# ESPACES HERMITIENS

### *Plan*



L'objet de ce chapitre est d'étendre la notion de produit scalaire aux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.

## *I : Produit scalaire complexe*

### 1- Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On souhaite définir un produit scalaire $\langle x \mid y \rangle$ de façon que $\langle x \mid x \rangle$ soit un réel positif ou nul, qui représentera le carré de la norme de $x$. Cela impose alors à $\langle \lambda x \mid \lambda x \rangle$ d'être égal à $|\lambda|^2 \langle x \mid x \rangle$ et non à $\lambda^2 \langle x \mid x \rangle$, pour tout $\lambda$ complexe. Il faut donc admettre que la bilinéariré n'est pas valable. Un des $\lambda$ est sorti du produit scalaire sous la même forme, mais un autre $\lambda$ est nécessairement sorti sous forme de conjugué $\overline{\lambda}$. On doit donc avoir par exemple :

$$\langle x \mid \lambda y \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle$$

mais

$$\langle \lambda x \mid y \rangle = \overline{\lambda} \langle x \mid y \rangle$$

Il en résulte qu'il ne peut pas non plus y avoir de symétrie. En effet :

$$\langle \lambda y \mid x \rangle = \overline{\lambda} \langle y \mid x \rangle$$

alors que

$$\langle x \mid \lambda y \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle$$

Pour rendre cette dernière égalité compatible avec les précédentes, une solution consiste à poser :

$$<y \mid x> = \overline{<x \mid y>}$$

On peut aussi se dire que, si $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$ est élement de $\mathbb{C}^n$, alors la façon la plus simple d'obtenir un $<Z \mid Z>$ réel positif est de poser $<Z \mid Z> = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}\, z_i$, ce qui conduit à définir :

**DEFINITION**

*Un espace vectoriel* E *sur* $\mathbb{C}$ *est dit* **préhilbertien** *s'il est muni d'un produit scalaire complexe, à savoir une application de* E × E *dans* $\mathbb{C}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout* $x$ *de* E, *l'application* $y \to <x \mid y>$ *est linéaire. Pour tout* $y$ *de* E, *l'application* $x \to <x \mid y>$ *est* **semi-linéaire**, *ce qui signifie que, pour tout* $(x, x', y) \in E^3$ *et tout complexe* $\lambda$ :

$$<x + x' \mid y> = <x \mid y> + <x' \mid y>$$

$$<\lambda x \mid y> = \overline{\lambda} <x \mid y>$$

*On dit que la forme* $< \mid >$ *est* **sesquilinéaire**.

(ii) $\forall x \in E, \forall y \in E, <y \mid x> = \overline{<x \mid y>}$. *On dit que la forme* $< \mid >$ *est* **hermitienne**.

(iii) $\forall x \in E, <x \mid x> \geq 0$

(iv) $\forall x \in E, <x \mid x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Il peut exister des variantes de notation, certains ouvrages faisant porter la semi-linéarité sur le vecteur de droite $y$ plutôt que sur le vecteur de gauche $x$.

*EXEMPLES* :

❑ Si $E = \mathbb{C}^n$, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, on pose :

$$<X \mid Y> = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i = \overline{X}^{\mathrm{T}}\, Y = X^*Y \qquad \text{en notant } X^* = \overline{X}^{\mathrm{T}}$$

(produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$).

❑ Si $E = C^0([a, b], \mathbb{C})$, espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs complexes, on pose :

$$<f \mid g> = \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

❑ Si E est l'espace des fonctions continues périodiques de périodes $2\pi$ à valeurs complexes, on pose :

$$<f \mid g> = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

**2- Norme**

On associe au produit scalaire une norme :

$$\| x \| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$$

On prendra garde que :

$$\| x + y \|^2 = \langle x + y \mid x + y\rangle = \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle + \langle y \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle$$
$$= \| x \|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x \mid y\rangle) + \| y \|^2$$

Il résulte immédiatement de la définition de cette norme que l'on dispose :

❑ du **théorème de Pythagore** :

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\langle x \mid y\rangle) = 0$$

La condition est vérifiée si $\langle x \mid y\rangle = 0$, autrement dit, si $x$ et $y$ sont **orthogonaux**, mais ce n'est pas nécessaire. Par exemple, dans $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $\langle x \mid y\rangle = \overline{x}\, y$, prenons $x = 1$ et $y = i$. On a :

$$|x + y|^2 = 2 = |x|^2 + |y|^2, \text{ mais } \langle 1 \mid i\rangle = i.$$

❑ Plus généralement, si les $x_i$ sont deux à deux orthogonaux, on a :

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2$$

❑ de la **formule du parallélogramme** :

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2\| x \|^2 + 2\| y \|^2$$

Il suffit de développer le membre de gauche.

❑ de **formules de polarisation**, permettant de retrouver le produit scalaire à partir de la norme :

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x \mid y\rangle)$$
$$\| ix + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle ix \mid y\rangle) = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2\,\mathrm{Re}(i \langle x \mid y\rangle)$$
$$= \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\,\mathrm{Im}(\langle x \mid y\rangle)$$

donc

$$\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{2}(\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2 + i\| ix + y \|^2 - i\| x \|^2 - i\| y \|^2)$$

ou encore :

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x \mid y\rangle)$$
$$\| x - y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle x \mid y\rangle)$$

donc

$$\mathrm{Re}(\langle x \mid y\rangle) = \frac{\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2}{4}$$

donc

$$\mathrm{Im}\, \langle x \mid y\rangle = -\,\mathrm{Re}(\langle x \mid iy\rangle) = -\,\frac{\| x + iy \|^2 - \| x - iy \|^2}{4}$$

donc

$$\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 - i\| x + iy \|^2 + i\| x - iy \|^2)$$

❑ Les **inégalités de Cauchy-Schwarz** et **triangulaire** restent valides :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, |\langle x \mid y\rangle| \leq \| x \| \, \| y \|$$

$\forall x \in E, \forall y \in E, \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

<u>Démonstration</u> :

❑ Commençons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La relation $|<x \mid y>| \leq \| x \| \| y \|$ est triviale si $x$ ou $y$ est nul. Supposons-les non nuls. Considérons l'application suivante :

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$u \to \| x + uy \|^2 = <x + uy \mid x + uy>$$
$$= \| x \| + \bar{u} <y \mid x> + u <x \mid y> + |u|^2 \| y \|^2$$
$$= \| x \|^2 + 2 \text{ Re}(u <x \mid y>) + |u|^2 \| y \|^2$$

Choisissons $u = te^{i\theta}$ avec $t$ réel et $\theta = -\arg(<x \mid y>)$ de façon que $u <x \mid y>$ soit réel, égal à $t|<x \mid y>|$. On obtient alors :

$$\| x + uy \|^2 = \| x \|^2 + 2t\,|<x \mid y>| + t^2 \| y \|^2$$

Il s'agit d'un binôme du second degré en $t$, positif ou nul. Il ne peut donc posséder deux racines réelles distinctes. Son discriminant est donc négatif ou nul, ce qui donne :

$$|<x \mid y>| - \| x \|^2 \| y \|^2 \leq 0$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

❑ Une autre démonstration consiste à considérer la quantité $d = \| \dfrac{<x \mid y>}{\| y \|^2} y - x \|$. On a (en prenant garde que $\| \lambda y - x \|^2 = |\lambda|^2 \| y \|^2 + \| x \|^2 - 2 \text{ Re}(\lambda <y \mid x>)$ et en n'oubliant pas que $<x \mid y>$ est le conjugué de $<y \mid x>$) :

$$d^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|<x \mid y>|^2}{\| y \|^2} + \| x \|^2 - 2 \frac{|<x \mid y>|^2}{\| y \|^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad |<x \mid y>|^2 \leq \| x \|^2 \| y \|^2$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

❑ Dans le cas de $\mathbb{C}^n$, on peut aussi vérifier que, pour toute famille de complexe $z_i$ et $w_i$ :

$$(\sum_{i=1}^{n} z_i\, \bar{z}_i)(\sum_{j=1}^{n} w_j\, \bar{w}_j) = (\sum_{i=1}^{n} z_i\, \bar{w}_i)(\sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j\, w_j) - \sum_{i \neq j} z_i\, \bar{z}_j\, \bar{w}_i\, w_j + \sum_{i \neq j} z_i\, \bar{z}_i\, w_j\, \bar{w}_j$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} z_i\, \bar{w}_i)(\sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i\, w_i) + \sum_{i<j} (z_i\, w_j - z_j\, w_i)(\bar{z}_i\, \bar{w}_j - \bar{z}_j\, \bar{w}_i)$$

soit : $$(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2)(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2) = \left|\sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i\, w_i\right|^2 + \sum_{i<j} |z_i\, w_j - z_j\, w_i|^2 \geq \left|\sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i\, w_i\right|^2$$

$$\Rightarrow \quad \| Z \|^2 \| W \|^2 \geq |<Z,W>|^2$$

❑ Quant à l'inégalité triangulaire :

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

$\Leftrightarrow \quad <x + y \mid x + y>^2 \leq \| x \| + \| y \|)^2$

$\Leftrightarrow \quad 2\,\mathrm{Re}(<x \mid y>) \leq 2\| x \| \, \| y \|$

qui est vraie puisque $\mathrm{Re}(<x \mid y>) \leq \left| <x \mid y> \right| \leq \| x \| \, \| y \|$ d'après l'inégalité de Schwarz.

## 3- Orthogonalité

Dans la suite du chapitre, les espaces considérés sont préhilbertiens, c'est-à-dire munis d'un produit scalaire. On généralise au cas complexe les notions vues dans le cas réel.

**DEFINTION**

*Deux vecteurs x et y sont dits* **orthogonaux** *si* $<x \mid y> = 0$. *x est dit* **unitaire** *ou* **normé** *si* $\| x \| = 1$.
*Une famille* $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ (I *fini ou non*), *est dite orthogonale si* :

$\forall\ i \neq j,\ <x_i \mid x_j> = 0$

*Elle est dite* **orthonormale** *si, de plus,* $\| x_i \| = 0$ *pour tout i.*
*Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace sont dits* **orthogonaux** *si :*

$\forall\ x \in \mathrm{F},\ \forall\ y \in \mathrm{G},\ <x \mid y> = 0$

Si on est en dimension finie, pour vérifier que deux sous-espaces F et G sont orthogonaux, il suffit de vérifier que les vecteurs d'une base de F sont orthogonaux aux vecteurs d'une base de G. Par ailleurs, si F et G sont orthogonaux, F et G sont en somme directe. En effet, soit $x$ élément de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. On a :

$\forall\ y \in \mathrm{F},\ \forall\ z \in \mathrm{G},\ <y \mid z> = 0$

En prenant $y = z = x$, on obtient $<x \mid x> = 0$ donc $x = 0$.

Plus généralement, on a :

**PROPOSITION**

*Soient* $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, ..., \mathrm{F}_p$ *une famille de sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux. Alors ils sont en somme directe.*

Démonstration :
Si $x_1 + ... + x_p = 0$ avec $x_i \in \mathrm{F}_i$, alors, en faisant le produit scalaire par $x_i$, on obtient $<x_i \mid x_i> = 0$ puisque tous les autres produits scalaires sont nuls. D'où $x_i = 0$, et ceci, quel que soit $x_i$.

**DEFINITION**

*Soit* F *un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel* E *préhilbertion. On note* $\mathrm{F}^{\mathrm{o}}$ *ou* $\mathrm{F}^{\perp}$ *le sous-espace orthogonal à* F, *c'est à dire l'ensemble des vecteurs y de* E *tels que :*

$\forall\ x \in \mathrm{F},\ <x \mid y> = 0$

Si F est de dimension finie, pour appartenir à $\mathrm{F}^{\mathrm{o}}$, il suffit de vérifier l'orthogonalité avec une base de F. $\mathrm{F}^{\mathrm{o}}$ étant orthogonal à F, ces deux espaces sont en somme directe. Mais si on est en dimension infinie, ils ne sont pas nécessairement supplémentaires. Un exemple est donné pour le cas réel dans L2/PREHILB.PDF. En voici un autre :

*EXEMPLE* :

❑ Soit $l^2(\mathbb{C})$ l'espace des suites réelles $u = (u_n)$ telles que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left| u_n \right|^2$ converge, muni du produit scalaire :

$$<u \mid v> = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n}\, v_n$$

La série définissant $<u \mid v>$ est bien convergente car, pour tout $n$ :

$$\left|\overline{u_n}\, v_n\right| = |u_n|\,|v_n| \leq \frac{1}{2}(|u_n|^2 + |v_n|^2)$$

Considérons le sous-espace vectoriel F des suites nulles à partir d'un certain rang. Cet espace est engendré par la base $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où $e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, le 1 se trouvant au $n$-ème rang. Soit $u$ élément de $F^o$. Alors $<e_n \mid u> = 0$ pour tout $n$, mais $<e_n \mid u> = u_n$ donc $\forall\, n$, $u_n = 0$, donc $u = 0$. Donc $F^o = \{0\}$, et $F \oplus F^o = F \neq E$.

**4- Bases orthonormales**

Dans ce paragraphe, les espaces sont de dimension finie. Un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ préhibertien et de dimension finie est dit **hermitien**.

**DEFINITION**

*Une base $(e_1, ... ,e_n)$ est dite* **orthogonale** *si les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux.*
*Une base $(e_1, ... ,e_n)$ est dite* **orthonormale** *ou* **orthonormée** *si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires.*

Si un système de vecteurs non nuls est constitué de vecteurs deux à deux orthogonaux, alors, ce système est libre car :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i = 0 \Rightarrow \forall\, j,\ <e_j \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i> = 0 \Rightarrow \forall\, j,\ \lambda_j <e_j \mid e_j> = 0$$

donc

$$\forall\, j,\ \lambda_j = 0$$

Pour que ce soit une base, il suffit que le nombre de ces vecteurs soit égal à la dimension de l'espace.

L'intérêt d'une base orthonormée est que le produit scalaire s'y exprime très simplement. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, avec $x_i$ et $y_i$ complexes, alors :

$$<x \mid y> = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i = \overline{X}^{T}\, Y \qquad \text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } {}^{T} \text{ désigne la transposition}$$

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

On reconnaît le produit scalaire et la norme canonique dans $\mathbf{C}^n$.

Dans une base quelconque, on a :

$$<x \mid y> = \sum_{i,j} \overline{x_i}\, y_j <e_i \mid e_j>$$

ou encore, si l'on note M la matrice de terme général $<e_i \mid e_j>$ :

$$<x \mid y> = \overline{X}^T \text{ M Y}$$

Comme $<x \mid y> = \overline{<y \mid x>}$, on a, pour tout $i$ et tout $j$ :

$$<e_i \mid e_j> = \overline{<e_j \mid e_i>}$$

donc

$$M_{ij} = \overline{M_{ji}}$$

Autrement dit, la matrice M vérifie la relation $M^T = \overline{M}$. Une telle matrice est dite **hermitienne**.

**5- Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt**

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, permettant de déterminer une base orthonormale à partir d'une base quelconque en dimension finie, s'applique au cas complexe. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base quelconque. Construisons à partir de celle-ci une base orthogonale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ :

Prendre $\varepsilon_1 = e_1$

Par récurrence, pour construire $\varepsilon_k$, écrire

$$\varepsilon_k = e_k + \alpha_{k-1}\varepsilon_{k-1} + ... + \alpha_1\varepsilon_1$$

On trouve la valeur de $\alpha_j$, $1 \leq j < k - 1$, en écrivant $<\varepsilon_j \mid \varepsilon_k> = 0$. On obtient :

$$0 = <\varepsilon_j \mid e_k> + \alpha_j <\varepsilon_j \mid \varepsilon_j>$$

d'où $\alpha_j$. On prendra cependant garde à bien prendre $<\varepsilon_j \mid \varepsilon_k>$ et non $<\varepsilon_k \mid \varepsilon_j>$ car ce dernier produit scalaire conduirait à $\overline{\alpha_j}$. On voit par récurrence que $\varepsilon_k$ est combinaison linéaire de $(e_1,..., e_k)$, la composante suivant $e_k$ étant 1. Il en résulte qu'aucun des $\varepsilon_k$ n'est nul, et qu'ils constituent une base de E. Pour obtenir une base orthonormée, il suffit ensuite de diviser chaque $\varepsilon_k$ par sa norme.

Si on dispose d'un système libre orthonormal $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k)$, il est possible de le compléter en une base orthonormale. Il suffit de compléter le système libre en une base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k, e_{k+1}, ..., e_n)$ et de lui appliquer le procédé d'orthogonalisation ci-dessus.

**6- Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie**

Comme dans le cas réel, si F est un sous-espace vectoriel de **dimension finie** d'un espace préhilbertion E (ici complexe), alors F et $F^o$ sont supplémentaires. E, lui, peut être de dimension infinie. Nous savons déjà que F et $F^o$ sont en somme directe. Nous allons maintenant montrer que $E = F + F^o$.

Pour cela, considérons $(e_1, .., e_m)$ une base orthonormée de F. Soit $x$ élément de E. Considérons l'application $p$ définie par $p(x) = \sum_{i=1}^{m} <e_i \mid x> e_i$. On note que $p(x)$ appartient à F. Vérifions que $x - p(x)$ appartient à $F^o$. Il suffit de montrer que son produit scalaire avec chaque $e_j$ de la base de F est nul :

$$<e_j \mid x - p(x)) = <e_j \mid x - \sum_{i=1}^{m} <e_i \mid x> e_i>$$

$$= \langle e_j \mid x\rangle - \langle e_j \mid \sum_{i=1}^{m} \langle e_i \mid x\rangle\, e_i\rangle$$

$$= \langle e_j \mid x\rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle e_i \mid x\rangle \langle e_j \mid e_i\rangle$$

$$= \langle e_j \mid x\rangle - \langle e_j \mid x\rangle = 0$$

On a donc $x = p(x) + (x - p(x))$ élément de $F + F^o$. $p$ n'est autre que le projecteur orthogonal de E sur F. On prendra garde de bien prendre les $\langle e_i \mid x\rangle$ pour définir $p$ et non $\langle x \mid e_i\rangle$ car, dans la démonstration ci-dessus, on a utilisé la linéarité à droite.

La quantité $\| x - p(x) \|$ s'appelle distance de $x$ à F. Si on considère la quantité $\| x - z \|$ lorsque $z$ décrit F, celle-ci atteint son minimum pour $z = p(x)$. En effet, d'après le théorème de Pythagore :

$$\| x - z \|^2 = \| x - p(x) + p(x) - z \|^2 \qquad \text{avec } x - p(x) \in F^o,\ p(x) - z \in F$$
$$= \| x - p(x) \|^2 + \| p(x) - z \|^2$$
$$\geq \| x - p(x) \|^2$$

En outre, pour $z = 0$ :

$$\| x \|^2 = \| x - p(x) \|^2 + \| p(x) \|^2$$

Il en résulte que :

$$\| p(x) \|^2 \leq \| x \|^2$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\langle e_i \mid x\rangle\right|^2 \leq \| x \|^2 \qquad \text{(\textbf{inégalité de Bessel})}$$

Si E est de dimension finie, on a :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^o)$$

puisque les deux espaces sont supplémentaires. Enfin, et toujours si E est de dimension finie, $(F^o)^o = F$. En effet, ces deux espaces ont même dimension puisque :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^o) = \dim(F^o) + \dim((F^o)^o)$$

donc

$$\dim(F) = \dim((F^o)^o)$$

et on vérifie facilement que F est inclus dans $(F^o)^o$.

Nous avons défini précédemment le projecteur sur F parallèlement à $F^o$. Il faut pour cela que $E = F \oplus F^o$, ce qui est le cas si F est de dimension finie. On peut aussi définir le projecteur sur $F^o$ parallèlement à F. Un cas très fréquent est celui où F est une droite D. $F^o$ est alors hyperplan, que nous noterons H.

Dans le cas d'un hyperplan H, orthogonal à une droite D, les projecteurs s'expriment très simplement. Soit $u$ un vecteur unitaire orthogonal à H (vecteur directeur de la droite D). On a les mêmes expressions des projecteurs et symétries que dans le cas réel.

*Projecteur orthogonal sur D* :

$$p(x) = \langle u \mid x\rangle\, u$$

*Projecteur orthogonal sur H* :

$q(x) = x - <u \mid x> u$

*Symétrie orthogonale par rapport à D* :

$s_D(x) = 2 <u \mid x> u - x = p(x) - q(x)$

*Symétrie orthogonale par rapport à H* :

$s_H(x) = x - 2 <u \mid x> u = q(x) - p(x) = - s_D(x)$

Pour le voir, on utilise la décomposition de $x$ précédemment mise en évidence.

**7- Isomorphisme entre E et E* en dimension finie**

Sur un espace préhilbertien E, on peut définir une forme linéaire au moyen du produit scalaire. Fixons en effet $a$ dans E. Alors l'application $x \to <a \mid x>$ est linéaire. Il est impératif de noter $a$ à gauche de façon que $x \to <a \mid x>$ soit bien une forme linéaire en $x$. Notons cette application $<a \mid >$. Si E est de dimension finie, il n'y en a pas d'autres. Notons E* l'espace des formes linéaires sur E. Dans le cas complexe, une difficulté survient du fait de la semi-linéarité.

**PROPOSITION**

*Soit* E *hermitien, l'application* $a \in E \to <a \mid > \in E^*$ *est un isomorphisme* **semi-linéaire**. *En particulier, il n'y a pas d'autres formes linéaires que les applications* $<a \mid >$.

<u>Démonstration</u> :

❑ La vérification que l'application $a \to <a \mid >$ est semi-linéaire se fait sans difficulté.

❑ Elle est injective : si $<a \mid >$ est nulle, alors en appliquant cette forme à $a$ lui-même, on a $<a \mid a> = 0$ donc $a = 0$.

❑ Elle est surjective. En effet, soit une forme linéaire $f$ et $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors :

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire}$$

$$= <a \mid x>$$

où $a = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(e_i)}\, e_i$. On notera bien la présence du conjugué sur les coefficients de $a$.

## *II : Endomorphismes et produit scalaire*

On se place ici dans des espaces hermitiens, i.e. les espaces préhilbertiens complexes de **dimension finie**.

## 1- Adjoint d'un endomorphisme

Considérons un espace euclidien ou hermitien E et soit $u$ un endomorphisme de E. Pour tout $y$ de E, l'application $x \in E \to \langle y \mid u(x)\rangle$ est une forme linéaire. En raison de l'isomorphisme entre E et son dual, il existe un unique vecteur $z$ dépendant de $y$ tel que :

$$\forall x, \langle y \mid u(x)\rangle = \langle z \mid x\rangle$$

On note $z = u^*(y)$, définissant ainsi une application $u^*$ appelée **adjointe** de $u$. On a donc, pour tout $x$ et tout $y$ :

$$\langle y \mid u(x)\rangle = \langle u^*(y) \mid x\rangle$$

ou bien, en utilisant le caractère hermitien du produit scalaire dans les deux membres :

$$\langle u(x) \mid y\rangle = \langle x \mid u^*(y)\rangle$$

Puisque, dans le cas complexe, le produit scalaire de $x$ par $y$ s'exprime **dans une base orthonormée** sous la forme $\langle x \mid y\rangle = \overline{X}^T\, Y$, où X et Y sont les colonnes des composantes de $x$ et $y$ dans la dite base orthonormée, l'égalité calcul précédente devient, si M est la matrice de $u$ dans la base donnée :

$$\begin{aligned}\langle y \mid u(x)\rangle &= \overline{Y}^T\,(MX)\\ &= \overline{(\overline{M}^T\, Y)}^T\, X\\ &= \langle u^*(y) \mid x\rangle\end{aligned}$$

Donc $u^*(y)$ a pour composante $\overline{M}^T\, Y$. Par conséquent, $u^*$ un endomorphisme de matrice $\overline{M}^T$. On dira que $\overline{M}^T$ est la **matrice adjointe** de M. On la note M*.

On peut aussi montrer que $u^*$ est linéaire directement de la façon suivante. Pour tout $x$, $y$, $z$ de E et tout scalaire $\lambda$ :

$$\langle y + \lambda z \mid u(x)\rangle = \langle y \mid u(x)\rangle + \overline{\lambda}\, \langle z \mid u(x)\rangle$$

donc $\quad \langle u^*(y + \lambda z) \mid x\rangle = \langle u^*(y) \mid z\rangle + \overline{\lambda}\, \langle u^*(z) \mid x\rangle$

donc $\quad \langle u^*(y + \lambda z) \mid x\rangle = \langle u^*(y) + \lambda u^*(z) \mid x\rangle$

donc $\quad u^*(y + \lambda z) - (u^*(y) + \lambda u^*(z))$ est orthogonal à tout $x$ de E, donc à E, donc est nul,

donc $\quad u^*(y + \lambda z) = u^*(y) + \lambda u^*(z)$

## 2- Propriétés de l'adjoint

**PROPOSITION**

*Pour tout endomorphisme u et v, et tout scalaire λ, on a :*

(i) $\quad (u + v)^* = u^* + v^*$

(ii) $\quad (\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$

(iii) $\quad (u^*)^* = u$

(iv) $\quad (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

(v) $\quad$ *Si u est inversible, alors* $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$

<u>Démonstration</u> :

Les quatre premières propriétés se montrent facilement à l'aide des matrices A et B de $u$ et $v$ dans une base orthonormée. Les matrices de $u^*$ et $v^*$ sont $\overline{A}^T$ et $\overline{B}^T$ et l'on a respectivement :

$$\overline{(A + B)}^T = \overline{A}^T + \overline{B}^T$$

$$(\overline{\lambda A})^{T} = \overline{\lambda}\ \overline{A}^{T}$$
$$\left(\overline{\overline{A}^{T}}\right)^{T} = A$$
$$(\overline{AB})^{T} = \overline{B}^{T}\ \overline{A}^{T}$$

Ces propriétés peuvent également se montrer directement sans recourir à la matrice associée dans une base orthonormée.

(i) $\forall x, \forall y, \langle x \mid (u+v)^*(y)\rangle = \langle (u+v)(x) \mid y\rangle$
$= \langle u(x) + v(x) \mid y\rangle$
$= \langle u(x) \mid y\rangle + \langle v(x) \mid y\rangle$
$= \langle x \mid u^*(y)\rangle + \langle x \mid v^*(y)\rangle$
$= \langle x \mid u^*(y) + v^*(y)\rangle$

donc $\forall y, (u+v)^*(y) = u^*(y) + v^*(y)$
donc $(u+v)^* = u^* + v^*$

(ii) $\forall x, \forall y, \forall \lambda, \langle x \mid (\lambda u)^*(y)\rangle = \langle \lambda u(x) \mid y\rangle$
$= \overline{\lambda}\ \langle u(x) \mid y\rangle$
$= \overline{\lambda}\ \langle x \mid u^*(y)\rangle$
$= \langle x \mid \overline{\lambda} u^*(y)\rangle$

donc $\forall y, (\lambda u)^*(y) = \overline{\lambda} u^*(y)$
donc $\forall y, (\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$

(iii) $\forall x, \forall y, \langle x \mid (u^*)^*(y)\rangle = \langle u^*(x) \mid y\rangle$
$= \langle x \mid u(y)\rangle$

donc $\forall y, (u^*)^*(y) = u(y)$
donc $u = (u^*)^*$

(iv) $\forall x, \forall y, \langle x \mid (v^* \circ u^*)(y)\rangle = \langle x \mid v^*(u^*(y))\rangle$
$= \langle v(x) \mid u^*(y)\rangle$
$= \langle u(v(x)) \mid y\rangle$
$= \langle (u \circ v)(x) \mid y\rangle$
$= \langle x \mid (u \circ v)^*(y)\rangle$

donc $\forall y, (v^* \circ u^*)(y) = (u \circ v)^*(y)$
donc $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

(v) Dans le cas d'un automorphisme $u$, en prenant $v = u^{-1}$, on a :
$(u^{-1})^* \circ u^* = (u \circ u^{-1})^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$
donc $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

Une dernière propriété enfin, déjà valide dans le cas réel :

**PROPOSITION**

*Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E*, stable par un endomorphisme u. Alors* $F^o$ *est stable par u*.*

Démonstration :

Soit $x$ un élement de $F^o$. Il s'agit de montrer que $u^*(x)$ appartient à $F^o$, autrement dit, que, pour tout $y$ de F, on a $\langle y \mid u^*(x)\rangle = 0$. Or :

$\langle y \mid u^*(x)\rangle = \langle u(y) \mid x\rangle$ avec $u(y) \in F$, puisque F est stable par $u$

$= 0$ puisque $u(y) \in F$ et $x \in F^o$

**COROLLAIRE**

*Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E*, stable par u et u*. Alors* $F^o$ *est stable par u et u*.*

Démonstration :

Puisque F est stable par $u$, $F^o$ est stable par son adjoint $u^*$.
Et puisque F est aussi stable par $u^*$, $F^o$ est stable par l'adjoint $(u^*)^*$ de ce dernier. Mais $(u^*)^* = u$. Donc $F^o$ est stable par $u$.

**3- Groupe unitaire**

L'équivalent dans les espaces hermitiens du groupe orthogonal des espaces euclidiens est le groupe unitaire.

**DEFINITION-PROPOSITION**

*Un endomorphisme u d'un espace hermitien* E *de dimension n est dit* **unitaire** *s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes*

(i) $\forall x \in E, \| u(x) \| = \| x \|$
(ii) $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$
(iii) $u^* \circ u = \mathrm{Id}$
(iv) *La matrice* M *de u dans une base orthonormée vérifie* $M^*M = I_n$
(v) *u transforme une base orthonormée de* E *en une autre base orthonormée.*

Démonstration

La démonstration est comparable à celle menée pour les endomorphismes orthogonaux dans L2/PREHILB.PDF.

(i) $\Rightarrow$ (ii) en utilisant une identité de polarisation. La réciproque (ii) $\Rightarrow$ (i) est triviale en prenant $x = y$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) car :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid u^*(u(y))\rangle = \langle x \mid y\rangle$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall (x, y) \in E^2, \langle x \mid u^*(u(y)) - y\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall y \in E, u^* \circ u(y) = y$$
$$\Leftrightarrow \quad u^* \circ u = \mathrm{Id}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) car, si M est la matrice de $u$ dans une base orthonormée, la matrice de $u^*$ dans la même base orthonormée est $M^*$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) car soit $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée dans laquelle la matrice M de $u$ vérifie $M^*M = I_n$. Alors, pour tout $(i, j)$, $(M^*M)_{ij} = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{array}\right.$. Or $(M^*M)_{ij}$ est la somme des produits terme à terme de la $i$-ème ligne de $M^* = {}^t\overline{M}$ par la $j$-ème colonne de M, donc c'est la somme des produits terme à terme de la $i$-ème colonne de $\overline{M}$ par la $j$-ème colonne de M. C'est le produit scalaire canonique dans $\mathbb{C}^n$ de ces deux colonnes. Comme $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée et que ces deux colonnes sont les composantes dans cette base de $u(e_i)$ et $u(e_j)$, on a :

$$\langle u(e_i) \mid u(e_j)\rangle = (M^*M)_{ij} = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{array}\right.$$

et la base $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée.

(v) $\Rightarrow$ (i) car si $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée, transformée en une base orthonormée $(u(e_1), ..., u(e_n))$, et si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$, alors on a $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, u(e_i)$ et :

$$\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \qquad \text{car } (e_1, ..., e_n) \text{ est orthonormée}$$

$$\| u(x) \|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \qquad \text{car } (u(e_1), ..., u(e_n)) \text{ est orthonormée}$$

donc $\| x \| = \| u(x) \|$
Une matrice vérifiant $M^*M = I_n$ est dite **matrice unitaire**.

Le mot "*une*" dans l'énoncé (iv) ou (v) peut être entendu indifféremment comme "*une particulière*" ou "*une quelconque*", autrement dit, les deux sens suivants sont vrais :

Il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice M de $u$ vérifie $M^*M = I_n$

ou

Pour toute base orthonormée, la matrice M de $u$ dans cette base vérifie $M^*M = I_n$

En effet, la démonstration (iii) $\Rightarrow$ (iv) est vraie pour toute base orthonormée, et la démonstration (v) $\Rightarrow$ (i) n'utilise qu'une base particulière.

Si M est la matrice de $u$ dans une base orthonormée, la propriété (v) exprime le fait qu'une matrice est unitaire si et seulement si les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$. En particulier, les matrices de passage d'une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ à une autre base orthonormée sont des matrices unitaires.

**PROPOSITION**

(i) *Un opérateur unitaire est bijectif.*

(ii) *L'ensemble des opérateurs unitaires* de E *muni de la composition des applications forme un sous-groupe de* GL(E) *appelé* **groupe unitaire** U(E). *L'ensemble des matrices unitaires de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *muni du produit des matrices forme un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{C})$ *appelé* **groupe unitaire** $U_n(\mathbb{C})$ (*ou plus brièvement* $U_n$).

(iii) *Le déterminant d'un opérateur unitaire ou d'une matrice unitaire est de module* 1.

(iv) *L'ensemble des opérateurs unitaire de déterminant* 1 *forme un sous-groupe de* U(E), *appelé* **groupe spécial unitaire** SU(E). *L'ensemble des matrices unitaires de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *de déterminant* 1 *forme un sous-groupe de* $U_n(\mathbb{C})$ *appelé* **groupe spécial unitaire** $SU_n(\mathbb{C})$ (*ou plus brièvement* $SU_n$).

(v) *Si* F *est un sous-espace vectoriel stable par un opérateur unitaire u, alors* $F^o$ *est aussi stable par u.*

Démonstration :
(i) L'espace hermitien E étant de dimension finie, il suffit de montrer qu'un tel opérateur est injectif. Or, en utilisant la conservation de la norme :

$$u(x) = 0 \Rightarrow \| u(x) \| = 0 \Rightarrow \| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$$

(ii) U(E) est non vide car il contient Id. Il est inclus dans GL(E) d'après le (i). $u$ et $v$ étant éléments de U(E), on a, pour tout $x$ de E :

$$\| (v \circ u)(x) \| = \| v(u(x)) \|$$
$$= \| u(x) \| \qquad \text{car } v \text{ conserve la norme}$$
$$= \| x \| \qquad \text{car } u \text{ conserve la norme}$$
donc $v \circ u \in \mathrm{U(E)}$
$$\| u^{-1}(x) \| = \| u(u^{-1}(x)) \| \qquad \text{car } u \text{ conserve la norme}$$
$$= \| x \|$$
donc $u^{-1} \in \mathrm{U(E)}$.
(iii) Si $(e_i)$ est une base orthonormée dans laquelle $u$ possède une matrice M, alors :
$$\mathrm{M^*M} = \mathrm{I}_n$$
donc
$$\det(\mathrm{M^*M}) = 1 = \det(\mathrm{M^*})\det(\mathrm{M}) = \det(\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}})\det(\mathrm{M}) = \det(\overline{\mathrm{M}})\det(\mathrm{M}) = \overline{\det(\mathrm{M})}\,\det(\mathrm{M})$$
$$= \left|\det(\mathrm{M})\right|^2$$
donc $\left|\det(\mathrm{M})\right| = 1$.
(iv) SU(E) est le noyau du morphisme de groupe :
$$(\mathrm{U(E)}, \circ) \to (\mathbb{U}, \times) \qquad \text{où } \mathbb{U} \text{ est le cercle unité de } \mathbb{C}$$
$$u \to \det(u)$$
donc est un sous-groupe de U(E) (Voir L2/GROUPES.DOC)
(v) Soit F stable par $u$. Alors $\mathrm{F}^{\mathrm{o}}$ est stable par $u^* = u^{-1}$, donc $u^{-1}(\mathrm{F}^{\mathrm{o}}) \subset \mathrm{F}^{\mathrm{o}}$, et donc $u(u^{-1}(\mathrm{F}^{\mathrm{o}})) \subset u(\mathrm{F}^{\mathrm{o}})$, ce qui donne $\mathrm{F}^{\mathrm{o}} \subset u(\mathrm{F}^{\mathrm{o}})$. Mais $u$ étant bijective, ces deux sous-espaces vectoriels ont même dimension et sont alors égaux. Ainsi, $u(\mathrm{F}^{\mathrm{o}}) = \mathrm{F}^{\mathrm{o}}$.

*EXEMPLE*
❑ La matrice suivante $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathrm{SU}_2$.

**4- Endomorphismes normaux**
**DEFINITION**
*Un endomorphisme d'un espace hermitien u est dit* **normal** *si* $u^* \circ u = u \circ u^*$.

*EXEMPLE* :
❑ Un endomorphisme unitaire est normal, puisque $u^* = u^{-1}$ commute avec $u$.

**PROPOSITION**
*Tout endomorphisme normal d'un espace hermitien complexe est diagonalisable dans une base orthonormée. Les sous-espaces propres sont orthogonaux.*

Démonstration :
On se place sur $\mathbb{C}$ pour être certain que tout endomorphisme possède au moins une valeur propre puisque le polynôme caractéristique possède au moins une racine.
❑ Pour toute valeur propre $\lambda$, soit $\mathrm{E}_\lambda$ le sous-espace propre correspondant. Comme $u$ commute avec $u^*$, $\mathrm{E}_\lambda$ est stable par $u^*$ (voir L2/DIAGONAL.PDF). Soit $\mathrm{Sp}(u)$ le spectre de $u$ (ensemble des valeurs propres de $u$), et soit $\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_\lambda$. Il s'agit de montrer que F = E. Puisque chaque $\mathrm{E}_\lambda$ est stable par $u^*$, il en est de même de F. Dans le II-2), nous avons vu que, si un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme, l'orthogonal de ce sous-espace vectoriel est stable par l'adjoint de

l'endomorphisme. Appliqué à F et $u^*$, on en déduit que $F^o$ est stable par $(u^*)^* = u$. On peut donc considérer la restriction de $u$ à $F^o$. Par l'absurde, si $F^o$ est non réduit à $\{0\}$, $u_{|F^o}$ possèderait au moins un vecteur propre non nul. Mais ce vecteur, élément de $F^o$, est aussi élément de F puisque c'est un vecteur propre et que F contient tous les vecteurs propre. Il est donc nul, ce qui est contradictoire.

❑ Montrons maintenant que les sous-espaces propres d'un endomorphisme normal sont orthogonaux. Soit $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres distinctes, et $x$ vecteur propre associé à la valeur propre $\mu$. Il s'agit de montrer que $x$ est orthogonal à $E_\lambda$. Pour cela, nous utiliserons le fait que $E_\lambda^o$ est stable par $u$ (car, comme ci-dessus, $E_\lambda$ est stable par $u^*$ donc, d'après la proposition, son orthogonal est stable par $(u^*)^* = u$). Décomposons $x$ sous la forme :

$x = y + z$ avec $y \in E_\lambda$, $z \in E_\lambda^o$

Appliquons $u$, en tenant compte du fait que $x \in E_\mu$ :

$u(x) = \mu x = u(y) + u(z) = \lambda y + u(z)$ avec $u(z) \in E_\lambda^o$ car $E_\lambda^o$ est stable par $u$

On peut aussi multiplier les deux membres de la première égalité par $\mu$ :

$\mu x = \mu y + \mu z$

On retranche membre à membre les deux dernières égalités :

$0 = (\lambda - \mu)y + u(z) - \mu z$ avec $u(z) - \mu z \in E_\lambda^o$

donc $y = \dfrac{1}{\mu - \lambda}(u(z) - \mu z)$

donc $y \in E_\lambda \cap E_\lambda^o$

donc $y = 0$

donc $x = z \in E_\lambda^o$

❑ On peut diagonaliser $u$ dans une base orthonormée. Il suffit pour cela de prendre, dans chaque sous-espace propre, une base orthonormée, et de réunir toutes ces bases. Matriciellement, si M est la matrice de $u$ dans une base orthonormée et si on diagonalise $u$ dans une autre base orthonormée, alors il existe D diagonale (la matrice de $u$ dans la base finale) et une matrice de passage P unitaire (car on passe d'une base orthonormée à une autre) telle que $M = PDP^{-1}$. On a $P^{-1} = P^*$ car P est unitaire.

**COROLLAIRE 1**

*Un endomorphisme unitaire est diagonalisable dans une base orthonormée. Ses valeurs propres sont de module* 1.

Démonstration :

Si $u$ est unitaire, $u$ est normal, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Soit $\lambda$ une de ses valeurs propres et $x$ un vecteur propre (non nul) associé. On a :

$$\| x \| = \| u(x) \| = \| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$$

or $x \neq 0$, donc $|\lambda| = 1$

**COROLLAIRE 2 (réduction des matrices orthogonales)**

*Soit* M *une matrice réelle orthogonale. Alors il existe une matrice orthogonale* P *et une matrice diagonale par blocs* D *telles que* $M = PDP^{-1}$, *les blocs de* D *étant ou bien des blocs* $1 \times 1$ *valant* $\pm 1$, *ou bien des blocs* $2 \times 2$ *de la forme* $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Démonstration :

❑ On considère la matrice réelle M comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle est alors unitaire, donc diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$. Ses valeurs propres complexes sont de module 1. Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. $\mathbb{C}^n$ est la somme des sous-espaces propres de $u$.

Parmi ses valeurs propres, celles qui sont réelles valent ± 1. Soit $\lambda$ une telle valeur propre. Soit $r$ le rang de $M - \lambda I_n$. Le sous-espace vectoriel $\{X \in \mathbb{R}^n \mid (M - \lambda I_n)X = 0\}$ de $\mathbb{R}^n$ est de dimension $n - r$. Il possède une base de $n - r$ colonnes réelles $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-r})$. Le sous-espace vectoriel $\{X \in \mathbb{C}^n \mid (M - \lambda I_n)X = 0\}$ de $\mathbb{C}^n$ est aussi de dimension $n - r$, et possède les éléments $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-r}$ vus comme colonnes dans $\mathbb{C}^n$. Ces éléments formant une famille libre dans $\mathbb{R}$ forme aussi une famille libre dans $\mathbb{C}$ (si une combinaison linéaire à coefficients complexes de ces éléments est nulle, prendre la partie réelle et la partie imaginaire de cette combinaison linéaire pour en déduire que les parties réelles et imaginaires de tous les coefficients sont nuls). Donc c'est une base du sous-espace propre $E_\lambda$ dans $\mathbb{C}^n$.

Soit maintenant une valeur propre $\lambda$ non réelle. Le polynôme caractéristique de M étant réel, et $\lambda$ étant racine complexe de ce polynôme caractéristique, son conjugué $\overline{\lambda}$ est aussi racine du polynôme caractéristique donc est aussi valeur propre complexe de M. Comparons les sous-espaces propres. Si $X \in \mathbb{C}^n$ est vecteur propre de M avec la valeur propre $\lambda$, alors $MX = \lambda X$, donc en prenant le conjugué, et M étant réelle, $M\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$. Donc le sous-espace propre associé à $\overline{\lambda}$ s'obtient en prenant les conjugués des éléments du sous-espace propre $E_\lambda$. Si $(e_1, ..., e_p)$ est une base orthonormée de $E_\lambda$, alors $(\overline{e_1}, ..., \overline{e_p})$ est une base orthonormée de $E_{\overline{\lambda}}$. M étant unitaire, $E_\lambda$ est orthogonal à $E_{\overline{\lambda}}$. Une base orthonormée de $E_\lambda \oplus E_{\overline{\lambda}}$ est donc $(e_1, ..., e_p, \overline{e_1}, ..., \overline{e_p})$. Prenons comme nouvelle base $(\dfrac{e_1 + \overline{e_1}}{2}, \dfrac{e_1 - \overline{e_1}}{2i}, \dfrac{e_2 + \overline{e_2}}{2}, \dfrac{e_2 - \overline{e_2}}{2i}, ..., \dfrac{e_p + \overline{e_p}}{2}, \dfrac{e_p - \overline{e_p}}{2i})$. Tous ces vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont en fait dans $\mathbb{R}^n$. Ils forment de plus une base orthonormée dans $\mathbb{R}^n$. Par exemple :

$$<\frac{e_1 + \overline{e_1}}{2} \mid \frac{e_1 - \overline{e_1}}{2i}> = \frac{1}{4i} (\| e_1 \|^2 - <e_1 \mid \overline{e_1}> + <\overline{e_1} \mid e_1> - \| \overline{e_1} \|^2) = 0$$

car $e_1 \perp \overline{e_1}$, et $\| e_1 \| = \| \overline{e_1} \| = 1$. Le lecteur vérifiera les autres relations.

M étant unitaire, la valeur propre $\lambda$ est de module 1, donc de la forme $\lambda = e^{-i\theta}$. On a donc :

$$\begin{aligned} u(\frac{e_1 + \overline{e_1}}{2}) &= \frac{1}{2} (e^{-i\theta} e_1 + e^{i\theta}\,\overline{e_1}) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\theta)e_1 - i\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)\overline{e_1} + i\sin(\theta)\overline{e_1}) \\ &= \cos(\theta)\,\frac{e_1 + \overline{e_1}}{2} + \sin(\theta)\,\frac{e_1 - \overline{e_1}}{2i} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u(\frac{e_1 - \overline{e_1}}{2i}) &= \frac{1}{2i} (e^{-i\theta} e_1 - e^{i\theta}\,\overline{e_1}) \\ &= \frac{1}{2i} (\cos(\theta)\, e_1 - i\sin(\theta)\, e_1 - \cos(\theta)\,\overline{e_1} - i\sin(\theta)\overline{e_1}) \end{aligned}$$

$$= -\sin(\theta)\,\frac{e_1 + \overline{e_1}}{2} + \cos(\theta)\,\frac{e_1 - \overline{e_1}}{2i}$$

On procède de même pour les autres indices. La matrice de la restriction de $u$ à $E_\lambda \oplus E_{\overline{\lambda}}$ est donc diagonale par blocs avec des blocs de la forme annoncée $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Procédant de même pour tous les valeurs propres $\lambda$ complexes, on obtient une matrice diagonale par blocs de la forme voulue. Tous les vecteurs de la nouvelle base sont réels, donc la matrice de passage est réelle. La nouvelle base étant orthonormée, la matrice de passage est orthogonale.

❑ Si D possède au moins deux 1 (respectivement deux –1) sur sa diagonale, on peut permuter les vecteurs propres de la base pour amener ces deux 1 (respectivement –1) en position successive sur la diagonale. Ils peuvent alors être vus comme formant un bloc $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta = 0$ (respectivement $\theta = \pi$). On peut donc supposer que, en dehors des blocs, il y a au plus un 1 et au plus un –1 sur la diagonale. Si $M \in SO_n(\mathbf{R})$, $\det(M) = 1$, donc si $n$ est pair, D est uniquement constituée de blocs $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (y compris éventuellement $\theta = 0$ ou $\pi$) et si $n$ est impair, D est constituée de blocs $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et d'un coefficient diagonal égal à –1. Cette décomposition est utilisée dans L3/TOPOLOG.DOC pour déterminer les composantes connexes de $O_n(\mathbf{R})$.

## 5- Endomorphismes hermitiens

Un endomorphisme d'un espace hermitien est dit **hermitien** ou **auto-adjoint** si $u^* = u$. Autrement dit :

$$\forall x, \forall y, <u(x) \mid y> = <x \mid u(y)>$$

La matrice M d'un endomorphisme hermitien dans une base orthonormée vérifie $\overline{M}^{T} = M$ et est donc hermitienne.

**PROPOSITION**

*Soit $u$ un endomorphisme hermitien. Alors les valeurs propres de $u$ sont réelles et $u$ est diagonalisable dans une base orthonormée. Les sous-espaces propres sont orthogonaux.*
*Soit* M *une matrice hermitienne. Alors les valeurs propres de* M *sont réelles et il existe une matrice de passage unitaire* P *et une matrice diagonale à coefficients réels* D *telles que* $M = PDP^{-1}$.

La deuxième phrase est l'expression matricielle de la première phrase.

<u>Démonstration</u> :

Puisque $u = u^*$, on $u \circ u^* = u^* \circ u$, donc $u$ est normal, donc diagonalisable dans une base orthonormée, et les sous-espaces propres sont orthogonaux. Il reste à montrer que les valeurs propres sont réelles. Soit $x$ vecteur propre (non nul) de valeur propre $\lambda$. On a :

$$\begin{aligned} <u(x) \mid x> &= <\lambda x \mid x> = \overline{\lambda} <x \mid x> \\ &= <x \mid u(x)> = <x \mid \lambda x> = \lambda <x \mid x> \end{aligned}$$

et comme $<x \mid x> \neq 0$, on a $\lambda = \overline{\lambda}$.

## *Exercices*

### 1- Enoncés

**Exo.1)** a) Dans $\mathbb{C}$, soit $a$ et $b$ deux complexes, $a$ étant non nul. Donner, en fonction de $a$ et $b$ la valeur $t_0$ du réel $t$ tel que $|at + b|$ soit le plus petit possible. Donner une expression de $at_0 + b$ et de $|at_0 + b|$.

b) Soit E un espace hermitien, $a$ et $b$ deux éléments de E, $a$ étant non nul. Donner, en fonction de $a$ et $b$ la valeur $t_0$ du réel $t$ tel que $\| ta + b \|$ soit le plus petit possible. Donner une expression de $t_0a + b$ et de $\| t_0a + b \|$.

**Exo.2)** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure et telle que $A^*A = AA^*$. Montrer que A est diagonale.

**Exo.3)** Soit A une matrice élément de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ de rang $m$, $X_0$ un élément de $\mathbb{C}^m$. On pose :

$$S = \{Y \in \mathbb{C}^n, AY = X_0\}$$
$$\text{Ker}(A) = \{Y \in \mathbb{C}^n, AY = 0\}$$

a) Montrer que $S \neq \emptyset$. Montrer que, si $Y_0 \in S$, alors S est le sous-espace affine de $\mathbb{C}^n$ passant par $Y_0$ de direction vectorielle Ker(A). (Voir L1/GEOMAFF.PDF)

b) Soit V un élément de $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe un unique élément W de S tel que $V - W$ soit orthogonal à Ker(A), pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$.

c) Pour déterminer W, Bérénice propose de faire comme suit :

Résoudre le système $AA^*Z = AV - X_0$ d'inconnue Z (où $A^*$ est l'adjointe de A)
Prendre $W = V - A^*Z$

Qu'en pensez-vous ?

d) Titus propose de faire comme suit :

Résoudre le système $AZ = AV - X_0$ d'inconnue Z
Prendre $W = V - Z$

Qu'en pensez-vous ?

**Exo.4)** Soit M une matrice élément de $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{C})$ et $S = M \times M^*$.

a) Montrer que, si $n < k$, alors $\det(S) = 0$.

b) On suppose $n \geq k$, et S inversible. On note $C_j$, $1 \leq j \leq n$, les colonnes de M. Donner la valeur de $\sum_{j=1}^{n} C_j^* S^{-1} C_j$.

c) Montrer que $\det(S) = (\frac{\text{Tr}(S)}{k})^k \Leftrightarrow \exists \lambda, S = \lambda I_k$

**Exo.5)** Soit E un espace préhilbertien complexe de dimension infinie, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée.

a) Montrer que, pour tout $n$, $\sum_{k=1}^{n} a_k u_k = 0 \Rightarrow \forall k, a_k = 0$.

b) Montrer que, si la série $\sum a_n u_n$ converge pour la norme euclidienne, alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n = 0 \Rightarrow \forall n, a_n = 0$$

c) On prend E l'espace des fonctions continues par morceaux sur [0,1] à valeurs complexes, muni du produit scalaire $<f, g> = \int_0^1 \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$. Soit $(\varphi_n)$ la famille de fonctions définies par :

$\varphi_1(0) = 0$ et $\forall x \in ]0,1], \varphi_1(x) = 1$

$\forall n \geq 2$, $\varphi_n(0) = 0$ et $\forall x \in ]0, \frac{1}{2^{n-1}}], \varphi_n(x) = 2^{(n-2)/2}$

$\forall x \in ]\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-2}}], \varphi_n(x) = -2^{(n-2)/2}$

$\forall x \in ]\frac{1}{2^{n-2}}, 1], \varphi_n(x) = 0$

Montrer que $(\varphi_n)$ est une famille orthonormée. Montrer que la série de fonction $\varphi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{(n-2)/2} \varphi_n$ converge simplement sur [0,1] et que, pour tout $x$ de [0, 1], $\varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{(n-2)/2} \varphi_n(x) = 0$. Ce résultat est-il contradictoire avec celui du b) ?

**Exo.6)** Soit M une matrice élément de $SU_n(\mathbb{R})$, définie par blocs :

$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, $D \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$

En considérant le produit $\begin{pmatrix} A^* & C^* \\ O & I_{n-k} \end{pmatrix} \times M$, montrer que $\overline{\det(A)} = \det(D)$.

**Exo.7)** Soit $A = (a_{ij})$ une matrice unitaire.

a) Montrer que $\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n$.

b) Montrer que $\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$

**Exo.8)** Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base quelconque d'un espace hermitien de dimension $n$, et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base orthonormée. On pose P la matrice de terme général $(<e_i, e_j>)$ et Q la matrice de passage de la base $e$ à la base $\varepsilon$. Montrer que $P = Q^{*-1}Q^{-1}$.

**Exo.9)** Soit E un espace vectoriel hermitien et $E^* = L(E, \mathbb{C})$ l'espace des formes linéaires sur E. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. On définit, pour tout $\varphi$ et $\psi$ de $E^*$ :

$$(\varphi \mid \psi) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi(e_j)}\psi(e_j)$$

a) Montrer que ( | ) définit un produit scalaire sur E*.

b) Montrer que l'expression de ce produit scalaire ne dépend pas de la base orthonormée de E choisie.

c) A tout endomorphisme unitaire $u$ de E, on associe l'endomorphisme U de E* défini par :

$$\forall\, x \in \mathrm{E},\ \forall\, \varphi \in \mathrm{E}^*,\ \mathrm{U}(\varphi)(x) = \varphi(u(x))$$

Montrer que U est un endomorphisme unitaire de E*.

**Exo.10)** a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de rang $r$, vérifiant AA* = A*A. Montrer qu'il existe $r$ vecteurs orthogonaux de $\mathbf{C}^n$ $C_1, C_2, ..., C_r$ et $r$ complexes $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tels que $A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, C_i\, C_i^*$.

b) Dans le cas de la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, donner une telle décomposition dans $\mathbf{R}^n$.

**2- Solution**

**Sol.1)** a) $|at + b|^2 = (at + b)(\overline{a}t + \overline{b}) = |a|^2 t^2 + 2\mathrm{Re}(a\overline{b})t + |b|^2$

expression qui atteint son minimum en $t_0 = -\dfrac{\mathrm{Re}(a\overline{b})}{|a|^2} = -\mathrm{Re}(\dfrac{a\overline{b}}{|a|^2}) = -\mathrm{Re}(\dfrac{\overline{b}}{\overline{a}})$

$$at_0 + b = b - a\,\frac{\mathrm{Re}(a\overline{b})}{|a|^2} = b - \frac{\mathrm{Re}(a\overline{b})}{\overline{a}} = i\,\frac{\mathrm{Im}(b\overline{a})}{\overline{a}}$$

$$|at_0 + b| = \frac{|\mathrm{Im}(b\overline{a})|}{|a|}$$

b) $\| ta + b \|^2 = t^2 \| a \|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) + \| b \|^2$

atteint son minimum en $t_0 = -\dfrac{\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle)}{\| a \|^2}$

$$t_0 a + b = b - \frac{\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle)}{\| a \|^2}\, a$$

$$\| t_0 a + b \|^2 = \| b \|^2 - \frac{\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle)^2}{\| a \|^2}$$

donc

$$\| t_0 a + b \| = \frac{\sqrt{\| b \|^2 \| a \|^2 - \mathrm{Re}(\langle a, b\rangle)^2}}{\| a \|}$$

**Sol.2)** Pour tout $i$, $(A^*A)_{ii} = (AA^*)_{ii}$ signifie que la norme de la $i$-ème colonne de A est égale à la norme de la $i$-ème ligne. A étant triangulaire supérieure, on en déduit que :

pour $i = 1$, $\sum_{k=1}^{n} |a_{k1}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_{1k}|^2$, or $a_{k1} = 0$ si $k > 1$, donc $|a_{11}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_{1k}|^2 = |a_{11}|^2 + \sum_{k=2}^{n} |a_{1k}|^2$ donc $a_{1k} = 0$ si $k > 1$.

puis, pour $i = 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{k2}|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{2k}|^2$ avec $a_{12} = 0$ et $a_{k2} = 0$ si $k > 3$, donc

$$|a_{22}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_{2k}|^2 = |a_{22}|^2 + \sum_{k\neq 2} |a_{2k}|^2 \text{ donc } a_{2k} = 0 \text{ si } k \neq 2.$$

Procéder de même pour les lignes suivantes.

**Sol.3)** a) A est la matrice d'une application linéaire surjective de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$. Donc $S \neq \emptyset$. Si $Y \in \mathbb{C}^n$, alors :

$Y - Y_0 \in \text{Ker}(A)$
$\Leftrightarrow \quad A(Y - Y_0) = 0$
$\Leftrightarrow \quad AY = AY_0 = X_0$
$\Leftrightarrow \quad Y \in S$

Donc $S = \{Y_0 + Z \mid Z \in \text{Ker}(A)\}$. C'est le sous-espace affine de $\mathbb{C}^n$ passant par $Y_0$ de direction Ker(A).

b) Soit $Y_0$ un élément donné de S. D'après le a), $W \in S \Leftrightarrow \exists\, U \in \text{Ker}(A),\ W = Y_0 + U$. W répond à la question si et seulement si $V - Y_0 - U$ est orthogonal à Ker(A), si et seulement si $U = p(V - Y_0)$, projeté orthogonal de $V - Y_0$ sur Ker(A).

c) Le système $AA^*Z = AV - X_0$ admet une unique solution car $AA^*$ est une matrice $m \times m$ et elle est inversible. En effet, pour $X \in \mathbb{C}^m$ :

$AA^*X = 0 \Rightarrow X^*AA^*X = 0 \Leftrightarrow \langle A^*X \mid A^*X\rangle = 0 \Leftrightarrow A^*X = 0 \Rightarrow X = 0$ car $A^* = \overline{A}^{\mathrm{T}}$ est de rang $m$, comme A.

Vérifions que $V - A^*Z \in S$ et $A^*Z \perp \text{Ker}(A)$

$A(V - A^*Z) = AV - AA^*Z = AV - (AV - X_0) = X_0$ donc $V - A^*Z \in S$

$\forall\, Y \in \text{Ker}(A)$, $\langle Y \mid A^*Z\rangle = Y^*A^*Z = (AY)^*Z = 0$ donc $A^*Z \perp \text{Ker}(A)$

d) Dans cette méthode, il y a existence de Z car l'endomorphisme associé à A est surjectif, mais pas unicité a priori, car A n'est pas une matrice carrée inversible en général. Vérifions si $V - Z \in S$ et si $Z \perp \text{Ker}(A)$

$A(V - Z) = AV - AZ = AV - (AV - X_0) = X_0$ donc $V - Z \in S$

mais pour $Y \in \text{Ker}(A)$, on ne peut pas conclure en général que $\langle Y \mid Z\rangle = 0$. Soit $Z_0$ est une solution particulière de l'équation $AZ = AV - X_0$ et supposons que $\langle Y \mid Z_0\rangle = 0$. Si $Y \neq 0$, on a $A(Z_0 + Y) = AZ_0 + AY = AZ_0 = AV - X_0$ donc $Z = Z_0 + Y$ est aussi un élément que pourrait prendre Titus, mais $\langle Y \mid Z\rangle = \langle Y \mid Z_0\rangle + \| Y \|^2 = \| Y \|^2 \neq 0$. Donc Z ne vérifie pas la deuxième condition. La méthode de Titus est valide seulement si A est une matrice carrée, car alors, A étant de rang $m = n$, A est inversible, et dans ce cas $W = A^{-1}X_0 = V - Z$ avec $Z = A^{-1}(AV - X_0)$.

**Sol.4)** a) Cherchons le noyau de S. Soit $X \in \mathbb{C}^k$ :

$SX = 0 \Leftrightarrow MM^*X = 0 \Rightarrow X^*MM^*X = 0 \Leftrightarrow \langle M^*X \mid M^*X\rangle = 0 \Leftrightarrow M^*X = 0$

Réciproquement, $M^*X = 0 \Rightarrow MM^*X = 0 \Leftrightarrow SX = 0$. Donc $\text{Ker}(S) = \text{Ker}(M^*)$. Par ailleurs, $M^*$ est une matrice à $n$ lignes et $k$ colonnes donc représente un endomorphisme de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{C}^n$. Le théorème du rang donne $\dim(\text{Ker}(M^*)) = k - \text{rg}(M^*) \geq k - n > 0$. Donc S n'est pas injective, donc non inversible.

b) Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $C_i{}^*S^{-1}C_j$. Vérifier que $A = M^*S^{-1}M$. On demande donc de calculer :

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(M^*S^{-1}M) = \mathrm{Tr}(MM^*S^{-1}) = \mathrm{Tr}(I_k) = k$$

On peut vérifier que la relation $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ utilisée ci-dessus dans l'égalité $\mathrm{Tr}(M^*S^{-1}M) = \mathrm{Tr}(MM^*S^{-1})$ est valide pour des matrices non carrées $A \in \mathcal{M}_{nk}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{kn}(\mathbb{C})$. En effet :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{k} a_{ik}\, b_{ki} = \sum_{k=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}\, a_{ik} = \sum_{k=1}^{k} (BA)_{kk} = \mathrm{Tr}(BA)$$

c) Si $S = \lambda I_k$, $\det(S) = \lambda^k$ et $\mathrm{Tr}(S) = k\lambda$ d'où $\det(S) = \left(\dfrac{\mathrm{Tr}(S)}{k}\right)^k$

Réciproquement, S est hermitienne, donc diagonalisable à valeurs propres réelles. Ces valeurs propres sont positives ou nulles. En effet, si $\lambda$ est une valeur propre de vecteur propre V, on a :

$$\lambda \,\|\, V \,\|^2 = V^*SV = V^*MM^*V = \|\, M^*V \,\|^2 \geq 0 \text{ donc } \lambda \geq 0.$$

Si on note $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les $k$ valeurs propres de S (comptées avec leur ordre de multiplicité), $\det(S) = \lambda_1...\lambda_k$ et il s'agit de montrer que $(\lambda_1...\lambda_k)^{1/k} = \dfrac{\lambda_1 + ... + \lambda_k}{k} \Leftrightarrow \forall\, i, \forall\, j, \lambda_i = \lambda_j$. Montrons par récurrence sur $k$ que $(\lambda_1...\lambda_k)^{1/k} \leq \dfrac{\lambda_1 + ... + \lambda_k}{k}$ avec égalité seulement si les $\lambda_i$ sont égaux.

Pour $k = 2$, $\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \leq \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$

Supposons la propriété vérifiée au rang $k - 1$ et étudions la fonction :

$$f : \lambda_k \geq 0 \to \frac{\lambda_1 + ... + \lambda_k}{k} - (\lambda_1...\lambda_k)^{1/k}$$

Pour $\lambda_k > 0$, on a :

$$f\,'(\lambda_k) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{k}(\lambda_1...\lambda_{k-1}\lambda_k)^{-1+1/k}\,\lambda_1...\lambda_{k-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_k - (\lambda_1...\lambda_{k-1}\lambda_k)^{1/k} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1...\lambda_{k-1})^{1/k} < \lambda_k{}^{1-1/k}$$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_k > (\lambda_1...\lambda_{k-1})^{1/(k-1)}$. Posons $\Lambda = \lambda_1...\lambda_{k-1}$ $f$ est donc d'abord strictement décroissante sur $[0, \Lambda^{1/(k-1)}]$ puis strictement croissante sur $[\Lambda^{1/(k-1)}, +\infty[$, son minimum étant atteint en $\Lambda^{1/(k-1)}$ et vaut $f(\Lambda^{1/(k-1)})$. Or :

$$f(\Lambda^{1/(k-1)}) = \frac{\lambda_1 + ... + \lambda_{k-1}}{k} + \frac{\Lambda^{1/(k-1)}}{k} - \Lambda^{(1+1/(k-1))/k}$$

$$= \frac{\lambda_1 + ... + \lambda_{k-1}}{k} + \left(\frac{1}{k} - 1\right)\Lambda^{1/(k-1)}$$

$$= \frac{k-1}{k}\left(\frac{\lambda_1 + ... + \lambda_{k-1}}{k-1} - \Lambda^{1/(k-1)}\right) \geq 0 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

Si on suppose de plus que $f(\lambda_k) = 0$, cela implique que le minimum de $f$ est nul, atteint en $\lambda_k$, donc on a $\dfrac{\lambda_1 + ... + \lambda_{k-1}}{k-1} = \Lambda^{1/(k-1)}$ et $\lambda_k = \Lambda^{1/(k-1)}$. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure que $\lambda_1 = ... = \lambda_{k-1}$, puis la relation $\lambda_k = \Lambda^{1/(k-1)}$ donne alors également l'égalité avec $\lambda_k$.

**Sol.5)** a) $0 = \| \sum_{k=1}^{n} a_k\, u_k \|^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^{\,2}$ donc $\forall\, k,\ a_k = 0$

b) Notons $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, u_k$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\, u_k$. On suppose que la série converge pour la norme euclienne, i.e. $\lim_{n\to\infty} \| S - S_n \| = 0$. En raison de l'inégalité triangulaire $\big|\, \| S \| - \| S_n \| \,\big| \le \| S - S_n \|$, on a aussi $\lim_{n\to\infty} \| S_n \| = \| S \|$ (c'est simplement la propriété de continuité de la norme). Donc :

$$0 = \| S \|$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} \| S_n \|$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} \| S_n \|^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{n \to \infty} \| \sum_{k=1}^{n} a_k\, u_k \|^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^{\,2} \qquad \text{car les } u_k \text{ sont orthonormés}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\,2}$$

donc $\forall\, k,\ a_k = 0$.

c) Les $\varphi_n$ font partie d'une famille de fonctions appelée **système de Haar**. Il est facile de voir que $< \varphi_1, \varphi_1> = 1$ et que, pour $n \ge 2$, $<\varphi_n, \varphi_n>$ est l'intégrale d'une fonction valant $2^{n-2}$ sur un intervalle de longueur $2^{n-2}$ donc est égale à 1. Ainsi, les $\varphi_n$ sont unitaires.

On a facilement $<\varphi_1, \varphi_n> = 0$ pour $n \ge 2$. Si $2 \le n < m$, $<\varphi_n, \varphi_m>$ est l'intégrale d'une fonction valant $2^{(n+m-2)/2}$ puis $-\,2^{(n+m-2)/2}$ sur deux intervalles successifs de même longueur, donc est nulle.

Ainsi, les $\varphi_n$ forment une famille orthonormée.

Soit $F = \varphi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{(n-2)/2}\, \varphi_n$. Cette fonction vaut :

sur $]\frac{1}{2}, 1]$ $\quad F(x) = 1 - 1 = 0$

sur $]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ $\quad F(x) = 1 + 1 - 2 = 0$

sur $]\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$ $\quad F(x) = 1 + 1 + 2 - 4 = 0$

...

sur $]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ $\quad F(x) = \varphi_1(x) + ... + 2^{(n-1)/2}\, \varphi_{n+1}(x) = 1 + 1 + 2 + ... + 2^{n-2} - 2^{n-1} = 0$

$F(0) = 0$

Le c) n'est pas incompatible avec le b) car $\varphi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{(n-2)/2}\,\varphi_n$ diverge pour la norme euclidienne, bien qu'elle converge pour la convergence simple[1].

**Sol.6)** $\begin{pmatrix} A^* & C^* \\ O & I_{n-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A+C^*C & A^*B+C^*D \\ C & D \end{pmatrix}$

mais par ailleurs $M^*M = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A+C^*C & A^*B+C^*D \\ B^*A+D^*C & B^*B+D^*D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & O \\ O & I_{n-k} \end{pmatrix}$ car M est unitaire.

Donc $\begin{pmatrix} A^* & C^* \\ O & I_{n-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & O \\ C & D \end{pmatrix}$. En prenant les déterminants, on obtient det(A*)det(M) = det(D). Or det(M) = 1 et det(A*) = $\overline{\det(A)}$ donc $\overline{\det(A)}$ = det(D).

**Sol.7)** a) Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ et Y = AU. Alors $Y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$, donc :

$$\sum_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} Y_i = U^*Y = U^*AU = \langle U, AU\rangle$$

donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{i,j} a_{ij}\right| = |\langle U, AU\rangle| \leq \| U \|\, \| AU \| = \| U \|^2 = n.$$

b) En utilisant aussi l'inégalité de Cauchy-Schwarz mais dans $\mathbf{R}^{n^2}$ :

$$\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}\sqrt{\sum_{i,j} 1^2} = \sqrt{n} \times n$$

On a utilisé le fait que, pour tout $j$, $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 1$ car A est unitaire donc ses colonnes sont des vecteurs unitaires.

**Sol.8)** Soit X les composantes d'un vecteur $x$ de E dans la base $e$, et X' ses composantes dans la base ε.

$\langle x, y\rangle$ = X'*Y' dans la base ε car ε est orthonormée

$= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j\rangle$

[1] Cet exemple est donné par Michel Plancherel, *Les problèmes de Cantor et de Du Bois-Reymond dans la théorie des séries de polynômes de Legendre*, Annales scientifiques de l'ENS, 3ème série, tome 31, (1914), 223-262 http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__223_0

$= \sum_{i,j} \overline{x_i}\, y_j \langle e_i, e_j\rangle$

$= X^*PY$ dans la base $e$

Or $X = QX'$ et $Y = QY'$, donc :

$\langle x, y\rangle = X'^*Q^*PQY' = X^{*\prime}Y'$

La relation étant vraie pour tout Y', $X'^*Q^*PQ = X'^*$. Etant vraie pour tout X', $Q^*PQ = I_n$.

**Sol.9)** a) Pas de difficulté.

b) Si ε est une autre base orthonormée et si, pour tout $j$, $e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \varepsilon_i$, alors :

$$(\varphi \mid \psi) = \sum_{ijk} \overline{a_{ij}} a_{kj}\, \overline{\varphi(\varepsilon_i)}\, \psi(\varepsilon_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}\, a_{kj}\Big)\, \overline{\varphi(\varepsilon_i)}\, \psi(\varepsilon_k)$$

avec $\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}\, a_{kj} = \delta_{ki}$ (symbole de Kronecker valant 1 si $k = i$ et 0 sinon) car la matrice A est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée donc est unitaire donc $AA^* = I_n$, donc pour tout $k$ et $j$, $(AA^*)_{ki} = \delta_{ki}$. Donc :

$$(\varphi \mid \psi) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(\varepsilon_i)}\, \psi(\varepsilon_i)$$

c) $(U(\varphi) \mid U(\psi)) = \sum_{i=1}^{n} \overline{U(\varphi)(e_i)}\; U(\psi)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(u(e_i))}\; \psi(u(e_i)) = (\varphi \mid \psi)$ puisque les $u(e_i)$ forment une base orthonormée.

**Sol.10)** a) A est la matrice d'un endomorphisme normal dans la base canonique orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{C}^n$, donc est diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe donc une matrice de passage unitaire P et une matrice diagonale D de diagonale $\lambda_1, ..., \lambda_r, 0, ..., 0$ telles que $A = PDP^*$. Si on prend les $r$ premiers vecteurs $(e_1, ..., e_r)$ de la base canonique, $e_i\, e_i^*$ est une matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui en $(i, i)$ qui vaut 1. On a donc :

$$D = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, e_i\, e_i^*$$

d'où :

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, Pe_i\, e_i^*P^* = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, Pe_i\, (Pe_i)^*$$

Il suffit alors de prendre $C_i = Pe_i$. Ce sont des vecteurs propres unitaires de A associées aux valeurs propres $\lambda_i$.

b) $C_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 \\ -2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$

◆