\boldsymbol{u}) \\
&\qquad + \mathrm{dR}(\boldsymbol{u})\mathrm{dz}(\boldsymbol{v}) - \mathrm{dR}(\boldsymbol{v})\mathrm{dz}(\boldsymbol{u})
\end{aligned}$$

d'après le produit extérieur de deux formes de degré 1 vu précédemment

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{dP}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}x(\boldsymbol{v}) + \mathrm{dQ}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}y(\boldsymbol{v}) + \mathrm{dR}(\boldsymbol{u})\mathrm{dz}(\boldsymbol{v}) \\
&\qquad - \mathrm{dP}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}x(\boldsymbol{u}) - \mathrm{dQ}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}y(\boldsymbol{u}) - \mathrm{dR}(\boldsymbol{v})\mathrm{dz}(\boldsymbol{u}) \\
&= <\mathrm{dX}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <\mathrm{dX}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}> \\
&= <\mathrm{dX}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> - <\boldsymbol{v}, \mathrm{dX}^*(\boldsymbol{u})>
\end{aligned}$$

d'après la définition de l'adjoint dX* de dX

$$\begin{aligned}
&= <\mathrm{dX}(\boldsymbol{u}) - \mathrm{dX}^*(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}> \\
&= <(\mathrm{dX} - \mathrm{dX}^*)(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}>
\end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$, on retrouve que $\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}) \times \boldsymbol{u} = (\mathrm{dX} - \mathrm{dX}^*)(\boldsymbol{u})$.

❑ Soit maintenant :

$$\omega = \mathrm{P}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{dz} + \mathrm{Q}\,\mathrm{dz} \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{R}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{P} \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{dz} + \mathrm{Q} \wedge \mathrm{dz} \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{R} \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= (\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}\mathrm{dz}) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{dz} + (\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}\mathrm{dz}) \wedge \mathrm{dz} \wedge \mathrm{d}x \\
&\qquad + (\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\mathrm{dz}) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= (\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z})\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{dz}
\end{aligned}$$

Ainsi, si ω est une forme de degré 2 associée au champ de vecteurs $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} \end{pmatrix}$, alors dω est une forme de degré 3, associée au champ scalaire div(X) = Tr(dX).

La divergence est le champ scalaire associé à la différentielle de degré 3 d'une forme de degré 2 associée à un champ de vecteurs

4- Formules usuelles sur gradient, rotationnel, divergence

Les considérations précédentes permettent de retrouver certaines formules du formulaire I avec la seule règle suivante :

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \omega') = \mathrm{d}\omega \wedge \omega' + (-1)^k\, \omega \wedge \mathrm{d}\omega'$$

où k est le degré de ω. Le signe $(-1)^k$ provient du fait que $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$. Donnons la raison de cette règle sur les formes différentielles élémentaires. Si, par exemple, $\omega = \mathrm{P}\, dx_1 \wedge ... \wedge dx_k$ et $\omega' = \mathrm{Q}\, dx_{k+1} \wedge ... \wedge dx_p$ alors $\omega \wedge \omega' = \mathrm{PQ}\, dx_1 \wedge ... \wedge dx_p$ et :

$$d(\omega \wedge \omega') = \sum_y \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{PQ})\, dy \wedge dx_1 ... \wedge dx_p \qquad \text{où } y \text{ parcourt les noms } x_1, x_2, ..., x_n$$

$$= \sum_y \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \mathrm{Q}\, dy \wedge dx_1 ... \wedge dx_p + \sum_y \mathrm{P} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} dy \wedge dx_1 ... \wedge dx_p$$

$$= \sum_y \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} dy \wedge dx_1 ... dx_k \wedge \mathrm{Q}\, dx_{k+1} \wedge ... \wedge dx_p$$

$$+ \sum_y (-1)^k \mathrm{P}\, dx_1 ... ... dx_k \wedge \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} dy \wedge dx_{k+1} \wedge ... \wedge dx_p$$

$$= d\omega \wedge \omega' + (-1)^k \omega \wedge d\omega'$$

PROPOSITION

On a alors, en désignant par f les champs scalaires et X *les champs de vecteurs* :

(i) $\boldsymbol{grad}(fg) = g\, \boldsymbol{grad}(f) + f\, \boldsymbol{grad}(g)$
(ii) $\mathrm{div}(f\mathrm{X}) = \langle \boldsymbol{grad}(f), \mathrm{X}\rangle + f\, \mathrm{div}(\mathrm{X})$
(iii) $\boldsymbol{Rot}(f\mathrm{X}) = \boldsymbol{grad}(f) \times \mathrm{X} + f\, \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})$
(iv) $\mathrm{div}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) = \langle \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}), \mathrm{Y}\rangle - \langle \mathrm{X}, \boldsymbol{Rot}(\mathrm{Y})\rangle$

Démonstration :

❑ (i) : On prend pour ω et ω' les formes différentielles de degré 0, associées à f et g. On a :

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + \omega \wedge d\omega'$$

avec $\wedge$ égal au produit usuel et $d\omega$, $d\omega'$ formes différentielles de degré 1, associées à $\boldsymbol{grad}(f)$ et $\boldsymbol{grad}(g)$.

$\omega \wedge \omega'$ est la forme différentielle de degré 0 associée à fg et $d(\omega \wedge \omega')$ est la forme différentielle de degré 1 associée à $\boldsymbol{grad}(fg)$.

❑ (ii) : On prend ω de degré 0 associée à une fonction f, et ω' de degré 2 associée à un champ de vecteurs X. On a :

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + \omega \wedge d\omega'$$

avec $d\omega$ forme différentielle de degré 1 associée à $\boldsymbol{grad}(f)$ et le produit $d\omega \wedge \omega'$ correspondant au produit scalaire, et $d\omega'$ forme différentielle de degré 3 associée à la divergence de X et $\omega \wedge d\omega'$ étant le produit usuel.

$\omega \wedge \omega'$ est une forme différentielle de degré 2 associée à fX et $d(\omega \wedge \omega')$ est la forme différentielle de degré 3 associée à $\mathrm{div}(f\mathrm{X})$.

❑ (iii) : On prend ω de degré 0, associée à une fonction f et ω' de degré 1 associée à un champ de vecteurs X. On a :

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' - \omega \wedge d\omega'$$

avec $d\omega$ forme différentielle de degré 1 associée à $\boldsymbol{grad}(f)$ et le produit $d\omega \wedge \omega'$ correspondant au produit vectoriel, et $d\omega'$ forme différentielle de degré 2 associée à $\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})$ et $\omega \wedge d\omega'$ étant le produit usuel.

$\omega \wedge \omega'$ est une forme différentielle de degré 1 associée à fX et $d(\omega \wedge \omega')$ est la forme différentielle de degré 2 associée à ***Rot***(fX).

❑ (iv) : On prend ω de degré 1, associée à un champ de vecteurs X et ω' de degré 1 associée à un champ de vecteurs Y. On a :

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' - \omega \wedge d\omega'$$

avec dω forme différentielle de degré 2 associée à ***Rot***(X) et le produit $d\omega \wedge \omega'$ correspondant au produit scalaire, et dω' forme différentielle de degré 2 associée à ***Rot***(Y) et $\omega \wedge d\omega'$ correspondant aussi au produit scalaire.
$\omega \wedge \omega'$ est une forme différentielle de degré 2 associée au champ de vecteurs X × Y et $d(\omega \wedge \omega')$ est la forme différentielle de degré 3 associée à div(X × Y).

On dispose également de la règle suivante :

$$\boxed{d(d\omega) = 0}$$

En effet, sur une forme différentielle élémentaire telle que $\omega = P\, dx_1 \wedge ... \wedge dx_k$ avec P de classe C^2, on a :

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_k$$

et, puisque $dx_i \wedge dx_i = 0$:

$$d(d\omega) = \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_1 ... dx_k$$

$$= \sum_{i<j} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_1 ... dx_k + \sum_{i>j} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_1 ... dx_k$$

$$= \sum_{i<j} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_1 ... dx_k + \sum_{j>i} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_1 ... dx_k$$

en échangeant le nom des indices dans le terme de droite

$$= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_1 ... dx_k$$

car $dx_j \wedge dx_i = -\, dx_i \wedge dx_j$

$$= 0$$

d'après le théorème de Schwarz.

En passant aux champs de vecteurs ou au champ scalaire associés, on retrouve les deux formules suivantes :

Rot(***grad***(f)) = 0 (prendre ω de degré 0)
div(***Rot***(X)) = 0 (prendre ω de degré 1)

5- Intégration de formes différentielles

Toutes les fonctions sont supposées C^1 dans un ouvert d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension p = 2 ou 3 que nous assimilerons à $\mathbb{R}^p$ une fois une base orthonormée directe choisie.

Soit ω une forme différentielle alternée de degré n définie sur $\mathbf{R}^p$, avec $n \leq p$. On peut définir l'intégrale $\int_D \omega$ de ω sur un domaine fermé borné D inclus dans $\mathbf{R}^p$ et de dimension n. Sans donner de définition générale, trop longue à détailler ici, nous considérerons par exemple le cas où D peut être paramétré par une fonction de classe C^1 bijective :

$$u = (u_1, ..., u_n) \in [0, 1]^n \to \mathrm{M}(u) = \mathrm{M}(u_1, ..., u_n) \in \mathrm{D}$$

telle que, pour tout u, les vecteurs $\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_1}(u)$, ..., $\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_n}(u)$ forment un système libre. Le sous-espace affine passant par M(u) et dirigé par le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_1}(u), ..., \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_n}(u))$ est alors l'espace tangent en M(u) à D. Il est de dimension n. Par exemple :

si $n = 1$, D est une courbe paramétrée par $u \in [0, 1] \to \mathrm{M}(u)$. La tangente en M($u$) à D est dirigée par le vecteur $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}u}$.

Si $n = 2$ et $p = 3$, D est une surface paramétrée par $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \to \mathrm{M}(u, v)$. Le plan tangent en M($u$) à D est dirigé par $\mathrm{Vect}(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v})$.

Si $n = 3 = p$, D est un volume, paramétré par $(u, v, w) \in [0, 1]^3 \to \mathrm{M}(u, v, w)$. En tout point, son espace tangent est $\mathbf{R}^3$.

Si $n = 0$, on convient que D est un point.

On pose alors :

$$\int_D \omega = \int_0^1 ... \int_0^1 \omega(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_1}(u), ..., \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u_n}(u))\, \mathrm{d}u_1...\mathrm{d}u_n$$

Nous détaillerons les exemples dans la suite du chapitre.

D est orienté par le choix du paramétrage.
Pour une courbe, son orientation est donnée par le sens de parcours.
Pour une surface dans $\mathbf{R}^3$, le couple $(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v})$ oriente le plan tangent à D en M(u). On introduit souvent le vecteur $\boldsymbol{N}$ unitaire, colinéaire et de même sens que $\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}$. $\boldsymbol{N}$ définit aussi l'orientation du plan tangent.
Pour un volume, on s'arrange généralement pour que le paramétrage soit tel que $(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w})$ soit une base directe de $\mathbf{R}^3$.
On vérifie alors que $\int_D \omega$ ne dépend pas du paramétrage choisi, pourvu que celui-ci conserve l'orientation de D.

D étant un domaine de dimension n, on peut définir le **bord** de D, noté δD, obtenu lorsque une ou plusieurs composantes du paramètre $(u_1, ..., u_n)$ vaut 0 ou 1. Le bord de D est la réunion de domaines de dimension $n - 1$, limitant le domaine D. Ainsi :

le bord d'une courbe limitée par deux points A et B est la paire {A, B}.
le bord d'une surface limitée par une courbe est cette courbe.
le bord d'une volume limité par une surface est cette surface.

δD peut être orienté, de façon dépendante de l'orientation de D. Nous détaillerons comment faire dans chaque exemple qui suivra. On dispose alors du théorème suivant :

$$\boxed{\int_{\delta D} \omega = \int_D d\omega}$$

où D est une domaine de dimension n, δD son bord de dimension $n - 1$, ω une forme différentielle de degré $n - 1$ définie sur $\mathbb{R}^p$, et donc dω une forme de degré n.

La suite du chapitre consiste à fournir une justification partielle de ladite formule pour diverses valeurs de p et n, et à donner des applications de cette formule en Physique.

EXEMPLE :

❑ Pour $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, la formule $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\, dt$ relève de la formule précédente. On prend $n = 1$, $D = [0, 1]$, $\delta D = \{0, 1\}$, $\omega = f$, $d\omega = f'(t)\, dt$. On oriente δD de façon à attribuer un poids + 1 en 1, et un poids – 1 en 0. $\int_{\delta D} \omega$ est alors la somme finie des valeurs de f en les points 0 et 1, pondérés par leur poids. Autrement dit, c'est $f(1) - f(0)$. $\int_D d\omega$ est $\int_0^1 f'(t)\, dt$.

III : Intégrale le long d'un chemin (n = 1 dans le plan ou l'espace)

1- Enoncé

Pour $n = 1$, dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

D est un chemin Γ reliant les points A à B, domaine de dimension 1.
$\delta D = \{A, B\}$, domaine de dimension nulle.
$\omega = f$ fonction de plusieurs variables, forme différentielle de degré 0.
$d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \langle \mathbf{\textit{grad}}(f), . \rangle$, forme différentielle de degré 1.

La formule $\int_{\delta D} \omega = \int_D d\omega$ s'exprime ici sous la forme :

$$\boxed{f(B) - f(A) = \int_\Gamma \langle \mathbf{\textit{grad}}(f), d\mathbf{\textit{M}} \rangle}$$

En effet, $\int_{\delta D} \omega$ est la somme des valeurs de f prises sur δD, les deux points A et B étant respectivement pondérés par les poids – 1 et + 1, qui est la façon "d'orienter" δD de façon compatible avec le sens de parcours de D.

Si Γ est paramétré par une fonction $t \in [0, 1] \to \mathrm{M}(t)$, $\displaystyle\int_{\mathrm{D}} \mathrm{d}\omega$ est par définition égal à $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}\omega(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t})\,\mathrm{d}t$ ou à $\displaystyle\int_0^1 <\boldsymbol{grad}(f), \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}>\mathrm{d}t$, intégrale que nous désignons par $\displaystyle\int_\Gamma <\boldsymbol{grad}(f), \mathrm{d}\boldsymbol{M}>$.

L'intégrale ne dépend donc que des points A et B et non du chemin Γ pour aller de A en B. Cette situation est également vue avec la notion d'*intégrale curviligne* dans le chapitre L2/CALCDIF2.PDF.

2- Démonstration

❑ On a $\displaystyle\int_\Gamma <\boldsymbol{grad}(f), \mathrm{d}\boldsymbol{M}> = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$, et si un paramétrage de Γ est donné par :

$$t \in [0, 1] \to \mathrm{M}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

alors l'intégrale ci-dessus se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t), z(t))\,\mathrm{d}t \\
&= f(x(1), y(1), z(1)) - f(x(0), y(0), z(0)) \\
&= f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A})
\end{aligned}$$

❑ Ou encore, plus brièvement, par définition de $\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{d}\omega$ avec $\omega = \mathrm{d}f$:

$$\int_\Gamma \mathrm{d}\omega = \int_0^1 \mathrm{d}f_{\mathrm{M}(t)}(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t})\,\mathrm{d}t$$

avec $\mathrm{d}f_{\mathrm{M}(t)}(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t})$ dérivée de la fonction composée $t \to \mathrm{M}(t) \to f(\mathrm{M}(t))$.

Donc :

$$\int_\Gamma \mathrm{d}\omega = f(\mathrm{M}(1)) - f(\mathrm{M}(0)) = f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A})$$

3- Exemples

❑ En particulier, si Γ est une courbe qui se referme sur elle-même, l'intégrale est nulle, puisque A = B et donc $f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A}) = 0$.

❑ On sait que, si g est une fonction continue d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ et si f est une fonction telle que, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, alors f est dérivable de dérivée g. De même,

la relation $f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A}) = \displaystyle\int_\Gamma <\boldsymbol{grad}(f), \mathrm{d}\boldsymbol{M}>$ caractérise le gradient (et donc la différentielle de f) au sens suivant : si X est un champ de vecteurs continu sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$, et tel que, pour tout A et B, on a $f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A}) = \displaystyle\int_\Gamma <\mathrm{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}>$ où Γ est un chemin joignant A à B contenu dans U, alors f est différentiable sur U et $\mathrm{X} = \boldsymbol{grad}(f)$.
Pour cela, prenons un point A de U. Pour tout vecteur h, soit Γ le segment [AB] avec B tel que $h = \boldsymbol{AB}$. On prend h assez petit pour que le segment soit inclus dans U. Paramétrisons Γ par $t \in [0, 1] \to \mathrm{M}(t) = \mathrm{A} + th$, de sorte que $\mathrm{d}\boldsymbol{M} = h\,\mathrm{d}t$. L'intégrale $\displaystyle\int_\Gamma <\mathrm{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}>$ vaut :

$$\int_\Gamma <\mathrm{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}> = \int_0^1 <\mathrm{X}(\mathrm{A} + th), h>\,\mathrm{d}t$$

Montrons que cette intégrale s'écrit $<\mathrm{X}(\mathrm{A}), h> + \mathrm{o}(h)$ quand h tend vers 0. En effet, la différence $\left| \displaystyle\int_0^1 <\mathrm{X}(\mathrm{A} + th), h>\,\mathrm{d}t - <\mathrm{X}(\mathrm{A}), h> \right|$ s'écrit :

$$\left| \int_0^1 <\mathrm{X}(\mathrm{A} + th), h> - <\mathrm{X}(\mathrm{A}), h>\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 \left| <\mathrm{X}(\mathrm{A} + th), h> - <\mathrm{X}(\mathrm{A}), h> \right| \mathrm{d}t$$

$$\leq \int_0^1 \left| <\mathrm{X}(\mathrm{A} + th) - \mathrm{X}(\mathrm{A}), h> \right| \mathrm{d}t$$

$$\leq \int_0^1 \| \mathrm{X}(\mathrm{A} + th) - \mathrm{X}(\mathrm{A}) \| \, \| h \| \,\mathrm{d}t$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\leq \| h \| \operatorname{Sup} \{\| \mathrm{X}(\mathrm{A} + th) - \mathrm{X}(\mathrm{A}) \|, t \in [0, 1]\}$$

Comme X est continue, X(M) tend vers X(A) quand M tend vers A, i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall \mathrm{M}, \| \mathrm{M} - \mathrm{A} \| < \alpha \Rightarrow \| \mathrm{X}(\mathrm{M}) - \mathrm{X}(\mathrm{A}) \| < \varepsilon$$

Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall h, \forall t \in [0, 1], \| h \| < \alpha \Rightarrow \| \mathrm{X}(\mathrm{A} + th) - \mathrm{X}(\mathrm{A}) \| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall h, \| h \| < \alpha \Rightarrow \operatorname{Sup} \{\| \mathrm{X}(\mathrm{A} + th) - \mathrm{X}(\mathrm{A}) \|, t \in [0, 1]\} \leq \varepsilon$$

ce qui exprime que la borne supérieure tend vers 0 quand h tend vers 0. Par conséquent, le majorant $\| h \| \operatorname{Sup} \{\| \mathrm{X}(\mathrm{A} + th) - \mathrm{X}(\mathrm{A}) \|, t \in [0, 1]\}$ est un $\mathrm{o}(h)$.
On a ainsi montré que :

$$f(\mathrm{A} + h) - f(\mathrm{A}) = <\mathrm{X}(\mathrm{A}), h> + \mathrm{o}(h)$$

avec $h \to <\mathrm{X}(\mathrm{A}), h>$ linéaire, donc f est différentiable en A et la différentielle de f en A est la fonction $\mathrm{d}f_\mathrm{A} : h \to <\mathrm{X}(\mathrm{A}), h>$, ce qui signifie bien que $\boldsymbol{grad}(f) = \mathrm{X}$.

❑ En physique, un champ de forces vecteurs $\boldsymbol{F}$ est dit dériver d'un potentiel scalaire V si, en tout point $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{grad}(\mathrm{V})$. Supposons que $\boldsymbol{F}$ soit un champ de forces, et considérons une particule soumise à ce champ de forces et se déplaçant de A en B selon un chemin Γ. Le travail W de la force le long de ce chemin est :

$$\mathrm{W} = \int_\Gamma <\boldsymbol{F}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}> = -\int_\Gamma <\boldsymbol{grad}(\mathrm{V}), \mathrm{d}\boldsymbol{M}> = -(\mathrm{V}(\mathrm{B}) - \mathrm{V}(\mathrm{A}))$$

$= V(A) - V(B)$

Ce travail est indépendant du chemin suivi et ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée. Cette hypothèse est vérifiée par exemple par le poids dans un champ de pesanteur.

❑ De plus, si $\boldsymbol{F}$ est la seule force à laquelle est soumise la particule, et si m est sa masse, alors $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, où $\boldsymbol{a} = \dfrac{d^2\boldsymbol{M}}{dt^2}$ est l'accélération de la particule. On a :

$$W = \int_\Gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{M} \rangle = m \int_\Gamma \langle \boldsymbol{a}, d\boldsymbol{M} \rangle$$

$$= m\int_\Gamma \langle \frac{d^2\boldsymbol{M}}{dt^2}, d\boldsymbol{M} \rangle = \int_{t_A}^{t_B} \langle \frac{d^2\boldsymbol{M}}{dt^2}, \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} \rangle \, dt$$

où t_A (respectivement t_B) est l'instant où la particule se trouve en A (respectivement en B)

$$= \frac{m}{2}\left[\langle \frac{d\boldsymbol{M}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} \rangle \right]_{t_A}^{t_B}$$

$$= \frac{m}{2}(v_B^{\,2} - v_A^{\,2})$$

où v désigne la vitesse de la particule au point considéré. On a donc :

$$\frac{m}{2}(v_B^{\,2} - v_A^{\,2}) = V(A) - V(B)$$

ou encore :

$$\frac{mv_B^{\,2}}{2} + V(B) = \frac{mv_A^{\,2}}{2} + V(A)$$

C'est une formulation du principe de conservation de l'énergie, $\dfrac{mv^2}{2}$ étant l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle de la particule. L'énergie totale $\dfrac{mv^2}{2} + V$ est la même en A et en B.

IV : Formule de Green-Riemann (n = 2 dans le plan)

1- Enonce

1- Enoncé

On a ici :

D est une surface Σ du plan, domaine de dimension 2.

$\delta D = \Gamma$ est un arc fermé de classe C^1 par morceaux, sans point double, entourant le domaine $\Sigma = D$, orienté dans le sens de parcours trigonométrique, domaine de dimension 1.

$\omega = P dx + Q dy$ est une forme différentielle de degré 1. P et Q sont des fonctions de x et y de classe C^1.

$d\omega = (\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y})\, dx \wedge dy$, forme différentielle alternée de degré 2.

La formule $\displaystyle\int_{\delta D} \omega = \int_D d\omega$ s'écrit :

$$\boxed{\int_\Gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_\Sigma (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy}$$

Une démonstration dans un cas simple est donnée dans le paragraphe suivant. On retrouve le fait vu précédemment que, si ω est de la forme $\omega = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}f$, (autrement dit, $\mathrm{P} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\mathrm{Q} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$) alors $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$ si Γ est un chemin qui se referme, car on a, dans le membre de droite :

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{d'après le théorème de Schwarz.}$$

2- Démonstration

❑ Considérons le cas simple où ∑ peut s'écrire :

$$\Sigma = \{(x, y) \mid f(x) \le y \le g(x),\ a \le x \le b\}$$

pour deux fonctions f et g données. Γ est la courbe paramétrée par $(x, f(x))$, x variant de a à b, suivi de $(x, g(x))$ pour x variant de b à a. On a :

$$\iint_\Sigma \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{P}(x, g(x)) - \mathrm{P}(x, f(x))\,\mathrm{d}x$$

On reconnaît $\displaystyle\int_\Gamma - \mathrm{P}(x, y)\,\mathrm{d}x$.

On montre de même que $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma \mathrm{Q}(x, y)\,\mathrm{d}y$, en supposant que ∑ peut s'écrire :

$$\Sigma = \{(x, y) \mid \mathrm{F}(y) \le x \le \mathrm{G}(y),\ c \le y \le d\}$$

pour deux fonctions F et G données.
On obtient la formule désirée en retranchant la première égalité de la seconde.

❑ Donnons aussi une démonstration dans le cas plus général où ∑ est paramétré par :

$$(u, v) \in [0, 1]^2 \to \mathrm{M}(u, v) = (x, y)$$

avec M de classe C^2 et conservant l'orientation directe de ∑. Pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbf{R}^2$, $(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ n'est autre que $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \mathrm{d}\omega &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(\mathrm{M}(u, v)) - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(\mathrm{M}(u, v))\right) (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(\mathrm{M}(u, v)) - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(\mathrm{M}(u, v))\right) \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Nous devons donc montrer que :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_\Gamma \mathrm{Q}\,\mathrm{d}y$$

et $$- \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_\Gamma \mathrm{P}\,\mathrm{d}x$$

Montrons la première égalité. Le lecteur courageux se chargera de la deuxième. On a :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial x} \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v} \mathrm{d}u\mathrm{d}v - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

en rajoutant et retranchant $\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$, et en séparant les intégrales

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} Q(M(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v} \mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v - \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} Q(M(u, v))) \frac{\partial y}{\partial u} \mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$$

en reconnaissant dans $\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$ des dérivées partielles de la fonction composée $(u, v) \to M(u, v) \to Q(M(u, v))$.
On a utilisé le théorème de Fubini (voir L2/INTMULT.PDF) dans la dernière intégrale pour permuter l'ordre d'intégration dudv en dvdu.

$$= \int_0^1 Q(M(1, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(1, v) - Q(M(0, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(0, v) \mathrm{d}v - \int_0^1\int_0^1 Q(M(u, v)) \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$- \int_0^1 Q(M(u, 1)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, 1) - Q(M(u, 0)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, 0) \mathrm{d}u + \int_0^1\int_0^1 Q(M(u, v)) \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

en intégrant par parties $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} Q(M(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v} \mathrm{d}u$ et $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} Q(M(u, v))) \frac{\partial y}{\partial u} \mathrm{d}v$

$$= \int_0^1 Q(M(1, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(1, v) - Q(M(0, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(0, v) \mathrm{d}v$$

$$- \int_0^1 Q(M(u, 1)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, 1) - Q(M(u, 0)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, 0) \mathrm{d}u$$

les deux intégrales doubles s'éliminant car $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$

$$= \int_0^1 Q(M(u, 0)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, 0) \mathrm{d}u + \int_0^1 Q(M(1, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(1, v) \mathrm{d}v$$

$$+ \int_1^0 Q(M(u, 1)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, 1) \mathrm{d}u + \int_1^0 Q(M(0, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(0, v) \mathrm{d}v$$

et l'on reconnaîtra $\int_\Gamma Q \,\mathrm{d}y$ dans les quatre intégrales restantes, correspondant respectivement aux paramétrages des quatre côtés $u \to M(u, 0)$, u croissant de 0 à 1, $v \to M(1, v)$, v croissant de 0 à 1, $u \to M(u, 1)$, u décroissant de 1 à 0, et enfin $v \to M(0, v)$, v décroissant de 1 à 0.

3- Exemples

❑ Soit O = (0, 0), A = (1, 0) et B = $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Soit Γ formé du segment [OA], de l'arc de cercle AB de centre O, et du segment [BO]. On paramétrise [OA] par $(x, 0)$, $0 \leq x \leq 1$, AB par $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ et [BO] par (t, t), t variant de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à 0. Prenons $\omega = y^2\,dx + x^2\,dy$:

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\Gamma y^2\,dx + x^2\,dy$$

$$= \int_0^{\pi/4} -\sin^3(\theta) + \cos^3(\theta)\,d\theta - \int_0^{1/\sqrt{2}} 2t^2\,dt$$

$$= ... = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}$$

Par ailleurs :

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy = \iint_\Sigma 2x - 2y\,dxdy$$

$$= \iint_\Delta 2(\cos(\theta) - \sin(\theta))\,r^2\,drd\theta$$

en passant en polaire, avec

où $\Delta = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ et } 0 \leq r \leq 1\}$.

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} 2(\cos(\theta) - \sin(\theta))\,d\theta$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}$$

❑ En prenant $(P, Q) = (0, x)$ ou bien $(-y, 0)$ ou encore $\frac{1}{2}(-y, x)$, on a $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, et on obtient plusieurs façons de calculer l'aire d'un domaine Σ :

$$\boxed{\iint_\Sigma dxdy = \int_\Gamma x\,dy = -\int_\Gamma y\,dx = \frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx}$$

La dernière formule peut s'interpréter géométriquement comme la somme d'aires de triangles infinitésimaux de sommets $(0, 0)$, (x, y) et $(x + dx, y + dy)$, et qui balayent la surface Σ.
Par exemple, si on prend pour Σ le disque unité, et donc pour Γ le cercle trigonométrique paramétré par $t \to (\cos(t), \sin(t))$, l'intégrale de droite vaut :

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t)\,dt = \pi$$

donnant l'aire π du disque, comme attendu.
En thermodynamique, le cycle d'une machine thermique est représenté par une courbe fermée dans le système de coordonnées (V, P) au lieu de (x, y), V étant le volume du milieu et P la pression interne qui y règne. Le travail reçu est égal à l'intégrale de $-$ PdV. Il s'agit de l'aire englobée par le

cycle si le parcours se fait dans le sens trigonométrique. Pour fournir du travail, le cycle devra être parcouru dans le sens inverse au sens trigonométrique.

❑ On prendra garde au fait que la forme différentielle doit être définie sur Σ tout entier. Considérons par exemple l'exemple suivant :

$$\omega = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

avec Σ le disque unité privé de l'origine, et Γ le cercle unité. Alors :

$$Q = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Donc $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ sur Σ, donc $\iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

Mais $\int_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi \neq 0$ obtenu en paramétrant Γ par $(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Ici ω n'est pas définie en (0, 0). Cependant la formule serait valable si Γ était un arc limitant un domaine Σ ne contenant pas (0, 0). Dans ce cas, l'intégrale est nulle.

La formule de Green-Riemann possède deux extensions possibles en dimension 3, la formule de Green-Ostrogradski, et la formule de Stokes.

V : Formule de Green-Ostrogradski (n = 3 dans l'espace)

1- Enoncé

On a ici :

D est un volume V fermé borné de $\mathbf{R}^3$, domaine de dimension 3.

δD est la surface Σ limitant ce volume, domaine de dimension 2.

$\omega = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ est une forme différentielle de degré 2.

On rappelle qu'on associe à ω un champ de vecteurs X de composantes (P, Q, R), et que, pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, $\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = [X, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = \langle X, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\rangle$ (produit mixte).

La surface Σ sera orientée de façon qu'en chacun de ses points, le vecteur $\boldsymbol{N}$ unitaire normal au plan tangent soit dirigé vers l'extérieur de D. Si Σ est paramétré par :

$$(u, v) \to M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

alors $\boldsymbol{N}$ est colinéaire au produit vectoriel de $\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}$ par $\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$. Quitte à inverser les paramètres, on peut supposer que $\boldsymbol{N}$ est de même sens que ce produit vectoriel.

$\mathrm{d}\omega = \mathrm{div}(X)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ comme on l'a vu dans le II

La formule $\int_{\delta D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iiint_V \operatorname{div}(X)\, d\tau}$$

où $d\tau$ est l'élément infinitésimal de l'intégrale triple ($d\tau = dx dy dz$ en coordonnées cartésiennes, mais $d\tau = r^2\sin(\theta)\, dr d\theta d\varphi$ si le calcul se fait en coordonnées sphériques par exemple).

En effet :

$$\int_{\delta D} \omega = \iint \omega\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right) du dv = \iint \left\langle X, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right\rangle du dv$$

et $\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\, du dv$ représente un vecteur élément de surface symbolisé par $d\boldsymbol{S}$ dans la formule.

De même, si le volume est décrit par un point M = (x, y, z), on aura :

$$\begin{aligned}\int_D d\omega &= \iiint_V d\omega\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial y}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial z}\right) d\tau \\ &= \iiint_V \operatorname{div}(X) \left[\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial y}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial z}\right] d\tau \\ &= \iiint_V \operatorname{div}(X)\, d\tau\end{aligned}$$

puisqu'ici, la quantité $\left[\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x}, \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial y}, \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial z}\right]$ est le produit mixte des trois vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^3$, et ce produit vaut 1.

La formule exprime le fait que la quantité $\displaystyle\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle$, appelée **flux du champ de vecteurs** X à travers la surface fermée Σ, est égale à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume limité par la surface. La démonstration est donnée au paragraphe qui suit.

On écrit encore $\displaystyle\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iint_\Sigma \langle X, \boldsymbol{N}\rangle\, dS$ où $\boldsymbol{N}$ est le vecteur unitaire normal à la surface, dirigé vers l'extérieur. Cette formule est une généralisation à l'espace de la formule de Green-Riemann dans le plan. La formule de Green-Riemann dans le plan peut en effet s'écrire sous la forme :

$$\int_\Gamma \langle X, \boldsymbol{N}\rangle\, ds = \iint_\Sigma \operatorname{div}(X)\, dx dy$$

avec ici s l'abscisse curviligne (dans le sens trigonométrique) d'une courbe Γ fermée entourant une surface Σ, X le champ de vecteurs $\begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N}$ le vecteur normal à Γ et extérieur à Σ, égal à $\begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}$. On obtient bien :

$$\int_\Gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy$$

Revenons à la formule en dimension 3. Un cas important est celui où X est égal à un **rotationnel** d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{U}$. En effet, on a vu dans le formulaire I que, dans ce cas :

$$\mathrm{div}(X) = \mathrm{div}(\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{U})) = 0$$

Donc $\displaystyle\iiint_V \mathrm{div}(X)\,d\tau = 0$ et il en est donc de même de $\displaystyle\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle$. Le flux d'un rotationnel à travers une surface fermée est ainsi nul. On dit que le champ est à **flux conservatif**. La divergence mesure la dispersion du champ de vecteurs X.

Appelons **ligne de champ** de X une courbe telle que, en chaque point M de la courbe, la tangente en M à la courbe soit colinéaire à X(M). Appelons **tube de champ** une surface limitée d'une part par deux surfaces Σ_1 et Σ_2 telles qu'il existe une bijection $M \in \Sigma_1 \to N \in \Sigma_2$ de façon qu'il y ait une ligne de champ joignant tout M de Σ_1 au point N correspondant. Notons Σ_3 la surface latérale au tube de champ. La surface $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ se referme, donc, si X est à flux conservatif, le flux à travers Σ est nul. Mais Σ_3 étant formée de lignes de champ, en tout point de Σ_3, $d\boldsymbol{S}$ est orthogonal à X, de sorte que $\displaystyle\iint_{\Sigma_3} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iint_{\Sigma_1} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle + \iint_{\Sigma_2} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle + \iint_{\Sigma_3} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle \\ &= \iint_{\Sigma_1} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle + \iint_{\Sigma_2} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle \end{aligned}$$

donc

$$\iint_{\Sigma_1} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = -\iint_{\Sigma_2} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle$$

Dans la formule précédente, les $d\boldsymbol{S}$ sont orientés vers l'extérieur de tube limité par Σ. Si on change l'orientation des $d\boldsymbol{S}$ pour l'une des deux surfaces Σ_1 ou Σ_2, on obtient :

$$\iint_{\Sigma_1} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iint_{\Sigma_2} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle$$

Le flux est conservé à travers les surfaces transversales des tubes de champ.

2- Démonstration

On donne deux démonstrations de la formule de Green-Ostrogradski sous des hypothèses simplifiées.

<u>Démonstration 1</u> :

❑ Supposons que le volume V puisse être défini par $\{(x, y, z) \mid g(x, y) \le z \le h(x, y)\}$ pour deux fonctions données g et h. Notons $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Considérons l'intégrale triple :

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,d\tau &= \iint \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\;dxdy \\ &= \iint R(x, y, h(x, y)) - R(x, y, g(x, y))\,dxdy \end{aligned}$$

$$= \iint_{\Sigma} \mathrm{R}(x, y, z) <\boldsymbol{k}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$$

En effet, pour la partie supérieure de Σ, paramétrée par $(x, y) \to (x, y, h(x, y))$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial h}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

de façon qu'il pointe vers le haut. On a alors $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = <\boldsymbol{k}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$.
Et pour la partie inférieure de Σ, paramétrée par $(x, y) \to (x, y, g(x, y))$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

de façon qu'il pointe vers le bas. On a alors $-\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = <\boldsymbol{k}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$.
On montre de même que :

$$\iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau = \iint_{\Sigma} \mathrm{P}(x, y, z) <\boldsymbol{i}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$$

$$\iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau = \iint_{\Sigma} \mathrm{Q}(x, y, z) <\boldsymbol{j}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$$

ce qui conduit à la relation cherchée en sommant les trois égalités :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathrm{V}} \mathrm{div}(\mathrm{X})\,\mathrm{d}\tau &= \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau + \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau + \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \iint_{\Sigma} \mathrm{P} <\boldsymbol{i}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}> + \iint_{\Sigma} \mathrm{Q} <\boldsymbol{j}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}> + \iint_{\Sigma} \mathrm{R} <\boldsymbol{k}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}> \\ &= \iint_{\Sigma} <\mathrm{P}\boldsymbol{i} + \mathrm{Q}\boldsymbol{j} + \mathrm{R}\boldsymbol{k}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}> \\ &= \iint_{\Sigma} <\mathrm{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}> \end{aligned}$$

<u>Démonstration 2</u> :
❑ Voici une autre démonstration dans le cas où V est paramétré par une fonction de classe C^2 :

$$(u, v, w) \in [0, 1]^3 \to \mathrm{M}(u, v, w) = (x, y, z)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{D}} \mathrm{d}\omega &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}\omega\Big(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}\Big)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \mathrm{div}(\mathrm{X})(\mathrm{M})\,\Big[\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}\Big]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \end{aligned}$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \mathrm{Tr}(\mathrm{dX_M})\,[\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

d'après la définition (def.ii) du I de la divergence

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 [\mathrm{dX_M}(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] + [\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \mathrm{dX_M}(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] + [\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \mathrm{dX_M}(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w})]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

d'après la propriété (lin.i) du I

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 [\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{X(M)}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] + [\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\mathrm{X(M)}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] + [\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}\mathrm{X(M)}]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

en remarquant que $\mathrm{dX_M}(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u})$ est la dérivée partielle par rapport à u de la fonction composée $(u, v, w) \to \mathrm{M}(u, v, w) \to \mathrm{X}(\mathrm{M}(u, v, w))$, et de même pour les autres dérivées partielles

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u}[\mathrm{X(M)}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] - [\mathrm{X(M)}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] - [\mathrm{X(M)}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial w}]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v}[\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \mathrm{X(M)}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] - [\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v \partial u}, \mathrm{X(M)}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] - [\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \mathrm{X(M)}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v \partial w}]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial w}[\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \mathrm{X(M)}] - [\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial w \partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \mathrm{X(M)}] - [\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial w \partial v}, \mathrm{X(M)}]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

la dérivée d'un produit mixte étant la somme des dérivées portant sur chacun des trois termes du produit mixte

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u}[\mathrm{X(M)}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] + \frac{\partial}{\partial v}[\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \mathrm{X(M)}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] + \frac{\partial}{\partial w}[\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \mathrm{X(M)}]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

car tous les termes contenant une dérivée seconde s'éliminent deux à deux, par exemple $[\mathrm{X(M)}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] = [\mathrm{X(M)}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v \partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}]$ d'après le théorème de Schwarz, et c'est égal à $-[\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v \partial u}, \mathrm{X(M)}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}]$ en permutant les deux premiers vecteurs du produit mixte

$$= \int_0^1\int_0^1(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u}[\mathrm{X(M)}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}]\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}w + \int_0^1\int_0^1(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial v}[\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \mathrm{X(M)}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}]\,\mathrm{d}v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}w$$
$$+ \int_0^1\int_0^1(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial w}[\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \mathrm{X(M)}]\,\mathrm{d}w)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

en utilisant le théorème de Fubini pour changer l'ordre d'intégration

$$= \int_0^1\int_0^1 [\mathrm{X}(\mathrm{M}(1, v, w)), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] - [\mathrm{X}(\mathrm{M}(0, v, w)), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}]\,\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$
$$+ \int_0^1\int_0^1 [\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \mathrm{X}(\mathrm{M}(u, 1, w)), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] - [\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \mathrm{X}(\mathrm{M}(u, 0, w)), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}w$$
$$+ \int_0^1\int_0^1 [\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \mathrm{X}(\mathrm{M}(u, v, 1))] - [\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \mathrm{X}(\mathrm{M}(u, v, 0))]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

en intégrant chacun des trois termes de la somme

Il suffit maintenant de reconnaître dans l'écriture ci-dessus les six parties de $\iint_{\Sigma}$ <X, d$\boldsymbol{S}$>, correspondant aux morceaux de Σ paramétrés respectivement par (1, v, w), (0, v, w), (u, 1, w), (u, 0, w), (u, v, 1) et (u, v, 0). Par exemple, pour le morceau paramétré par (1, v, w), le vecteur élément de surface d$\boldsymbol{S}$ vaut $\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}$, de sorte que l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^1 [X(M(1, v, w)), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] \, dv dw = \int_0^1 \int_0^1 \langle X(M(1, v, w)), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w} \rangle \, dv dw$$

n'est autre que $\iint$ <X, d$\boldsymbol{S}$> sur ce morceau.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 - [X(M(0, v, w)), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}] \, dv dw$ doit contenir un signe – de façon que le vecteur élément de surface d$\boldsymbol{S}$ = $-\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial w}$ pointe vers l'extérieur du volume.

De même pour les autres intégrales, en observant bien quel est le vecteur élément de surface qui intervient et en vérifiant qu'il pointe bien vers l'extérieur de V.

On a donc bien finalement $\displaystyle\int_D d\omega = \int_{\delta D} \omega$.

3- Exemples

❑ Si X n'est autre que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors div(X) = 3 et la formule de Green-Ostrogradski donne :

$$\iint_{\Sigma} \langle X, d\boldsymbol{S} \rangle = 3 \iiint_V d\tau = 3V$$

Dans le cas particulier d'une boule V de centre O de rayon R et de sa sphère Σ. Pour cette dernière, <X, d$\boldsymbol{S}$> = RdS de sorte que :

$$\iint_{\Sigma} \langle X, d\boldsymbol{S} \rangle = R \iint_{\Sigma} dS = RS$$

Ainsi, l'aire de la sphère est liée au volume de la boule par la relation RS = 3V (ce qui est bien le cas puisque S = $4\pi R^2$ et V = $\dfrac{4}{3}\pi R^3$). La relation V = $\dfrac{1}{3}\displaystyle\iint_{\Sigma}$ <X, d$\boldsymbol{S}$> peut s'interpréter géométriquement par le fait que, dans le membre de droite, l'élément infinitésimal $\dfrac{1}{3}$ <X, d$\boldsymbol{S}$> dont on fait la somme est le volume d'un cône de sommet O et de base d$\boldsymbol{S}$ située en X (tiers de l'aire de la base par la longueur de la hauteur).

❑ On prendra garde au fait que, pour appliquer le théorème de Green-Ostrogradski, la forme différentielle doit être définie sur V tout entier. Soit par exemple X : M $\to \dfrac{\boldsymbol{OM}}{OM^3}$ défini sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$. On pourra vérifier que div(X) = 0 (voir la section *Exercices*). Comme ci-dessus, pour une sphère de centre O de rayon 1 :

$$\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iint_\Sigma dS = 4\pi$$

alors que $\iiint_{V\setminus\{O\}} \text{div}(X)\, d\tau \;= 0$. Mais X et div(X) ne sont pas définis en O.

❑ Soit O un point donné et X le même champ de vecteurs que ci-dessus : $M \to \dfrac{\boldsymbol{OM}}{OM^3}$. Les lignes de champ sont les demi-droites issues de O. Les tubes de champ sont les cônes issus de O. Considérons un tel cône et coupons-le par la surface Σ_1 de la sphère de centre O et de rayon 1. Orientons les éléments d$\boldsymbol{S}$ de cette sphère vers l'extérieur de celle-ci. En tout point M de la sphère, OM = 1, et X est colinéaire et de même sens que d$\boldsymbol{S}$, de sorte que le flux de X à travers Σ_1 est :

$$\iint_{\Sigma_1} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iint_{\Sigma_1} dS \qquad \text{aire de la portion de sphère coupant le cône}$$

On a vu que div(X) = 0. Soit Σ_2 une autre surface coupant le même cône et orientons les éléments d$\boldsymbol{S}$ de Σ_2 en s'éloignant de O. X étant à flux conservatif, on a :

$$\iint_{\Sigma_2} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iint_{\Sigma_1} \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iint_{\Sigma_1} dS$$

Le flux de X à travers toute surface Σ_2 coupant ledit cône est égal à l'aire de la portion de sphère de rayon 1 coupant le cône. Il s'agit de la mesure de l'**angle solide** défini par Σ_1, ou par Σ_2, ou par le cône, vu depuis O.
Pour une surface Σ égale à la totalité de la sphère, l'angle solide vaut 4π, égale à l'aire de la sphère de rayon 1.

❑ La relation $\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iiint_V \text{div}(X)\, d\tau$ est caractéristique de la divergence au sens suivant. S'il existe un champ scalaire f continu tel que, pour tout volume V limité par une surface Σ, on a $\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iiint_V f\, d\tau$, alors f = div(X). En effet, on se place en un point A et on considère la boule V de centre A et de rayon r. Quand r tend vers 0, on a, en notant M le point décrivant V :

$$\iiint_V f(M)\, d\tau = \iiint_V f(A)\, d\tau + \iiint_V (f(M) - f(A))\, d\tau$$

$$= f(A)\,\frac{4\pi r^3}{3} + o(r^3)$$

Le fait que $\iiint_V (f(M) - f(A))\, d\tau$ est un $o(r^3)$ se montre en majorant l'intégrale et en utilisant le fait que $|f(M) - f(A)|$ peut être rendu arbitrairement petit, comme on l'a fait dans le III pour l'intégrale portant sur le gradient.

On aura de même $\iiint_V \mathrm{div}(X)\,d\tau = \mathrm{div}(X)(A)\,\dfrac{4\pi r^3}{3} + o(r^3)$, et donc, puisque les deux intégrales triples sont égales à $\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle$:

$$f(A)\,\frac{4\pi r^3}{3} + o(r^3) = \mathrm{div}(X)(A)\,\frac{4\pi r^3}{3} + o(r^3)$$

En divisant par r^3 et en faisant tendre r vers 0, on a bien $f(A) = \mathrm{div}(X)(A)$.

❑ Un fluide en mouvement se définit à chaque instant t par un champ de vecteurs vitesses $\boldsymbol{v}$. Le vecteur $\boldsymbol{v}$ au point (x, y, z) est la vitesse de la particule du fluide se trouvant à cet instant t en (x, y, z). Considérons maintenant dans $\mathbb{R}^3$ un volume V limité par une surface Σ. Considérons un élément de surface $d\boldsymbol{S}$ de Σ, dirigé vers l'extérieur de V. Pendant un intervalle de temps dt, les particules de V qui traversent le petit élément de surface $d\boldsymbol{S}$ sont celles situées dans un cylindre de base $d\boldsymbol{S}$ et de génératrice $\boldsymbol{v}\,dt$. Le volume de ce cylindre est $\langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle\,dt$. Cet élément de volume est compté positivement si les particules sortent de V ($\boldsymbol{v}$ et $d\boldsymbol{S}$ sont dans le même demi-espace, et leur produit scalaire est positif) et négativement si elles y rentrent ($\boldsymbol{v}$ et $d\boldsymbol{S}$ sont dans des demi-espaces opposés, et leur produit scalaire est négatif). Si le fluide possède une densité volumique ρ (en kg/m^3), éventuellement dépendant de (x, y, z) si le fluide est compressible, alors $\rho\,\langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle\,dt$ est la masse de fluide qui sort de V (si cette quantité est négative, sa valeur absolue est la masse de fluide qui y entre) en traversant l'élément de surface $d\boldsymbol{S}$ pendant l'intervalle de temps dt. Si on somme sur toute la surface, $\iint_\Sigma \rho\,\langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle\,dt$ est la masse algébrique de fluide qui sort du volume V pendant l'intervalle de temps dt. La quantité $\iint_\Sigma \rho\,\langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle$ est la masse algébrique par unité de temps qui sort de V. Comme la masse de fluide contenue dans V est aussi $\iiint_V \rho\,d\tau$, la masse de fluide qui sort de V par unité de temps est aussi $-\dfrac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,d\tau$. On a donc la relation suivante, dite **équation de conservation,** car elle traduit la conservation de la matière et exprime qu'il ne se crée ni ne se détruit la moindre quantité de fluide, même si ce dernier se déplace ou se comprime. C'est une relation relevant de la physique et non des mathématiques car elle décrit une propriété de la matière et non une relation de calcul algébrique :

$$\iint_\Sigma \rho\,\langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,d\tau$$

Un signe – précède le second membre car si la masse de fluide qui sort est positive, alors la masse de fluide dans V décroît donc sa dérivée est négative.
Appliquons alors la formule de Green-Ostrogradski au membre de gauche :

$$\iint_\Sigma \rho\,\langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{S}\rangle = \iiint_V \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\,d\tau$$

On a donc :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,d\tau = \iiint_V \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\,d\tau$$

Cette relation étant vérifiée pour des volumes V quelconques, et la formule de Green-Ostrogradski donnant une caractérisant de la divergence comme on l'a vu précédemment, on en tire :

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v})$$

équation connue sous le nom d'**équation de continuité**, loi physique traduisant une propriété de la matière. $\rho \boldsymbol{v}$ est la **densité de courant**.

Dans le cas d'un fluide incompressible, ρ est constant. On obtient alors :

$$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = \rho\ \mathrm{div}(\boldsymbol{v})$$

donc :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = 0$$

Si l'on observe un cours d'eau au voisinage des arches d'un pont, on observe une accélération du courant, puis, à la sortie du pont, une décélération. Ce phénomène est dû à l'incompressibilité de l'eau. La divergence est nulle. Le flux du champ des vitesses est constant à travers une surface sectionnant le cours d'eau, donnant le débit, et cette surface est plus faible entre les arches du pont. La vitesse doit donc y être supérieure.

❑ Voici toute une liste d'autres situations, analogues entre elles. L'exemple précédent n'y figure pas car le champ des vitesses ne dérive pas en général d'un potentiel, et peut être doté d'un rotationnel non nul.

DENSITE DE COURANT ET CONCENTRATION D'UNE SUBSTANCE			
substance quelconque	diffusion d'un corps	courant électrique	propagation de la chaleur
(unité U)	(nbre de moles mol)	(coulomb C)	(joule J)
densité de courant de la substance ***J*** (quantité de substance traversant une surface par unité de surface et de temps) (en $U.m^{-2}.s^{-1}$)	densité de courant de diffusion ***J*** (en $mol.m^{-2}s^{-1}$)	densité de courant ***J*** (en $A.m^{-2}$ ou $C.m^{-2}.s^{-1}$)	densité de flux thermique ***J*** (en $J.m^{-2}.s^{-1}$)
quantité de substance par unité de volume *x* ($U.m^{-3}$)	concentration *c* (en $mol.m^{-3}$)	densité ρ de charges électriques (en $C.m^{-3}$)	quantité *q* de chaleur par unité de volume (le plus souvent : $q = \rho CT$ où C est la chaleur massique ou chaleur spécifique ou capacité thermique massique et ρ la masse volumique : ρ en $kg.m^{-3}$, C en $J.kg^{-1}.K^{-1}$) (en $J.m^{-3}$)
LOI DE CONTINUITE ET DE CONSERVATION DE LA SUBSTANCE			
$\iint_{\Sigma} \langle \boldsymbol{J}, d\boldsymbol{S} \rangle = \iiint_{V} -\frac{\partial x}{\partial t}\, d\tau$	$\iint_{\Sigma} \langle \boldsymbol{J}, d\boldsymbol{S} \rangle = \iiint_{V} -\frac{\partial c}{\partial t}\, d\tau$	$\iint_{\Sigma} \langle \boldsymbol{J}, d\boldsymbol{S} \rangle = \iiint_{V} -\frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau$	$\iint_{\Sigma} \langle \boldsymbol{J}, d\boldsymbol{S} \rangle = \iiint_{V} -\frac{\partial q}{\partial t}\, d\tau$
$\mathrm{div}(\boldsymbol{J}) = -\frac{\partial x}{\partial t}$	$\mathrm{div}(\boldsymbol{J}) = -\frac{\partial c}{\partial t}$	$\mathrm{div}(\boldsymbol{J}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\mathrm{div}(\boldsymbol{J}) = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\rho C \frac{\partial T}{\partial t}$
$\mathrm{div}(\boldsymbol{J}) = 0$ en régime permanent			
LOI DE DIFFUSION OU DE PROPAGATION DE LA SUBSTANCE			
potentiel P	concentration *c*	potentiel électrique V	température T
loi de propagation	loi de Fick	loi d'Ohm	loi de Fourier
$\boldsymbol{J} = -C\, \mathbf{grad}(P)$ C coeff constant	$\boldsymbol{J} = -D\, \mathbf{grad}(c)$ D coefficient de diffusion ou diffusivité ($m^2.s^{-1}$)	$\boldsymbol{J} = -\sigma\, \mathbf{grad}(V)$ σ conductivité électrique (1/σ est la résistivité) ($\Omega^{-1}.m^{-1}$)	$\boldsymbol{J} = -\lambda\, \mathbf{grad}(T)$ λ conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
$C\, \Delta P = \frac{\partial x}{\partial t}$	$D\, \Delta c = \frac{\partial c}{\partial t}$	$\sigma\, \Delta V = \frac{\partial \rho}{\partial t}$	$D\, \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$ D diffusivité thermique, $D = \lambda/C\rho$ ($m^2.s^{-1}$)
en régime permanent			
$\Delta P = 0$	$\Delta c = 0$	$\Delta V = 0$	$\Delta T = 0$

où Δ est le laplacien, égal à la divergence du gradient.

4- Formule du gradient

La formule de Green-Ostrogradski permet également de transformer des intégrales du type :

$$\iint_\Sigma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

où f est un champ scalaire (f peut par exemple désigner la température ou la pression en un point), et Σ une surface renfermant un volume V. En effet, faisons le produit scalaire par un vecteur quelconque fixe $\boldsymbol{u}$. On obtient, d'après la formule de Green-Ostrogradski :

$$\iint_\Sigma <f\boldsymbol{u}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}> = \iiint_V \mathrm{div}(f\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\tau$$

Or, pour $\boldsymbol{u}$ constant, $\mathrm{div}(f\boldsymbol{u}) = <\boldsymbol{grad}(f), \boldsymbol{u}>$ (Voir le formulaire I).

donc $$\iint_\Sigma <f\boldsymbol{u}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}> = \iiint_V <\boldsymbol{grad}(f), \boldsymbol{u}>\,\mathrm{d}\tau$$

$$\Leftrightarrow \quad <\boldsymbol{u}, \iint_\Sigma f\mathrm{d}\boldsymbol{S}> = <\boldsymbol{u}, \iiint_V \boldsymbol{grad}(f)>\,\mathrm{d}\tau$$

$\boldsymbol{u}$ étant quelconque, on a donc :

$$\boxed{\iint_\Sigma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \boldsymbol{grad}(f)\,\mathrm{d}\tau} \quad \textbf{(formule du gradient)}$$

EXEMPLE : **Le théorème d'Archimède**.

❑ Considérons un corps plongé dans un liquide dans lequel règne un gradient de pression P. Il est soumis à une force définie par :

$$\boldsymbol{F} = \iint_\Sigma -\mathrm{P}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

(Le signe – provient du fait que d$\boldsymbol{S}$ est orienté vers l'extérieur du volume, alors que la force subie par le corps est orientée vers l'intérieur). Appliquons la formule du gradient avec $f = -\mathrm{P}$. On obtient :

$$\boldsymbol{F} = \iiint_V -\boldsymbol{grad}(\mathrm{P})\,\mathrm{d}\tau$$

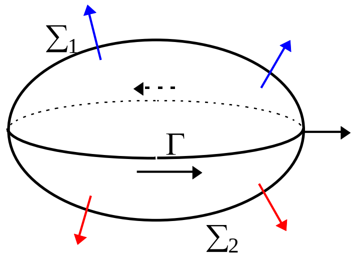
En particulier, si $\mathrm{P} = \rho g z$ (pression dans un liquide incompressible de masse volumique ρ, dans un champ gravitationnel constant g, à la profondeur z), alors $\boldsymbol{grad}(\mathrm{P}) = \rho g\,\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k}$ étant dirigé vers le bas)

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{F} = \iiint_V -\rho g\,\mathrm{d}\tau\,\boldsymbol{k} = -\mathrm{M}g\,\boldsymbol{k}$$

où $\mathrm{M} = \iiint_V \rho\,\mathrm{d}\tau$ est la masse de liquide occupant le volume V. La force d'Archimède $\boldsymbol{F}$ est la dirigée de bas en haut, égale au poids du volume de liquide déplacé.

On notera également que, si f est constante, alors $\boldsymbol{grad}(f) = 0$, donc, en particulier $\boxed{\iint_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0}$ pour toute surface Σ englobant un volume. On prendra garde qu'il s'agit ici de l'intégrale des éléments de surface vectoriels d$\boldsymbol{S}$, à distinguer de l'intégrale des éléments de surface scalaire dS donnant pour valeur de $\iint_\Sigma$ dS l'aire de la surface Σ.

Partitionnons Σ en deux parties Σ_1 et Σ_2 limitée par une même courbe orientée Γ. L'une des surfaces, par exemple Σ_1, est telle que les vecteurs d$\boldsymbol{S}$ sont orientés de **façon compatible** avec l'orientation de Γ. Cela signifie que, lorsqu'on se place en un point M de Γ, le vecteur unitaire tangent $\boldsymbol{t}$ en M à Γ dirigé selon l'orientation de Γ, le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ orthogonal à $\boldsymbol{t}$, tangent à Σ_1 et dirigé vers l'intérieur de Σ_1 et le vecteur unitaire $\boldsymbol{b}$ dirigé selon d$\boldsymbol{S}$ forme une base orthonormée **directe**. On oriente ensuite les autres vecteurs d$\boldsymbol{S}$ par continuité. De l'autre côté de Γ se trouve Σ_2 et si l'on applique le même procédé pour Σ_2, on constate que $\boldsymbol{n}$ a changé de sens (il est dirigé maintenant vers l'intérieur de Σ_2. Les vecteurs d$\boldsymbol{S}$ de Σ_2 ont donc une orientation incompatible avec celle de Γ.



Dans la figure ci-dessus, les vecteur bleus orthogonaux à Σ_1 ont une orientation compatible avec celle de Γ. Ce n'est pas le des vecteurs rouges orthogonaux à Σ_2. Changeons alors l'orientation des éléments de surface de Σ_2 pour la rendre compatible avec celle de Γ. On obtient, comme tenu du changement de signe sur Σ_2 :

$$0 = \iint_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma_1} \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

donc $$\iint_{\Sigma_1} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

On peut donc définir l'intégrale vectorielle $\boldsymbol{S} = \iint_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ d'une surface limitée par une courbe orientée Γ sans préciser de quelle surface il s'agit, seule comptant la courbe Γ. Cette situation est exploitée en magnétostatique, où l'on définit un **dipôle magnétique** comme étant une boucle Γ parcouru par un courant d'intensité I. Soit Σ une surface s'appuyant sur Γ et orientée de manière compatible par le sens du courant parcourant Γ. On définit le **moment magnétique** de cette boucle de courant comme étant le produit de l'intensité de courant I par la surface vectorielle $\boldsymbol{S}$. Il n'est pas nécessaire de préciser la façon dont est définie $\boldsymbol{S}$, ni de supposer que Γ est plane.

❑ Illustrons l'observation précédente par des exemples. Considérons la courbe Γ constituée du cercle trigonométrique dans le plan O*xy*. Prenons pour Σ_1 le disque correspondant. On a d$\boldsymbol{S}$ = dS $\boldsymbol{k}$ et $\iint_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pi\boldsymbol{k}$.

Prenons pour Σ_2 la demi-sphère dans le demi-espace $z \geq 0$, s'appuyant sur Γ, et paramétré en sphérique par $(\theta, \varphi) \to \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. On a :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sin(\theta)\, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

donc :

$$\iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin^2(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin^2(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi\sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} = \pi \boldsymbol{k}$$

On voit que l'intégrale de $\iint_{\Sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ est la même pour les deux surfaces s'appuyant sur Γ.

❑ Si Γ est une boucle de l'espace, paramétrée par une fonction $s \in [0, 1] \to \mathrm{P}(s) \in \Gamma$, avec $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)$, on peut définir $\boldsymbol{S}$ comme étant $\frac{1}{2} \int_0^1 \boldsymbol{OP}(s) \times \boldsymbol{P}'(s)\, \mathrm{d}s$, O étant quelconque, les éléments de surface élémentaires $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ étant les triangles de sommets O, $\mathrm{P}(s)$ et $\mathrm{P}(s) + \boldsymbol{P}'(s)\, \mathrm{d}s$. Il est facile de montrer que cette expression ne dépend pas de O, car si on prend un autre point Ω, alors (en omettant le facteur $\frac{1}{2}$ pour alléger le calcul) :

$$\int_0^1 \boldsymbol{OP}(s) \times \boldsymbol{P}'(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^1 \boldsymbol{O\Omega} \times \boldsymbol{P}'(s)\, \mathrm{d}s + \int_0^1 \boldsymbol{\Omega P}(s) \times \boldsymbol{P}'(s)\, \mathrm{d}s$$

$$= \boldsymbol{O\Omega} \times \int_0^1 \boldsymbol{P}'(s)\, \mathrm{d}s + \int_0^1 \boldsymbol{\Omega P}(s) \times \boldsymbol{P}'(s)\, \mathrm{d}s$$

$$= \int_0^1 \boldsymbol{\Omega P}(s) \times \boldsymbol{P}'(s)\, \mathrm{d}s$$

puisque $\int_0^1 \boldsymbol{P}'(s)\, \mathrm{d}s = \left[\mathrm{P}(s)\right]_0^1 = \mathrm{P}(1) - \mathrm{P}(0) = 0$.

5- Formule du rotationnel

De même que la formule du gradient, on montre la **formule du rotationnel**, où X est un champ de vecteurs, toujours avec une surface Σ entourant un volume V :

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \mathrm{X} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = - \iiint_{\mathrm{V}} \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})\, \mathrm{d}\tau} \quad \textbf{(formule du rotationnel)}$$

En effet, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, on a :

$$<\boldsymbol{u}, \iint_\Sigma X \times d\boldsymbol{S}> = \iint_\Sigma [\boldsymbol{u}, X, d\boldsymbol{S}] \quad \text{où } [\ ,\ ,\ ] \text{ désigne le produit mixte}$$

$$= \iint_\Sigma <\boldsymbol{u} \times X, d\boldsymbol{S}>$$

$$= \iiint_V \mathrm{div}(\boldsymbol{u} \times X)\, d\tau$$

or, pour $\boldsymbol{u}$ constant :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{u} \times X) = -<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{Rot}(X)>$$

d'après la formule $\mathrm{div}(X \times Y) = <\boldsymbol{Rot}(X),Y> - <X, \boldsymbol{Rot}(Y)>$ du formulaire I, avec ici $\boldsymbol{u}$ constant à la place de X et X à la place de Y.

Donc $$<\boldsymbol{u}, \iint_\Sigma X \times d\boldsymbol{S}> = -\iiint_V <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{Rot}(X)>\, d\tau$$

$$= -<\boldsymbol{u}, \iiint_V \boldsymbol{Rot}(X)\, d\tau>$$

Cette égalité étant vraie pour tout $\boldsymbol{u}$, on obtient le résultat désiré.

On peut montrer (voir le *théorème de Poincaré* dans une annexe du chapitre L2/CALCDIF2.PDF) qu'il y a localement équivalence pour un champ de vecteurs entre :

- être égal à un rotationnel (i.e. dériver d'un potentiel vecteur)
- être de divergence nulle
- être à flux conservatif (le flux à travers une surface fermée est nul, le flux à travers une surface ouverte ne dépend que du bord de cette surface).

C'est le cas du champ magnétique.

6- Laplacien

Pour une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2, on définit le **laplacien** Δf par :

$$\Delta f = \mathrm{div}(\boldsymbol{grad}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le laplacien intervient

- en électricité : $\Delta V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$, où ρ est la densité volumique de charge électrique, et ε_0 la permittivité du vide.
- en diffusion de la chaleur : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\, \Delta T$ où D est la diffusivité thermique du milieu

et dans d'autres phénomènes de diffusion (cf tableau du 3).

Le laplacien mesure la dispersion d'un champ dérivant d'un potentiel. Prenons l'exemple suivant. On considère une barre conductrice de chaleur, dont une extrémité est en contact avec une source chaude et l'autre extrémité avec une source froide. Il existe un gradient de température au sein de la barre. ***grad***(T) indique dans quel direction la température croît le plus vite. La chaleur va circuler dans la barre dans une direction opposée au gradient, de la température la plus forte vers la température la plus faible. En un point où le laplacien est nul, le flux de gradient entrant dans un élément de volume est égal au flux sortant. Il y a autant de chaleur qui entre que de chaleur qui sort. Si le laplacien est positif, alors le flux de gradient sortant est supérieur au flux de gradient entrant, et puisque la chaleur circule en sens opposé du gradient, la quantité de chaleur entrante est supérieure à la quantité de chaleur sortante. La température s'élève. Par une considération analogue, un laplacien négatif signifie que la température décroît. Cela permet de comprendre l'équation de la chaleur de Fourier : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\,\Delta T$ pour une certaine constante D.

Si l'on reprend la formule de Green-Ostrogradski $\displaystyle\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iiint_V \mathrm{div}(X)\,d\tau$ appliqué à $X = \boldsymbol{grad}(f)$, on obtient : $\displaystyle\iint_\Sigma \langle \boldsymbol{grad}(f), d\boldsymbol{S}\rangle = \iiint_V \Delta(f)\,d\tau$. Supposons par exemple que $\Delta(f)$ soit une constante K et appliquons la formule précédente à une sphère de rayon r. On obtient $\displaystyle\iint_\Sigma \langle \boldsymbol{grad}(f), d\boldsymbol{S}\rangle = \frac{4\pi r^3 K}{3}$. Dans cette expression, $\langle \boldsymbol{grad}(f), d\boldsymbol{S}\rangle$ est le taux radial de variation de f en un point M de Σ multiplié par un élément de surface dS, ce qu'on note aussi $\dfrac{\partial f}{\partial r}(M)\,dS$. Ainsi, $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{\partial f}{\partial r}(M)\,dS = \frac{4\pi r^3 K}{3}$. Soit Σ_0 la sphère unité et considérons l'homothétie $m \in \Sigma_0 \to M = rm \in \Sigma$. On a $dS = r^2\,d\sigma$ où $d\sigma$ est l'élément de surface de la sphère unité :

$$\iint_{\Sigma_0} \frac{\partial f}{\partial r}(rm)\,r^2\,d\sigma = \frac{4\pi r^3 K}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \iint_{\Sigma_0} \frac{\partial f}{\partial r}(rm)\,d\sigma = \frac{4\pi r K}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\iint_{\Sigma_0} f(rm)\,d\sigma = \frac{4\pi r K}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \iint_{\Sigma_0} f(rm)\,d\sigma = \frac{2\pi r^2 K}{3} + \iint_{\Sigma_0} f(0)\,d\sigma \qquad \text{en intégrant par rapport à } r$$

$$\Rightarrow \quad \iint_{\Sigma_0} f(rm)\,d\sigma = \frac{2\pi r^2 K}{3} + 4\pi f(0) \qquad \text{car l'aire de } \Sigma_0 \text{ vaut } 4\pi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\iint_{\Sigma} f(M)\,dS = \frac{2\pi r^2 K}{3} + 4\pi f(0) \qquad \text{en revenant à la sphère } \Sigma$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\Sigma} f(M)\,dS = \frac{r^2 K}{6} + f(0)$$

La quantité $\displaystyle\frac{1}{4\pi r^2}\iint_\Sigma f(M)\,dS$ n'est autre que la valeur moyenne $\overline{f}$ de f sur Σ. On a ainsi montré que :

$$\Rightarrow \quad \overline{f} - f(0) = \frac{r^2 K}{6}.$$

On notera que, si $K = \Delta f = 0$, alors $\overline{f} = f(0)$, autrement dit, la valeur de f en un point est égale à la valeur moyenne de f sur une sphère centrée en ce point. On a dans ce cas une fonction dite **harmonique**.

7- Champ de tenseurs

Un **champ de tenseurs** est une application de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $L(\mathbb{R}^3)$ ou dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En chaque point de l'espace est défini non pas un vecteur comme c'est le cas d'un champ de vecteurs, ni un scalaire comme c'est le cas d'un champ scalaire, mais une application linéaire.

Considérons par exemple deux champs de vecteurs X et Y, i.e. deux applications $A \in \mathbb{R}^3 \to X(A) \in \mathbb{R}^3$ et $A \to Y(A)$, liés entre eux par une relation linéaire $X = MY$, où M est une matrice 3×3 dépendant de A. L'application $A \to M(A)$ est un champ de tenseurs. Supposons ces applications toutes différentiables en A. On a, pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$:

$$\begin{aligned} X(A + \boldsymbol{v}) &= M(A + \boldsymbol{v})Y(A + \boldsymbol{v}) \\ &= (M(A) + dM_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v}))(Y(A) + dY_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v})) \\ &= M(A)Y(A) + dM_A(\boldsymbol{v})Y(A) + M(A)dY_A(\boldsymbol{v}) + o(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

La partie linéaire du développement est $dM_A(\boldsymbol{v})Y(A) + M(A)dY_A(\boldsymbol{v})$, de sorte que :

$$dX_A(\boldsymbol{v}) = dM_A(\boldsymbol{v})Y(A) + M(A)dY_A(\boldsymbol{v})$$

ou $\quad dX_A = dM_A\, Y(A) + M(A)dY_A$

ou $\quad dX = dM\, Y + M\, dY$

Ci-dessus:

dY_A est une application linéaire, $dY_A(\boldsymbol{v})$ un vecteur, $M(A)dY_A(\boldsymbol{v})$ un vecteur,

$Y(A)$ est un vecteur, $dM_A(\boldsymbol{v})$ une application linéaire, $dM_A(\boldsymbol{v})Y(A)$ un vecteur,

dM_A est une application linéaire qui, à un vecteur $\boldsymbol{v}$ associe l'application linéaire $dM_A(\boldsymbol{v})$. C'est un élément de $L(\mathbb{R}^3, L(\mathbb{R}^3))$. $dM_A\ Y(A)$ est l'application qui, à un vecteur $\boldsymbol{v}$, associe le vecteur $dM_A(\boldsymbol{v})\ Y(A)$. C'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Notons $(x_i)_{1\leq i\leq 3}$ les coordinnées de A, $(X_i)_{1\leq i\leq 3}$ les composantes de X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $(Y_i)_{1\leq i\leq 3}$ celles de Y, (M_{ij}) le terme général de la matrice M. Alors $X_i = \sum_{k=1}^{3} M_{ik}Y_k$. dX est l'endomorphisme dont la matrice a pour terme général $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}$ et dY est l'endomorphisme dont la matrice a pour de terme général $\dfrac{\partial Y_i}{\partial x_j}$. On a :

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_j} Y_k + \sum_{k=1}^{3} M_{ik} \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}$$

$\sum_{k=1}^{3} M_{ik} \dfrac{\partial Y_k}{\partial x_j}$ est le terme (i, j) de la matrice de M dY.

$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_j} Y_k$ est le terme (i, j) de la matrice de dM Y. Appliqué sur un vecteur $\boldsymbol{v}$ de composantes $(v_j)_{1\leq j\leq 3}$, dM($\boldsymbol{v}$)Y a pour i-ème composante $\sum_{m=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_m} Y_k\, v_m = \sum_{k=1}^{3} (\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_m} v_m) Y_k$, de sorte que le terme (i, k) de l'endomorphisme dM($\boldsymbol{v}$) est $\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_m} v_m$. M étant une matrice 3×3 dont le terme (i, k) est une fonction M_{ik}, on peut voir dM comme une matrice 3×3 dont le terme général (i, k) est la forme linéaire dM_{ik} ayant pour matrice la ligne $(\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_m})_{1\leq m\leq 3}$. On applique dM sur un vecteur $\boldsymbol{v}$ en appliquant les 3×3 formes linéaires constituant dM sur le vecteur $\boldsymbol{v}$, obtenant ainsi la matrice 3×3 dM($\boldsymbol{v}$).
En remplaçant Y par un vecteur $\boldsymbol{w}$, dM peut aussi être vu comme définissant une application bilinéaire : $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to dM(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$.

EXEMPLE :

❑ Nous avons déjà rencontré cette situation à l'occasion de l'introduction de la différentielle seconde d^2X d'un champ X. M = dX est en effet un champ de tenseurs, qui, au point A, associe l'application linéaire $M(A) = dX_A$. Nous avons défini d^2X comme l'application bilinéaire suivante :

$$d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = d(dX(\boldsymbol{w}))(\boldsymbol{v})$$

donc $$d^2X(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = d(M\boldsymbol{w})(\boldsymbol{v}) = dM(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$$

Mais d^2X est une forme bilinéaire symétique, ce que n'est pas en général la forme bilinéaire $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \to dM(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$ où M est un champ de tenseurs quelconque.

Considérons maintenant la formule de Green-Ostrogradski, en notant $\boldsymbol{N}$ le vecteur unitaire normal à l'élément de surface géométrique dS et dirigé vers l'extérieur, de sorte que $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{N}\, dS$:

$$\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iint_\Sigma \langle X, \boldsymbol{N}\rangle\, dS = \iiint_V \mathrm{div}(X)\, d\tau$$

Supposons qu'en chaque point de l'espace, soit défini un endomorphisme $\boldsymbol{T}$ et formons la quantité $\iint_\Sigma \boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})\, dS$. Pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, on a :

$$\iint_\Sigma \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})\rangle\, dS = \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{N}\rangle\, dS \qquad \text{où } \boldsymbol{T}^* \text{ est l'adjoint de } \boldsymbol{T}$$

$$= \iiint_V \mathrm{div}(\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{u}))\, d\tau$$

En un point donné, la fonction $\boldsymbol{u} \to \mathrm{div}(\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{u}))$ est une forme linéaire ψ, donc elle est égale au produit scalaire de $\boldsymbol{u}$ par un certain vecteur que nous noterons $\mathrm{div}(\boldsymbol{T}^*)$. On a alors :

$$\iint_\Sigma \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})\rangle\, dS = \iiint_V \langle \boldsymbol{u}, \mathrm{div}(\boldsymbol{T}^*)\rangle\, d\tau$$

et cette égalité étant vraie pour tout $\boldsymbol{u}$, il en résulte que :

$$\boxed{\iint_\Sigma \boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})\,\mathrm{dS} = \iiint_V \mathrm{div}(\boldsymbol{T}^*)\,\mathrm{d}\tau}$$

Calculons l'expression de div($\boldsymbol{T}^*$). Si la matrice T de $\boldsymbol{T}$ dans une base orthonormée a pour terme général t_{ij}, alors la matrice de $\boldsymbol{T}^*$ étant la transposée de T, les composantes de $\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{u})$ sont $\sum_{k=1}^{3} t_{ki}\,u_k$, $1 \leq i \leq 3$. Sa divergence vaut $\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial t_{k1}}{\partial x} + \frac{\partial t_{k2}}{\partial y} + \frac{\partial t_{k3}}{\partial z}\right) u_k = \psi(\boldsymbol{u})$, produit scalaire de $\boldsymbol{u}$ par le vecteur div($\boldsymbol{T}^*$) de composantes $\frac{\partial t_{k1}}{\partial x} + \frac{\partial t_{k2}}{\partial y} + \frac{\partial t_{k3}}{\partial z}$, $1 \leq k \leq 3$. Ainsi, le vecteur div($\boldsymbol{T}^*$) s'obtient en calculant successivement les divergences des trois lignes de la matrice de $\boldsymbol{T}$ (ou les colonnes de $\boldsymbol{T}^*$), et ces trois divergences forment les composantes du vecteur div($\boldsymbol{T}^*$) recherché.

EXEMPLES :

❑ La formule ci-dessus permet de retrouver la formule du gradient $\iint_\Sigma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \boldsymbol{grad}(f)\,\mathrm{d}\tau$ en posant $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{N}) = f\,\boldsymbol{N}$, pour laquelle $\boldsymbol{T} = f\,\boldsymbol{Id} = \boldsymbol{T}^*$ et qui est tel que div($\boldsymbol{T}^*$) = **grad**(f).

❑ On retrouve également la formule du rotationnel $\iint_\Sigma \mathrm{X} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iiint_V \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})\,\mathrm{d}\tau$, en prenant $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{N}) = \mathrm{X} \times \boldsymbol{N}$. Si X a pour composantes $\begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} \end{pmatrix}$, alors $\boldsymbol{T}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{R} & \mathrm{Q} \\ \mathrm{R} & 0 & -\mathrm{P} \\ -\mathrm{Q} & \mathrm{P} & 0 \end{pmatrix}$. div($\boldsymbol{T}^*$) est le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} \end{pmatrix}$ et l'on reconnaît bien – $\boldsymbol{Rot}$(X).

❑ On rencontre également cette formule lorsqu'un domaine est soumis à un champ de contraintes surfaciques. On suppose qu'un milieu continu de matière, situé initialement dans un domaine V limité par la surface Σ, est soumis à un champ de forces volumiques et à un champ de forces surfaciques. Le domaine peut se déformer au cours du temps, et pour éviter d'intégrer sur un domaine variable, les éléments de volume sont étiquetés par leur position dans le domaine V à un instant arbitraire choisi comme instant initial. On dit que l'on procède par référence, dans la formulation de Lagrange. Ainsi, si $\boldsymbol{F}$ est le champ de force volumique qui s'applique, $\boldsymbol{F}(x, y, z, t)$ désigne la force s'exerçant à l'instant t sur l'élément de volume situé initialement en (x, y, z). On note $\boldsymbol{p}$ le vecteur reliant l'origine à la position occupée à l'instant t par l'élément de volume considéré. A l'instant initial, $\boldsymbol{p}$ vaut simplement $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, mais ses composantes varient ensuite au cours du temps. Sa

dérivée première par rapport au temps est la vitesse de l'élément de volume considéré, et sa dérivée seconde est l'accélération $\boldsymbol{a}$ de cet élément de volume.
On suppose que la force s'exerçant à l'instant t sur un élément de surface est de la forme $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})$ dS, où dS est l'aire élémentaire de l'élément dans sa position initiale, $\boldsymbol{N}$ étant le vecteur normal à cet élément et extérieur à V, $\boldsymbol{T}$ un champ de tenseurs linéaires, dépendant de la position et du temps. Nous allons montrer que $\boldsymbol{T}$ est nécessairement un opérateur symétrique et nous nous bornerons à effectuer les calculs à l'instant initial choisi. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})\,\mathrm{dS} + \iiint_V \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\tau = \iiint_V \rho\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\tau$$

où ρ est la masse volumique de l'élément de volume considéré dans sa position initiale. Compte tenu de la formule $\iint_\Sigma \boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})\,\mathrm{dS} = \iiint_V \mathrm{div}(\boldsymbol{T}^*)\,\mathrm{d}\tau$, ce principe se traduit par :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{T}^*) + \boldsymbol{F} = \rho\boldsymbol{a}$$

Si on calcule maintenant le moment des forces par rapport à l'origine, le théorème du moment cinétique donne :

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})\,\mathrm{dS} + \iiint_V \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\tau = \iiint_V \boldsymbol{p}\times\rho\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\tau$$

L'application $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})$ est une application linéaire donc on peut lui appliquer la formule précédente : $\iint_\Sigma \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T}(\boldsymbol{N})\,\mathrm{dS} = \iiint_V \mathrm{div}((\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})^*)\,\mathrm{d}\tau$. Il en résulte que :

$$\iiint_V \mathrm{div}((\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})^*)\,\mathrm{d}\tau + \iiint_V \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\tau = \iiint_V \boldsymbol{p}\wedge\rho\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\tau$$

et comme le volume V peut être pris quelconque, le théorème du moment cinétique s'exprime aussi sous la forme :

$$\mathrm{div}((\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})^*) + \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{p}\times\rho\boldsymbol{a}$$

Comme on avait $\mathrm{div}(\boldsymbol{T}^*) + \boldsymbol{F} = \rho\boldsymbol{a}$, on a également :

$$\boldsymbol{p}\times\mathrm{div}(\boldsymbol{T}^*) + \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{p}\times\rho\boldsymbol{a}$$

Les deux équations sont compatibles si et seulement si $\mathrm{div}((\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})^*) = \boldsymbol{p}\times\mathrm{div}(\boldsymbol{T}^*)$. Voyons à quoi correspond cette condition en calculant explicitement $\mathrm{div}((\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})^*)$. A l'instant initial pour lequel $\boldsymbol{p}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on vérifiera que l'application $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$ a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} yt_{31} - zt_{21} & yt_{32} - zt_{22} & yt_{33} - zt_{23} \\ zt_{11} - xt_{31} & zt_{12} - xt_{32} & zt_{13} - xt_{33} \\ xt_{21} - yt_{11} & xt_{22} - yt_{12} & xt_{23} - yt_{13} \end{pmatrix}$$

où les t_{ij} sont les termes de la matrice de $\boldsymbol{T}$.
Si on note $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$ et $\boldsymbol{L}_3$ les lignes de $\boldsymbol{T}$, la divergence $\mathrm{div}((\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})^*)$ cherchée est le vecteur ayant pour composantes les divergences des lignes de la matrice précédente, ce qui donne :

$$\mathrm{div}((\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{T})^*) = \begin{pmatrix} t_{32} - t_{23} + y\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_3) - \mathrm{z}\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_2) \\ t_{13} - t_{31} + \mathrm{z}\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_1) - x\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_3) \\ t_{21} - t_{12} + x\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_2) - y\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_1) \end{pmatrix}$$

On reconnaît dans $\begin{pmatrix} y\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_3) - \mathrm{z}\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_2) \\ \mathrm{z}\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_1) - x\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_3) \\ x\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_2) - y\mathrm{div}(\boldsymbol{L}_1) \end{pmatrix}$ la quantité $\boldsymbol{p}\wedge\mathrm{div}(\boldsymbol{T}^*)$.

Par conséquent, on a div(($\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{T}$)*) = $\boldsymbol{p} \times$ div($\boldsymbol{T}$*) si et seulement si $\begin{pmatrix} t_{32}-t_{23} \\ t_{13}-t_{31} \\ t_{21}-t_{12} \end{pmatrix}$ = 0, ce qui exprime le fait que la matrice de $\boldsymbol{T}$ est symétrique. Ainsi, le tenseur de contraintes est-il nécessairement symétrique si on veut que les lois de la mécanique soient respectées.

VI : Théorème de Stokes (n=2 dans l'espace)

1- Enoncé

On a ici :

D est une surface Σ de $\mathbb{R}^3$, non fermée et limitée par

δD, son bord, qui est une courbe Γ à laquelle on donne une orientation compatible avec celle de Σ, comme décrit dans le paragraphe V-4) précédent, relatif au théorème d'Archimède.

$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ = <X, .> où X est le champ de vecteurs $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$

$\mathrm{d}\omega(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{Rot}(X), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, comme on l'a vu dans le II

La formule $\displaystyle\int_{\delta D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega$ s'écrit ici sous la forme :

$$\boxed{\int_\Gamma \langle X, \mathrm{d}\boldsymbol{M}\rangle = \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{Rot}(X), \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle}$$

conformément au sens à donner à l'intégrale d'une forme différentielle de degré 1 ou de degré 2 et que nous avons déjà rencontré précédemment.

L'intégrale $\displaystyle\int_\Gamma \langle X, \mathrm{d}\boldsymbol{M}\rangle$ s'appelle **circulation** de X le long de Γ. La formule exprime le fait que cette circulation est égal au flux du rotationnel de X à travers toute surface Σ limitée par le contour Γ.

Cette formule est une généralisation à $\mathbb{R}^3$ de la formule de Green-Riemann dans le plan. On retrouve en effet cette dernière dans le cas d'une surface plane Σ contenue dans le plan (Oxy) en rajoutant une troisième dimension au plan et en considérant le champ de vecteurs X = $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $\boldsymbol{Rot}(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \boldsymbol{k}$. La formule de Stokes redonne exactement la formule de Green-Riemann.

Revenons au cas général. Si X dérive d'un potentiel scalaire f, l'égalité ci-dessus se réduit à 0 = 0, car on a $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{grad}(f)) = 0$ (Voir le formulaire I). On retrouve le fait que la circulation d'un gradient le long d'une courbe fermée est nulle.

Le rotationnel peut s'interpréter physiquement dans le cas d'un champ de vitesses comme le vecteur rotation d'un élément infiniment petit placé dans ce champ. On prendra par exemple le champ de vitesse $\boldsymbol{V} = y\boldsymbol{i}$ dont le rotationnel vaut $-\boldsymbol{k}$, pour se convaincre qu'une particule sera effectivement soumise à une rotation d'axe $-\boldsymbol{k}$.

On peut montrer (voir *Théorème de Poincaré* dans un annexe du chapitre L2/CALCDIF2.PDF) qu'il y a localement équivalence pour un champ de vecteurs entre :

- dériver d'un potentiel scalaire (i.e. être égal à un gradient)
- être de rotationnel nul
- être à circulation conservative (la circulation sur un circuit fermé est nulle, la circulation sur un circuit ouvert ne dépend que des extrémités)

2- Démonstration

❑ On suppose que Σ est donné par le paramétrage $(u, v) \in [0, 1]^2 \to \mathrm{M}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ de classe C^2. On a :

$$\iint_\Sigma \langle \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}), \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle = \int_0^1\int_0^1 \langle \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \langle \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}) \times \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \langle (\mathrm{dX} - \mathrm{dX}^*)(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

d'après la (def.iii) du rotationnel vue en I

$$= \int_0^1\int_0^1 \langle \mathrm{dX}(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v - \int_0^1\int_0^1 \langle \mathrm{dX}^*(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \langle \mathrm{dX}(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v - \int_0^1\int_0^1 \langle \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \mathrm{dX}(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v})\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

d'après la définition de l'adjoint

$$= \int_0^1\int_0^1 \langle \frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{X}(\mathrm{M})), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v - \int_0^1\int_0^1 \langle \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{X}(\mathrm{M}))\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

d'après l'expression des dérivées partielles de la fonction composée $(u, v) \to \mathrm{M}(u, v) \to \mathrm{X}(\mathrm{M}(u, v))$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathrm{X}(\mathrm{M}), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle - \langle \mathrm{X}(\mathrm{M}), \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v}\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$- \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} \langle \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \mathrm{X}(\mathrm{M})\rangle - \langle \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v \partial u}, \mathrm{X}(\mathrm{M})\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathrm{X}(\mathrm{M}), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v - \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} \langle \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, \mathrm{X}(\mathrm{M})\rangle \,\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

car $\langle \mathrm{X}(\mathrm{M}), \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u \partial v}\rangle = \langle \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v \partial u}, \mathrm{X}(\mathrm{M})\rangle$

$$= \int_0^1 \langle X(M(1, v)), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle - \langle X(M(0, v)), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle \, dv$$

$$- \int_0^1 \langle\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, X(M(u, 1))\rangle - \langle\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, X(M(u, 0))\rangle \, du$$

$$= \int_0^1 \langle\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, X(M(u, 0))\rangle + \int_0^1 \langle X(M(1, v)), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle$$

$$+ \int_1^0 \langle\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}, X(M(u, 1))\rangle \, du + \int_1^0 \langle X(M(0, v)), \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\rangle \, dv$$

et on reconnaîtra dans les quatre intégrales celles intervenant dans le calcul de $\int_\Gamma \langle X, d\boldsymbol{M}\rangle$ respectivement pour les quatre morceaux de Γ paramétrés par $u \to M(u, 0)$, u croissant de 0 à 1, $v \to M(1, v)$, v croissant de 0 à 1, $u \to M(u, 1)$, u décroissant de 1 à 0 et $v \to M(0, v)$, v décroissant de 1 à 0.

3- Exemples

❑ Considérons une boucle de courant parcourue par un courant I, plongé dans un champ magnétique uniforme. Chaque élément d$\boldsymbol{M}$ de la boucle est soumise à la force de Laplace $d\boldsymbol{F} = Id\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B}$. La boucle tout entière est soumise à une force que l'on calcule en prenant l'intégrale de l'expression précédente. Si $\boldsymbol{B}$ est constant, cette intégrale est nulle puisqu'on intègre alors d$\boldsymbol{M}$ sur un circuit fermé. Par contre, le moment de cette force par rapport à un point O est :

$$\boldsymbol{C} = \int_\Gamma \boldsymbol{OM} \times d\boldsymbol{F} = \int_\Gamma \boldsymbol{OM} \times (Id\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B})$$

$$= \int_\Gamma \langle\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}\rangle \, Id\boldsymbol{M} - \int_\Gamma \langle\boldsymbol{OM}, Id\boldsymbol{M}\rangle \, \boldsymbol{B}$$

en utilisant la formule du double produit vectoriel

$\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle \, \boldsymbol{v} - \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \, \boldsymbol{w}$

$$= I\int_\Gamma \langle\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}\rangle \, d\boldsymbol{M} - \underbrace{I\int_\Gamma \langle\boldsymbol{OM}, d\boldsymbol{M}\rangle \, \boldsymbol{B}}$$

= 0 car $\langle\boldsymbol{OM}, d\boldsymbol{M}\rangle$ est la différentielle exacte de $\frac{1}{2}\boldsymbol{OM}^2$, qu'on intègre sur un chemin fermé

donc $\boldsymbol{C} = I\int_\Gamma \langle\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}\rangle \, d\boldsymbol{M}$

Si l'on cherche sa composante de $\boldsymbol{C}$ selon un vecteur normé $\boldsymbol{u}$, on obtient :

$$\langle\boldsymbol{C}, \boldsymbol{u}\rangle = I\int_\Gamma \langle\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}\rangle \, \langle\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{OM}\rangle$$

$$= I\iint_\Sigma \langle\boldsymbol{Rot}(\langle\boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}\rangle \, \boldsymbol{u}), d\boldsymbol{S}\rangle \text{ en vertu du théorème de Stokes.}$$

Or, pour $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{B}$ constants, on a :

$\boldsymbol{Rot}(\langle \boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}\rangle\, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{grad}(\langle \boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}\rangle) \times \boldsymbol{u}$

d'après la formule $\boldsymbol{Rot}(f\mathrm{X}) = \boldsymbol{grad}(f) \times \mathrm{X} + f\, \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})$ du formulaire I, avec ici $\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}) = 0$ car $\mathrm{X} = \boldsymbol{u}$ est constant

$= \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{u}$

car $\boldsymbol{grad}(\langle \boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B}\rangle) = \boldsymbol{B}$, obtenu par calcul direct, ou bien en utilisant la formule $\boldsymbol{grad}(\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle) = \mathrm{dX}^*(\mathrm{Y}) + \mathrm{dY}^*(\mathrm{X})$ du formulaire I, avec ici $\mathrm{X} = \boldsymbol{OM}$ de différentielle $\mathrm{dX} = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Y} = \boldsymbol{B}$ constant

donc $\quad \langle \boldsymbol{C}, \boldsymbol{u}\rangle = \mathrm{I} \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{u}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle = \mathrm{I} \iint_\Sigma [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{u}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}] = \mathrm{I} \iint_\Sigma \langle \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B}, \boldsymbol{u}\rangle$

Cette relation étant vraie pour tout $\boldsymbol{u}$, on a :

$$\boldsymbol{C} = \iint_\Sigma \mathrm{I}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}.$$

en posant $\boldsymbol{\mu} = \iint_\Sigma \mathrm{I}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, vecteur appelé **moment magnétique** de la boucle. Le moment étant indépendant de O, il s'agit d'un couple qui s'exerce sur la boucle. La formule est analogue au couple appliqué sur un dipôle électrique de moment électrique $\boldsymbol{p}$ dans un champ électrique $\boldsymbol{E}$. Cette analogie justifie le vocabulaire de **dipôle magnétique** pour une boucle de courant parcourue par un courant I.

❑ La relation $\int_\Gamma \langle \mathrm{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}\rangle = \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X}), \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle$ est caractéristique du rotationnel au sens suivant. S'il existe un champ de vecteurs Y continu tel que, pour toute surface Σ limité par une courbe Γ, on a $\int_\Gamma \langle \mathrm{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}\rangle = \iint_\Sigma \langle \mathrm{Y}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle$, alors $\mathrm{Y} = \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})$. En effet, on se place en un point A et on considère un disque Σ de centre A et de rayon r. Γ est le cercle qui le limite. Soit $\boldsymbol{N}$ le vecteur unitaire orthogonal au plan de Σ et colinéaire aux éléments $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$. Quand r tend vers 0, on a, en notant M le point décrivant Σ :

$$\iint_\Sigma \langle \mathrm{Y}(\mathrm{M}), \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle = \iint_\Sigma \langle \mathrm{Y}(\mathrm{A}), \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle + \iint_\Sigma \langle \mathrm{Y}(\mathrm{M}) - \mathrm{Y}(\mathrm{A}), \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle$$
$$= \langle \mathrm{Y}(\mathrm{A}), \pi r^2 \boldsymbol{N}\rangle + o(r^2)$$

Le fait que $\iint_\Sigma \langle \mathrm{Y}(\mathrm{M}) - \mathrm{Y}(\mathrm{A}), \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle$ est un $o(r^2)$ se montre en majorant l'intégrale et en utilisant le fait que $\|\, \mathrm{Y}(\mathrm{M}) - \mathrm{Y}(\mathrm{A}) \,\|$ peut être rendu arbitrairement petit, comme on l'a fait dans le III pour l'intégrale portant sur le gradient.

On aura de même $\iint_\Sigma \langle \boldsymbol{Rot}(\mathrm{M}), \mathrm{d}\boldsymbol{S}\rangle = \langle \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})(\mathrm{A}), \pi r^2 \boldsymbol{N}\rangle + o(r^2)$, et donc, puisque les deux intégrales doubles sont égales à $\int_\Gamma \langle \mathrm{X}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}\rangle$:

$$\langle \mathrm{Y}(\mathrm{A}), \pi r^2 \boldsymbol{N}\rangle + o(r^2) = \langle \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})(\mathrm{A}), \pi r^2 \boldsymbol{N}\rangle + o(r^2)$$

En divisant par r^2 et en faisant tendre r vers 0, on a $\langle \mathrm{Y}(\mathrm{A}), \boldsymbol{N}\rangle = \langle \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})(\mathrm{A}), \boldsymbol{N}\rangle$. Ceci étant vrai pour tout vecteur $\boldsymbol{N}$ en faisant varier le plan du disque passant par A, on a $\mathrm{Y}(\mathrm{A}) = \boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})(\mathrm{A})$.

4- Formule de Kelvin

Dans l'exemple précédent, nous aurions pu utiliser la formule suivante :

$$\boxed{\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{M} = -\iint_\Sigma \boldsymbol{grad}(f) \times \mathrm{d}\boldsymbol{S}} \quad \textbf{(formule de Kelvin)}$$

avec $f = \langle \boldsymbol{OM}, \boldsymbol{B} \rangle$. Cette relation se montre comme ci-dessus. Pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, on a :

$$\langle \boldsymbol{u}, \int_\Gamma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{M} \rangle = \int_\Gamma \langle f\boldsymbol{u}, \mathrm{d}\boldsymbol{M} \rangle$$

$$= \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{Rot}(f\boldsymbol{u}), \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle$$

d'après le théorème de Stokes

$$= \iint_\Sigma \langle (\boldsymbol{grad}(f) \times \boldsymbol{u}), \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle$$

car $\boldsymbol{Rot}(f\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{grad}(f) \wedge \boldsymbol{u}$ comme on vient de le voir

$$= \iint_\Sigma [\boldsymbol{grad}(f), \boldsymbol{u}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}]$$

$$= -\iint_\Sigma [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{grad}(f), \mathrm{d}\boldsymbol{S}]$$

$$= -\langle \boldsymbol{u}, \iint_\Sigma \boldsymbol{grad}(f) \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle$$

d'où le résultat, l'égalité étant vraie pour tout $\boldsymbol{u}$.

5- Autre formule

On dispose également d'une formule concernant $\int_\Gamma X \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{M}$, où X est un champ de vecteurs. En effet, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, on a :

$$\int_\Gamma \langle \boldsymbol{u}, X \times \mathrm{d}\boldsymbol{M} \rangle = \int_\Gamma \langle \boldsymbol{u} \times X, \mathrm{d}\boldsymbol{M} \rangle$$

$$= \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{u} \times X), \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle \qquad \text{d'après le théorème de Stokes}$$

Or, $\boldsymbol{u}$ étant fixe, $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{u} \times X) = \mathrm{div}(X)\boldsymbol{u} - \mathrm{d}X(\boldsymbol{u})$. On utilise pour cela la formule $\boldsymbol{Rot}(X \times Y) = (\mathrm{d}X(Y) - \mathrm{div}(X)Y) - (\mathrm{d}Y(X) - \mathrm{div}(Y)X)$ du formulaire I, avec ici $\boldsymbol{u}$ au lieu de X et X au lieu de Y.

$$\Rightarrow \quad \int_\Gamma \langle \boldsymbol{u}, X \times \mathrm{d}\boldsymbol{M} \rangle = \iint_\Sigma \langle \mathrm{div}(X)\,\boldsymbol{u} - \mathrm{d}X(\boldsymbol{u}), \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle$$

Or :

$$\langle \mathrm{d}X(\boldsymbol{u}), \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mathrm{d}X^*(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) \rangle$$

d'après la définition de l'adjoint

$$= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{grad}(\langle X, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle) \rangle$$

en convenant que les dérivées partielles du gradient n'interviennent que sur X. Pour le voir, on utilise la formule

$\boldsymbol{grad}(<X, Y>) = dX^*(Y) + dY^*(X)$ du formulaire I,
avec ici $Y = d\boldsymbol{S}$ pour lequel on convient que $dY = 0$

Donc $\displaystyle\int_\Gamma <\boldsymbol{u}, X \times d\boldsymbol{M}> = \iint_\Sigma \mathrm{div}(X) <\boldsymbol{u}, d\boldsymbol{S}> - \iint_\Sigma <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{grad}(<X, d\boldsymbol{S}>)$

$\boldsymbol{u}$ étant quelconque, on a donc :

$$\boxed{\int_\Gamma X \times d\boldsymbol{M} = \iint_\Sigma \mathrm{div}(X)\, d\boldsymbol{S} - \iint_\Sigma \boldsymbol{grad}(<X, d\boldsymbol{S}>)}$$

EXEMPLES :

❑ O étant un point donné, si on prend $X = \boldsymbol{OM}$ lui-même, alors $\mathrm{div}(X) = 3$ et $\boldsymbol{grad}(<X, d\boldsymbol{S}>)$ n'est autre que $d\boldsymbol{S}$ lui-même. Cela donne alors :

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma \boldsymbol{OM} \times d\boldsymbol{M} = \iint_\Sigma d\boldsymbol{S}$$

$\dfrac{1}{2}\, \boldsymbol{OM} \times d\boldsymbol{M}$ est l'aire vectorielle du petit triangle de sommets O, M et M + $d\boldsymbol{M}$. Le vecteur aire est orthogonal au plan du triangle. Quand M varie, ces petits triangles engendrent une surface Σ_0 s'appuyant sur Γ et on en calcule l'aire vectorielle $\displaystyle\iint_{\Sigma_0} d\boldsymbol{S}$. Cette aire est égale à n'importe quelle autre aire vectorielle $\displaystyle\iint_\Sigma d\boldsymbol{S}$ définie par une surface Σ s'appuyant sur Γ.

❑ Considérons une petite boucle Γ orientée, parcouru par un courant I. Quel est le champ magnétique $\boldsymbol{B}(N)$ produit par cette boucle de courant en un point N situé à grande distance ? La loi de Biot-Savart (que nous déduirons plus bas des équations de Maxwell) énonce que :

$$\boldsymbol{B}(N) = \int_\Gamma \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\, d\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{u}$$

où $d\boldsymbol{M}$ est l'élément infinitésimal d'intégration le long de Γ, r la distance entre le point M parcourant Γ et le point N, et $\boldsymbol{u}$ le vecteur unitaire dirigé depuis le point M vers le point N. Cette intégrale entre dans le cadre de l'étude précédente avec $X(M) = -\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\,\boldsymbol{u} = -\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{MN}}{MN^3}$. On vérifiera que la divergence du champ de vecteurs $M \to X(M)$ est nulle (voir la partie *Exercices*). Il reste donc :

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\iint_\Sigma \boldsymbol{grad}_M(<\frac{\boldsymbol{MN}}{MN^3}, d\boldsymbol{S}>) \qquad \text{où } \Sigma \text{ est une surface s'appuyant sur } \Gamma$$

où on indique par un indice qu'on calcule le gradient en un point M parcourant Σ.

Or, on vérifiera que, pour tout $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{grad}_M(<\dfrac{\boldsymbol{MN}}{MN^3}, \boldsymbol{v}>) = \dfrac{3<\boldsymbol{MN}, \boldsymbol{v}>}{r^5}\,\boldsymbol{MN} - \dfrac{\boldsymbol{v}}{r^3}$ (voir la partie *Exercices*).

Si la boucle de courant est petite devant la distance qui la sépare de N, alors r, $\boldsymbol{MN}$, et donc ce gradient, sont quasiment les mêmes pour tous les points M de Σ. L'opérateur $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{grad}_M(<\dfrac{\boldsymbol{MN}}{MN^3}, \boldsymbol{v}>)$ est alors un opérateur G linéaire en $\boldsymbol{v}$ et considéré comme indépendant de M. Sous cette approximation, on peut écrire :

$$\boldsymbol{B}(\mathrm{N}) \approx \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi} \iint_\Sigma \mathrm{G}(\mathrm{d}\boldsymbol{S})$$

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi} \mathrm{G}(\iint_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{S}) \qquad \text{par linéarité de G}$$

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi} \boldsymbol{grad}_\mathrm{M}(<\frac{\boldsymbol{u}}{r^2}, \iint_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{S}>)$$

$$= \boldsymbol{grad}_\mathrm{M}(\frac{\mu_0}{4\pi r^2} <\boldsymbol{u}, \iint_\Sigma \mathrm{I}\mathrm{d}\boldsymbol{S}>)$$

$$= \boldsymbol{grad}_\mathrm{M}(\frac{\mu_0}{4\pi r^2} <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\mu}>)$$

avec $\boldsymbol{\mu} = \iint_\Sigma \mathrm{I}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, moment magnétique de la boucle. La quantité algébrique $\Omega = \frac{1}{r^2} <\boldsymbol{u}, \iint_\Sigma \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$ vaut approximativement $\iint_\Sigma <\frac{\boldsymbol{u}}{r^2}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$, et sa valeur absolue est l'angle solide sous lequel on voit la boucle Γ depuis N (son signe dépend du sens de parcours du courant qui détermine l'orientation des éléments d$\boldsymbol{S}$). Si on pose $\mathrm{V} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\mu}> = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi} \Omega$, on a :

$$\boldsymbol{B}(\mathrm{N}) = \boldsymbol{grad}_\mathrm{M}(\mathrm{V})$$

Or V est une fonction des coordonnées ($x_\mathrm{M} - x_\mathrm{N}$, $y_\mathrm{M} - y_\mathrm{N}$, $z_\mathrm{M} - z_\mathrm{N}$). Il vaut mieux considérer que V est un potentiel fonction de N, de sorte que $\boldsymbol{grad}_\mathrm{M}(\mathrm{V}) = -\boldsymbol{grad}_\mathrm{N}(\mathrm{V})$. Ainsi :

$$\mathrm{V}(\mathrm{N}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\mu}> \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B}(\mathrm{N}) = -\boldsymbol{grad}_\mathrm{N}(\mathrm{V})$$

Ces formules sont remarquablement semblables à celles concernant un dipôle électrique créant un champ $\boldsymbol{E}$ en un point N situé à grande distance. On a en effet dans ce cas :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}> \text{ où } \boldsymbol{p} \text{ est le moment électrique du dipôle, et } \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{grad}_\mathrm{N}(\mathrm{V})$$

VII : Les équations de Maxwell :

Il est remarquable que toutes les lois de l'électromagnétisme se réduisent à quatre équations, les équations de Maxwell, que nous prendrons mathématiquement comme des axiomes. ***E*** est le champ électrique. ***B*** est le champ magnétique. lls dépendent du point de l'espace où on les mesure et de l'instant *t* de cette mesure.
On énonce ces quatre équations et on démontre les conséquences mathématiques de ces équations.

1- Divergence du champ électrique

$$\boxed{\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \text{ (Maxwell.i)}$$

où ρ est la densité volumique de charges électriques.

PROPOSITION

(i) *Soit un volume* Vol *limité par une surface* Σ *et contenant une charge électrique* Q. *Le flux du champ électrique* $\boldsymbol{E}$ *à travers* Σ *est égal à* $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ (**théorème de Gauss**).

(ii) *Si* Vol *est une boule dont la charge électrique possède une symétrie sphérique, le champ* $\boldsymbol{E}$ *créé par* Vol *à une distance r supérieur au rayon de la sphère a une intensité* $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (**loi de Coulomb**).

(iii) *En électrostatique, une densité de charge* ρ *répartie dans un volume* Vol *crée en un point* N *un champ électrique* $\boldsymbol{E}$ *dérivant d'un potentiel électrique* $V(N) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{Vol} \dfrac{\rho}{r}\, d\tau$, *où r est la distance entre le point* M *parcourant le volume et le point* N *où l'on calcule le potentiel* V.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : On applique le théorème de Green-Ostrogradski. Le flux du champ électrique sortant de Σ vaut :

$$\iint_{\Sigma} <\boldsymbol{E}, d\boldsymbol{S}> = \iiint_{Vol} \mathrm{div}(\boldsymbol{E})\, d\tau$$

$$= \iiint_{Vol} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau \qquad \text{d'après (Maxwell.i)}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{Vol} \rho\, d\tau$$

La quantité $\iiint_{Vol} \rho\, d\tau$ n'est autre que la charge Q contenue dans Vol. On a donc :

$$\iint_{\Sigma} <\boldsymbol{E}, d\boldsymbol{S}> = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

❑ (ii) : On applique (i) sur une sphère S de rayon *r* supérieur ou égal au rayon de la boule Vol, de façon que la charge Q soit identique pour S et pour Σ. En raison de la symétrie sphérique de la charge électrique, $\boldsymbol{E}$ est radial et a même module E(*r*) en tout point de la surface de la sphère S. On a donc :

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \iint_{S} <\boldsymbol{E}, d\boldsymbol{S}> = \iint_{S} E\, dS = E(r) \iint_{S} dS = 4\pi r^2 E(r)$$

donc $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Ce champ dérive du potentiel V (i.e. $\boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{grad}(V)$) avec $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (voir au besoin l'expression du gradient en coordonnées sphériques dans le paragraphe *Repères* de ce chapitre).

C'est le cas en particulier si les charges sont concentrées au centre de la sphère, ce qui donne la valeur du champ électrique créé par une charge Q à une distance *r* de la charge.

❑ (iii) : D'après (ii), le potentiel créé en N par une petite charge $q = \rho\, d\tau$ situé en un point M vaut $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 r} d\tau$, avec r = MN. On somme ces potentiels infinitésimaux sur tout le volume considéré. Cela repose sur l'hypothèse que les champs électriques (et donc aussi les potentiels) s'ajoutent, sans interférence entre eux.

On notera que ces égalités s'appliquent à tout champ newtonien en $\frac{1}{r^2}$, par exemple le champ gravitationnel $\boldsymbol{g}$ engendré par une densité de masse μ, pour lequel $\text{div}(\boldsymbol{g}) = -4\pi G\mu$ (G constante de l'attraction universelle). Le théorème de Gauss appliquée à une sphère de rayon r pour une masse ponctuelle M située au centre de la sphère donne $4\pi r^2 g = -4\pi GM$, ou encore $g = -\frac{GM}{r^2}$.

2- Divergence du champ magnétique

$$\boxed{\text{div}(\boldsymbol{B}) = 0} \quad \text{(Maxwell.ii)}$$

Cette équation est équivalente, en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, au fait que le flux du champ magnétique traversant une surface fermée est nul. Le champ magnétique est à flux conservatif. Cela exclut en particulier l'existence de monopôles magnétiques.
Du fait que la divergence d'un rotationnel est nulle, on est amené à rechercher $\boldsymbol{B}$ sous la forme $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{A})$, ce qui est garanti, au moins localement ou sur un ouvert étoilé (voir le *Théorème de Poincaré* dans le chapitre L2/CALCDIF2.PDF). $\boldsymbol{A}$ est le **potentiel-vecteur** de $\boldsymbol{B}$.

3- Rotationnel du champ électrique

$$\boxed{\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}} \quad \text{(Maxwell.iii)}$$

Cette relation s'écrit au moins localement sous la forme $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{grad}(V) - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ où V est le potentiel électrique de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{A}$ le potentiel-vecteur du champ $\boldsymbol{B}$. En effet, l'équation (Maxwell.iii) implique que $\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ est de rotationnel nul, donc dérive (au moins localement) d'un gradient (voir le *Théorème de Poincaré* dans le chapitre L2/CALCDIF2.PDF).

PROPOSITION

(i) *Soit une boucle* Γ *conductrice, placée dans un champ magnétique* $\boldsymbol{B}$ *variable au cours du temps. Alors les électrons de la boucle sont soumis à une force électromotrice égale à* $-\frac{d\Phi}{dt}$, *où* Φ *est le flux de* $\boldsymbol{B}$ *à travers toute surface s'appuyant sur la boucle* (**Loi de Faraday**).

(ii) *Si* $\boldsymbol{B}$ *est nul,le potentiel* V *d'un champ électrique vérifie* $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$.

Démonstration :
❑ (i) : L'équation (Maxwell.iii) implique qu'il existe nécessairement un champ électrique $\boldsymbol{E}$ si $\boldsymbol{B}$ est variable au cours du temps. Les électrons de charge q de la boucle sont soumis à la force $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$. Notons Σ une surface s'appuyant sur la boucle Γ. Le travail de cette force le long de la boucle Γ vaut :

$$W = \int_\Gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{M} \rangle = \int_\Gamma \langle q\boldsymbol{E}, d\boldsymbol{M} \rangle$$

$= q \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E}), \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle$ d'après le théorème de Stokes

$= - q \iint_\Sigma \langle \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle$ d'après (Maxwell.iii)

$= - q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{B}, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle$

$= - q \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ car $\Phi = \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{B}, \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rangle$

Ce travail est égal à celui appliqué sur une charge q soumis à une différence de potentiel de $-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$.

Cela s'interprète en considérant qu'il existe une force électromotrice induite égale à $-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$.

Cette équation régit tous les phénomènes d'induction, à l'origine de tous nos moteurs électriques et de tous nos générateurs électriques.

❑ (ii) : Si $\boldsymbol{B}$ est nul, $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{grad}(\mathrm{V})$ et l'équation (Maxwell.i) énonce que $\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Donc :

$$\Delta \mathrm{V} = \mathrm{div}(\boldsymbol{grad}(\mathrm{V})) = -\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

4- Rotationnel du champ magnétique

$$\boxed{\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}} \quad \text{(Maxwell.iv)}$$

où $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, c vitesse de la lumière, et où $\boldsymbol{J}$ est le vecteur densité de courant.

PROPOSITION

On suppose dans cette proposition que $\boldsymbol{E}$ *est nul.*

(i) *Considérons une boucle* Γ *limitant une surface* Σ. *On suppose que* Σ *est traversé par un courant d'intensité* I. *Alors, la circulation de* $\boldsymbol{B}$ *le long de* Γ *est égal à* $\mu_0 \mathrm{I}$ (**Théorème d'Ampère**).

(ii) *L'intensité du champ magnétique* $\boldsymbol{B}$ *créé à une distance* R *par un fil rectiligne parcouru par un courant d'intensité* I *est* $\mathrm{B} = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi \mathrm{R}}$.

(iii) *Supposons maintenant que ce soit la boucle* Γ *qui est parcourue par un courant I. Alors, le champ magnétique* $\boldsymbol{B}$ *produit par cette boucle de courant en un point* N *situé à grande distance est* : $\boldsymbol{B}(\mathrm{N}) = \int_\Gamma \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi r^2} \mathrm{d}\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{u}$, *où* r *est la distance entre le point* M *parcourant* Γ *et le point* N, *et* $\boldsymbol{u}$ *le vecteur unitaire dirigé depuis le point* M *vers le point* N (**Loi de Biot et Savart**).

(iv) *Si* $\boldsymbol{E}$ *est non nul et varie, la densité de courant* $\boldsymbol{J}$ *et la densité de charge électrique* ρ *vérifient l'équation* $\mathrm{div}(\boldsymbol{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (**théorème de conservation de la charge**).

Démonstration :

❑ (i) : Dans le cas d'un champ électrique nul, la circulation demandée est :

$$\int_\Gamma <\boldsymbol{B}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}> = \iint_\Sigma <\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B}), \mathrm{d}\boldsymbol{S}> \qquad \text{d'après le théorème de Stokes}$$

$$= \mu_0 \iint_\Sigma <\boldsymbol{J}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}> \qquad \text{d'après (Maxwell.iv) et le fait que } \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$$

$$= \mu_0 \mathrm{I}$$

car $\mathrm{I} = \iint_\Sigma <\boldsymbol{J}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$ est l'intensité de courant traversant la surface Σ.

❑ (ii) : On prend pour Σ un disque de rayon R traversé en son centre par le fil rectigiligne, de façon à ce qu'il soit perpendiculaire à Σ. La symétrie du système impose que $\boldsymbol{B}$ est tangent à Γ (une preuve en est donnée dans le chapitre L1/DETERMNT.PDF dans la notion de *vecteur axial*) et son intensité B ne dépend que de R. L'égalité précédente donne :

$$2\pi \mathrm{RB} = \mu_0 \mathrm{I}$$

donc $\quad \mathrm{B} = \dfrac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi \mathrm{R}}$

❑ (iii) : Utilisons le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{B}$, défini par $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$ avec la condition supplémentaire $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}) = 0$. La relation $\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{J}$ devient :

$$\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{A})) = \boldsymbol{J}$$

$\Leftrightarrow \quad \Delta\boldsymbol{A} + \mu_0\boldsymbol{J} = 0 \qquad$ d'après la formule $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})) = \boldsymbol{grad}(\mathrm{div}(\mathrm{X})) - \Delta\mathrm{X}$ du formulaire I

Chaque composante de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{J}$ dans une base donnée vérifie donc une équation en tout point comparable à l'équation $\Delta\mathrm{V} + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ vérifiée en électrostatique par le potentiel électrique V et la densité volumique de charge ρ. Il suffit de remplacer $\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ par μ_0. Or ce potentiel électrostatique est défini, à une constante près par $\mathrm{V(N)} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iiint \frac{\rho}{r}\,\mathrm{d}\tau$ où r la distance entre le point M parcourant le volume et le point N où l'on calcule V. Par conséquent, une solution de l'équation $\Delta\boldsymbol{A} + \mu_0\boldsymbol{J} = 0$ est donnée par l'expression $\boldsymbol{A}(\mathrm{N}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\iiint \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\mathrm{d}\tau$, où l'on intègre sur le volume dans lequel règne le champ $\boldsymbol{J}$.

Pour une boucle Γ parcourue par un courant I, ce volume est constitué par le fil lui-même, d'une section σ faible. $\dfrac{\boldsymbol{J}}{r}\mathrm{d}\tau$ est de la forme $\dfrac{\boldsymbol{J}}{r}\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}l$, l'élément de volume $\mathrm{d}\tau$ étant le produit d'un élément $\mathrm{d}\sigma$ de la section perpendiculaire à un élément de longueur $\mathrm{d}l$ du fil. La densité de courant $\boldsymbol{J}$ a pour direction le vecteur $\boldsymbol{t}$ tangent au fil au point considéré. Par ailleurs, compte tenu de la faible section du fil, on peut considérer que la distance $r = \mathrm{MN}$ est quasiment la même pour tout point M de ce volume $\mathrm{d}\tau$. Par conséquent l'intégrale double $\displaystyle\iint \frac{\boldsymbol{J}}{r}\mathrm{d}\sigma$ sur une section du fil est égale à $\dfrac{1}{r}\displaystyle\iint \mathrm{J}\mathrm{d}\sigma\ \boldsymbol{t}$, qui n'est autre que $\frac{\mathrm{I}}{r}\,\boldsymbol{t}$, car l'intensité I du courant parcourant le fil est égale à $\iint \mathrm{J}\mathrm{d}\sigma$. L'intégrale triple donnant $\boldsymbol{A}$(N) se réduit alors à l'intégrale simple suivante :

$$\boldsymbol{A}(\mathrm{N}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\mathrm{I}}{r}\,\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}l = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\mathrm{I}}{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{M}$$

Vérifions qu'on a bien div($\boldsymbol{A}$) = 0, ce qu'on a supposé pour obtenir cette expression. On indique par un indice en quel point on effectue le calcul :

$$\mathrm{div}_\mathrm{N}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{div}_\mathrm{N}\Big(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\mathrm{I}}{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{M}\Big)$$

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\int_\Gamma \mathrm{div}_\mathrm{N}\Big(\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{M}\Big)$$

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\int_\Gamma \Big\langle \boldsymbol{grad}_\mathrm{N}\Big(\frac{1}{r}\Big), \mathrm{d}\boldsymbol{M}\Big\rangle$$

d'après la formule div(fX) = f div(X) + <$\boldsymbol{grad}(f)$, X> du formulaire I, X étant ici égal à d$\boldsymbol{M}$, donc indépendant du point N où l'on calcule la divergence et donc lui-même de divergence nulle

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\int_\Gamma \Big\langle -\frac{1}{r^3}\,\boldsymbol{MN}, \mathrm{d}\boldsymbol{M}\Big\rangle$$

car, M étant un point parcourant le fil, $\boldsymbol{grad}_\mathrm{N}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{1}{r^2}\,\boldsymbol{u} = -\frac{1}{r^3}\,\boldsymbol{MN}$

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\iint_\Sigma \Big\langle \boldsymbol{Rot}_\mathrm{M}\Big(-\frac{1}{r^3}\,\boldsymbol{MN}\Big), \mathrm{d}\boldsymbol{S}\Big\rangle$$

d'après le théorème de Stokes, Σ étant une surface limitée par Γ

$= 0$ car $\boldsymbol{Rot}_\mathrm{M}\Big(-\frac{1}{r^3}\,\boldsymbol{MN}\Big) = 0$ comme on le montre dans la partie *Exercices*

Calculons maintenant le champ $\boldsymbol{B}$ produit par le fil Γ :

$$\boldsymbol{B}(\mathrm{N}) = \boldsymbol{Rot}_\mathrm{N}(\boldsymbol{A}(\mathrm{N})) = \boldsymbol{Rot}_\mathrm{N}\Big(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\mathrm{I}}{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{M}\Big)$$

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\int_\Gamma \boldsymbol{Rot}_\mathrm{N}\Big(\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{M}\Big)$$

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\int \boldsymbol{grad}_\mathrm{N}\Big(\frac{1}{r}\Big) \times \mathrm{d}\boldsymbol{M}$$

d'après la formule $\boldsymbol{Rot}(f\mathrm{X}) = \boldsymbol{grad}(f) \times \mathrm{X} + f\,\boldsymbol{Rot}(\mathrm{X})$ du formulaire I avec ici X = d$\boldsymbol{M}$ indépendant de N, donc de rotationnel nul

$$= \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{4\pi}\int -\frac{1}{r^2}\,\boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{M}$$

car $\boldsymbol{grad}_\mathrm{N}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{1}{r^2}\,\boldsymbol{u}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{r^2} \, d\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{u}$$

et l'on obtient bien la loi de Biot-Savart. On mémorise cette formule en imaginant que la portion de courant I$d\boldsymbol{M}$ crée en un point situé à une distance r dans la direction $\boldsymbol{u}$ un élément de champ magnétique $d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I \, d\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{u}}{4\pi \, r^2}$

❑ (iv) : Il suffit de prendre la divergence dans la relation $\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ (Maxwell.iv). Puisque la divergence du rotationnel est nulle, on obtient :

$$0 = \mathrm{div}(\boldsymbol{J}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathrm{div}(\boldsymbol{E})}{\partial t}$$

$$= \mathrm{div}(\boldsymbol{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{en utilisant (Maxwell.i)}$$

.

Dans le cas statique ($\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ ne dépendent pas du temps), les quatre équations de Maxwell se réduisent à :

i) $\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

ii) $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E}) = 0$

iii) $\mathrm{div}(\boldsymbol{B}) = 0$

iv) $\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{J}$

VIII : Changement de repère.

Les définitions intrinsèques du gradient, de la divergence et du rotationnel données en I montrent que :

Le gradient et le laplacien ne dépendent pas du repère orthonormé choisi, qu'il soit direct ou indirect.

La divergence ne dépend pas du repère, orthonormé ou non choisi.

Le rotationnel ne dépend pas du repère orthormé direct choisi.

Voici ci-dessous les expressions que l'on obtient en coordonnées cylindriques ou sphériques. La démonstration est omise, étant assez fastidieuse. Pour obtenir les formules, il faut d'une part effectuer une dérivation de fonction composée pour le calcul des dérivées partielles, et d'autre part, effectuer un changement de base pour passer de la base euclidienne à la base locale propre à chaque système de coordonnées. On pourra s'inspirer de l'exemple du calcul du gradient en coordonnées polaires dans le plan, donné dans le chapitre L1/CALCDIF1.PDF, et celui du laplacien en coordonnées polaires, donné en exercice dans le même chapitre.

1- Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

On choisit comme nouvelle base la base ($\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$) définie par la matrice de passage :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour un champ scalaire f et un champ de vecteurs $X = X_r\boldsymbol{e_r} + X_\theta\boldsymbol{e_\theta} + X_z\boldsymbol{e_z}$, on a alors :

$$\boldsymbol{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e_z}$$

$$\mathrm{div}(X) = \frac{X_r}{r} + \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{Rot}(X) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial X_z}{\partial \theta} - \frac{\partial X_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e_r} + \left(\frac{\partial X_r}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e_\theta} + \left(\frac{\partial X_\theta}{\partial r} + \frac{X_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial X_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e_z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2- Coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

φ est l'angle de précession, θ l'angle de nutation. Peut également intervenir, pour un solide, l'angle de rotation propre autour de $\boldsymbol{e_r}$. Ces angles sont en général plus faciles à manipuler que les angles de roulis, de tangage et de lacet autour des axes $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$.

La matrice de passage est $\begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Les vecteurs colonnes sont notés usuellement $\boldsymbol{e_\theta}$, $\boldsymbol{e_\varphi}$ et $\boldsymbol{e_r}$.
On a alors :

$$\boldsymbol{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e_\varphi}$$

$$\mathrm{div}(X) = \frac{2X_r}{r} + \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{X_\theta}{r\tan(\theta)} + \frac{1}{r}\frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\boldsymbol{Rot}(X) = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\sin(\theta)X_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial X_\theta}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial X_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial X_\varphi}{\partial r} - \frac{X_\varphi}{r}\right)\boldsymbol{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rX_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial X_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e_\varphi}$$

$$\Delta f = \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\tan(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{(r\sin(\theta))^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

EXEMPLE :

❑ Soit O un point donné de l'espace et X le champ de vecteurs $M \to \dfrac{\boldsymbol{OM}}{OM^3} = \dfrac{\boldsymbol{e_r}}{r^2}$. On a $X_r = \dfrac{1}{r^2}$, $X_\theta = X_\varphi = 0$ donc :

$$\mathrm{div}(X) = \frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^3} = 0$$

X est à flux conservatif.

3- Cas général

Dans le cas général, on considére un difféomorphisme

$$\Phi : a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3 \to x = (x_1, x_2, x_3) = \Phi(a) \in \mathbf{R}^3$$

Ce difféomorphisme sert à la fois à changer de paramètres (les a_i plutôt que les x_i) et de base. La matrice jacobienne J_Φ de Φ sert de matrice de passage de la base canonique à une base dite **base locale**. Les composantes dans la base canonique des vecteurs de la base locale sont les colonnes de J_Φ.

Il est rare que la base locale soit orthonormée. Mais elle est parfois orthogonale. Dans ce cas, on notera N_k, $1 \leq k \leq 3$, les normes des vecteurs de la base locale et on se ramènera à une base orthonormée $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ en divisant les vecteurs de la base locale par leur norme N_k. On peut également supposer que la base finale est directe, quitte à permuter deux paramètre a_i et a_j, ce qui reviendra à permuter $\boldsymbol{e}_i$ et $\boldsymbol{e}_j$. C'est dans une telle base orthonormée directe finale qu'on a donné ci-dessus les expressions des gradient, divergence, laplacien, rotationnel en coordonnées cylindriques et sphériques.

On se donne une fonction $x \to f(x)$ et l'on souhaite exprimer les composantes de $\textbf{\textit{grad}}(f)$ dans la base locale, et en fonction des a_i. Par abus d'écriture, on notera $\dfrac{\partial f}{\partial a_i}$ les dérivées partielles de la fonction composée $a \to \Phi(a) = x \to f(x)$.

De même, on se donne un champ de vecteurs $x \to X(x)$ et on souhaite exprimer $\operatorname{div}(X)$ à partir des composantes de X dans la base locale et en fonction des a_i. Nous noterons Y la colonne des composantes de X dans la base locale. On passe de X à Y au moyen de la formule de changement de base $X = J_\Phi Y$, et de plus, on effectue une composée de fonction par Φ de façon que Y dépende des a_i et non des x_i.

Enfin, on souhaite exprimer les composantes de $\textbf{\textit{Rot}}(X)$ dans la base locale à partir des composantes Y de X dans la base locale et en fonction des a_i. Pour y parvenir, nous aurons besoin de la fonction Ω de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^3$ qui, à une matrice $M = \begin{pmatrix} m & c' & b \\ c & n & a' \\ b' & a & p \end{pmatrix}$, associe le vecteur $\begin{pmatrix} a - a' \\ b - b' \\ c - c' \end{pmatrix}$. Ce vecteur est tel que, pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbf{R}^3$, $\Omega(M) \times \boldsymbol{v} = (M - M^T)\boldsymbol{v}$.

Nous admettrons les résultats suivants. Le lecteur persévérant pourra les appliquer au cas des coordonnées cylindriques et sphériques et retrouver les formules énoncées précédemment. Il pourra également chercher une preuve de ces formules.

❑ La colonne des composantes de $\textbf{\textit{grad}}(f)$ dans la base locale est $J_\Phi^{-1}(J_\Phi^{-1})^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial a_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_3} \end{pmatrix}$.

Si la base locale est orthogonale, on se placera dans la base orthonormée associée en divisant chaque vecteur de la base locale par sa norme N_k. Dans ce cas, on a :

$$\textbf{\textit{grad}}(f) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{N_k} \frac{\partial f}{\partial a_k} \boldsymbol{e}_k$$

❑ On a $\text{div}(X) = \sum_{k=1}^{3} Y_k \, \text{Tr}(\frac{\partial J_\Phi}{\partial a_k} J_\Phi^{-1}) + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial Y_k}{\partial a_k}$, où Tr désigne la trace, $\frac{\partial J_\Phi}{\partial a_k}$ est la dérivée de la matrice jacobienne J_Φ par rapport à a_k (on la calcule en dérivant chacun de ses termes), et Y la colonne des composantes de X dans la base locale, Y étant fonction des a_i.

Si la base locale est orthogonale, on se ramène à sa base orthonormée associée en divisant chaque vecteur de la base locale par sa norme N_k. Notons Z la colonne des composantes de X dans la base orthonormée finale, (de sorte que, pour tout k, $Z_k = N_k Y_k$). On a alors :

$$\text{div}(X) = \sum_{j \neq k} \frac{1}{N_j N_k} \frac{\partial N_j}{\partial a_k} Z_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{N_k} \frac{\partial Z_k}{\partial a_k}$$

❑ La colonne des composantes de ***Rot***(X) dans la base locale est :

$$\sum_{k=1}^{3} Y_k \, J_\Phi^{-1} \, \Omega(\frac{\partial J_\Phi}{\partial a_k} J_\Phi^{-1}) + J_\Phi^{-1} \, \Omega(J_\Phi J_Y J_\Phi^{-1})$$

où Y est la colonne des composantes de X dans la base locale, et J_Y la matrice jacobienne de cette colonne, les dérivées étant prises par rapport aux a_i.

Si la base locale est orthogonale, on se ramène à sa base orthonormée associée en divisant chaque vecteur de la base locale par sa norme N_k. De plus, on supposera cette base directe, quitte à permuter au besoin deux paramètres. Notons Z la colonne des composantes de X dans cette base. Alors :

$$\boldsymbol{Rot}(X) = \sum_{k=1}^{3} (\frac{1}{N_{k+1}} \frac{\partial Z_{k+2}}{\partial a_{k+1}} - \frac{1}{N_{k+2}} \frac{\partial Z_{k+1}}{\partial a_{k+2}} + \frac{Z_{k+2}}{N_{k+1} N_{k+2}} \frac{\partial N_{k+2}}{\partial a_{k+1}} - \frac{Z_{k+1}}{N_{k+1} N_{k+2}} \frac{\partial N_{k+1}}{\partial a_{k+2}}) \, \boldsymbol{e}_k$$

où les indices sont calculés modulo 3.

Annexe : Energie potentielle mécanique d'un dipôle magnétique.

Un **dipôle magnétique** est modélisé par une petite boucle de courant d'intensité I, d'aire vectorielle orientée ***S***. A la limite, on fait tendre ***S*** vers 0 et I vers l'infini de façon que le produit soit constant. Ce produit $\boldsymbol{\mu} = I\boldsymbol{S}$ est le **moment magnétique** du dipôle. Un dipôle magnétique est alors défini par sa position ponctuelle O et son moment $\boldsymbol{\mu}$. L'art de la théorie du dipôle magnétique pour le physicien est d'utiliser avec soin le fait que le dipôle est une boucle de taille non nulle, mais infiniment petite.

On se propose de prouver la proposition générale suivante, habituellement traitée dans les ouvrages de physique dans des cas particuliers seulement.

PROPOSITION

L'énergie potentielle mécanique d'un dipôle de moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ *dans un champ magnétique* ***B*** *est* $- \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{B} \rangle$.

On ne tient compte ici que de l'énergie mécanique résultant des forces de Laplace appliquées sur le dipôle, laissant de côté l'énergie électromagnétique nécessaire à maintenir l'intensité I du courant ou la valeur du champ magnétique ***B***. On verra qu'on aura besoin de l'équation de Maxwell div(***B***) = 0.

Démonstration :

❑ On considère une boucle se déplaçant et se déformant au cours du temps dans un champ magnétique $\boldsymbol{B}$ non nécessairement uniforme, mais constant au cours du temps. A chaque instant t, les positions des points de la boucle sont paramétrées par une fonction P de la forme :

$$s \in [a, b] \rightarrow \mathrm{P}(s, t) = \mathrm{O}(t) + \boldsymbol{u}(s, t)$$

où O(t) est la position du dipôle à l'instant t, dans le cas d'une modélisation ultime ponctuelle, et où $\boldsymbol{u}(s, t)$ sera pris arbitrairement petit. Pour tout t, $\boldsymbol{u}(a, t) = \boldsymbol{u}(b, t)$ puisque la boucle se referme. Pour alléger, on omettra parfois d'indiquer que O dépend de t et $\boldsymbol{u}$ de (s, t).
L'aire vectorielle $\boldsymbol{S}$ du dipôle est définie par :

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\int_a^b \boldsymbol{OP}(s, t) \times \frac{\partial \boldsymbol{OP}}{\partial s}(s, t)\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_a^b \boldsymbol{u} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}\, \mathrm{d}s$$

en découpant la surface du dipôle par des triangles infinitésimaux de sommets O.
Le moment magnétique du dipôle à l'instant t est donc :

$$\boldsymbol{\mu} = \mathrm{I}\boldsymbol{S} = \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \boldsymbol{u} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}\, \mathrm{d}s$$

Tout segment infinitésimal de la boucle $[\mathrm{P}(s, t), \mathrm{P}(s + \mathrm{d}s, t)] = [\mathrm{P}(s, t), \mathrm{P}(s, t) + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}(s, t)\, \mathrm{d}s]$ subit une force de Laplace égale à :

$$\mathrm{I}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}(s, t)\, \mathrm{d}s \times \boldsymbol{B}(\mathrm{P}(s, t)) = \mathrm{I}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}\, \mathrm{d}s \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O} + \boldsymbol{u})$$

Puisque le point P(s, t) se déplace à la vitesse $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} = \frac{\mathrm{dO}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(s, t)$, la puissance des forces de Laplace qui s'exerce sur le dipôle à l'instant t est :

$$\mathcal{P} = \mathrm{I}\int_a^b \langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O} + \boldsymbol{u}), \frac{\mathrm{dO}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \rangle\, \mathrm{d}s$$

$$= \mathrm{I}\int_a^b \langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O} + \boldsymbol{u}), \frac{\mathrm{dO}}{\mathrm{d}t} \rangle\, \mathrm{d}s + \mathrm{I}\int_a^b \langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O} + \boldsymbol{u}), \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \rangle\, \mathrm{d}s$$

Elle est constituée de deux parties :

- la première est due au déplacement global du dipôle à la vitesse $\frac{\mathrm{dO}}{\mathrm{d}t}$. Nous verrons ci-dessous que, dans l'approximation ultime du dipôle, elle est identique à la puissance des forces appliquées sur un dipôle indéformable gardant un moment magnétique constant, en translation dans un champ $\boldsymbol{B}$ non uniforme.
- la seconde, faisant intervenir $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$, est due à la déformation du dipôle ou à des déplacements autres que ceux de translation. Nous verrons que, dans l'approximation ultime du dipôle, elle est identique à la puissance des forces appliquées sur un dipôle se déformant dans un champ magnétique constant $\boldsymbol{B}$.

❑ Traitement du premier terme $\mathrm{I}\int_a^b \langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O} + \boldsymbol{u}), \frac{\mathrm{dO}}{\mathrm{d}t} \rangle\, \mathrm{d}s$:

La puissance considérée ici vaut :

$$\mathrm{I}\int_a^b \langle \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O} + \boldsymbol{u}), \frac{\mathrm{dO}}{\mathrm{d}t} \rangle\, \mathrm{d}s = \langle \boldsymbol{F}, \frac{\mathrm{dO}}{\mathrm{d}t} \rangle$$

où $\boldsymbol{F}$ est la résultante des forces de Laplace :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \mathrm{I}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O} + \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{I}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times (\boldsymbol{B}(\mathrm{O}) + \mathrm{d}\boldsymbol{B}(\mathrm{O})(\boldsymbol{u}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{u}))\, \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{I}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O})\, \mathrm{d}s + \mathrm{I}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \mathrm{d}\boldsymbol{B}(\mathrm{O})(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s + \mathrm{I}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \mathrm{o}(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

La première intégrale $\mathrm{I}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O})\, \mathrm{d}s$ est nulle car elle vaut :

$$\mathrm{I}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}\, \mathrm{d}s \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O}) = \mathrm{I}(\boldsymbol{u}(b, t) - \boldsymbol{u}(a, t)) \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O}) = 0$$

puisque $\boldsymbol{u}(a, t) = \boldsymbol{u}(b, t)$.

La dernière intégrale $\mathrm{I}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \mathrm{o}(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s$ sera négligée dans le cas de la limite du dipôle magnétique, où les dimensions du dipôle sont infiniment petites. Par conséquent, la valeur attribuée à la résultante des forces de Laplace est :

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{I}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \mathrm{d}\boldsymbol{B}(\mathrm{O})(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s = \mathrm{I}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times f(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s$$

où, pour alléger l'écriture, on a noté f la différentielle $\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\mathrm{O})$ du champ magnétique $\boldsymbol{B}$ au point O. f est une application linéaire de trace nulle, sa trace étant en effet égale à $\mathrm{div}(\boldsymbol{B}) = 0$. Intégrons par partie la *moitié* de cette intégrale :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times f(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s + \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times f(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s \\
&= \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times f(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s + \frac{\mathrm{I}}{2}\left[\boldsymbol{u}(s, t) \times f(\boldsymbol{u}(s, t))\right]_{s=a}^{s=b} - \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \boldsymbol{u} \times \frac{\partial}{\partial s} f(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

le crochet est nul car $\boldsymbol{u}(a, t) \times f(\boldsymbol{u}(a, t)) = \boldsymbol{u}(b, t) \times f(\boldsymbol{u}(b, t))$

par ailleurs, f étant linéaire, $\frac{\partial}{\partial s} f(\boldsymbol{u}) = f(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s})$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times f(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s - \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \boldsymbol{u} \times f(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s})\, \mathrm{d}s \\
&= \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \boldsymbol{v} \times f(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}s - \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \boldsymbol{u} \times f(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

en posant $\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}$

La vitesse de déplacement du dipôle est $\boldsymbol{w}(t) = \frac{\mathrm{dO}(t)}{\mathrm{d}t}$ et la puissance de la résultante $\boldsymbol{F}$ est :

$$<\boldsymbol{F}, \boldsymbol{w}> = \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b [\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{w}]\, \mathrm{d}s - \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b [\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}]\, \mathrm{d}s$$

en notant [, ,] le produit mixte

$$= -\frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b [f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\, \mathrm{d}s - \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b [\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}]\, \mathrm{d}s$$

Or, pour toute application linéaire f et tout triplet $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, on a (propriété lin.1 des lemmes linéaires):

$$[f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] + [\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}] + [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{w})] = \mathrm{Tr}(f)\, [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$$

Ici f est de trace nulle, donc :

$$-\ [f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] - [\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{w})]$$

Ainsi :

$$<\boldsymbol{F}, \boldsymbol{w}> = \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{w})]\, \mathrm{d}s$$

$$= \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b <\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{w})>\, \mathrm{d}s$$

$$= \frac{\mathrm{I}}{2} <\int_a^b \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}s, f(\boldsymbol{w})>$$

$$= <\frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \boldsymbol{u} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}\, \mathrm{d}s, f(\boldsymbol{w})>$$

$$= <\boldsymbol{\mu}, \mathrm{d}\boldsymbol{B}(\mathrm{O})(\frac{\mathrm{dO}}{\mathrm{d}t})>$$

$$= <\boldsymbol{\mu}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\boldsymbol{B}(\mathrm{O}(t)))>$$

❑ Traitement du deuxième terme $\mathrm{I}\int_a^b <\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O} + \boldsymbol{u}), \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}>\ \mathrm{d}s$:

Remarque préliminaire : Calculons $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}t}$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\,(\boldsymbol{u} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s})\, \mathrm{d}s$$

$$= \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}\, \mathrm{d}s + \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \boldsymbol{u} \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial s \partial t}\, \mathrm{d}s$$

$$= \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}\, \mathrm{d}s + \frac{\mathrm{I}}{2}\left[\boldsymbol{u} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right]_{s=a}^{s=b} - \frac{\mathrm{I}}{2}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\, \mathrm{d}s$$

en intégrant par parties. Le crochet est nul car la fonction prend pour tout t les mêmes valeurs en a et en b.

$$= \mathrm{I}\int_a^b \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}\, \mathrm{d}s$$

en permutant les deux vecteurs du produit vectoriel de droite.

La deuxième intégrale intervenant dans notre puissance vaut alors :

$$\mathrm{I}\int_a^b <\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s} \times \boldsymbol{B}(\mathrm{O} + \boldsymbol{u}), \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}>\ \mathrm{d}s = \mathrm{I}\int_a^b <\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}, \boldsymbol{B}(\mathrm{O} + \boldsymbol{u})>\, \mathrm{d}s$$

$$= \mathrm{I} \int_a^b <\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}, \boldsymbol{B}(\mathrm{O}) + \mathrm{d}\boldsymbol{B}(\mathrm{O})(\boldsymbol{u}) + \mathrm{o}(\boldsymbol{u})> \mathrm{d}s$$

Quand on fait tendre $\boldsymbol{u}$ vers 0 (modélisation ultime du dipôle), la partie principale de cette intégrale vaut $\mathrm{I} \int_a^b <\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}, \boldsymbol{B}(\mathrm{O})> \mathrm{d}s$. Dans le cas de la modélisation ultime du dipôle, on ne garde que cette expression. On reconnaît $<\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{B}(\mathrm{O})>$.

❑ Conclusion : Nous avons vu que la contribution due au déplacement global vaut $<\boldsymbol{\mu}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{B}(\mathrm{O})>$ et que celle due à la déformation est $<\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{B}(\mathrm{O})>$. Donc :

$$\mathcal{P} = <\boldsymbol{\mu}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{B}(\mathrm{O})> + <\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{B}(\mathrm{O})> = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} <\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{B}>$$

Le travail W des forces de Laplace est alors égal à la variation de $<\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{B}>$:

$$\mathrm{W} = <\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{B}_2> - <\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{B}_1>$$

On trouve bien que l'énergie potentielle vaut $- <\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{B}>$.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Un liquide en repos par rapport à un repère donné vérifie le principe de l'hydrostatique :

$$\boldsymbol{grad}(\mathrm{P}) = \mu\boldsymbol{a}$$

où P est la pression en (x, y, z), μ la masse volumique du liquide (que nous supposerons constante) et $\boldsymbol{a}$ l'accélération subie en (x, y, z). Si le repère n'est pas galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie.

a) Dans un champ de pesanteur constant d'accélération $\boldsymbol{g}$, un liquide est en rotation uniforme de vitesse angulaire ω dans un cylindre d'axe parallèle à la direction de $\boldsymbol{g}$. Exprimer P en fonction de x, y, z, μ, g, ω.

b) Quelle est alors la forme de la surface du liquide ?

Exo.2) On considère un tube cylindrique de rayon intérieur r, de rayon extérieur R. Un fluide chaud de température constante T_1 circule à l'intérieur du tube et celui-ci est placé dans un milieu extérieur froid de température T_0. On suppose que la chaleur se propage radialement dans le tube, de l'intérieur vers l'extérieur. Soit Φ la quantité de chaleur par unité de temps qui traverse une surface cylindrique Σ de même axe que le tube, de longueur L, et de rayon ρ, $r \leq \rho \leq \mathrm{R}$. En régime permanent, la température T au sein du tube n'est fonction que de ρ, et Φ est constant, indépendant de ρ. Par définition $\Phi = \iint_\Sigma <\boldsymbol{J}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}>$ où $\boldsymbol{J}$ est la densité de flux thermique traversant l'élément de surface $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, qui vérifie l'équation $\boldsymbol{J} = - \lambda\, \boldsymbol{grad}(\mathrm{T})$, où λ est une constante.

a) Calculer Φ en fonction de T_0, T_1, r, R, L et λ.

b) Application numérique : $T_0 = 10°$, $T_1 = 20°$, R = 7 cm, r = 2 cm, L = 1 m, $\lambda = 0{,}040\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ (isolant) et $\lambda = 40\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ (acier).

Exo.3) Un dipôle électrique est constitué de deux charges électriques opposées q et $-q$, distantes d'une longueur fixe l. On considère deux dipôles identiques et disposés parallèlement, l'un centré en un point O, l'autre centré en O'.

(i) Dans cette position, les dipôles se repoussent:

(ii) Dans cette position, ils s'attirent

(iii) Position intermédiaire

		+ O' −	+ O' −
+ O' −	+ O −	+ O −	+ O −

Quand on passe de la disposition (i) à la disposition (ii), il existe une position intermédiaire (iii) d'équilibre. On demande de déterminer cette position par l'angle que forme ***OO'*** par rapport à l'axe des dipôles. On posera r = OO' et on supposera que r est infiniment grand devant l.

Exo.4) Soit f une fonction de classe C^2 sur le disque ouvert $\{(x, y), x^2 + y^2 < 1\}$, continue sur le disque fermé $\{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$ et nulle sur le cercle unité frontière, ainsi qu'en (0, 0). Montrer qu'il existe au moins un point de l'intérieur du disque où le laplacien $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ s'annule. Pour cela, on montrera que f admet un maximum et un minimum sur le disque fermé, qu'il est possible de supposer ces deux extrema intérieurs au disque, et qu'en ces deux points, le laplacien est de signe contraire.

Exo.5) On considère la fonction $V = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ ou bien, en posant $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$, $V = \frac{\cos(\theta)}{r^2}$.

Physiquement, V est proportionnelle au potentiel électrique créé en (x, y) par un dipôle dans le plan Oxy, le dipôle étant centré en O et aligné sur Ox. Nous adopterons la convention de notation en usage en physique consistant à noter de la même lettre la fonction, que ce soit en coordonnées cartésiennes ou polaires. Les questions a) et b) sont traitées indépendamment l'une de l'autre avant de vérifier qu'elles donnent le même résultat.

a) *Etude en coordonnées polaires*. On rappelle que le gradient en polaire vaut :

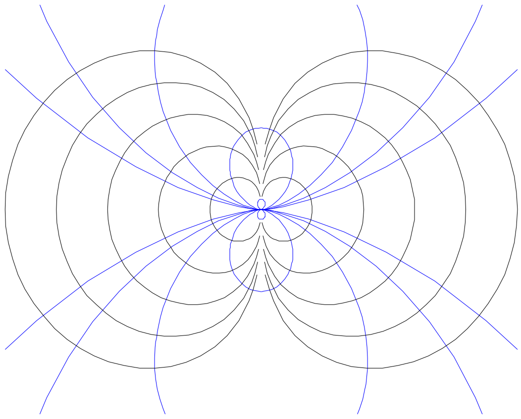
$$\boldsymbol{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

Calculer $\boldsymbol{grad}(V)$. Ce gradient est colinéaire au champ électrique créé par un dipôle. On appelle lignes de champ les courbes d'équation $r = f(\theta)$ dont les tangentes en chaque point ont pour vecteur directeur ce gradient. Déterminer les fonctions f définissant les lignes de champ.

b) *Etude en coordonnées cartésiennes*. Calculer le gradient de V. Vérifier que les lignes de champ sont les courbes intégrales de l'équation $3xy\,dx + (y^2 - 2x^2)\,dy = 0$ (i.e si $t \to (x(t), y(t))$ est un paramétrage d'une ligne de champ, alors pour tout t, $3x(t)y(t)\,x'(t) + (y(t)^2 - 2x(t)^2)\,y'(t) = 0$). La forme différentielle $\omega = 3xy\,dx + (y^2 - 2x^2)\,dy$ est-elle exacte ? Si non, la multiplier par une fonction $y \to g(y)$ (pour $y \neq 0$) non nulle adéquate et trouver une primitive F de ω. En déduire que le paramétrage des lignes de champ vérifient : $\forall\, t$, $F(x(t), y(t)) = Cte$ et que les lignes de champ ont pour équation $x^2 + y^2 = ky^{4/3}$, $k \in \mathbf{R}$.

c) Les questions a) et b) donnent-elles le même résultat ?

Ci-dessous, on a tracé en noir les équipotentielles V = Cte, et en bleu les lignes de champ.



Exo.6) P étant un point quelconque donné de $\mathbb{R}^3$, on considère les fonctions $M \to \boldsymbol{PM} \in \mathbb{R}^3$, $M \to \dfrac{1}{PM^3} \in \mathbb{R}$ et $M \to \dfrac{\boldsymbol{PM}}{PM^3} \in \mathbb{R}^3$. En sciences physique, cette dernière fonction joue un rôle considérable, aussi bien en électromagnétisme qu'en mécanique newtonienne. $\boldsymbol{v}$ désigne un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$. Vérifier les formules suivantes (regroupées par catégories), où les dérivations se font relativement à la variable M :

$$\boldsymbol{grad}\left(\frac{1}{PM^3}\right) = -3\,\frac{\boldsymbol{PM}}{PM^5}$$

$$\boldsymbol{grad}(<\boldsymbol{PM}, \boldsymbol{v}>) = \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{grad}\left(<\frac{\boldsymbol{PM}}{PM^3}, \boldsymbol{v}>\right) = \frac{\boldsymbol{v}}{PM^3} - \frac{3<\boldsymbol{PM}, \boldsymbol{v}>}{PM^5}\,\boldsymbol{PM}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{PM}) = 3 \qquad \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{PM}) = 0$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{PM}}{PM^3}\right) = 0 \qquad \boldsymbol{Rot}\left(\frac{\boldsymbol{PM}}{PM^3}\right) = 0$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{PM} \times \boldsymbol{v}) = 0 \qquad \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{PM} \times \boldsymbol{v}) = -2\boldsymbol{v}$$

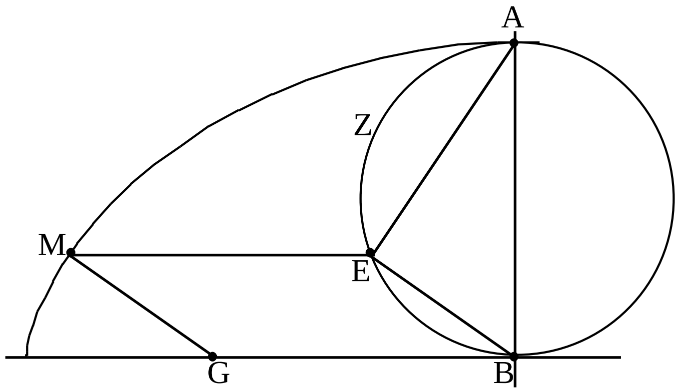
$$\mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{PM}}{PM^3} \times \boldsymbol{v}\right) = 0 \qquad \boldsymbol{Rot}\left(\frac{\boldsymbol{PM}}{PM^3} \times \boldsymbol{v}\right) = \frac{\boldsymbol{v}}{PM^3} - \frac{3<\boldsymbol{PM}, \boldsymbol{v}>}{PM^5}\,\boldsymbol{PM}$$

Exo.7) Soit P un point donné de l'espace. On considère le champ de vecteur X : $M \to \dfrac{\boldsymbol{PM}}{PM^3}$. On a vu dans l'exercice précédent que div(X) = 0. Déterminer un champ de vecteur $\boldsymbol{A}$ tel que, au moins localement, X = $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{A})$.

Exo.8) Dans $\mathbb{R}^3$, soit ω une forme différentielle de degré 1, et ω' une forme différentielle de degré 2. Pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, montrer que :

$$(\omega \wedge \omega')(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \text{ et } \omega(\boldsymbol{u})\omega'(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \omega(\boldsymbol{v})\omega'(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) + \omega(\boldsymbol{w})\omega'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

Exo.9) On considère une cycloïde de paramétrage $\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$. Soit M un point de cette cycloïde, pour $0 \leq t \leq \pi$. Soit G l'intersection de la normale à la cycloïde en M avec l'axe des abscisses. Soit le cercle de diamètre [AB] formé de l'axe de la cycloïde. Soit E élément du demi-cercle ayant même ordonnée que M, et d'abscisse inférieure à π.



a) Montrer que MEGB est un parallélogramme, et que (AE) est parallèle à la tangente en M à la cycloïde.

b) Montrer que la longueur de l'arc MA est le double de la longueur du segment [AE].

c) Montrer que l'aire du domaine MGBA limité par l'arc de cycloïde AM et les segment [MG], [GB] et [BA] est le triple de l'aire du domaine BEZA limité par l'arc de cercle EZA et les segments [AB] et [BE].

Exo.10) Soit f une fonction de classe C^2 définie sur un domaine D du plan limité par une courbe Γ. On suppose que f est nulle sur Γ.

a) Montrer que $\displaystyle\iint_D f(x, y) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

b) En déduire que, si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur D, alors $f = 0$ sur D.

Exo.11) Soit X un champ de vecteurs de classe C^2 dans un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^3$, tel que div(X) = 0 et ***Rot***(X) = 0 (par exemple un champ électrostatique dans une région de l'espace dépourvue de charge).

a) On suppose que X garde une direction constante. Montrer que le champ X est constant.

b) On suppose que la norme euclidienne de X est constante. Montrer que le champ X est constant.

c) Montrer que, si on suppose seulement ***Rot***(X) = 0, mais X de norme constante, alors les lignes de champ sont des droites parallèles.

Exo.12) On considère une onde plane électromagnétique sinusoïdale ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$) dans le vide (la densité de charge ρ et la densité de courant $\boldsymbol{J}$ sont supposés nuls), et dont le champ électrique est défini, en notation complexe, par :

$\boldsymbol{E} = \exp(i(<\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}> - \omega t))\, \boldsymbol{E}_0$

où :

i est le nombre complexe bien connu

$\boldsymbol{k}$ est un vecteur donné non nul, appelé **vecteur d'onde**.

$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est la position où $\boldsymbol{E}$ est mesuré

ω est une constante strictement positive, appelée **pulsation de l'onde**.

t est l'instant où $\boldsymbol{E}$ est mesuré.

$\boldsymbol{E}_0$ est un vecteur donné (valeur de $\boldsymbol{E}_0$ à l'origine de l'espace et du temps)

E est fonction de ***r*** et de t. A quelle condition les équations de Maxwell soient-elles satisfaites ? Vérifier alors que $\| \boldsymbol{E} \| = c \, \| \boldsymbol{B} \|$.

2- Solutions

Sol.1) a) On a ici $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{\gamma}$ où $\boldsymbol{\gamma}$ est l'accélération centrifuge au point considéré, de module égal à $\sqrt{x^2 + y^2}\,\omega^2$ et dirigé selon une direction radiale par rapport à l'axe. Passons en coordonnées cylindriques (r, θ, z), l'axe Oz étant dirigé dans le sens opposé à $\boldsymbol{g}$. Les composantes de ***grad***(P) = μ□***a*** sont, en dehors de l'axe de rotation :

$$\frac{\partial P}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z = -\,\mu g \boldsymbol{e}_z + \mu r \omega^2 \boldsymbol{e}_r$$

donc :

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \mu r \omega^2 \\ \dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\,\mu g \end{array}\right.$$

La solution de la première équation est $P = \dfrac{\mu r^2 \omega^2}{2} + \varphi(\theta, z)$, où φ est une fonction quelconque de classe C^1. La seconde équation fait que φ est seulement fonction de z. La troisième conduit à $\varphi(z) = -\,\mu g z$ + Cte. La solution finale est :

$$P = \frac{\mu r^2 \omega^2}{2} - \mu g z + \mathrm{Cte}$$

b) La surface du liquide est une surface isobare, donc d'équation $z = \dfrac{r^2 \omega^2}{2g}$ + Cte. Il s'agit d'un paraboloïde de révolution, qui ne dépend pas du liquide utilisé.

Pour obtenir une surface en verre de forme paraboloïdale, on coule du verre sur un moule en rotation uniforme.

Sol.2) a) On utilise les coordonnées cylindriques, pour lesquelles ***grad***(T) = $\dfrac{dT}{d\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\rho$ étant le vecteur unitaire dirigé depuis l'axe du tube vers le point où l'on calcule le gradient, et $d\boldsymbol{S} = \rho \, d\theta dz \, \boldsymbol{e}_\rho$. On a donc :

$$\boldsymbol{J} = -\,\lambda \frac{dT}{d\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho$$

$$\langle \boldsymbol{J}, d\boldsymbol{S} \rangle = -\,\lambda \frac{dT}{d\rho}\,\rho \, d\theta dz$$

$$\Phi = -\,\lambda \frac{dT}{d\rho}\,\rho \, 2\pi L$$

donc $$\frac{dT}{d\rho} = -\,\frac{\Phi}{\lambda 2\pi L}\,\frac{1}{\rho}$$

Cette quantité est négative car T décroît quand ρ augmente. Donc Φ est positif. Comme Φ est supposé constant, on en déduit que :

$$T(\rho) = -\,\frac{\Phi}{\lambda 2\pi L}\,\ln(\rho) + \mathrm{Cte}$$

donc $\quad T_0 - T_1 = -\dfrac{\Phi}{\lambda 2\pi L} \ln(\dfrac{R}{r})$

et finalement :

$$\Phi = \frac{\lambda 2\pi L(T_1 - T_0)}{\ln(\dfrac{R}{r})}$$

b) Pour $\lambda = 0{,}040\ W.m^{-1}.K^{-1}$, $\Phi = 2W$. Pour $\lambda = 40\ W.m^{-1}.K^{-1}$, $\Phi = 2kW$.

Sol.3) Plaçons-nous dans le plan contenant les deux dipôles et prenons O comme origine, (Oy) porté par l'axe des dipôles, et (Ox) tel que (Oxy) soit orthonormé. Le dipôle centré en O a ses deux charges disposées en $(0, \pm l)$. Soit (x, y) la position de O'. Les deux charges du dipôle centré en O' sont disposées en $(x, y \pm l)$. On a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'énergie potentielle électrostatique du système constitué des deux dipôles et due à l'ensemble des quatre paires de charges formées d'une charge du premier dipôle et d'une charge du second dipôle, est proportionnelle à :

$$V = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - l)^2}}$$

Posons $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Un développement limité de V en fonction de r donne :

$$V = \frac{l^2}{r^3}(1 - 3\sin^2(\theta)) + o(\frac{1}{r^3})$$

Négligeons le terme en $o(\dfrac{1}{r^3})$. On a $-\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{3l^2}{r^4}(1 - 3\sin^2(\theta))$ est positif (force répulsive) si $\left|\sin(\theta)\right| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et négative (force attractive) si $\left|\sin(\theta)\right| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. La position limite est donc obtenue lorsque $\left|\sin(\theta)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Sol.4) ❑ f est continue sur le disque fermé borné dans $\mathbb{R}^2$, donc admet un maximum (voir le chapitre L2/EVNORME.PDF). Ce maximum peut être choisi à l'intérieur du disque, puisque, s'il est atteint au bord, il est nul, donc il est aussi atteint en (0, 0). Soit (a, b) un point intérieur au disque où le maximum de f est atteint.

La fonction $x \to f(x, b)$ admet un maximum en a donc sa dérivée première s'annule en ce point. Sa dérivée seconde est négative ou nulle en a car si elle était strictement positive, elle le serait également au voisinage de a donc la dérivée première serait strictement croissante et s'annulant en a, elle serait négative à gauche de a et positive après, donc a serait un minimum local strict de la fonction $x \to f(x, b)$ en contradiction avec le fait que (a, b) est un maximum de f. De même pour la fonction $y \to f(a, y)$. La négativité de ces deux dérivées secondes donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \leq 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \leq 0$$

donc en sommant : $\Delta f(a,b) \leq 0$.

❑ De même, en raisonnant sur un minimum de f intérieur au disque, on aura en ce point $\Delta f \geq 0$.

❑ Donc Δf change de signe. Si $\Delta f(x_0, y_0) > 0$ et $\Delta f(x_1, y_1) < 0$, considérer la fonction Δf sur le segment joignant (x_0, y_0) à (x_1, y_1). Le théorème des valeurs intermédiaires nous indique que cette fonction va s'y annuler.

Sol.5) a) Dans la base ($\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$), $\boldsymbol{grad}$(V) a pour composante $\left(-\dfrac{2\cos(\theta)}{r^3}, -\dfrac{\sin(\theta)}{r^3}\right)$. Or une courbe paramétrée en polaire par $\boldsymbol{OM} = r\boldsymbol{e}_r = f(\theta)\boldsymbol{e}_r$ a pour vecteur directeur de la tangente en M :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\boldsymbol{e}_r + f(\theta)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\boldsymbol{e}_r + f(\theta)\boldsymbol{e}_\theta$$

On veut que $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}\theta}$ soit colinéaire à $\boldsymbol{grad}$(V), et donc que $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{2\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ soit $\ln(|f|) = 2\ln(|\sin\theta|) + \mathrm{Cte}$, ou $f = k\sin^2(\theta)$, k étant une constante. Les lignes de champ ont donc pour équation polaire $r = k\sin^2(\theta)$.

b) le gradient a pour composante $\left(\dfrac{y^2 - 2x^2}{r^5}, -\dfrac{3xy}{r^5}\right)$. On souhaite que, pour toute ligne de champ, $(x'(t), y'(t))$ soit colinéaire à ce gradient, ce qui donne l'équation :

$$3x(t)y(t)\,x'(t) + (y(t)^2 - 2x(t)^2)\,y'(t) = 0$$

en calculant le déterminant des deux vecteurs.

La forme différentielle n'est pas exacte. Si on multiplie par $g(y)$, on souhaite que :

$$\frac{\partial}{\partial y}(3xy\,g(y)) = \frac{\partial}{\partial x}((y^2 - 2x^2)\,g(y))$$

$$\Leftrightarrow \qquad 3xg(y) + 3xyg'(y) = -4xg(y)$$

Il suffit que $7g(y) + 3yg'(y) = 0$ et une solution est donnée par $g(y) = \dfrac{1}{y^{7/3}}$. On obtient alors la forme différentielle :

$$g(y)\omega = \frac{3x}{y^{4/3}}\,\mathrm{d}x + \frac{y^2 - 2x^2}{y^{7/3}}\,\mathrm{d}y$$

qu'on souhaite égaler à $\mathrm{dF} = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\mathrm{d}y$. On a alors $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\mathrm{d}y = g(y)\omega$, et donc :

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} &= \frac{3x}{y^{4/3}} \\ \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} &= \frac{y^2 - 2x^2}{y^{7/3}} \end{aligned}\right.$$

Une solution à la première équation est donnée par $\mathrm{F}(x, y) = \dfrac{3x^2}{2y^{4/3}} + \varphi(y)$ avec φ fonction de classe C^1 quelconque. En reportant dans la deuxième équation, on obtient $\varphi'(y) = \dfrac{y^2}{y^{7/3}} = \dfrac{1}{y^{1/3}}$ d'où $\varphi(y) = \dfrac{3y^{2/3}}{2} + \mathrm{Cte}$. On peut prendre comme primitive de ω :

$$\mathrm{F}(x, y) = \frac{3x^2}{2y^{4/3}} + \frac{3y^{2/3}}{2}$$

Pour tout t, on a enfin :

$$3x(t)y(t)\,x'(t) + (y(t)^2 - 2x(t)^2)\,y'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \omega(x'(t), y'(t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad g(y(t))\,\omega(x'(t), y'(t)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x(t), y(t))\,x'(t) + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(x(t), y(t))\,y'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{F}(x(t), y(t)) = 0 \qquad \text{en appliquant la règle de dérivation des fonctions composées}$$

$\Leftrightarrow \qquad F(x(t), y(t)) = \text{Cte}$

Donc les lignes de champ ont pour équation :

$$\frac{3x^2}{2y^{4/3}} + \frac{3y^{2/3}}{2} = \text{Cte}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 = \frac{2\text{Cte}}{3} y^{4/3} = k\, y^{4/3} \qquad \text{en renommant la constante}$$

c) L'équation cartésienne équivaut à $r^2 = kr^{4/3}(\sin(\theta))^{4/3}$ ou encore à $r^2 = k^3 \sin^4(\theta)$, ou à $r = k^{3/2} \sin^2(\theta)$. On retrouve les solutions du a).

Dans le b), on a supposé que y ne s'annulait pas. Il convient d'ajouter aux lignes de champ la solution $y = 0$. Celle-ci ne peut se mettre sous la forme $r = f(\theta)$ et échappe également à la résolution du a).

Sol.6) Les vérifications peuvent se faire par calcul direct sur les composantes (parfois fastidieux), mais on s'efforce ici à utiliser les formules du formulaire I, ou bien les formules de Green-Ostrogradski et de Stokes.

❑ $\mathrm{d}(\boldsymbol{PM}) = \mathrm{Id}$ puisque, si on fait varier M jusqu'en M', on a

$$\boldsymbol{PM}' = \boldsymbol{PM} + \boldsymbol{MM}'$$

La partie linéaire en $\boldsymbol{MM}'$ de cette dernière expression, qui n'est autre que $\boldsymbol{MM}'$ elle-même, est par définition la différentielle de la fonction $M \to \boldsymbol{PM}$ appliquée sur le vecteur $\boldsymbol{MM}'$. Donc

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{PM})(\boldsymbol{MM}') = \boldsymbol{MM}'$$

donc $\quad \mathrm{d}(\boldsymbol{PM}) = \mathrm{Id}$

Remarquons que Id est un opérateur symétrique, donc $\mathrm{d}(\boldsymbol{PM})^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$.

❑ On calcule $\boldsymbol{grad}(\frac{1}{\mathrm{PM}^3})$ en utilisant la formule $\boldsymbol{grad}(h \circ f) = (h' \circ f)\, \boldsymbol{grad}(f)$, avec :

$$f = \mathrm{PM}^2 = \langle \boldsymbol{PM}, \boldsymbol{PM} \rangle \qquad \text{et} \qquad h(t) = \frac{1}{t^{3/2}}$$

La formule $\boldsymbol{grad}(\langle X, Y\rangle) = \mathrm{d}X^*(Y) + \mathrm{d}Y^*(X)$, appliquée à $X = Y = \boldsymbol{PM}$ donne, compte tenu de la relation précédemment trouvée $\mathrm{d}(\boldsymbol{PM})^* = \mathrm{Id}$:

$$\boldsymbol{grad}(f) = \mathrm{Id}(\boldsymbol{PM}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{PM}) = 2\boldsymbol{PM}$$

Par ailleurs, $h'(t) = -\frac{3}{2t^{5/2}}$

donc $\quad \boldsymbol{grad}(\frac{1}{\mathrm{PM}^3}) = -\frac{3}{2(\mathrm{PM}^2)^{5/2}} \times 2\boldsymbol{PM} = -3\, \frac{\boldsymbol{PM}}{\mathrm{PM}^5}$

Plus généralement, pour tout α, $\boldsymbol{grad}(\mathrm{PM}^\alpha) = \alpha\, \mathrm{PM}^{\alpha-2}\, \boldsymbol{PM}$ en prenant $h(t) = t^{\alpha/2}$.

❑ On calcule $\boldsymbol{grad}(\langle \boldsymbol{PM}, \boldsymbol{v}\rangle) = \boldsymbol{v}$ au moyen de la formule $\boldsymbol{grad}(\langle X, Y\rangle) = \mathrm{d}X^*(Y) + \mathrm{d}Y^*(X)$, sachant que $\boldsymbol{v}$ est constant, donc de différentielle nulle, et que $\mathrm{d}(\boldsymbol{PM})^* = \mathrm{Id}$. On obtient directement :

$$\boldsymbol{grad}(\langle \boldsymbol{PM}, \boldsymbol{v}\rangle) = \mathrm{Id}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$$

❑ On a :

$$\boldsymbol{grad}(\frac{1}{\mathrm{PM}^3} \langle \boldsymbol{PM}, \boldsymbol{v}\rangle) = \frac{1}{\mathrm{PM}^3}\, \boldsymbol{grad}(\langle \boldsymbol{PM}, \boldsymbol{v}\rangle) + \langle \boldsymbol{PM}, \boldsymbol{v}\rangle\, \boldsymbol{grad}(\frac{1}{\mathrm{PM}^3})$$

en utilisant la formule $\boldsymbol{grad}(fg) = g\, \boldsymbol{grad}(f) + f\, \boldsymbol{grad}(g)$

$$= \frac{\boldsymbol{v}}{\mathrm{PM}^3} - \frac{3\langle \boldsymbol{PM}, \boldsymbol{v}\rangle}{\mathrm{PM}^5}\, \boldsymbol{PM}$$

en utilisant les deux résultats précédents

❑ div(***PM***) = Tr(d(***PM***)) = Tr(Id) = 3. Mais on peut aussi utiliser la formule de Green-Ostrogradski $\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle = \iiint_V \text{div}(X)\, d\tau$ sur la sphère Σ de centre P donné et de rayon r, V étant la boule de même centre et de même rayon, avec X(M) = ***PM***. L'intégrale de gauche $\iint_\Sigma \langle X, d\boldsymbol{S}\rangle$ n'est autre que $\iint_\Sigma r\, dS = 4\pi r^3$. L'intégrale de droite vaut div(X)(P) $\frac{4\pi r^3}{3}$ + o(r^3) quand r tend vers 0. Donc, après simplification par r^3 et passage à la limite, div(X)(P) = 3.

❑ On calcule div($\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}$) en utilisant la formule div(fX) = <***grad***(f), X> + f div(X) avec X = ***PM*** et $f = \frac{1}{\text{PM}^3}$. On a montré précédemment que div(***PM***) = 3 et que ***grad***($\frac{1}{\text{PM}^3}$) = – 3 $\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^5}$. D'où :

$$\text{div}\left(\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}\right) = -3\,\frac{\langle \boldsymbol{PM}, \boldsymbol{PM}\rangle}{\text{PM}^5} + \frac{3}{\text{PM}^3} = \frac{3}{\text{PM}^3} - \frac{3}{\text{PM}^3} = 0$$

❑ ***Rot***(***PM***) = 0 car, pour X = ***PM*** qui vérifie dX = dX* = Id, on a dX – dX* = 0. Or ***Rot***(X) est le vecteur tel que, pour tout ***u***, ***Rot***(X) × ***u*** = (dX – dX*)(***u***) = 0. Donc ***Rot***(X) = 0.
On peut aussi utiliser la formule de Stokes $\int_\Gamma \langle X, d\boldsymbol{M}\rangle = \iint_\Sigma \langle \boldsymbol{Rot}(X), d\boldsymbol{S}\rangle$ en prenant pour Γ un cercle de centre P et de rayon r et pour Σ le disque correspondant. Soit X(M) = ***PM***. L'intégrale de gauche $\int_\Gamma \langle X, d\boldsymbol{M}\rangle$ est nulle car X est porté par un rayon, et d***M*** est tangent au cercle donc orthogonal à ce rayon. Il en résulte que l'intégrale de droite est également nulle. Or elle vaut <***Rot***(X)(P), πr^2***N***> + o(r^2) quand r tend vers 0, avec ***N*** vecteur unitaire orthogonal au plan contenant Γ et orienté par l'orientation de Γ. Divisant par r^2 et faisant tendre r vers 0, on obtient :

$$\langle \boldsymbol{Rot}(X)(P), \boldsymbol{N}\rangle = 0$$

N pouvant être pris dans une direction quelconque, on en déduit que ***Rot***(X) = 0.

❑ On calcule ***Rot***($\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}$) en utilisant la formule ***Rot***(fX) = ***grad***(f) × X + f ***Rot***(X), avec X = ***PM*** et $f = \frac{1}{\text{PM}^3}$. On a vu que ***grad***(f) = – 3 $\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^5}$ et ***Rot***(X) = 0. Donc :

$$\boldsymbol{Rot}\left(\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}\right) = -3\,\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^5} \times \boldsymbol{PM} + 0 = 0$$

On peut aussi remarque que $\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3} = -\,\boldsymbol{grad}\left(\frac{1}{\text{PM}}\right)$, d'où la nullité de ***Rot***($\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}$) puisque le rotationnel d'un gradient est nul.

❑ On calcule div(***PM*** × ***v***) en utilisant la formule div(X × Y) = <***Rot***(X),Y> – <X, ***Rot***(Y)>, avec X = ***PM*** et Y = ***v***. Y est constant donc de rotationnel nul. Par ailleurs, on a vu que ***Rot***(***PM***) = 0. Donc div(***PM*** × ***v***) = 0.

❑ La même démonstration s'applique à div($\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3} \times \boldsymbol{v}$) avec X = $\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}$, lui aussi de rotationnel nul.

❑ On calcule $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{PM} \times \boldsymbol{v})$ en utilisant la formule :

$$\boldsymbol{Rot}(X \times Y) = (dX(Y) - \text{div}(X)Y) - (dY(X) - \text{div}(Y)X)$$

avec X = $\boldsymbol{PM}$ et Y = $\boldsymbol{v}$. Y est constant, donc dY = 0 et div(Y) = 0. Par ailleurs, on a vu que dX = Id et div(X) = 3. Donc :

$$\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{PM} \times \boldsymbol{v}) = \text{Id}(\boldsymbol{v}) - 3\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{v}$$

❑ On calcule $\boldsymbol{Rot}(\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3} \times \boldsymbol{v})$ par la même démarche, avec X = $\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}$.

Calculons d'abord d($\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}$) en utilisant la formule d(fY) = df Y + f dY, avec Y = $\boldsymbol{PM}$ et $f(\text{M}) = \frac{1}{\text{PM}^3}$.

On a vu précédemment que d($\boldsymbol{PM}$) = Id et que $\boldsymbol{grad}(\frac{1}{\text{PM}^3}) = -3\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^5}$, donc d$f$ est l'application $\boldsymbol{u} \to \langle \boldsymbol{grad}(f), \boldsymbol{u}\rangle = \langle -3\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^5}, \boldsymbol{u}\rangle$. On a donc :

$$d(\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}) = \langle -3\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^5}, .\rangle\, \boldsymbol{PM} + \frac{\text{Id}}{\text{PM}^3} = \frac{\text{Id}}{\text{PM}^3} - 3\langle\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^5}, .\rangle\, \boldsymbol{PM}$$

où l'on a indiqué par un point dans le produit scalaire l'emplacement de la variable.

On a vu également que div($\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}$) = 0. Donc :

$$\boldsymbol{Rot}(\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3} \times \boldsymbol{v}) = (\frac{\text{Id}}{\text{PM}^3} - 3\langle\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^5}, .\rangle\, \boldsymbol{PM})(\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{v}}{\text{PM}^3} - \frac{3\langle\boldsymbol{PM}, \boldsymbol{v}\rangle}{\text{PM}^5}\boldsymbol{PM}$$

REMARQUE :

On ne manquera pas de remarquer que $\boxed{\boldsymbol{Rot}(\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{grad}(\langle\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}, \boldsymbol{v}\rangle)}$. On peut comparer :

$$\boldsymbol{Rot}(X \times Y) = (dX(Y) - \text{div}(X)Y) - (dY(X) - \text{div}(Y)X)$$

et $\quad \boldsymbol{grad}(\langle X, Y\rangle) = dX^*(Y) + dY^*(X)$

Il y a égalité entre les deux si, simultanément :

Y est constant (ce qui est le cas pour Y = $\boldsymbol{v}$),

div(X) = 0 (ce qui est le cas pour X = $\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}$)

et $\quad$ dX = dX*, ce qui est le cas pour dX = d($\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^3}$) = $\frac{\text{Id}}{\text{PM}^3} - 3\langle\frac{\boldsymbol{PM}}{\text{PM}^5}, .\rangle\, \boldsymbol{PM}$, comme on pourra le vérifier.

On a alors :

$$\boldsymbol{Rot}(X \times Y) = dX(Y) = \boldsymbol{grad}(\langle X, Y\rangle)$$

Cette formule explique par exemple, en électromagnétisme, la ressemblance troublante entre l'expression du champ électrique $\boldsymbol{E}$ créé par un dipôle électrique de moment $\boldsymbol{p}$ placé en P, et le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ créé par un dipôle magnétique de moment $\boldsymbol{\mu}$, placé en P.

En effet, $\boldsymbol{E}$ dérive d'un potentiel scalaire V par l'intermédiaire du gradient, V s'exprimant comme un produit scalaire :

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{grad}(V) = -\boldsymbol{grad}(\langle\frac{\boldsymbol{PM}}{r^3}, \boldsymbol{v}\rangle) \qquad \text{avec } \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0}$$

et $\boldsymbol{B}$ dérive d'un potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ par l'intermédiaire du rotationnel, $\boldsymbol{A}$ s'exprimant comme un produit vectoriel :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{A}) = -\,\boldsymbol{Rot}\left(\frac{\boldsymbol{PM}}{r^3} \times \boldsymbol{v}\right) \qquad \text{avec } \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{4\pi\varepsilon_0 c^2}$$

L'égalité $\boldsymbol{grad}(<\frac{\boldsymbol{PM}}{r^3}, \boldsymbol{v}>) = \boldsymbol{Rot}(\frac{\boldsymbol{PM}}{r^3} \times \boldsymbol{v})$ conduit à donner les mêmes expressions pour $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, à condition de remplacer $\boldsymbol{p}$ par $\frac{\boldsymbol{\mu}}{c^2}$.

Sol.7) Plaçons-nous en coordonnées sphériques de centre P. On a $X = \frac{1}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r$. Il s'agit de trouver $\boldsymbol{A}$ tel que :

$$\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{A}) = X$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\sin(\theta)A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{1}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r$$

❑ Cherchons s'il existe un tel $\boldsymbol{A}$ avec $A_\varphi = 0$. On obtient le système :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} = \dfrac{1}{r^2} \\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} = 0 \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} = -\dfrac{\sin(\theta)}{r} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} = 0 \\ \dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} = \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta} \end{cases}$$

La première équation donne par exemple $A_\theta = -\frac{\varphi\sin(\theta)}{r}$. On a alors $rA_\theta = -\,\varphi\sin(\theta)$ qui ne dépend pas de r, donc la troisième équation donne $\frac{\partial A_r}{\partial\theta} = 0$. $A_r = 0$ vérifie alors les deux dernières équations, et on peut prendre comme solution locale $\boldsymbol{A} = -\frac{\varphi\sin(\theta)}{r}\,\boldsymbol{e}_\theta$. Ce n'est pas une solution globale, car après un tour complet selon φ, on revient au même point avec une valeur différente de $\boldsymbol{A}$. Il n'y a pas de solution globale sur l'espace en raison de la singularité de X en P.

❑ On peut aussi chercher une solution avec $A_\theta = A_r = 0$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial(\sin(\theta)A_\varphi)}{\partial\theta} = \dfrac{1}{r^2} \\ \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \dfrac{A_\varphi}{r} = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $\frac{\partial(\sin(\theta)A_\varphi)}{\partial\theta} = \frac{\sin(\theta)}{r}$, donc, par exemple :

$$\sin(\theta)A_\varphi = -\frac{\cos(\theta)}{r}$$

donc $\quad A_\varphi = -\dfrac{\text{cotan}(\theta)}{r}$, qui vérifie bien aussi la deuxième équation.

On obtient ainsi une autre solution possible : $\boldsymbol{A} = -\dfrac{\text{cotan}(\theta)}{r}\,\boldsymbol{e}_\varphi$.

❑ La différence entre les deux solutions est $\dfrac{\text{cotan}(\theta)}{r}\,\boldsymbol{e}_\varphi - \dfrac{\varphi\sin(\theta)}{r}\,\boldsymbol{e}_\theta$. Son rotationnel, égal à X – X, est nul. On pourra vérifier que cette différence est égale au gradient de $\varphi\cos(\theta)$.

❑ D'autres solutions peuvent être obtenues en ajoutant à l'une des solutions trouvées n'importe quel gradient.

Sol.8) Les deux expressions sont des formes trilinéaires alternées de $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. Elles sont donc toutes deux proportionnelles au produit mixte $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$. Pour déterminer leur coefficient de proportionnalité respectifs, il suffit de les appliquer sur la base canonique $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}; \boldsymbol{k})$ de $\mathbb{R}^3$.

Posons $\omega = \text{P}dx + \text{Q}dy + \text{R}dz$ et $\omega' = \text{U}\,dy \wedge dz + \text{V}\,dz \wedge dx + \text{W}\,dx \wedge dy$. On a :

$\omega \wedge \omega' = (\text{PU} + \text{QV} + \text{RW})\,dx \wedge dy \wedge dz$, $dx \wedge dy \wedge dz$ étant la forme trilinéaire alternée égale au produit mixte. Donc :

$$(\omega \wedge \omega')(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = (\text{PU} + \text{QV} + \text{RW})\,[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = \text{PU} + \text{QV} + \text{RW}$$
$$\omega(\boldsymbol{i}) = \text{P}$$
$$\omega(\boldsymbol{j}) = \text{Q}$$
$$\omega(\boldsymbol{k}) = \text{R}$$
$$\omega'(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = \text{U}$$
$$\omega'(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}) = \text{V}$$
$$\omega'(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \text{W}$$

donc $\quad \omega(\boldsymbol{i})\omega'(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) + \omega(\boldsymbol{j})\omega'(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}) + \omega(\boldsymbol{k})\omega'(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \text{PU} + \text{QV} + \text{RW}$

On a donc :

$$(\omega \wedge \omega')(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \omega(\boldsymbol{u})\omega'(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \omega(\boldsymbol{v})\omega'(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) + \omega(\boldsymbol{w})\omega'(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\text{PU} + \text{QV} + \text{RW})\,[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$$

Sol.9) a) $\text{M} = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$. Pour $t \neq 0$, le vecteur tangent est $\dfrac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Le vecteur normal est $\begin{pmatrix} -\cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix}$, qui est colinéaire à $\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$. On a :

$\text{B} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{E} = \begin{pmatrix} \pi - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$ $\qquad$ même ordonnée que M et à une distance 1 du centre $(\pi, 1)$

$\text{G} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ d'ordonnée nulle et telle que $\boldsymbol{GM}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{BE} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{GM}$ $\qquad$ donc MEBG est un parallélogramme

$\text{A} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{EA} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 1 + \cos(t) \end{pmatrix} = 2\cos(\frac{t}{2}) \begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$ colinéaire à la tangente en M à la cycloïde

La cycloïde est la trajectoire d'un point M d'un cercle qui roule sans glisser sur l'axe Ox. A un instant t donné, le centre de rotation instantanée est le point de l'axe Ox, et le vecteur vitesse de M est perpendiculaire au segment reliant M à ce centre. Le centre de rotation est donc sur la normale à la cycloïde passant par M. C'est donc le point G. Si on translate le cercle BEA de façon à faire coïncider E et M, alors B vient en coïncidence avec le centre de rotation instantanée donc avec G. Il est donc normal que ***BE*** = ***GM***. La tangente est parallèle à (AE) car orthogonale à ***GM*** ou à ***BE***, or AEB est rectangle en E, étant un triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre.

b) $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}$ a pour norme $2\sin(\dfrac{t}{2})$ donc la longueur de l'arc AM vaut :

$$\int_t^\pi \|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}\|\,\mathrm{d}t = \int_t^\pi 2\sin(\frac{u}{2})\,\mathrm{d}u$$

il vaut mieux changer le nom de la variable d'intégration

$$= 4\cos(\frac{t}{2})$$

qui le double de AE.

c) Prolongeons (ME) en H sur (AB). L'aire de AMH se calcule à l'aide de Green-Riemann, par exemple $= \int -y\,\mathrm{d}x = -(1-\cos(t))(\pi - t + \sin(t)) + \int_t^\pi (1-\cos(u))^2\,\mathrm{d}u$

$$= -(1-\cos(t))(\pi - t + \sin(t)) + \int_t^\pi \frac{3}{2} - 2\cos(u) + \frac{\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u$$

$$= -(1-\cos(t))(\pi - t + \sin(t)) + \frac{3}{2}(\pi - t) + 2\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{4}$$

L'aire du trapèze MGBH vaut $(1-\cos(t))(\pi - t + \dfrac{\sin(t)}{2})$

Donc l'aire de la portion de cycloïde MGBA est la somme des deux, à savoir :

$$-\frac{(1-\cos(t))\sin(t)}{2} + \frac{3}{2}(\pi - t) + 2\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{4} = \frac{3}{2}(\pi - t + \sin(t))$$

En ce qui concerne le disque, on ajoute l'aire du triangle BEH à celui de la partie HEZA ce qui donne, en utilisant la formule de Green-Riemann $\int x\,\mathrm{d}y$ pour la partie HEZA :

$$\frac{(1-\cos(t))\sin(t)}{2} + \int_t^\pi \sin^2(u)\,\mathrm{d}u = \frac{(1-\cos(t))\sin(t)}{2} + \int_t^\pi \frac{1-\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{(1-\cos(t))\sin(t)}{2} + \frac{\pi - t}{2} + \frac{\sin(t)\cos(t)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\pi - t + \sin(t))$$

Les deux aires calculées sont bien dans le rapport de 3 à 1.

Sol.10) a) $f\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\dfrac{\partial f}{\partial x})^2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ avec $Q = f\dfrac{\partial f}{\partial x}$. De même, $f\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + (\dfrac{\partial f}{\partial y})^2 = -\dfrac{\partial P}{\partial y}$ avec $P = -f\dfrac{\partial f}{\partial y}$

donc la somme des intégrales des deux membres vaut :

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

d'après le théorème de Green-Riemann, en orientant Γ dans le sens trigonométrique.

$$= 0$$

car P = Q = 0 sur Γ

b) Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur D, alors $\displaystyle\iint_D (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 \, dx dy = 0$ d'après le a). La fonction $(\dfrac{\partial f}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial f}{\partial y})^2$ est continue, positive ou nulle et d'intégrale nulle donc est identiquement nulle sur D. Mais $(\dfrac{\partial f}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial f}{\partial y})^2$ n'est autre que $\| \mathbf{grad}(f) \|^2$ (avec la norme euclidienne, donc $\mathbf{grad}(f)$ est nulle sur D, donc[1] f est constante sur D, et étant nulle sur Γ, f est nulle sur D.

On a montré qu'une fonction harmonique nulle sur le bord d'un domaine est nulle dans ce domaine.

Sol.11) L'hypothèse div(X) = 0 signifie que Tr(dX) = 0.

L'hypothèse $\mathbf{Rot}$(X) = 0 signifie que, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, $\mathbf{Rot}(X) \times \boldsymbol{u} = 0 = dX(\boldsymbol{u}) - dX^*(\boldsymbol{u})$, et donc que dX = dX*. dX est un opérateur symétrique.

a) Si la direction constante est dirigée par le vecteur $\boldsymbol{v}$, alors l'hypothèse énonce que $X \times \boldsymbol{v} = 0$, ou que, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, $\langle X \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = 0 = \langle X, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}\rangle$.

Donc :

$$\begin{cases} \forall \boldsymbol{u}, \mathbf{grad}(\langle X, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}\rangle) = 0 \\ \mathbf{Rot}(X \times \boldsymbol{v}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \boldsymbol{u}, dX^*(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) = 0 \\ dX(\boldsymbol{v}) - \mathrm{div}(X)\boldsymbol{v} = 0 \end{cases} \qquad \text{d'après les formules e) et i) du formulaire I}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \boldsymbol{u}, \forall \boldsymbol{w}, \langle \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}, dX(\boldsymbol{w})\rangle = 0 = \langle dX(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle \\ dX(\boldsymbol{v}) = 0 \end{cases} \qquad \text{car on a supposé div(X) = 0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \boldsymbol{w}, dX(\boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{v} = 0 \\ dX(\boldsymbol{v}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}(dX) \subset \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}) \\ dX(\boldsymbol{v}) = 0 \end{cases}$$

Mais comme dX = dX*, on a aussi $\mathrm{Im}(dX^*) \subset \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v})$. Or on montre dans les exercices de L2/PREHILB.PDF que $\mathrm{Im}(dX^*) = \mathrm{Ker}(dX)^\perp$. On a donc $\mathrm{Ker}(dX)^\perp \subset \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v})$, donc $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v})^\perp \subset \mathrm{Ker}(dX)$. Comme la deuxième équation $dX(\boldsymbol{v}) = 0$ signifie que $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(dX)$, on a aussi $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}) \subset \mathrm{Ker}(dX)$, et donc $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}) + \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v})^\perp \subset \mathrm{Ker}(dX)$. Donc dX est identiquement nul, et X est constant (propriété prouvée dans le chapitre L2/CALCDIF2.PDF).

b) On a <X, X> = Cte, donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{grad}(\langle X, X\rangle) \\ &= 2dX^*(X) && \text{d'après la formule (e) du formulaire I} \\ &= 2dX(X) && \text{car on a supposé que dX* = dX. A fortiori :} \end{aligned}$$

donc a fortiori :

$$0 = \mathrm{div}(dX(X)) = \mathrm{Tr}(d(dX(X))) = \mathrm{Tr}(d^2X(., X) + dX \circ dX)$$

On a aussi $\Delta X = 0$ en vertu de la formule j) du formulaire I et des hypothèses div(X) = 0 et $\mathbf{Rot}$(X) = 0. Donc, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(\langle X, \boldsymbol{u}\rangle) = \mathrm{div}(\mathbf{grad}(\langle X, \boldsymbol{u}\rangle)) = \mathrm{div}(dX^*(\boldsymbol{u})) = \mathrm{div}(dX(\boldsymbol{u})) \\ &= \mathrm{Tr}(d(dX(\boldsymbol{u}))) = \mathrm{Tr}(d^2X(., \boldsymbol{u})) \end{aligned}$$

En particulier, on a $\mathrm{Tr}(d^2X(., X)) = 0$.

Donc $\mathrm{Tr}(dX \circ dX) = 0$, donc, puisque dX* = dX, $\mathrm{Tr}(dX^* \circ dX) = 0$. Or l'application $\varphi \in L(\mathbf{R}^3) \to \sqrt{\mathrm{Tr}(\varphi^* \circ \varphi)}$ est une norme euclidienne sur $L(\mathbf{R}^3)$ issue du produit scalaire

[1] Dans le chapitre L2/CALCDIF2.PDF, on a montré que, si $\mathbf{grad}(f)$ est nulle sur un ouvert convexe, alors f est constante. Cette propriété reste vraie sur un ouvert connexe, la connexité étant vue dans le chapitre L3/TOPOLOG.PDF.

$(\varphi, \psi) \to \mathrm{Tr}(\varphi^* \circ \psi)$ (voir le chapitre L1/ESPEUCL.PDF où un tel produit scalaire est donné pour les matrices carrées). Donc dX = 0 et X est constante.

c) La tangente à une ligne de champ $t \to M(t)$ est par définition le champ lui-même, de sorte que, pour tout t, il existe $\lambda(t)$ tel que $M'(t) = \lambda(t)X(M(t))$. Quitte à changer le paramètre t par un paramètre s tel que $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \lambda(t)$, on peut supposer que $\lambda = 1$. On aura ainsi M' = X(M). Pour montrer que les lignes de champ sont parallèles, il suffit de montrer que M' est constant, ou que M'' = 0. C'est bien le cas car :

$$\begin{aligned} M'' &= dX(M') = dX(X) \\ &= dX^*(X) && \text{car } dX = dX^* \text{ puisque } \boldsymbol{Rot}(X) = 0 \\ &= \boldsymbol{grad}(\langle X, X\rangle) && \text{comme on l'a vu dans le b).} \\ &= 0 && \text{puisque } \langle X, X\rangle \text{ est constant} \end{aligned}$$

Sol.12) On doit vérifier :

❑ $\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\boldsymbol{E}) &= \mathrm{div}(\exp(i(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t))\, \boldsymbol{E}_0) \\ &= \langle \boldsymbol{grad}(\exp(i(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t))) \mid \boldsymbol{E}_0\rangle \end{aligned}$$

en utilisant la formule f) du formulaire I,
compte tenu du fait que $\boldsymbol{E}_0$ est constant

$$= \langle i\exp(i(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t))\, \boldsymbol{grad}(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle) \mid \boldsymbol{E}_0\rangle$$

en utilisant la formule d) du formulaire I,
avec $f(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle$ et $h(u) = \exp(i(u - \omega t))$

$$\begin{aligned} &= i\exp(i(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t))\, \langle \boldsymbol{grad}(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle) \mid \boldsymbol{E}_0\rangle \\ &= i\exp(i(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t))\, \langle \mathrm{d}\boldsymbol{r}^*(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{E}_0\rangle \end{aligned}$$

en utilisant la formule e) du formulaire I, sachant que $\boldsymbol{k}$ est constant

$$= i\exp(i(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t))\, \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}_0\rangle$$

car $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ est l'opérateur identité

Par conséquent, l'équation $\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = 0$ est vérifiée si et seulement si $\boldsymbol{E}_0$ et plus généralement $\boldsymbol{E}$ est orthogonal au vecteur $\boldsymbol{k}$. Nous supposerons cette condition remplie dans la suite.

❑ $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E}) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E}) &= \boldsymbol{Rot}(\exp(i(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t))\, \boldsymbol{E}_0) \\ &= \boldsymbol{grad}(\exp(i(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t)) \times \boldsymbol{E}_0 \end{aligned}$$

en utilisant la formule h), compte tenu du fait que $\boldsymbol{E}_0$ est constant.

$$= i\exp(i(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t))\, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0$$

en réutilisant le calcul du gradient fait juste auparavant

On obtient $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E}) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ en prenant $\boldsymbol{B}$ tel que :

$$-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = i\exp(i(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t))\, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0$$

soit $\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{\omega} \exp(i(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t))\, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0$, à une constante d'intégration près qu'on prend nulle (physiquement, une constante non nulle reviendrait à ajouter un champ magnétique constant à l'ensemble de l'univers). Remarquer que $\boldsymbol{B}$ est orthogonal à $\boldsymbol{k}$ et à $\boldsymbol{E}$. On peut poser $\boldsymbol{B}_0 = \dfrac{1}{\omega}\, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0$, donnant pour $\boldsymbol{B}$ une expression tout à fait comparable à celle de $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{B} = \exp(i(<\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}> - \omega t))\, \boldsymbol{B}_0$$

❑ div($\boldsymbol{B}$) = 0 : Cette condition est vérifiée, car $\boldsymbol{B}$ est orthogonal à $\boldsymbol{k}$. Or on a vu dans le calcul de div($\boldsymbol{E}$) que cette condition était nécessaire et suffisante pour que la divergence du champ soit nul.

❑ $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$:

Comme pour le calcul de $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E})$, on aura :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B}) &= i\exp(i(<\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}> - \omega t))\, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_0 \\
&= \frac{i}{\omega} \exp(i(<\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}> - \omega t))\, \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0) \\
&= \frac{i}{\omega} \exp(i(<\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}> - \omega t))\, (<\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}_0>\, \boldsymbol{k} - <\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}>\, \boldsymbol{E}_0)
\end{aligned}$$

en utilisant la formule du double produit vectoriel

$\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}>\, \boldsymbol{v} - <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>\, \boldsymbol{w}$

voir le chapitre sur les déterminants L1/DETERMNT.PDF

$$= -\frac{i}{\omega} <\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}> \exp(i(<\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}> - \omega t))\, \boldsymbol{E}_0$$

car on a pris $\boldsymbol{E}_0$ orthogonal à $\boldsymbol{k}$

alors que :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2} \exp(i(<\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}> - \omega t))\, \boldsymbol{E}_0$$

Les deux quantités sont égales si et seulement si $<\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}> = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ soit $\| \boldsymbol{k} \| = \dfrac{\omega}{c}$.

On a alors :

$$\| \boldsymbol{E} \| = \| \boldsymbol{E}_0 \|$$

$$\| \boldsymbol{B} \| = \| \boldsymbol{B}_0 \| = \frac{1}{\omega} \| \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0 \| = \frac{1}{\omega} \| \boldsymbol{k} \| \, \| \boldsymbol{E}_0 \| \quad \text{car } \boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{E}_0$$

$$= \frac{1}{c} \| \boldsymbol{E} \| \qquad \text{puisque } \| \boldsymbol{k} \| = \frac{\omega}{c}$$

◆