ESPACES DE HILBERT

Plan

Pour lire ce chapitre, il est nécessaire de savoir ce qu'est un **espace complet**, donc d'avoir lu le chapitre L3/BANACH.PDF, ou bien le chapitre L3/METRIQUE.PDF.

Dans ce chapitre, les espaces préhilbertiens sont réels ou complexes. Voir L3/HERMTN.PDF pour la définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{C}$ et d'un espace hermitien. Le plus souvent, on adoptera les notations en se plaçant sur $\mathbb{C}$. Le produit scalaire, noté $< \mid >$, sera alors supposé semi-linéaire à gauche et linéaire à droite. On rappelle que, sur $\mathbb{C}$, $<y \mid x> = \overline{<x \mid y>}$ et que :

$$<x + y \mid x + y> = <x \mid x> + 2\mathrm{Re}(<x \mid y>) + <y \mid y>$$

Tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé lorsqu'on le munit de la norme euclidienne associée à son produit scalaire $\| x \| = \sqrt{<x \mid x>}$.

I : Complétude

1- Lacunes des espaces préhilbertiens

Dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens réels E de dimension infinie (voir L2/PREHILB.PDF), nous avons évoqué des difficultés qu'on peut rencontrer par rapport aux espaces euclidiens (de dimension finie). En dimension infinie en effet :

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on n'a pas nécessairement $F \oplus F^{\perp} = E$, où $F^{\perp}$ est le sous-espace vectoriel orthogonal à F.

Il en résulte que la notion de projecteur orthogonal sur F n'est pas nécessairement définie.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on peut avoir $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$

Si φ est une forme linéaire, il n'existe pas nécessairement y tel que : $\forall x \in E, \varphi(x) = <y \mid x>$.

EXEMPLES :

❑ On rappelle (voir L2/PREHILB.PDF) que, même si E est préhilbertien de dimension infinie, mais si F est de dimension finie, alors la notion de projecteur orthogonal sur F est définie. Ce projecteur p est défini comme suit. On prend une base orthonormée de F ($e_1, ..., e_m$) et on pose, pour tout x de E :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle e_i \mid x \rangle \, e_i$$

On a alors $E = F \oplus F^\perp$, la décomposition de x étant $p(x) + (x - p(x))$ avec $x - p(x) \perp F$. On a également dans ce cas $F = (F^\perp)^\perp$. En effet :

$$x \in F \Rightarrow \forall\, y \in F^\perp,\ \langle x \mid y \rangle = 0 \Rightarrow x \in (F^\perp)^\perp \qquad \text{donc } F \subset (F^\perp)^\perp$$

Réciproquement, si $x \in (F^\perp)^\perp$, décomposons x sous la forme $x = p(x) + (x - p(x))$. Comme $x - p(x) \in F^\perp$, on a d'une part $\langle x \mid x - p(x) \rangle = 0$ car $x \in (F^\perp)^\perp$, et d'autre part $\langle p(x) \mid x - p(x) \rangle = 0$ car $p(x) \in F$. Donc :

$$\langle x - p(x) \mid x - p(x) \rangle = \langle x \mid x - p(x) \rangle - \langle p(x) \mid x - p(x) \rangle$$
$$= 0$$

donc $x - p(x) = 0$

donc $x = p(x) \in F$

donc $(F^\perp)^\perp \subset F$

Les difficultés commencent lorsque F est de dimension infinie.

❑ Soit E l'espace $l^2(\mathbf{R})$ des suites réelles $u = (u_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$ converge, muni du produit scalaire $\langle u \mid v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$. Considérons F le sous-espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang. Cet espace est engendré par la base $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où $e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$, le 1 se trouvant au $n^{\text{ème}}$ rang. Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ élément de $F^\perp$. Alors, pour tout n, $\langle e_n \mid u \rangle = 0$ donc $u_n = 0$. Donc $u = 0$. Donc $F^\perp = \{0\}$, et $F \oplus F^\perp = F \neq E$. $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$ et $F \neq (F^\perp)^\perp$. La notion de projecteur orthogonal sur F n'est pas définie.

❑ L'exemple précédent se comprend mieux si on remarque que le sous-espace vectoriel F est strictement inclus dans E, mais dense dans E. En effet, tout élément $u = (u_n)_{n\geq 0}$ vérifie $u = \lim_{n\to\infty} v(n)$ où, pour tout n, $v(n)$ est l'élément de F égal à $(u_0, u_1, ..., u_n, 0, 0, 0, ...)$, car on a :

$$\| u - v(n) \| = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k^2} \text{ qui tend vers 0 quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

Or, pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien E, distinct de E et dense dans E, on a toujours $F^\perp = \{0\}$. En effet, soit x élément de $F^\perp$. F étant dense dans E, x est limite d'une suite (z_n) d'éléments de F. Comme x est orthogonal à F, on a :

$$\forall\, n,\ \langle x \mid z_n \rangle = 0$$

Passant à la limite en utilisant la continuité de la forme linéaire $z \to \langle x \mid z \rangle$ (elle est lipschitzienne de rapport $\| x \|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on obtient :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle x \mid z_n \rangle = \langle x \mid \lim_{n\to\infty} z_n \rangle = \langle x \mid x \rangle$$

donc $x = 0$

Pour un tel sous-espace vectoriel F, on a aussi $(F^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$ et $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$.
Qu'en est-il pour F distinct de E, mais fermé, donc non dense dans E ? Malheureusement, les exemples qui suivent donnent des exemples de tels sous-espaces vectoriels F de E pour lesquels on a encore $F^{\perp} = \{0\}$. Les problèmes rencontrés sont donc moins dus à la nature de F qu'à celle de E.

❑ Dans les exercices du chapitre L2/POLORTHO.PDF, on munit l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire. On y traite les deux formes linéaires suivantes :

$$\varphi : \sum_{n\geq 0} a_n X^n \to a_0 - \sum_{n\geq 1} a_n \qquad \varphi \text{ n'est pas continu. } F = \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est dense dans } \mathbb{R}[X].$$

$$\psi : \sum_{n\geq 0} a_n X^n \to \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} \qquad \psi \text{ est continu. } F = \mathrm{Ker}(\psi) \text{ est fermé dans } \mathbb{R}[X].$$

(Dans les exercices du chapitre L2/EVNORME.PDF, on montre qu'un hyperplan F est fermé si et seulement si la forme linéaire qui le définit est continue). Dans les deux cas, on montre que l'orthogonal de F est réduit à $\{0\}$. Par conséquent, le fait que $F = (F^{\perp})^{\perp}$ ou pas n'est pas directement lié au fait que F soit fermé ou non.

❑ Soit $E = C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Soit φ la forme linéaire sur E définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,dt$. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi)^{\perp} = \{0\}$. Une preuve est donnée dans le chapitre L2/PREHILB.PDF. Une autre preuve est donnée dans l'annexe du présent chapitre : *Hyperplan fermé d'orthogonal nul*.

PROPOSITION
Soit F *un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien* E. *Alors* :
(i) $F^{\perp}$ *est un fermé.*
(ii) $F^{\perp} = \overline{F}^{\perp}$, *où* $\overline{F}$ *est l'adhérence de* F.

Démonstration :
❑ (i) : Pour tout x, la forme linéaire $y \in E \to \langle x \mid y\rangle$ est continue, car, d'après l'inégalité de Schwarz :

$$|\langle x \mid y\rangle| \leq \| x \| \, \| y \|$$

Elle est donc lipschitzienne de rapport $\| x \|$. Par conséquent, son noyau $\{x\}^{\perp}$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par cette forme linéaire continue. Comme $F^{\perp} = \bigcap_{x\in F} \{x\}^{\perp}$, $F^{\perp}$ est un fermé comme intersection de fermés.

❑ (ibis) : On peut aussi prendre x adhérent à $F^{\perp}$, donc limite d'une suite (x_n) de $F^{\perp}$. On a alors :

$$\forall y \in F, \langle y \mid x_n\rangle = 0$$

Passant à la limite en utilisant pour chaque y de F la continuité de la fonction $z \to \langle y \mid z\rangle$, on obtient :

$$\forall y \in F, \langle y \mid x\rangle = \langle y \mid \lim_{n\to\infty} x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y \mid x_n\rangle = 0$$

donc x appartient à $F^\perp$. Donc $F^\perp$ est fermé.

❑ (ii) : Comme $F \subset \overline{F}$, $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$.

Réciproquement, soit y est élément de $F^\perp$. Il s'agit de montrer que, pour tout x élément de $\overline{F}$, on a $<y \mid x> = 0$. Comme x est adhérent à F, x est la limite d'une suite (x_n) dont les éléments sont dans F. Comme y est élément de $F^\perp$, on a : $\forall\ n$, $<y \mid x_n> = 0$. Passant à la limite, et sachant que l'application $z \to <y \mid z>$ est continue, on obtient :

$$<y \mid x> = <y \mid \lim_{n\to\infty} x_n> = \lim_{n\to\infty} <y \mid x_n> = 0$$

COROLLAIRE

Pour tout sous-espace vectoriel F, $(F^\perp)^\perp$ *est fermé.*

Démonstration :

❑ Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $F^\perp$.

Il en résulte que, pour espérer avoir $F = (F^\perp)^\perp$, il est nécessaire que F soit fermé, mais plusieurs exemples plus haut ont montré que ce n'était pas suffisant.

2- Espace de Hilbert

Pour combler les lacunes du I-1), on rajoute à l'espace entier E l'hypothèse de complétude. Nous verrons alors que le comportement de l'orthogonalité envers un sous-espace vectoriel F fermé est en grande partie comparable à ce qu'on observe en dimension finie. Ce qui pose problème dans le I-1) n'est pas que E est de dimension infinie, mais que E n'est pas complet.

DEFINITION

On dit qu'un espace préhilbertien, réel ou complexe, est **de Hilbert** *si cet espace est complet pour la norme euclidienne associée à son produit scalaire.*

Un espace de Hilbert est donc à la fois un espace préhilbertien et un espace Banach pour la norme euclidienne (voir L3/BANACH.PDF). Un espace de Hilbert est généralement désigné par la lettre H (ce qui nous imposera de choisir une autre lettre pour désigner un hyperplan de H...!).

EXEMPLES :

❑ Tous les espaces euclidiens (sur $\mathbf{R}$) et hermitiens (sur $\mathbf{C}$) sont de dimension finie, donc complets, donc sont des espaces de Hilbert.

❑ L'espace vectoriel $l^2(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, est l'espace vectoriel des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à coefficients dans $\mathbf{K}$, et de carré sommable (i.e. telles que $\sum |u_n|^2$ converge), muni du produit scalaire :

dans le cas réel : $<u \mid v> = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$

dans le cas complexe : $<u \mid v> = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n} v_n$

La norme associée est $\| u \| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2}$. On obtient alors un espace de Hilbert. En effet, considérons une suite de Cauchy dans cet espace. Notons $a(n) = (a_{mn})_{m\in\mathbf{N}}$ le terme général de cette suite. On peut visualiser les coefficients a_{mn} comme formant une matrice infinie, la n-ème colonne étant constituée des coefficients de $a(n)$. Nous ajoutons à l'extrême droite la colonne d'une hypothétique limite l de la suite $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$:

$a(0)$	$a(1)$	$a(2)$	...	$a(n)$	...	l
a_{00}	a_{01}	a_{02}	...	a_{0n}	...	l_0
a_{10}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	...	l_1
a_{20}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	...	l_2
...		...		...		...
a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	...	l_m
...		...		...		...

Considérons pour chaque m la suite des composantes $(a_{mn})_{n\in\mathbf{N}}$, formant la ligne m dans la présentation précédente. Pour tout n et p, on a :

$$|a_{mn} - a_{mp}| \leq \| a(n) - a(p) \|$$

Comme $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $l^2(\mathbf{K})$, il en résulte que, pour tout m, $(a_{mn})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{K}$. Elle est donc convergente vers une limite l_m, puisque aussi bien $\mathbf{R}$ que $\mathbf{C}$ sont des espaces complets (voir le chapitre L1/SUITES.PDF).

$$l_m = \lim_{n\to\infty} a_{mn}$$

On obtient ainsi une suite $l = (l_m)_{m\in\mathbf{N}}$. Vérifions que $\sum |l_m|^2$ est convergente. Comme la suite $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $l^2(\mathbf{K})$, elle est bornée. Donc :

$$\exists\, \mathrm{M}, \forall n, \| a(n) \| \leq \mathrm{M}$$

donc :

$$\exists\, \mathrm{M}, \forall n, \sum_{m=0}^{\infty} |a_{mn}|^2 \leq \mathrm{M}^2$$

En particulier,

$$\exists\, \mathrm{M}, \forall n, \forall k, \sum_{m=0}^{k} |a_{mn}|^2 \leq \mathrm{M}^2$$

donc, en faisant tendre n vers l'infini :

$$\exists\, \mathrm{M}, \forall k, \sum_{m=0}^{k} |l_m|^2 \leq \mathrm{M}^2$$

La suite des sommes partielles $\sum_{m=0}^{k} |l_m|^2$ croît avec k et est majorée par M. Donc elle converge. Donc $\sum |l_m|^2$ converge.

Vérifions enfin que $\lim_{n\to\infty} a(n) = l$ dans $l^2(\mathbf{K})$. La suite $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ étant de Cauchy, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \| a(n) - a(p) \| \leq \varepsilon$$
donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \sum_{m=0}^{\infty} |a_{mn} - a_{mp}|^2 \leq \varepsilon^2$$

A fortiori :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \forall k, \sum_{m=0}^{k} |a_{mn} - a_{mp}|^2 \leq \varepsilon^2$$

donc, en faisant tendre p vers l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall k, \sum_{m=0}^{k} |a_{mn} - l_m|^2 \leq \varepsilon^2$$

puis, en faisant tendre k vers l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \sum_{m=0}^{\infty} |a_{mn} - l_m|^2 \leq \varepsilon^2$$

autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \| a(n) - l \| \leq \varepsilon$$

ce qui est bien la définition de $\lim\limits_{n\to\infty} a(n) = l$ dans $l^2(\mathbb{K})$.

❑ L'espace $L^2(I)$ des fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue sur un intervalle I et à valeurs réelles ou complexes est un espace de Hilbert (voir L3/LEBESGUE.PDF).

❑ Soit E un espace préhilbertien quelconque. Alors E se plonge dans un unique espace de Hilbert dans lequel E est dense. En effet, dans le chapitre L3/BANACH.PDF, on montre que tout espace vectoriel normé E se plonge dans un unique Banach $\hat{E}$ dans lequel E est dense, la norme de $\hat{E}$ prolongeant continûment celle de E. C'est donc le cas des espaces préhilbertiens. Il reste à montrer que le produit scalaire sur E se prolonge en un produit scalaire sur $\hat{E}$ et que ce produit scalaire est le même qui définit la norme de $\hat{E}$. Utilisons pour cela les identités de polarisation, et posons, pour tout x et y de $\hat{E}$:

$$\langle x \mid y \rangle = \frac{\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2}{2} \qquad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4} (\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 - i\| x + iy \|^2 + i\| x - iy \|^2) \qquad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

On définit ainsi une application continue $(x, y) \in \hat{E} \times \hat{E} \to \langle x \mid y \rangle$. Quand on restreint cette application à E × E, on retrouve le produit scalaire sur E. On vérifie que cette application reste un produit scalaire sur $\hat{E} \times \hat{E}$ par continuité, en prolongeant les relations voulues vérifiées sur E. Par exemple, on écrira que, si x et y sont éléments de $\hat{E}$, ils sont limites de suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, et pour tout scalaire λ, on a :

$$\langle x \mid \lambda y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n \mid \lambda y_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \lambda \langle x_n \mid y_n \rangle = \lambda \lim_{n\to\infty} \langle x_n \mid y_n \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle$$

et de même pour les autres relations.

❑ En appliquant la construction précédente, on montre que l'espace de Hilbert $l^2(\mathbf{K})$ est le complété de l'espace peréhilbertien des suites nulles à partir d'un certain rang, et que l'espace de Hilbert réel $L^2([0, 1])$ est le complété de $C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire $<f \mid g> \to \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

Pour tout x de H et toute partie F de H (et en particulier tout sous-espace vectoriel F de H), on définit la **distance** de x à F par :

$$d(x, F) = \operatorname*{Inf}_{y \in F} \| x - y \|$$

PROPOSITION

Soit E *un espace préhilbertien et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *On considère les propriétés suivantes, vérifiées ou non par* F :

(i) *Pour tout x de* E, *il existe y élément de* F *tel que* $d(x, F) = \| x - y \|$

(ii) $F \oplus F^\perp = E$

(iii) $(F^\perp)^\perp = F$

(iv) F *est fermé*

Alors (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). *De plus, dans* (i), *y est unique.*
Enfin, si E *est un espace de Hilbert, alors* (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)

En particulier dans un espace de Hilbert, on peut parler de projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel fermé F, d'après l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii).

Démonstration :

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i) : Si $E = F \oplus F^\perp$, on peut définir le projecteur p orthogonal sur F et il suffit de prendre $y = p(x)$. Pour tout z de F, on a $y - z \perp x - y$ car $y - z \in F$ et $x - y \in F^\perp$ et le théorème de Pythagore donne :

$$\forall z \in F, \| x - y \|^2 \leq \| x - y \|^2 + \| y - z \|^2 = \| x - z \|^2$$

donc $\forall z \in F, \| x - y \| \leq \| x - z \|$ et y lui-même est élément de F

donc $\| x - y \| = d(x, F)$

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii) : Comme $F \cap F^\perp$, il suffit de montrer que $E = F + F^\perp$.
Soit $x \in E$ et $y \in F$ tel que $\| x - y \| = d(x, F)$. Posons $d = d(x, F)$. Vérifions que le vecteur $x - y$ est orthogonal à F. Pour tout z dans F, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, y + \lambda z \in F \qquad \text{car } y \in F \text{ et } z \in F$$

donc

$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \| x - y - \lambda z \| \geq d \qquad \text{car } d = d(x, F)$$

donc

$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \| x - y - \lambda z \|^2 \geq d^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, \| x - y \|^2 + |\lambda|^2 \| z \|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda <x - y \mid z>) \geq d^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, |\lambda|^2 \| z \|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda <x - y \mid z>) \geq 0 \qquad \text{car } \| x - y \| = d$$

Prenons λ non nul, sous la forme $|\lambda| e^{i\theta}$, où θ est l'argument de λ et simplifions par $|\lambda|$. Il reste :

$$\forall \lambda \neq 0, \forall \theta, |\lambda| \| z \|^2 - 2\mathrm{Re}(e^{i\theta} <x - y \mid z>) \geq 0$$

Faisons tendre λ vers 0, θ restant fixé. On obtient :

$$\forall\ \theta,\ -2\mathrm{Re}(e^{i\theta} <x-y \mid z> \geq 0$$

Si on prend θ opposé à l'argument de $<x-y \mid z>$, on obtient :

$$-2\left|<x-y \mid z>\right| \geq 0$$

donc $\quad <x-y \mid z> = 0$

Ceci étant valable pour tout z de F, on a montré que $x-y \perp$ F. Donc tout x peut s'écrire :

$$x = (x-y) + y \in F^{\perp} \oplus F$$

prouvant que $E = F \oplus F^{\perp}$.

Il en résulte également que y est unique, puisque si y' vérifie également $\| x-y'\| = d(x, F)$, on aura aussi une décomposition $x = (x-y') + y' \in F^{\perp} \oplus F$ et l'unicité de la décomposition donne $y = y'$.

On peut aussi prouver l'unicité de y dans (i) sans utiliser (ii). Si y' est un autre élément de F vérifiant $\| x-y' \| = d$, projetons x orthogonalement en un élément z de $\mathrm{Vect}(y, y')$, ce qui est possible car $\mathrm{Vect}(y, y')$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On a $x-y = x-z+z-y$ avec $x-z \perp \mathrm{Vect}(y, y')$ et $z-y \in \mathrm{Vect}(y, y')$. On a donc $x-z \perp z-y$ donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\| x-y \|^2 = \| x-z \|^2 + \| z-y \|^2$$

donc :

$$d^2 = \| x-z \|^2 + \| z-y \|^2 \geq d^2 + \| z-y \|^2$$

donc $z = y$. De même, on montrera que $z = y'$.

Puisque y dépend de manière unique de x, on retrouve le fait que y n'est autre que $p(x)$ avec p projecteur orthogonal de E sur F. p est continue car le théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} \| x \|^2 &= \| x-p(x) \|^2 + \| p(x) \|^2 \\ &\geq \| p(x) \|^2 \end{aligned}$$

donc

$$\| p(x) \| \leq \| x \| \qquad \text{avec égalité si } x \in F$$

donc $||| p ||| = 1$ si $F \neq \{0\}$.

❑ (ii) $\Rightarrow$ (iii) : L'inclusion $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ est générale dans tout espace préhilbertien. En effet, soit $x \in F$. Alors, pour tout $y \in F^{\perp}$, $<x \mid y> = 0$ donc $x \in (F^{\perp})^{\perp}$.

Réciproquement, soit $x \in (F^{\perp})^{\perp}$. On décompose x sous la forme $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in F$, $x_2 \in F^{\perp}$. Comme x appartient à $(F^{\perp})^{\perp}$, on a $0 = <x \mid x_2> = <x_1 + x_2 \mid x_2>$. Mais on a aussi $<x_1 \mid x_2> = 0$. Il reste donc $<x_2 \mid x_2> = 0$, donc $x_2 = 0$ et $x = x_1 \in F$.

❑ (iii) $\Rightarrow$ (iv) : car on a vu dans un corollaire du I-1) que $(F^{\perp})^{\perp}$ est fermé pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien.

Il n'est pas inintéressant de montrer directement (i) $\Rightarrow$ (iv) et (ii) $\Rightarrow$ (iv) :

❑ (i) $\Rightarrow$ (iv) : Soit x adhérent à F et y élément de F tel que $d(x, F) = \| x-y \|$. Soit (x_n) une suite de F de limite x. On a alors :

$$d(x, F) \leq \| x-x_n \| \to 0 \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

donc

$$d(x, F) = 0 = \| x-y \|$$

donc

$$x = y \in F$$

❑ (ii) $\Rightarrow$ (iv) : Soit x adhérent à F et décomposons $x = y + z$, $y \in$ F, $z \in$ F$^\perp$. Soit (x_n) une suite de F de limite x. Alors, pour tout n, $<x_n - y \mid z> = 0$ car $x_n - y \in$ F et $z \in$ F$^\perp$. En passant à la limite, le produit scalaire étant continu, on obtient $<x - y \mid z> = 0$ donc $<z \mid z> = 0$ donc $z = 0$ et $x = y \in$ F.

❑ Supposons maintenant que E est un espace de Hilbert. Pour montrer les équivalences manquantes, il suffit de prouver que (iv) $\Rightarrow$ (i).
(iv) $\Rightarrow$ (i) : Soit $x \in$ E. Pour abréger, posons d = d(x, F). On a donc, par définition de la borne inférieure :

$$\forall\, y \in \mathrm{F},\ \| x - y \| \geq d$$
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in \mathrm{F},\ \| x - y \| < d + \varepsilon$$

En particulier, en prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier n strictement positif, $\exists\, y_n \in$ F, $\| x - y_n \| < d + \dfrac{1}{n}$.
Montrons que la suite (y_n) est de Cauchy. Pour tout $p \geq n$, considérons le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par y_n et y_p. Etant de dimension finie, on peut projeter orthogonalement x en un élément z de cet espace. On a donc :

$$z \in \mathrm{F} \qquad \text{car } z \in \mathrm{Vect}(y_n, y_p) \subset \mathrm{F}$$
$$x - z \perp \mathrm{Vect}(y_n, y_p)$$

En particulier, $\| x - z \| \geq d$. Décomposons $x - y_n = x - z + z - y_n$ avec $x - z \perp \mathrm{Vect}(y_n, y_p)$ et $z - y_n \in \mathrm{Vect}(y_n, y_p)$. On a donc $x - z \perp z - y_n$ et le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$\| x - y_n \|^2 = \| x - z \|^2 + \| z - y_n \|^2$$

donc :

$$\| z - y_n \|^2 = \| x - y_n \|^2 - \| x - z \|^2 \leq (d + \frac{1}{n})^2 - d^2 = \frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2}$$

donc :

$$\| z - y_n \| \leq \sqrt{\frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

De même :

$$\| z - y_p \| \leq \sqrt{\frac{2d}{p} + \frac{1}{p^2}} \leq \sqrt{\frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2}} \qquad \text{car } p \geq n$$

Donc, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $p \geq n$:

$$\| y_p - y_n \| \leq \| z - y_n \| + \| z - y_p \| \leq 2\sqrt{\frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

quantité qu'on peut rendre inférieure à tout $\varepsilon > 0$ à condition de prendre $p \geq n \geq \mathrm{N}$ si $2\sqrt{\dfrac{2d}{\mathrm{N}} + \dfrac{1}{\mathrm{N}^2}} < \varepsilon$.
Etant de Cauchy dans un Hilbert, la suite (y_n) converge. Sa limite y est adhérente à F, donc élément de F puisque F est supposé fermé. En passant à la limite dans l'inégalité :

$$\forall\, n,\ d \leq \| x - y_n \| < d + \frac{1}{n}$$

on obtient $\| x - y \| = d$.

EXEMPLES :
❑ Reprenons E = C^0([0, 1]) muni du produit scalaire $<f \mid g> = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\, \mathrm{d}t$, et la forme linéaire φ définie par :

$$\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a vu plus haut que F = Ker(φ) est fermé mais $(F^\perp)^\perp \neq F$. Donc la réciproque (iv) ⇒ (iii) peut être fausse si E n'est pas un Hilbert.
Si on remplace E par l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$ des fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue, Ker(φ) est l'hyperplan orthogonal à la fonction (de carré intégrable mais non continue) indicatrice de $[0, \frac{1}{2}]$. $F^\perp$ est la droite engendrée par cette fonction indicatrice, et $(F^\perp)^\perp$ est bien égal à F.

❑ Toujours avec $E = C^0([0, 1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Soit F le sous-espace vectoriel des fonctions nulles sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et G le sous-espace vectoriel des fonctions nulles sur $[0, \frac{1}{2}]$. Montrons que $G = F^\perp$.
En effet, il est clair que $G \subset F^\perp$.
Réciproquement, soit g élément de E tel qu'il existe $x_0 \in [0, \frac{1}{2}[$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Alors il existe un intervalle I centré en x_0, inclus dans $[0, \frac{1}{2}[$ tel que g soit de signe constant sur cet intervalle. Prenons f une fonction non nulle de même signe que g sur I, et nulle en dehors de I. Alors f est élément de F et pourtant $\langle f \mid g\rangle$ est strictement positif. Donc g n'appartient pas à $F^\perp$. On a montré que si g n'est pas identiquement nulle sur $[0, \frac{1}{2}[$, alors $g \notin F^\perp$. Donc si $g \in F^\perp$, alors g s'annule sur $[0, \frac{1}{2}[$, et par continuité sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc $g \in G$. Ainsi, $F^\perp \subset G$.
Donc $F^\perp = G$.
On montre de même que $G^\perp = F$.
On a donc $(F^\perp)^\perp = F$ donc (iii) est vrai. Cependant $F + G \neq E$ car F + G est inclus dans le sous-espace vectoriel des fonctions s'annulant en 0. Donc (ii) est faux. Donc la réciproque (iii) ⇒ (ii) peut être fausse si E n'est pas un Hilbert.
Si on remplace E par l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$, on a bien F + G = E car les éléments de $L^2([0, 1])$ sont seulement définis presque partout, et un élément h de $L^2([0, 1])$ peut donc être supposé vérifier $h(0) = 0$. h se décompose alors en $h = f + g$ avec :

$$f(x) = \begin{cases} h(x) \text{ si } x < 1/2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{de sorte que } f \in F$$

et $$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1/2 \\ h(x) \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{de sorte que } g \in G$$

COROLLAIRE

Pour tout sous-espace vectoriel F *d'un Hilbert,* $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

Démonstration :

❑ Dans tout espace préhilbertien, $F^\perp = \overline{F}^\perp$. Par ailleurs, $\overline{F}$ étant fermé, l'équivalence (iv) $\Leftrightarrow$ (iii) valide dans un Hilbert permet de dire que $(\overline{F}^\perp)^\perp = \overline{F}$. Donc $(F^\perp)^\perp = (\overline{F}^\perp)^\perp = \overline{F}$.
On rappelle que cette égalité peut être fausse dans un préhilbertien quelconque E, puisqu'on a vu des exemples de sous-espaces vectoriels F fermés et strictement inclus dans E tel que $F^\perp = \{0\}$. Pour un tel sous-espace vectoriel, $(F^\perp)^\perp = E$ alors que $\overline{F} = F$.

3- Dualité

PROPOSITION (théorème de représentation de Riesz)
Soit φ *une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert* H. *Alors il existe un unique* $y \in$ H *tel que* :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle y \mid x\rangle$$

<u>Démonstration</u> :
❑ Montrons l'existence. Si $\varphi = 0$, on prend $y = 0$.
Sinon, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de H, fermé car φ est continue, donc E étant un Hilbert, $E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)^\perp$, d'après le (ii) du paragraphe précédent, avec $\mathrm{Ker}(\varphi)^\perp$ qui est une droite. Soit z un vecteur directeur de cette droite. On a donc $z \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$ et donc $\varphi(z) \neq 0$. On décompose tout x de H sous la forme :

$$x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)} z\right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)} z$$

avec $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)} z \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, $z \in \mathrm{Ker}(\varphi)^\perp$ et donc $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)} z \perp z$. Prenons $y = \frac{\overline{\varphi(z)}}{\| z \|^2} z$, où $\overline{\varphi(z)}$ désigne le conjugué de $\varphi(z)$ si le corps de base esr $\mathbb{C}$, ou $\varphi(z)$ lui-même si le corps de base est $\mathbb{R}$. On a :

$$\langle y \mid x\rangle = \langle y \mid \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)} z\rangle \qquad \text{car } y \perp x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)} z$$

$$= \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)} \langle y \mid z\rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)} \langle \frac{\overline{\varphi(z)}}{\| z \|^2} z \mid z\rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)} \frac{\varphi(z)}{\| z \|^2} \langle z \mid z\rangle = \varphi(x)$$

❑ Montrons l'unicité. Si y' est un autre vecteur vérifiant $\forall x \in$ H, $\varphi(x) = \langle y' \mid x\rangle$, alors :

$$\forall x \in E, \langle y - y' \mid x\rangle = 0$$

donc, en prenant $x = y - y'$, on obtient $\| y - y' \|^2 = 0$ et donc $y = y'$.

Il est nécessaire que φ soit continue, puisque la forme cherchée $x \to \langle y \mid x\rangle$ est une forme linéaire continue en vertu de l'inégalité de Schwarz.

Ainsi, tout y de H définit la forme linéaire continue $\Phi(y) : x \to \Phi(y)(x) = \langle y \mid x\rangle$ et toute forme linéaire continue φ est de la forme précédente pour un unique y. Si H' est le dual topologique de H (ensemble des formes linéaires continues sur H), Φ établit donc une bijection entre H et H'. De plus, cette application est semi-linéaire (linéaire si le corps de base est $\mathbb{R}$). En effet, pour tout y, z éléments de H et tout scalaire λ :

$$\forall x, \Phi(y + z)(x) = \langle y + z \mid x\rangle = \langle y \mid x\rangle + \langle z \mid x\rangle = \Phi(y)(x) + \Phi(z)(x)$$

donc $\quad \Phi(y + z) = \Phi(y) + \Phi(z)$
Puis :

$$\forall x, \forall \lambda, \Phi(\lambda y)(x) = <\lambda y \mid x> = \overline{\lambda} <y \mid x> = \overline{\lambda}\, \Phi(y)(x)$$

donc $\quad \Phi(\lambda y) = \overline{\lambda}\, \Phi(y)$

Enfin, Φ est une isométrie. En effet, pour tout x et tout y :

$$\left|\Phi(y)(x)\right| = \left|<y \mid x>\right| \leq \| y \| \, \| x \| \qquad \text{avec égalité si } x = y$$

donc

$$|||\, \Phi(y) \,||| = \| y \|$$

où $|||\, \Phi(y) \,|||$ est la norme de la forme linéaire $\Phi(y)$ subordonnée à la norme de H, i.e. le plus petit rapport de Lipschitz de $\Phi(y)$ (Voir L2/EVNORME.PDF). On a vu dans L3/BANACH.PDF que, dans un espace de Banach E (et encore plus généralement dans un espace normé quelconque), E, son dual topologique E' et son bidual E" ne sont généralement pas isomorphes. Il en est différemment dans les espaces de Hilbert. H' est semi-isomorphe à H, H" est semi-isomorphe à H', donc isomorphe (et isométrique) à H, ce qui permet d'identifier H" à H. Un espace normé isométrique à son bidual est dit **réflexif**.

4- Adjoint d'un opérateur continu

Soit (H, < | >) et (L, (|)) deux espaces de Hilbert, et u une application linéaire continue de H dans L. On rappelle que u est alors lipschitzienne et que la norme de u subordonnée aux normes de H et L est le plus petit réel, noté $|||\, u \,|||$, tel que :

$$\forall x \in \mathrm{H}, \| u(x) \| \leq |||\, u \,|||\, \| x \|$$

Pour alléger, on notera $\| u \|$ plutôt que $|||\, u \,|||$.

Pour tout y de L, l'application $\varphi : x \in \mathrm{H} \to (y \mid u(x))$ est une forme linéaire, continue en raison de l'inégalité de Schwarz. En effet :

$$\left|(y \mid u(x))\right| \leq \| y \| \, \| u(x) \| \leq \| y \| \, \| u \| \, \| x \|$$

donc φ est lipschitzienne de rapport $\| y \| \, \| u \|$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément z de H tel que :

$$\forall x \in \mathrm{H}, \varphi(x) = <z \mid x>$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathrm{H}, (y \mid u(x)) = <z \mid x>$$

z dépend de y et on définit ainsi une application de L dans H, notée u^*, telle que $z = u^*(x)$. On a donc :

$$\forall x \in \mathrm{H}, \forall y \in \mathrm{L}, (y \mid u(x)) = <u^*(y) \mid x>$$

PROPOSITION

Soit u une application linéaire continue d'un Hilbert (H, < , >) *vers un Hilbert* (L, (,)). *Alors il existe une application u^* de* L *dans* H *telle que* :

$$\forall x \in \mathrm{H}, \forall y \in \mathrm{L}, (y \mid u(x)) = <u^*(y) \mid x>$$

u^* est une application linéaire continue appelé **opérateur adjoint** *de u. Pour tout opérateur continu u et v de* H *dans* L, *et tout scalaire λ, on a :*

(i) $\quad (u + v)^* = u^* + v^*$

(ii) $\quad (\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$

(iii) $\quad (u^*)^* = u$

(iv) $\quad (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

(v) $\quad$ *Si u est inversible d'inverse continu, alors* $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$

(vi) $\| u \| = \| u^* \|$
(vii) $\| u^*u \| = \| u \|^2$

Dans le (iii), $(u^*)^*$ se note aussi u^{**}. Dans le (vii), $u^* \circ u$ a été abrégé en u^*u.

Démonstration :
❑ La démonstration de la linéarité de u^* et des points (i) à (v) s'adapte facilement de celle donnée dans L3/HERMTN.PDF pour les endomorphismes d'un espace hermitien de dimension finie, et qui n'utilise pas les matrices. La seule différence dans le cas hilbertien est qu'il faut ajouter dans les hypothèses la continuité des applications linéaires pour pouvoir appliquer le théorème de représentation de Riesz et justifier l'existence de l'adjoint, et que nous supposons également que les espaces de départ et d'arrivée ne sont pas nécessairement les mêmes. La continuité de u^* est montrée dans le point (vi) et peut-être temporairement admise lors du point (iii) (on en a besoin pour savoir que $(u^*)^*$ existe).

❑ (vi) Pour tout y de L, on a :

$$\begin{aligned} \| u^*(y) \|^2 &= \langle u^*(y) \mid u^*(y) \rangle = \langle y \mid uu^*(y) \rangle && \text{réel positif ou nul} \\ &\leq \| y \| \, \| uu^*(y) \| && \text{d'après l'inégalité de Schwarz} \\ &\leq \| y \| \, \| u \| \, \| u^*(y) \| \end{aligned}$$

donc $\| u^*(y) \| \leq \| y \| \, \| u \|$
ce qui prouve la continuité de u^* ainsi que $\| u^* \| \leq \| u \|$. Appliquant cette inégalité à u^* elle-même, on obtient :

$$\| (u^*)^* \| \leq \| u^* \|$$

donc $\| u \| \leq \| u^* \|$ car $(u^*)^* = u$
donc, finalement $\| u \| = \| u^* \|$.

❑ (vii) Pour toute application linéaire continue $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $v : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, on sait que :

$$\| v \circ u \| \leq \| u \| \, \| v \|$$

(Voir L2/EVNORME.PDF). Donc $\| u^* \circ u \| \leq \| u \| \, \| u^* \| = \| u \|^2$ car $\| u^* \| = \| u \|$.
Pour l'inégalité inverse, écrivons que, pour tout x de H :

$$\begin{aligned} \| u(x) \| &= \sqrt{(u(x) \mid u(x))} = \sqrt{\langle u^*u(x) \mid x \rangle} \\ &\leq \sqrt{\| u^*u(x) \| \, \| x \|} \\ &\leq \sqrt{\| u^*u \| \, \| x \|^2} = \sqrt{\| u^*u \|} \, \| x \| \end{aligned}$$

donc $\| u \| \leq \sqrt{\| u^*u \|}$.
donc, finalement, $\| u^*u \| = \| u \|^2$.

EXEMPLES :
❑ Soit $\mathrm{H} = \mathrm{L} = \mathbf{R}^2$, a un réel quelconque et $p : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x - ay \\ 0 \end{pmatrix}$. On a alors $p^* : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ -ax \end{pmatrix}$. En effet, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a :

$$\langle p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x - ay \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle = xx' - ayx' = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x' \\ -ax' \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid p^*\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle$$

Par ailleurs :

$$\| p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} x - ay \\ 0 \end{pmatrix} \| = |x - ay| = \left| \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \rangle \right|$$

$$\leq \| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| \| \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \| \qquad \text{d'après l'inégalité de Schwarz}$$

$$\leq \sqrt{1+a^2} \| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|$$

avec égalité pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$. Donc $\| p \| = \sqrt{1+a^2}$.

De même :

$$\| p^*\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} x \\ -ax \end{pmatrix} \| = |x| \sqrt{1+a^2}$$

$$\leq \sqrt{1+a^2} \| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|$$

avec égalité pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\| p^* \| = \sqrt{1+a^2} = \| p \|$.

❑ Soit H = $l^2(\mathbb{R})$ et u l'application de suppression des termes d'indice impair, définie par :

$$u : x \to u(x) = (x_0, x_2, x_4, ..., x_{2n}, ...)$$

on a :

$$<y \mid u(x)> = \sum_{n=0}^{\infty} x_{2n}y_n = <u^*(y) \mid x>$$

avec $u^*(y) = (y_0, 0, y_1, 0, y_2, ..., 0, y_n, 0, y_{n+1}, 0, ...)$

On pourra vérifier que $\| u \| = \| u^* \| = 1$.

DEFINITION

Soit u un endomorphisme continu d'un espace de Hilbert H. *On dit que u est* **auto-adjoint** *si $u = u^*$. On dit que u est* **unitaire** *si $uu^* = u^*u =$* Id. *On dit que u est* **normal** *si $uu^* = u^*u$.*

Dans le cas des endomorphismes unitaires, on a comme dans le cas de la dimension finie (voir L3/HERMITN.PDF) l'équivalence entre :

(i) $\forall x \in$ E, $\| u(x) \| = \| x \|$ (u est une **isométrie**)

(ii) $\forall (x, y) \in$ E^2, $<u(x) \mid u(y)> = <x \mid y>$

(iii) $u^*u =$ Id

car la démonstration n'utilise pas la dimension de l'espace. Mais en dimension infinie, la condition (iii) ne suffit pas à conclure que $uu^* =$ Id. Il faut le rajouter dans l'hypothèse.

EXEMPLES :

❑ Pour H = $l^2(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et u la fonction d'annulation du premier terme, définie par :

$$u : x = (x_0, x_1, ..., x_n, ...) \to u(x) = (0, x_1, ..., x_n, ...)$$

on a :

$$<y \mid u(x)> = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y_n}\, x_n \qquad \text{ou simplement } \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$= <u(y), x>$$

donc $u^* = u$ et u est auto-adjoint.

❑ Soit $H = l^2(\mathbb{K})$ et u l'application de décalage qui, à $x = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)$, associe $u(x) = (0, x_0, x_1, ..., x_n, ...)$. Alors :

$$<y \mid u(x)> = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y_n}\, x_{n-1} \qquad \text{ou simplement } \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_{n-1} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{y_{n+1}}\, x_n = <u^*(y), x>$$

avec $u^*(y) = (y_1, y_2, ..., y_{n+1}, ...)$

u^* est l'opérateur de suppression du premier terme. On a $u^*u = \text{Id}$ mais uu^* est l'application qui, à x, associe la suite $(0, x_1, ..., x_n, ...)$. Ainsi, $uu^* \neq \text{Id}$. u est une isométrie mais n'est ni unitaire ni normale.

❑ Soit $H = l^2(\mathbb{K})$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, et u l'application :

$$u : x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to u(x) = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

u est continue car, pour tout x, $\| u(x) \| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n|^2} \leq \text{Sup }\{|a_n|, n \in \mathbb{N}\} \times \| x \|$.

On a :

$$<y \mid u(x)> = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{y_n}\, a_n x_n \qquad \text{ou simplement } \sum_{n=0}^{\infty} y_n a_n x_n \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$= <u^*(y) \mid x>$$

avec $u^*(y) = (\overline{a_n}\, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplement $(a_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par conséquent, $u = u^*$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ce n'est plus le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si au moins l'un des a_n est non réel, mais on a alors $uu^* = u^*u$, donc u est un opérateur normal.

II : Bases de Hilbert

1- Définition

Soit H un espace de Hilbert. On appelle **base de Hilbert** ou **base hilbertienne** une famille $(e_i)_{i\in I}$ orthonormée maximale, c'est-à-dire pour laquelle il est impossible de trouver un vecteur unitaire qui soit orthogonal à tous les e_i.

EXEMPLES :

❑ Dans un espace euclidien ou hermitien (de dimension finie), une base orthonormée usuelle est une base de Hilbert.

❑ Dans $l^2(\mathbb{R})$, les suites $e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ où le 1 se trouve en n-ème place, $n \geq 0$, forment une base de Hilbert. Elles forment en effet une famille orthonormée. Cette famille est maximale, car si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $l^2(\mathbb{R})$ orthogonal à tous les e_n, alors :

$$\forall\, n,\ 0 = <x \mid e_n> = x_n$$

donc $x = 0$.

Elle ne forme pas une base algébrique au sens usuel du terme puisque le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est l'ensemble des combinaisons linéaires finies de ces vecteurs, i.e. l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

❑ Considérons l'espace E des fonctions 2π-périodiques, de carré intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 2\pi]$, à valeurs complexes, muni du produit scalaire $<f \mid g> = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$. Cet espace est adapté à l'étude des séries de Fourier (voir L3/FOURIER.PDF). Les fonctions $(e^{inx})_{n\in\mathbf{Z}}$ forment une base de Hilbert. En effet, elles constituent une famille orthonormée qui engendre les polynômes trigonométriques. Or les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace des fonctions continues 2π-périodique pour la convergence uniforme (théorème de Weierstrass, démontré dans le chapitre L3/FOURIER.PDF). Mais la norme euclidienne $\| f \| = \sqrt{<f \mid f>}$ est majorée par la norme de la convergence uniforme $\| f \|_\infty = \text{Sup}\, \{\lvert f(t)\rvert, 0 \le t \le 2\pi\}$. En effet :

$$\| f \| = \sqrt{<f \mid f>} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lvert f(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t} \le \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| f \|_\infty^2\,\mathrm{d}t} = \| f \|_\infty$$

Donc toute suite convergente pour la norme uniforme converge vers la même limite pour la norme euclidienne. Donc toute partie dense pour la norme uniforme est dense pour la norme euclidienne. Donc l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques pour la norme euclidienne. Mais l'espace des fonctions continues 2π-périodiques est dense pour la norme euclidienne dans E (voir L3/LEBESGUE.PDF). Donc l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans E. Soit alors une fonction f élément de E, orthogonale à toutes les fonctions e^{inx}. Par combinaison linéaire, f sera orthogonale à tout polynôme trigonométrique, puis par densité et passage à la limite dans le produit scalaire, f sera orthogonale à toute fonction de E donc à elle-même. Donc $f = 0$ et l'on a ainsi montré que $(e^{inx})_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base de Hilbert. Dans le chapitre L3/FOURIER.PDF, on a tenu un raisonnement comparable mais en se limitant aux fonctions f continues par morceaux.

❑ Considérons un intervalle $[a, b]$, μ une fonction continue strictement positive et intégrable sur $]a, b[$, et $C^0([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles muni du produit scalaire $<f \mid g> = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mu(t)\,\mathrm{d}t$. Notons H l'espace de Hilbert obtenu par complétion de $C^0([a, b])$ pour la norme euclidienne $\| \ \|$ associée à ce produit scalaire. H est l'espace $L^2(]a, b[, \mu)$ des fonctions de carré intégrable sur $]a, b[$ pour la mesure $\mu(t)\,\mathrm{d}t$.

Le théorème de Weierstrass énonce que toute fonction élément de $C^0([a, b])$ est limite d'une suite de polynômes pour la convergence uniforme $\| \ \|_\infty$ (ce théorème est démontré en annexe du chapitre L3/METRIQUE.PDF). Or, pour tout f de $C^0([a, b])$, on a :

$$\| f \| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mu(t)\,\mathrm{d}t} \le \sqrt{\int_a^b \| f \|_\infty^2\,\mu(t)\,\mathrm{d}t} = \| f \|_\infty \times \sqrt{\int_a^b \mu(t)\,\mathrm{d}t}$$

Donc, comme ci-dessus, l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes (condondus avec les fonctions polynomiales associées) qui est dense dans $C^0([a, b])$ pour la $\| \ \|_\infty$ l'est aussi pour la norme euclidienne. Et puisque $C^0([a, b])$ est dense dans $L^2(]a, b[, \mu)$ pour la norme euclidienne, $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $L^2(]a, b[, \mu)$ pour la norme euclidienne. Une fonction de $L^2(]a, b[, \mu)$ orthogonale à $\mathbb{R}[X]$ sera aussi orthogonale à $L^2(]a, b[, \mu)$ par continuité du produit scalaire, donc sera nulle. On a donc $\mathbf{R}[X]^{\perp} = \{0\}$ dans $L^2(]a, b[, \mu)$. Si on orthonormalise la base canonique de $\mathbf{R}[X]$ par récurrence au moyen de la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (voir L1/ESPEUCL.PDF), on obtient une base orthonormée pour le produit scalaire précédent qui est maximale, puisque toute fonction orthogonale à cette base sera orthogonale à $\mathbf{R}[X]$ donc sera nulle. Ainsi, une base de $\mathbf{R}[X]$ orthonormée pour le produit scalaire précédent est une base de Hilbert de $L^2(]a, b[, \mu)$. On trouvera une étude plus complète des familles de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ orthogonaux pour diverses expressions de μ dans le chapitre L2/POLORTHO.PDF. Les deux cas les plus classiques sont les suivants :

$]a, b[$	μ	Polynômes de	$P_n(t)$ (à une constante près)
$[-1, 1]$	1	Legendre	$\dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$
$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	Tchebychev	$\displaystyle\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k} t^{n-2k}(t^2-1)^k$

PROPOSITION

(i) *Tous espace de Hilbert possède une base de Hilbert.*

(ii) *Toutes les bases de Hilbert d'un même espace de Hilbert ont même cardinal*.

(iii) *Si on se donne une famille de vecteurs orthonormés d'un espace de Hilbert, cette famille peut être complétée en une base de Hilbert.*

La démonstration de ces affirmations est admise. Elle repose sur l'axiome du choix, qui permet sous certaines conditions de prouver l'existence de parties maximales.
Le (i) est l'équivalent dans les espaces de Hilbert de l'existence des bases algébriques dans les espaces vectoriels de dimension finie.
Le (ii) est l'équivalent dans les espaces de Hilbert de la notion de dimension dans les espaces vectoriels de dimension finie (égale au cardinal de n'importe quelle base).
Le (iii) est l'équivalent dans les espaces de Hilbert du théorème de la base incomplète.

2- Décomposition d'un vecteur

PROPOSITION

Soit H *un espace de Hilbert et* $(e_i)_{i\in I}$ *une famille orthonormée de cet espace. Il y a équivalence entre* :

(i) *La famille* $(e_i)_{i\in I}$ *est une base de Hilbert de* H.

(ii) $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})$ *est dense dans* H.

(iii) $\forall x \in H, x = \sum_{i\in I} \langle e_i \mid x\rangle e_i$ (**égalité de Parseval**)

(iv) $\forall x \in H, \| x \|^2 = \sum_{i\in I} \left|\langle e_i \mid x\rangle\right|^2$ (**identité de Bessel**)

(v) $\forall (x, y) \in H^2, \langle x \mid y\rangle = \sum_{i\in I} \overline{\langle e_i \mid x\rangle} \langle e_i \mid x\rangle$

Dans le (ii), $\text{Vect}((e_i)_{i\in I})$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires des e_i, c'est-à-dire l'ensemble des $\sum_{i\in J} \lambda_i e_i$, J étant une partie finie quelconque de I.

Le sens à donner à $a = \sum_{i\in I} a_i$ dans le (iii), le (iv) et le (v) est celui des familles sommables (voir le chapitre L2/SERIES.PDF). On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** de somme a élément de H, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, J \text{ fini}, \forall\, K \text{ fini} \supset J, \| a - \sum_{i\in K} a_i \| < \varepsilon$$

L'intérêt de cette notion est qu'elle peut s'appliquer à une famille d'indices I fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable, et que la somme a ne dépend d'aucun ordre particulier sur l'ensemble des indices. On montre que la somme a est unique et que, si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors $(a_i + \lambda b_i)_{i\in I}$ l'est, et $\sum_{i\in I} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \lambda \sum_{i\in I} b_i$.

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ (respectivement $I = \mathbb{Z}$), on a $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, (respectivement $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$), avec de plus le fait que les termes de la somme peuvent être permutés sans changer la valeur de la somme. On dit que la série est **commutativement convergente**.

Démonstration :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii) : notons F l'adhérence de $\text{Vect}(e_i)_{i\in I}$. Dire que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de Hilbert, c'est dire que le seul vecteur orthogonal à tous les e_i est le vecteur nul. C'est donc dire que $(\text{Vect}((e_i)_{i\in I}))^\perp = \{0\}$. Mais $\text{Vect}((e_i)_{i\in I}) \subset F$, donc $F^\perp \subset (\text{Vect}((e_i)_{i\in I}))^\perp = \{0\}$. Mais F est fermé, dans un espace de Hilbert, donc $F = (F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$, ce qui prouve que $\text{Vect}((e_i)_{i\in I})$ est dense dans H.

❑ (ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soit x élément de H et $\varepsilon > 0$.
Comme $\text{Vect}((e_i)_{i\in I})$ est dense dans H, la boule $B(x, \varepsilon)$ intersecte $\text{Vect}((e_i)_{i\in I})$. Soit y un élément de cette intersection. On a donc $\| x - y \| < \varepsilon$, et y est combinaison linéaire des e_i, i.e. il existe une partie finie J de I telle que y appartienne à $\text{Vect}((e_i)_{i\in J})$.

Soit K fini contenant J. Soit $z = \sum_{i\in K} < e_i \mid x > e_i$. z est le projeté orthogonal de x sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $\text{Vect}((e_i)_{i\in K})$, et y appartient à ce sous-espace vectoriel puisque $J \subset K$. Par conséquent $x - z$ est orthogonal à $z - y$. Donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\| x - y \|^2 = \| x - z \|^2 + \| z - y \|^2$$

donc

$$\| x - z \| \leq \| x - y \| < \varepsilon$$

On a prouvé que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, J \text{ fini}, \forall\, K \text{ fini} \supset J, \| x - \sum_{i\in K} < e_i \mid x > e_i \| < \varepsilon$$

ce qui prouve que la famille $(<e_i \mid x> e_i)_{i\in I}$ est sommable de somme x, et donc que $x = \sum_{i\in I} < e_i \mid x > e_i$.

❑ (iii) ⇒ (iv) : Soit $\varepsilon > 0$, et J fini tel que, pour tout K fini contenant J, $\| x - \sum_{i\in K} < e_i \mid x > e_i \| < \varepsilon$.

Posons $z = \sum_{i\in K} < e_i \mid x > e_i$, de sorte que $\| x - z \| < \varepsilon$.

On a de plus :

$$\| z \| - \| x \| \leq \big| \| x \| - \| z \| \big| \leq \| x - z \| < \varepsilon$$

donc $\| z \| \leq \| x \| + \varepsilon$

donc $\| x \| + \| z \| \leq 2\| x \| + \varepsilon$

donc $\big| \| x \|^2 - \| z \|^2 \big| = \big| \| x \| - \| z \| \big| \, (\| x \| + \| z \|) \leq \varepsilon(2\| x \| + \varepsilon)$

avec $\| z \|^2 = \sum_{i\in K} \left| <e_i \mid x> \right|^2$ car les e_i sont orthonormés et la somme est finie. Pour tout $\varepsilon' > 0$, on peut choisir ε suffisamment petit pour que $\varepsilon(2\| x \| + \varepsilon) < \varepsilon'$, et, appliquant ce qui précède, on a trouvé J fini tel que, pour tout K fini contenant J :

$$\left| \| x \|^2 - \sum_{i\in K} \left| <e_i \mid x> \right|^2 \right| < \varepsilon'$$

Cela prouve que la famille $\left| <e_i \mid x> \right|^2$ est sommable de somme $\| x \|^2$, et donc que :

$$\| x \|^2 = \sum_{i\in I} \left| <e_i \mid x> \right|^2$$

❑ (iv) ⇒ (v) se montre en utilisant une identité de polarisation. Dans le cas réel, on a :

$$<x \mid y> = \frac{\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \Big(\sum_{i\in I} <e_i \mid x + y>^2 - \sum_{i\in I} <e_i \mid x>^2 - \sum_{i\in I} <e_i \mid y>^2\Big) \qquad \text{d'après (iv)}$$

$$= \frac{1}{2} \Big(\sum_{i\in I} (<e_i \mid x> + < e_i \mid y>)^2 - \sum_{i\in I} <e_i \mid x>^2 - \sum_{i\in I} <e_i \mid y>^2\Big)$$

$$= \sum_{i\in I} <e_i \mid x>< e_i \mid y> \qquad \text{après développement du carré et simplification}$$

Dans le cas complexe, on procède de même avec une formule de polarisation sur $\mathbb{C}$, telle que :

$$<x \mid y> = \frac{1}{4} (\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 - i \| x + iy \|^2 + i \| x - iy \|^2)$$

(Voir L3/HERMITN.PDF). On procède ensuite comme pour le cas réel, même si les calculs, laissés au lecteur, sont un peu plus fastidieux ici.

❑ (v) $\Rightarrow$ (iv) en prenant $x = y$.

❑ (iv) $\Rightarrow$ (i) car si x est orthogonal à tous les e_i, alors (iv) donne $\| x \| = 0$ donc $x = 0$.

EXEMPLES :

❑ Dans le cas où H est l'espace de Hilbert des fonctions 2π-périodiques de carré intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 2\pi]$, avec sa base de Hilbert $(e^{inx})_{n\in\mathbf{Z}}$, la proposition prouve que, pour tout f de H, on a :

$$f = \sum_{n\in\mathbf{Z}} <e^{inx} \mid f> e^{inx}$$

qui est la décomposition de f en série de Fourier, la convergence ayant lieu au sens de la norme euclidenne, dite aussi dans ce contexte norme de la convergence en moyenne quadratique. Dans le chapitre L3/FOURIER.PDF, on s'est borné à montrer cette égalité pour les fonctions 2π-périodiques continues par morceaux.

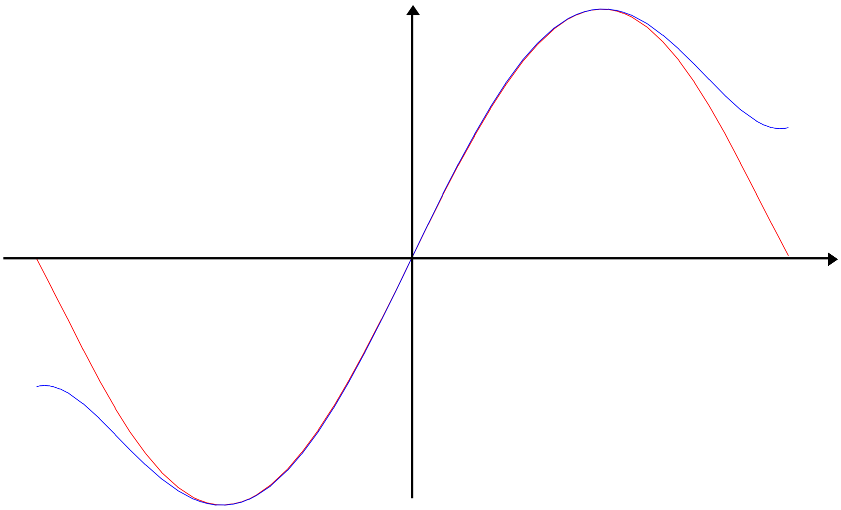
❑ Si $H = L^2(]a, b[, \mu)$ et si $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ désigne une famille de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire défini par μ, on a, pour tout f de H :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{<P_n, f>}{\| P_n \|^2} P_n$$

la convergence ayant lieu au sens de la convergence pour la norme euclidienne.

Considérons par exemple $]a, b[=]-1, 1[$ et $\mu(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Une famille de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire associé est celle des polynômes de Tchebychev $P_n(t) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} t^{n-2k} (t^2-1)^k$.

Soit $f(t) = \sin(\pi t)$. On trace ci-dessous en rouge le graphe de la somme partielle $\sum_{n=0}^{5} \dfrac{<P_n, f>}{\| P_n \|^2} P_n$, projection orthogonale de f sur $\mathbf{R}_5[X]$, dont la valeur en t vaut approximativement $3.091392547t - 4.753314065t^3 + 1.668517899t^5$, ainsi qu'en bleu le graphe de la fonction $\pi t - \dfrac{\pi^3 t^3}{6} + \dfrac{\pi^5 t^5}{120}$, partie principale à l'ordre 5 du développement limité de f en 0. On n'a pas représenté le graphe de f qui se distingue fort peu de celui de son projeté orthogonal. L'approximation de f par son projeté est excellente :



❑ Si on regarde attentivement la démonstration, on peut voir que les implications (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i) sont valides dans tout espace préhilbertien. La seule implication utilisant le fait que H est un Hilbert est (i) $\Rightarrow$ (ii).
Cette dernière implication peut être fausse dans un espace préhilbertien qui n'est pas un Hilbert. Dans les exercices de L2/POLORTHO.PDF, on donne l'exemple suivant. On munit l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $<\sum_{n\geq 0} a_n X^n \mid \sum_{n\geq 0} b_n X^n> = \sum_{n\geq 0} a_n b_n$. On considère la forme linéaire ψ sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\psi(\sum_{k\geq 0} a_k X^k) = \sum_{k\geq 0} \dfrac{a_k}{k+1}$. On pose $G = \mathrm{Ker}(\psi)$, hyperplan de $\mathbb{R}[X]$. On montre que :

> ψ est continue, donc G est fermé dans E.
> $G^\perp = \{0\}$
> Une base algébrique de G est $\{(n+1)X^n - 1, n \geq 1\}$.

A partir de cette base algébrique, on peut construire par récurrence une base algébrique orthonormée $(e_n)_{n\geq 1}$ de G par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Cette famille forme alors une famille orthonormée de $\mathbb{R}[X]$, maximale car $G^\perp = \{0\}$, mais telle que $\mathrm{Vect}((e_n)_{n\geq 1})$ est non dense dans $\mathbb{R}[X]$, puisque $\mathrm{Vect}((e_n)_{n\geq 1}) = G$ et que G est fermé dans $\mathbb{R}[X]$ et différent de $\mathbb{R}[X]$.

La proposition qu'on vient de montrer permet d'associer à tout x de H la famille $(<e_i \mid x>)_{i\in I}$, cette famille permettant de reconstituer $x = \sum_{i\in I} <e_i \mid x>\, e_i$. De plus cette famille est telle que $(|<e_i \mid x>|^2)_{i\in I}$ est sommable d'après l'identité de Bessel (iv). Définissons $l^2(I, \mathbb{K})$ comme l'espace vectoriel des familles $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que la famille $(|a_i|^2)_{i\in I}$ est sommable.

PROPOSITION (théorème de Riesz-Fischer)
Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ de base de Hilbert $(e_i)_{i\in I}$. Alors H et $l^2(I, \mathbb{K})$ sont isométriques.

Démonstration :

❑ L'application $x \in \mathrm{H} \to (<e_i \mid x>)_{i\in\mathrm{I}} \in l^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ est linéaire et est une isométrie de H dans son image, en vertu de l'identité de Bessel. En particulier, elle est injective.

Il suffit de montrer qu'elle est surjective. Soit $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de scalaires de carré sommable :

$$\mathrm{A} = \sum_{i\in\mathrm{I}} |a_i|^2$$

Pour tout entier n strictement positif, il existe une partie finie J_n telle que, pour toute partie finie K contenant J_n :

$$\left| \mathrm{A} - \sum_{i\in\mathrm{K}} |a_i|^2 \right| \leq \frac{1}{n}$$

En particulier, on peut choisir la suite (J_n) croissante, quitte à remplacer J_n par sa réunion avec tous les J_k, $k < n$, puisque cette opération respectera l'inégalité précédente. De plus, si L est une partie disjointe de J_n, on a, en prenant $\mathrm{K} = \mathrm{L} \cup \mathrm{J}_n$:

$$\left| \mathrm{A} - \sum_{i\in\mathrm{L}} |a_i|^2 - \sum_{i\in\mathrm{J}_n} |a_i|^2 \right| \leq \frac{1}{n}$$

or $$\sum_{i\in\mathrm{L}} |a_i|^2 - \left| \mathrm{A} - \sum_{i\in\mathrm{J}_n} |a_i|^2 \right| \leq \left| \mathrm{A} - \sum_{i\in\mathrm{L}} |a_i|^2 - \sum_{i\in\mathrm{J}_n} |a_i|^2 \right|$$

donc $$\sum_{i\in\mathrm{L}} |a_i|^2 \leq \left| \mathrm{A} - \sum_{i\in\mathrm{J}_n} |a_i|^2 \right| + \left| \mathrm{A} - \sum_{i\in\mathrm{L}} |a_i|^2 - \sum_{i\in\mathrm{J}_n} |a_i|^2 \right| \leq \frac{2}{n}$$

Posons $x_n = \sum_{i\in\mathrm{J}_n} a_i\, e_i$. Montrons que (x_n) est une suite de Cauchy. Pour tout $p \geq n$, on a J_n inclus J_p et :

$$x_p - x_n = \sum_{i\in\mathrm{J}_p} a_i\, e_i - \sum_{i\in\mathrm{J}_n} a_i\, e_i = \sum_{i\in\mathrm{J}_p\setminus\mathrm{J}_n} a_i\, e_i$$

donc

$$\| x_p - x_n \|^2 = \sum_{i\in\mathrm{J}_p\setminus\mathrm{J}_n} |a_i|^2 \qquad \text{car les } e_i \text{ sont orthonormés}$$

$$\leq \frac{2}{n} \qquad \text{car } \mathrm{L} = \mathrm{J}_p \setminus \mathrm{J}_n \text{ est disjoint de } \mathrm{J}_n$$

Donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, \forall\, p \geq \mathrm{N}, \| x_p - x_n \| < \varepsilon$$

Il suffit de prendre N tel que $\frac{2}{\mathrm{N}} < \varepsilon^2$. La suite (x_n) étant de Cauchy, et un Hilbert étant complet, la suite converge vers un élément x de H. Montrons que, pour tout i, $a_i = <e_i \mid x>$. On a :

$$\forall\, n,\ \langle e_i \mid x_n\rangle = \begin{cases} a_i \text{ si } i \in \mathrm{J}_n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Si i appartient à $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_n$, alors $\exists$ N, $i \in \mathrm{J_N}$ et, puisque la suite (J_n) est croissante, $\forall\, n \geq \mathrm{N}$, $i \in \mathrm{J}_n$, donc :

$$\forall\, n \geq \mathrm{N},\ a_i = \langle e_i \mid x_n\rangle$$

donc, en faisant tendre n vers l'infini, le produit scalaire étant continu, $a_i = \langle e_i \mid x\rangle$.

Si i n'appartient pas à $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{J}_n$, on a $\forall\, n$, $\langle e_i \mid x_n\rangle = 0$, donc, en faisant tendre n vers l'infini, $\langle e_i \mid x\rangle = 0$. Montrons qu'on a également $a_i = 0$. Considérons la partie $\mathrm{L} = \{i\}$. Pour tout n, L est disjointe de J_n, donc :

$$|a_i|^2 = \sum_{j\in \mathrm{L}} |a_j|^2 \leq \frac{2}{n} \qquad \text{inégalité valide pour toute partie L disjointe de } \mathrm{J}_n$$

Ceci étant vrai pour tout n, on a bien $a_i = 0$.

Ainsi, on a bien montré que $\forall\, i$, $a_i = \langle e_i \mid x\rangle$. On a donc bien $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \langle e_i \mid x\rangle\, e_i = \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i\, e_i$ et l'image de H est bien $l^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, l'antécédent de $(a_i)_{i\in\mathrm{I}} \in l^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ étant $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i\, e_i \in \mathrm{H}$.

Ce théorème montre que $l^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ est le modèle universel de tout espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{K}$ dont une base de Hilbert a pour cardinal I, une fois une telle base choisie, de même que $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$) est le modèle de tout espace euclidien (respectivement hermitien) de dimension n, une fois une base orthonormée choisie. Le cardinal d'un ensemble I d'indices d'une base de Hilbert joue donc, pour les espaces de Hilbert, le même rôle que la dimension pour un espace vectoriel de dimension finie.

Annexe : Hyperplan fermé d'orthogonal nul

1- Théorème général

Les exemples d'hyperplans fermés d'orthogonal nul, donnés dans le I-1), relèvent de la situation générale suivante. Soit E un espace préhilbertien non complet sur $\mathbb{R}$ (pour simplifier, sans avoir à se préoccuper de la semi-linéarité). Soit $\mathrm{H} = \hat{\mathrm{E}}$ son complété, qui est un espace de Hilbert. Soit v un élément de $\mathrm{H} \setminus \mathrm{E}$ (et donc en particulier $v \neq 0$), et φ la forme linéaire définie sur E par :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \varphi(x) = \langle v \mid x\rangle$$

φ n'est pas identiquement nulle, car sinon v serait orthogonal à E, donc à son adhérence par continuité du produit scalaire, donc à H car E est dense dans H, donc v serait nul.

φ est continue car :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ |\varphi(x)| = |\langle v \mid x\rangle| \leq \|v\|\,\|x\|$$

donc $\quad \|\varphi\| \leq \|v\|$

On considère enfin F = Ker(φ) = $\{x \in E, \langle v \mid x\rangle = 0\}$, hyperplan de E. Si on note $\{v\}^{\perp}$ l'orthogonal de v dans H, F n'est autre que $E \cap \{v\}^{\perp}$. F est dense dans $\{v\}^{\perp}$. En effet, soit z élément de $\{v\}^{\perp}$. E étant dense dans H, il existe une suite (w_n) de E telle que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = z$. Prenons un élément u de E \ Ker(φ). Considérons alors la suite $\left(w_n - \frac{\varphi(w_n)}{\varphi(u)} u\right)_{n\in\mathbf{N}}$. Cette suite est incluse dans Ker(φ) et :

$$\lim_{n\to\infty} \left(w_n - \frac{\varphi(w_n)}{\varphi(u)} u\right) = \lim_{n\to\infty} w_n - \frac{\langle v \mid w_n\rangle}{\varphi(u)} u$$

$$= z - \frac{\langle v \mid z\rangle}{\varphi(u)} u = z \qquad \text{puisque } v \perp z$$

PROPOSITION

Avec les notations précédentes :

(i) : *Le théorème de représentation de Riesz n'est pas valide dans* E.

(ii) : Ker(φ) *est fermé, et son orthogonal dans* E *est nul*.

(iii) : *Bien qu'il n'existe pas dans* E *de droite orthogonale à* Ker(φ), *on peut trouver dans* E *des droites supplémentaires de* Ker(φ) *aussi proches que l'on veut de l'orthogonalité*.

(iv) : *Pour tout w élément de* E, *la distance* d(w, Ker(φ)) *est égale à* $\dfrac{|\langle v \mid w\rangle|}{\| v \|}$

(v) : $\| \varphi \| = \| v \|$

Démonstration :

❑ (i) : **Le théorème de représentation de Riesz n'est pas valide dans E.**

Il n'existe aucun élément w de E tel que : $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle w \mid x\rangle$.

Par l'absurde, si un tel w existait, on aurait :

$\forall x \in E, \langle w \mid x\rangle = \langle v \mid x\rangle$

donc $\forall x \in H, \langle w \mid x\rangle = \langle v \mid x\rangle$ car E est dense dans H et le produit scalaire est continu

donc $w = v$

mais v n'est pas élément de E.

❑ (ii) : **Ker(φ) est fermé, et son orthogonal dans E est nul.**

Ker(φ) est fermé car φ est continu.

Montrons que son orthogonal dans E est nul. Supposons par l'absurde qu'il existe un élément w de E, non nul tel que $w \perp$ Ker(φ). Ker(φ), noyau d'une forme linéaire non nulle, est un hyperplan de E, et Vect(w) est une droite supplémentaire de Ker(φ). Donc E = Ker(φ) ⊕ Vect(w), tout x de E se décomposant sous la forme :

$$x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(w)} w\right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(w)} w \qquad \text{avec } x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(w)} w \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

On aurait alors :

$$\langle w \mid x\rangle = \langle w \mid \frac{\varphi(x)}{\varphi(w)} w\rangle \qquad \text{car } w \perp \mathrm{Ker}(\varphi)$$

$$= \frac{\varphi(x)}{\varphi(w)} \| w \|^2$$

donc $\varphi(x) = \dfrac{\varphi(w)}{\| w \|^2} \langle w \mid x\rangle = \langle \dfrac{\varphi(w)}{\| w \|^2} w \mid x\rangle$

On aurait alors trouvé $z = \dfrac{\varphi(w)}{\| w \|^2} w$ tel que : $z \in$ E et $\forall\ x \in$ E, $\varphi(x) = \langle z \mid x \rangle$. Mais nous venons de voir qu'une telle fonction n'existait pas. D'où une contradiction.

❑ (iii) : **Bien qu'il n'existe pas dans E de droite orthogonale à Ker(φ), on peut trouver dans E des droites supplémentaires de Ker(φ) aussi proches que l'on veut de l'orthogonalité.**

Soit w un vecteur non nul de E. Pour tout x de Ker(φ), le cosinus de l'angle entre x et w vaut $\dfrac{\langle w \mid x \rangle}{\| w \|\, \| x \|}$. Mesurons le défaut d'orthogonalité de w avec l'hyperplan Ker(φ) par la quantité $\mathrm{Sup}\ \{\dfrac{|\langle w \mid x \rangle|}{\| w \|\, \| x \|}, x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \setminus \{0\}\}$. Montrons qu'à défaut de trouver un élément non nul de E orthogonal à Ker(φ), on peut trouver pour tout ε > 0 un w élément de E tel que :

$$\mathrm{Sup}\ \{\frac{|\langle w \mid x \rangle|}{\| w \|\, \| x \|}, x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \setminus \{0\}\} \qquad < \varepsilon$$

En effet, E étant dense dans H, il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans E qui converge vers v. Comme $v \neq 0$, on peut supposer qu'il en est de même des w_n. Décomposons w_n dans H en :

$$w_n = \frac{\langle v \mid w_n \rangle}{\| v \|^2} v + (w_n - \frac{\langle v \mid w_n \rangle}{\| v \|^2} v)$$

avec $w_n - \dfrac{\langle v \mid w_n \rangle}{\| v \|^2} v$ élément de $\{v\}^{\perp}$. On a, pour tout x de Ker(φ) :

$$\frac{|\langle w_n \mid x \rangle|}{\| w_n \|\, \| x \|} = \frac{1}{\| w_n \|\, \| x \|} \left| \langle w_n - \frac{\langle v \mid w_n \rangle}{\| v \|^2} v \mid x \rangle \right|$$

car $\langle v, x \rangle = 0$ puique x est élément de Ker(φ)

$$\leq \frac{1}{\| w_n \|\, \| x \|} \| w_n - \frac{\langle v \mid w_n \rangle}{\| v \|^2} v \|\, \| x \|$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\leq \frac{1}{\| w_n \|} \| w_n - \frac{\langle v \mid w_n \rangle}{\| v \|^2} v \|$$

Le majorant est indépendant de x. On a donc :

$$\mathrm{Sup}\ \{\frac{|\langle w_n \mid x \rangle|}{\| w_n \|\, \| x \|}, x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \setminus \{0\}\} \qquad \leq \frac{1}{\| w_n \|} \| w_n - \frac{\langle v \mid w_n \rangle}{\| v \|^2} v \|$$

Le majorant tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il peut être rendu inférieur à ε > 0 donné pour n assez grand. Pour un tel n, w_n est un vecteur w qui convient.

❑ (iv) : **Distance d(w, Ker(φ))**

Puisque $\mathrm{Ker}(\varphi)^{\perp} = \{0\}$ dans E, il en résulte également que la notion de projecteur orthogonal sur l'hyperplan Ker(φ) n'est pas définie.

On peut aussi montrer directement que, pour w élément de E \ Ker(φ), il n'existe pas d'élément w_0 de Ker(φ) telle que la distance d(w, Ker(φ)) de w à Ker(φ) soit égale à $\| w - w_0 \|$. Si un tel élément w_0 existait, on aurait, pour tout x de Ker(φ) et tout λ réel :

$$\mathrm{d}(w, \mathrm{Ker}(\varphi)) \leq \| w - w_0 - \lambda x \| \qquad \text{car } w_0 + \lambda x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad \| w - w_0 \| \leq \| w - w_0 - \lambda x \|$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle w - w_0 \mid w - w_0 \rangle = \langle w - w_0 - \lambda x \mid w - w_0 - \lambda x \rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle w - w_0 \mid w - w_0 \rangle = \langle w - w_0 \mid w - w_0 \rangle - 2\lambda \langle w - w_0 \mid x \rangle + \lambda^2 \langle x \mid x \rangle$$

$\Leftrightarrow \qquad 2\lambda\langle w - w_0 \mid x\rangle = \lambda^2\langle g \mid g\rangle$

Pour λ non nul, on simplifie par λ, puis on fait tendre λ vers 0. On obtient $\langle w - w_0 \mid x\rangle = 0$, donc $w - w_0 \perp \mathrm{Ker}(\varphi)$. On aurait ainsi trouvé un élément $w - w_0$ non nul orthogonal à $\mathrm{Ker}(\varphi)$, ce qui est impossible dans E. Ainsi, la borne inférieure $d(w, \mathrm{Ker}(\varphi))$ n'est pas atteinte.

Montrons que $d(w, \mathrm{Ker}(\varphi)) = \left|\dfrac{\langle v \mid w\rangle}{\| v \|}\right|$, cette valeur nécessitant de faire appel à l'élément v extérieur à E. En effet, pour tout x dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$, donc dans $\{v\}^\perp$, on a, dans H :

$$\| w - x \|^2 = \| \frac{\langle v \mid w\rangle}{\| v \|^2} v + (w - \frac{\langle v \mid w\rangle}{\| v \|^2} v - x) \|^2$$

avec $w - \dfrac{\langle v \mid w\rangle}{\| v \|^2} v - x$ orthogonal à v

$$= \| \frac{\langle v \mid w\rangle}{\| v \|^2} v \|^2 + \| w - \frac{\langle v \mid w\rangle}{\| v \|^2} v - x \|^2$$

d'après le théorème de Pythagore

$$\geq \| \frac{\langle v \mid w\rangle}{\| v \|^2} v \|^2 = \frac{|\langle v \mid w\rangle|^2}{\| v \|^2}$$

donc $\quad \forall x \in \mathrm{Ker}(\varphi),\ \| w - x \| \geq \dfrac{|\langle v \mid w\rangle|}{\| v \|}$

donc $\quad d(w, \mathrm{Ker}(\varphi)) \geq \dfrac{|\langle v \mid w\rangle|}{\| v \|}$

Par ailleurs, si $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de E qui converge vers v et si on considère la suite $(w - \dfrac{\varphi(w)}{\varphi(w_n)} w_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on remarque que cette dernière suite est dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$, donc pour tout n :

$$d(w, \mathrm{Ker}(\varphi)) \leq \| w - (w - \frac{\varphi(w)}{\varphi(w_n)} w_n) \|$$

$$\leq \| \frac{\varphi(w)}{\varphi(w_n)} w_n \|$$

$$\leq \left|\frac{\varphi(w)}{\varphi(w_n)}\right| \| w_n \|$$

$$\leq \left|\frac{\langle v \mid w\rangle}{\langle v \mid w_n\rangle}\right| \| w_n \|$$

et le majorant tend vers $\left|\dfrac{\langle v \mid w\rangle}{\langle v \mid v\rangle}\right| \| v \| = \dfrac{|\langle v \mid w\rangle|}{\| v \|}$ quand n tend vers l'infini. Donc :

$$d(w, \mathrm{Ker}(\varphi)) \leq \frac{|\langle v \mid w\rangle|}{\| v \|}$$

D'où l'égalité cherchée.

❑ (v) : **Norme $\| \varphi \|$**

On a vu que $\| \varphi \| \leq \| v \|$. Montrons qu'on a l'égalité. Prenons là encore une suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite v et ne s'annulant pas. On a $\| \varphi \| \geq \dfrac{|\varphi(w_n)|}{\| w_n \|}$ puisque $\| \varphi \|$ est la borne supérieure des $\dfrac{|\varphi(w)|}{\| w \|}$ quand w décrit E. Passant à la limite, on obtient :

$$\| \varphi \| \geq \lim_{n\to\infty} \frac{|\varphi(w_n)|}{\| w_n \|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|<v \mid w_n>|}{\| w_n \|} = \frac{|<v \mid v>|}{\| v \|} = \| v \|$$

d'où l'égalité annoncée. Là aussi, on a besoin d'un élément extérieur à E pour donner une valeur à $\| \varphi \|$.

$\| \varphi \|$ comme borne supérieure des $\dfrac{|\varphi(w)|}{\| w \|}$, $w \in$ E, ne peut être atteinte en un élément w de E. Par l'absurde, si tel était le cas, on aurait $\| v \| = \| \varphi \| = \dfrac{|\varphi(w)|}{\| w \|} = \dfrac{|<v \mid w>|}{\| w \|}$ et donc $|<v \mid w>| = \| v \| \, \| w \|$. Or cette dernière égalité a lieu si et seulement si v et w sont colinéaires (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, voir L1/ESPEUCL.PDF), ce qui est exclu puisque w appartient à E et pas v.

Le fait que $d(w, \mathrm{Ker}(\varphi)) = \dfrac{|<v \mid w>|}{\| v \|} = \dfrac{|\varphi(w)|}{\| v \|}$ et $\| \varphi \| = \| v \|$ entraîne que $d(w, \mathrm{Ker}(\varphi)) = \dfrac{|\varphi(w)|}{\| \varphi \|}$. Dans les exercices du chapitre L2/EVNORME.PDF, on montre que cette relation est vérifiée par toute forme linéaire continue φ dans tout espace vectoriel normé. On y montre aussi que la borne inférieure $d(w, \mathrm{Ker}(\varphi))$ est atteinte si et seulement si la borne supérieure $\| \varphi \|$ est atteinte.

2- Exemples

❑ Soit E l'espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire $<(a_n) \mid (b_n)> = \sum_{n\geq 0} a_n b_n$. Son complété H est l'espace de Hilbert $l^2(\mathbf{R})$. Prenons φ la forme linéaire définie sur H par $\varphi((a_n)_{n\in\mathbf{N}}) = (\dfrac{a_n}{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$. On a ici :

$$\varphi(a) = <v \mid a>$$

avec $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (\dfrac{1}{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$. v est bien élément de H car $\sum \dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge. Par contre, v n'appartient pas à E.

Cet exemple est présenté sous une forme un peu camouflée dans les exercices de L2/POLORTHO.PDF, où l'on identifie E à l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ des polynômes sur $\mathbf{R}$:

$$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E \leftrightarrow P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in \mathbf{R}[X]$$

On y montre que le noyau de φ est fermé, d'orthogonal nul, conformément à ce qui est décrit précédemment.

Les droites "presque" orthogonales à Ker(φ) sont dirigées par les polynômes $\sum_{n\geq 0} \dfrac{X^n}{n+1}$, somme constituée d'un nombre fini, mais aussi grand qu'on veut, de termes. Plus on prend de termes et plus on s'approche de l'orthogonalité.

On a $\| \varphi \| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

❑ Soit E = $C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire $<f \mid g> = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Son complété H est l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$. Soit φ la forme linéaire sur H définie par $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,dt$. On a ici $\varphi(f) = <v, f>$ où v est la fonction élément de H \ E définie par :

$$v(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0, 1/2] \\ 0 \text{ si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dans E, Ker(φ) est fermé et son orthogonal est nul.
Les droites "presque" orthogonales à Ker(φ) sont par exemple dirigées par des fonctions du type :

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -\frac{t}{\varepsilon} + 1 + \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon] \\ 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{2} + \varepsilon, 1] \end{cases}, \text{ avec } \varepsilon > 0$$

Plus ε est petit et plus on s'approche de l'orthogonalité. On ne peut prendre $\varepsilon = 0$ car g cesse d'être continue.
On a $\| \varphi \| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Projection sur un convexe fermé d'un Hilbert

a) Soit C un fermé convexe (i.e. $\forall\, a \in C, \forall\, b \in C, \forall\, t \in [0, 1], (1 - t)a + tb \in C$) d'un espace de Hilbert H. Montrer que, pour tout x de H, il existe un unique élément y de C tel que :

$$d(x, F) = \| x - y \|$$

On pourra justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \exists\, y_n \in C, \| x - y_n \| < d(x, F) + \frac{1}{n}$, puis montrer que la suite (y_n) est de Cauchy en considérant l'élément $z = \frac{y_n + y_p}{2}$ et en utilisant la formule du parallélogramme :

$$\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2 \| u \|^2 + 2 \| v \|^2$$

sur des vecteurs u et v bien choisis.

b) On note $p(x)$ l'élément y ainsi défini. Montrer que, pour tout z élément de C, $\text{Re}(<x - p(x) \mid p(x) - z>) \geq 0$. On pourra considérer les éléments de C de la forme $(1 - t)p(x) + tz$, $t \in [0, 1]$.

c) Montrer que p est une application 1-lipschitzienne.

Exo.2) a) Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, F un sous-espace vectoriel fermé et x un vecteur n'appartenant pas à F. Montrer qu'il existe un unique couple $(y, \lambda) \in F \times \mathbb{K}$ tel que :

$y + \lambda x \in F^{\perp}$
$<x \mid y + \lambda x>$ est un réel strictement positif
$\| y + \lambda x \| = 1$

b) Montrer que le résultat précédent peut être faux si E n'est pas un Hilbert.

Exo.3) Inégalité de Hardy pour les séries

Soit $a = (a_n)_{n\geq 1}$ élément de $l^2(\mathbf{R})$ et soit $b = (b_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\forall\, n \geq 1,\ b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

(On fait ici commencer les indices à 1 pour des raisons de commodité). On se propose de montrer que $b \in l^2(\mathbf{R})$ et que $\| b \| \leq 2 \| a \|$. On pose $c_n = b_n^{\ 2} - 2a_nb_n$.

a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $c_n \leq (n-1)b_{n-1}^{\ \ 2} - nb_n^{\ 2}$

b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^{\ 2} \leq 2\sum\limits_{n=1}^{n} a_kb_k$

c) Conclure.

d) On définit ainsi un opérateur continu $u : a \in l^2(\mathbf{R}) \to b \in l^2(\mathbf{R})$. Montrer que $\| u \| = 2$, où $\| u \|$ désigne la norme de u subordonnée à la norme euclidienne de $l^2(\mathbf{R})$. Pour cela, on pourra considérer la suite $a = (\frac{1}{n^{\alpha}})_{n\geq 1}$ et son image par u, en prenant α élément de $]\frac{1}{2}, 1[$ et en faisant tendre α vers $\frac{1}{2}$.

e) Quel est l'opérateur u^*, adjoint de u ?

f) Sans faire appel au théorème énonçant que $\| u^* \| = \| u \|$, montrer que $\| u^* \| = 2$. On pourra s'inspirer de la démarche qu'on a appliquée à u : soit $y = (y_n)_{n\geq 1}$ élément de $l^2(\mathbf{R})$ et $u^*(y) = z = (z_n)_{n\geq 1}$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $z_n^{\ 2} - 2y_nz_n \leq nz_{n+1}^{\ \ 2} - (n-1)z_n^{\ 2}$, et en déduire que $\| z \| \leq 2 \| y \|$, après avoir montré que $z_n = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$. On utilisera également la suite $(\frac{1}{n^{\alpha}})_{n\geq 1}$ pour conclure à l'égalité entre $\| u^* \|$ et 2.

Exo.4) Soit E un espace préhilbertien et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels. On note $\sum\limits_{i\in I} F_i$ le sous-espace vectoriel dont les éléments sont les sommes d'un nombre fini de vecteurs éléments de $\bigcup\limits_{i\in I} F_i$.

a) Montrer que $(\sum\limits_{i\in I} F_i)^{\perp} = \bigcap\limits_{i\in I} (F_i^{\perp})$.

b) Montrer que $\sum\limits_{i\in I} (F_i^{\perp}) \subset (\bigcap\limits_{i\in I} F_i)^{\perp}$.

c) Montrer que, si les F_i sont fermés et si E est un Hilbert, $(\bigcap\limits_{i\in I} F_i)^\perp = \overline{\sum\limits_{i\in I} (F_i^\perp)}$. Sous ces hypothèses, donner un exemple tel que $\sum\limits_{i\in I} (F_i^\perp) \underset{\neq}{\subset} (\bigcap\limits_{i\in I} F_i)^\perp$. Si les hypothèses ne sont pas vérifiées, donner des exemples où $\overline{\sum\limits_{i\in I} (F_i^\perp)} \underset{\neq}{\subset} (\bigcap\limits_{i\in I} F_i)^\perp$.

Exo.5) Soit $H = l^2(\mathbb{R}) = \{(x_n)_{n\geq 1}\}$. On considère l'opérateur linéaire u défini par :

$$u : x = (x_n)_{n\geq 1} \to u(x) = (\frac{x_n}{n})_{n\geq 1}$$

Montrer que u est continue, que u est bijective de H sur $\mathrm{Im}(u)$, que $\mathrm{Im}(u)$ n'est pas fermée, que $\mathrm{Im}(u)$ est dense dans H et que $u^{-1} : \mathrm{Im}(u) \to H$ n'est pas continue.

Exo.6) Soit u une application linéaire continue d'un Hilbert H dans un Hilbert L, et u^* son adjoint.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$.

b) Montrer que $\overline{\mathrm{Im}(u^*)} = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

c) $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$.

d) $u^*(\overline{\mathrm{Im}(u)}) = \mathrm{Im}(u^*)$.

Exo.7) Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et u endomorphisme continu tel que, pour tout x de H, $\langle u(x) \mid x\rangle$ est réel. Montrer que u est auto-adjoint.

Exo.8) Montrer que, si u est un endomorphisme normal d'un espace de Hilbert, alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$.

Exo.9) a) Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace de Hilbert H. On note B la boule unité de H et on pose :

$$\| u \| = \mathrm{Sup}\ \{\| u(x) \|, x \in B\}$$
$$M = \mathrm{Sup}\ \{\left|\langle u(x) \mid x\rangle\right|, x \in B\}$$

Montrer que $\| u \| = M$.

b) Soit u un endomorphisme continu d'un espace de Hilbert H. Montrer que u est normal si et seulement si $\forall\, x \in H, \| u(x) \| = \| u^*(x) \|$.

c) Montrer que, si u est normal, $\| u \|^2 = \| u^2 \|$.

Exo.10) En dimension finie, un endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable (voir les chapitres L2/PREHILB.PDF pour le cas réel et L3/HERMITN.PDF pour le cas complexe). Ce n'est plus nécessairement le cas en dimension infinie.

a) On considère l'espace de Hilbert réel $H = L^2([0, 1])$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$, et l'opérateur $u : f \to u(f)$ tel que, pour tout t élément de [0, 1], $u(f)(t) = tf(t)$.

Montrer que u est continue, de norme $\| u \| = 1$, que u est auto-adjoint et que u n'admet pas de valeur propre.

b) On considère maintenant un espace de Hilbert H et un opérateur auto-adjoint u vérifiant de plus la propriété suivante : si B est la boule unité fermée de H, alors $\overline{u(B)}$ est compacte. Un opérateur u vérifiant cette dernière propriété est dit **compact** (c'est le cas par exemple si Im(u) est de dimension finie car u étant lipschitzienne, u(B) est borné, et tout borné dans un espace vectoriel de dimension finie a une adhérence compacte). On utilise le plus souvent la propriété de compacité de u sous la forme suivante : si (x_n) est une suite de B, il existe une sous-suite dont l'image par u converge. On se propose de montrer que, sous ces conditions, il existe une valeur propre de u de module (ou de valeur absolue) $\| u \|$. On suppose $u \neq 0$ sinon le résultat est trivial. On utilise l'égalité vue dans l'exercice précédent : $\| u \| = \text{Sup } \{|<u(x) \mid x>|, x \in B\}$, et on considère une suite (x_n) de B telle que $\lim\limits_{n\to\infty} |<u(x_n) \mid x_n>| = \| u \|$. Par compacité de u, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la suite $(u(x_n))$ converge vers un vecteur y. Montrer successivement que $\lim\limits_{n\to\infty} |<y \mid x_n>| = \| u \|$, que $\| y \| = \| u \|$, que x_n se décompose sous la forme $\lambda_n y + w_n$ avec $w_n \perp y$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \dfrac{1}{\| y \|}$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ et enfin que $u(y)$ est colinéaire à y. y est donc vecteur propre de u. Vérifier que la valeur propre a un module égal à $\| u \|$.

c) Sous les hypothèses du b), soit Λ l'ensemble des valeurs propres de u, i.e. l'ensemble des λ tels que $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$. Montrer que Λ est inclus dans $\mathbf{R}$ et que, si λ et μ sont deux valeurs propres différentes, alors E_λ est orthogonal à E_μ. Montrer qu'il existe une base de Hilbert de H constituée de vecteurs propres de u.

Exo.11) On étend l'exercice précédent au cas des opérateurs normaux d'un espace de Hilbert H sur $\mathbf{C}$. Dans le chapitre L3/HERMITN.PDF, on montre qu'un tel opérateur est diagonalisable dans une base orthonormée si H est de dimension finie. Dans ce cas, on est assuré de l'existence de valeurs propres par application du théorème de D'Alembert sur le polynôme caractéristique de l'opérateur. On étudie ici le cas où H est de dimension infinie. Rien ne garantit alors l'existence de valeurs propres.

a) Soient $\mathbb{U}$ le cercle unité de $\mathbf{C}$, et $H = L^2(\mathbb{U})$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{U}$ à valeurs complexes, muni du produit scalaire $<f \mid g> = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\theta})}g(e^{i\theta})\, d\theta$. On considère l'opérateur $u : f \in H \to u(f)$ défini par : $\forall z \in \mathbb{U}$, $u(f)(z) = zf(z)$. Montrer que u est un opérateur continu, non auto-adjoint, normal, et que u n'admet pas de valeur propre.

b) Soit u un opérateur non nul, normal et **compact**. On va montrer qu'il existe une base de Hilbert de H constituée de vecteurs propres de u. Vérifier que $u^* \circ u$ est un opérateur non nul, auto-adjoint et compact. Montrer que tout sous-espace propre E_λ de $u^* \circ u$ est stable par u. Montrer que tout sous-espace propre E_λ de $u^* \circ u$, associé à une valeur propre λ non nulle, est de dimension finie (utiliser un théorème de Riesz qui énonce qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte. Voir les exercices du chapitre L3/METRIQUE.PDF). Conclure.

2- Solutions

Sol.1) a) Posons $d = \mathrm{d}(x, C)$. On a donc :

$$\forall\, y \in C,\ \| x - y \| \geq d$$
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in C,\ \| x - y \| < d + \varepsilon$$

En particulier, en prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier n strictement positif, $\exists\, y_n \in C$, $\| x - y_n \| < d + \dfrac{1}{n}$.

Montrons que la suite (y_n) est de Cauchy. Pour tout $p \geq n$, considérons $z = \dfrac{y_n + y_p}{2}$. C étant convexe, on a $z \in C$. En particulier, $\| x - z \| \geq d$. Appliquons la formule du parallélogramme à $u = x - y_n$ et $v = x - y_p$:

$$\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2 \| u \|^2 + 2 \| v \|^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \| 2x - 2z \|^2 + \| y_n - y_p \|^2 = 2 \| x - y_n \|^2 + 2 \| x - y_p \|^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \| y_n - y_p \|^2 = 2 \| x - y_n \|^2 + 2 \| x - y_p \|^2 - \| 2x - 2z \|^2$$

donc :

$$\| y_n - y_p \|^2 \leq 2\,(d + \frac{1}{n})^2 + 2\,(d + \frac{1}{p})^2 - 4d^2 = \frac{4d}{n} + \frac{4d}{p} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{p^2} \leq \frac{8d}{n} + \frac{4}{n^2}$$

donc

$$\| y_p - y_n \| \leq 2\sqrt{\frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

La suite (y_n) est de Cauchy, donc converge vers un élément y adhérent à C, donc élément de C car C est fermé. On a $\| x - y \| = d$ en passant à la limite dans les inégalités $d \leq \| x - y_n \| \leq d + \dfrac{1}{n}$.

y est unique, car si y' est un autre élément de C vérifiant $\| x - y' \| = d$, alors, en prenant $z = \dfrac{y + y'}{2}$, on a, comme ci-dessus, avec cette fois $u = x - y$ et $v = x - y'$:

$$\| y - y' \|^2 = 2 \| x - y \|^2 + 2 \| x - y' \|^2 - \| 2x - 2z \|^2$$
$$\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

donc $y = y'$.

b) Soit $z \in C$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $(1 - t)p(x) + tz \in C$ car C est convexe, donc :

$$\| x - p(x) \| \leq \| x - (1 - t)p(x) - tz \| \qquad \text{par définition de } p(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \| x - p(x) \|^2 \leq \| x - p(x) + t(p(x) - z) \|^2$$
$$\Leftrightarrow \quad \| x - p(x) \|^2 \leq \| x - p(x) \|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(\langle x - p(x) \mid p(x) - z\rangle) + t^2 \| p(x) - z \|^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 2t\,\mathrm{Re}(\langle x - p(x) \mid p(x) - z\rangle) + t^2 \| p(x) - z \|^2$$

Pour $t > 0$, on simplifie par t, puis on fait tendre t vers 0. On obtient $\mathrm{Re}(\langle x - p(x) \mid p(x) - z\rangle) \geq 0$.

c) Pour tout x et y éléments de H, on a, d'après le b) :

$$\mathrm{Re}(\langle x - p(x) \mid p(x) - p(y)\rangle) \geq 0$$

et $\mathrm{Re}(\langle y - p(y) \mid p(y) - p(x)\rangle) \geq 0$ ou encore $\mathrm{Re}(\langle p(y) - y \mid p(x) - p(y)\rangle) \geq 0$

Or :

$$\| x - y \|^2 = \| x - p(x) + p(x) - p(y) + p(y) - y \|^2$$
$$= \| x - p(x) + p(y) - y \|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x - p(x) + p(y) - y \mid p(x) - p(y)\rangle) + \| p(x) - p(y) \|^2$$

et $\| x - p(x) + p(y) - y \|^2 \geq 0$

et $\mathrm{Re}(\langle x - p(x) + p(y) - y \mid p(x) - p(y)\rangle) = \mathrm{Re}(\langle x - p(x) \mid p(x) - p(y)\rangle) + \mathrm{Re}(\langle p(y) - y \mid p(x) - p(y)\rangle)$

$$\geq 0$$

donc $\| x - y \|^2 \geq \| p(x) - p(y) \|^2$

donc $\| p(x) - p(y) \| \leq \| x - y \|$

Sol.2) a) Montrons l'unicité. Soit π le projecteur orthogonal sur F. On a :

$$x = \pi(x) + (x - \pi(x)) \qquad \text{avec } x - \pi(x) \in F^{\perp}$$

On veut que $y + \lambda x = y + \lambda\pi(x) + \lambda(x - \pi(x)) \in F^{\perp}$. Comme $\lambda(x - \pi(x)) \in F^{\perp}$ et que $y + \lambda\pi(x) \in F$, il est nécessaire que $y + \lambda\pi(x) = 0$, i.e. $y = -\lambda\pi(x)$.

On doit alors avoir :

$$\langle x \mid y + \lambda x\rangle = \langle \pi(x) + (x - \pi(x)) \mid \lambda(x - \pi(x))\rangle$$

$$= \lambda \| x - \pi(x) \|^2 \quad \text{car } \langle \pi(x) \mid x - \pi(x)\rangle = 0 \text{ puisque } \pi(x) \in F \text{ et } x - \pi(x) \in F^{\perp}$$

Comme $x - \pi(x) \neq 0$ (car $x \notin F$) et qu'on veut que le résultat précédent soit un réel strictement positif, il faut que λ soit un réel strictement positif.

Enfin, on doit avoir :

$$1 = \| y + \lambda x \| = \| \lambda(x - \pi(x)) \| = \lambda \| x - \pi(x) \| \qquad \text{car } \lambda > 0$$

donc $\lambda = \dfrac{1}{\| x - \pi(x) \|}$

Ainsi, la seule solution possible est nécessairement $\lambda = \dfrac{1}{\| x - \pi(x) \|}$ et $y = -\lambda\pi(x)$.

Vérifions qu'il s'agit bien d'une solution :

on a bien $y \in F$ car $\pi(x) \in F$

$y + \lambda x = \lambda(x - \pi(x))$ est bien orthogonal à F

$\langle x \mid y + \lambda x\rangle = \langle \pi(x) + (x - \pi(x)) \mid \lambda(x - \pi(x))\rangle = \lambda \| x - \pi(x) \|^2 > 0$

car $\lambda > 0$ et $x \neq \pi(x)$

$\| y + \lambda x \| = \| \lambda(x - \pi(x)) \| = \lambda \| x - \pi(x) \| = 1$

b) Soit $E = C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, et soit F l'hyperplan $\{f \in E, \displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,dt = 0\}$. On a vu comme exemple dans ce chapitre que $F^{\perp} = \{0\}$.

Prenons la fonction constante $x = \mathbf{1} : t \in [0, 1] \to 1$. Il est impossible de trouver une fonction continue $t \to y(t)$ élément de F telle que $y + \lambda x \in F^{\perp}$ et $\| y + \lambda x \| = 1$. En effet, on aurait alors $y + \lambda x = 0$ puisque $F^{\perp} = \{0\}$, donc $y = -\lambda x$ donc $\lambda = 0$ et $y = 0$ car $y \in F$, mais $x \notin F$. Donc $\| y + \lambda x \| \neq 1$.

Par contre si on se place dans $E = L^2([0, 1])$ avec $F = \{f \in L^2, \displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\,dt = 0\}$, la solution existe. $F^{\perp}$ est la droite engendrée par la fonction indicatrice de $[0, \frac{1}{2}]$ que nous noterons $\mathbf{1}_{[0,1/2]}$. La norme euclidienne de cette fonction est $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et un vecteur unitaire engendrant $F^{\perp}$ est $\sqrt{2}\,\mathbf{1}_{[0,1/2]}$. Prenons toujours pour x la fonction $\mathbf{1}$, constante égale à 1. Le projeté orthogonal de x sur $F^{\perp}$ est :

$$\langle \mathbf{1}, \sqrt{2}\,\mathbf{1}_{[0,1/2]}\rangle \sqrt{2}\,\mathbf{1}_{[0,1/2]} = \mathbf{1}_{[0,1/2]} \quad \text{de norme } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\lambda}, \text{ donc } \lambda = \sqrt{2}$$

Le projeté orthogonal $\pi(x)$ de x sur F est $\pi(x) = \mathbf{1} - \mathbf{1}_{[0,1/2]} = \mathbf{1}_{]1/2,1]}$

Donc $y = -\lambda\pi(x) = -\sqrt{2}\,\mathbf{1}_{]1/2, 1]}$.

Sol.3) a) L'inégalité demandée est équivalente à :

$$b_n^2 - 2a_nb_n \leq (n-1)b_{n-1}^2 - nb_n^2$$

$\Leftrightarrow \quad b_n^2 - 2(nb_n - (n-1)b_{n-1})b_n \le (n-1)b_{n-1}^2 - nb_n^2 \qquad$ car $a_n = nb_n - (n-1)b_{n-1}$

$\Leftrightarrow \quad (1-2n)b_n^2 + 2(n-1)b_{n-1}b_n \le (n-1)b_{n-1}^2 - nb_n^2$

$\Leftrightarrow \quad 2b_{n-1}b_n \le b_{n-1}^2 + b_n^2$

$\Leftrightarrow \quad (b_{n-1} - b_n)^2 \ge 0 \qquad$ ce qui est bien vrai

b) Il suffit de montrer que $\sum\limits_{n=1}^{n} c_k \le 0$. Or :

$$\sum_{n=1}^{n} c_k = c_1 + \sum_{k=2}^{n} c_k \le c_1 + \sum_{k=2}^{n} ((k-1)b_{k-1}^2 - kb_k^2) \qquad \text{somme télescopique}$$

$$\le c_1 + b_1^2 - nb_n^2 = -nb_n^2 \le 0$$

c) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ au second membre de l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \le 2\sum_{n=1}^{n} a_k b_k \le 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

donc

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \le 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \le 2 \,\| a \|$$

Le membre de gauche est le terme d'une suite croissante majorée, qui converge donc. Cela prouve que $b \in l^2(\mathbb{R})$, et, en passant à la limite, que $\| b \| \le 2 \| a \|$.

d) Le c) montre que $\| u \| \le 2$.

Montrons qu'il y a égalité. Pour $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$, on a, par comparaison série-intégrale :

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \ge \frac{1}{n}\int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \ge \frac{1}{n}\int_1^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{n}\,\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n}\right)$$

Donc $\quad \| b \|^2 \ge \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2\alpha}} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^{\alpha+1}} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$\ge \frac{1}{(1-\alpha)^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{\alpha+1}}\right)$$

On reconnaît $\| a \|^2$ dans $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$, quantité minorée par $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx = \frac{1}{2\alpha-1}$ et qui tend vers l'infini quand α tend vers $\dfrac{1}{2}$.

Par ailleurs $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}} \le 1 + \displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha+1}}\,dx = 1 + \frac{1}{\alpha}$, quantité qui reste bornée quand α tend vers $\dfrac{1}{2}$.

Donc $\quad \| b \|^2 \ge \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}(\| a \|^2 + O(1)) = \dfrac{\| a \|^2}{(1-\alpha)^2}(1 + o(1))$

donc $\dfrac{\| u(a) \|}{\| a \|} \geq \dfrac{1}{1-\alpha}$ (1 + o(1)) qui tend vers 2 quand α tend vers $\dfrac{1}{2}$. Par conséquent, $\| u \|$ ne peut être strictement inférieur à 2, et donc $\| u \| = 2$.

e) On a, pour toute suite x et y de $l^2(\mathbf{R})$:

$$<u(x) \mid y> = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_1 + ... + x_n}{n} y_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{n} x_k\, y_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} x_k\, y_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} y_n$$

$$= <x \mid u^*(y)>$$

avec le terme général de $u^*(y)$ de rang k qui vaut $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{y_n}{n}$. On peut sommer la série double dans l'ordre que l'on veut car la famille $(\frac{1}{n} x_k\, y_n)_{1\leq k\leq n}$ est sommable. En effet, toute somme d'un nombre fini de termes $\frac{1}{n} |x_k\, y_n|$ est majorée par $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_1| + ... + |x_n|}{n} y_n \leq 2 \| x \| \| y \|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\| u \| = 2$.

f) On a $z_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{y_k}{k} = \frac{y_n}{n} + z_{n+1}$, donc $y_n = nz_n - nz_{n+1}$. Donc :

$z_n^2 - 2y_nz_n \leq nz_{n+1}^2 - (n-1)z_n^2$

$\Leftrightarrow$ $z_n^2 - 2(nz_n - nz_{n+1})z_n \leq nz_{n+1}^2 - (n-1)z_n^2$

$\Leftrightarrow$ $nz_{n+1}^2 + nz_n^2 - 2nz_nz_{n+1} \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $n(z_{n+1} - z_n)^2 \geq 0$ qui est bien vrai.

On en déduit que, pour tout n :

$$\sum_{k=1}^{n} (z_k^2 - 2y_kz_k) \leq \sum_{k=1}^{n} (kz_{k+1}^2 - (k-1)z_k^2) = nz_{n+1}^2 \qquad \text{somme télescopique}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} 2y_kz_k + nz_{n+1}^2$

$$\leq 2 \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} z_k^2} + nz_{n+1}^2 \qquad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

Mais $\displaystyle z_{n+1}^2 = (\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{y_k}{k})^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 \times \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 \times \int_n^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt \qquad \text{par comparaison série-intégrale}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 \times \frac{1}{n} = o(\frac{1}{n}) \qquad \text{car } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 = 0\text{, limite du reste d'une série convergente}$$

Donc $\sum_{k=1}^{n} z_k^2 \leq 2 \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} z_k^2} + o(1)$

Si z est non identiquement nulle, pour n assez grand, $\sum_{k=1}^{n} z_k^2$ est non nul, et l'on obtient :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} z_k^2} \leq 2 \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} + \frac{o(1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} z_k^2}} \leq 2 \| y \| + o(1)$$

Le membre de gauche est croissant et borné, donc admet une limite. Passant à la limite, on obtient :

$$\| u^*(y) \| = \| z \| \leq 2 \| y \|$$

Donc $\| u^* \| \leq 2$.

On conclura à l'égalité en prenant la suite $y = (\frac{1}{n^\alpha})_{n\geq 1}$, avec $\alpha > \frac{1}{2}$. Soit z_n le terme général de la suite $z = u^*(y)$. On a :

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} \\ &\geq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\, dx \qquad \text{par comparaison série intégrale} \\ &\geq \frac{1}{\alpha n^\alpha} = \frac{y_n}{\alpha} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\| u^*(y) \| = \| z \| \geq \frac{1}{\alpha} \| y \|$, et donc que $\| u^* \| \geq \frac{1}{\alpha}$. Faisant tendre α vers $\frac{1}{2}$, on obtient $\| u^* \| \geq 2$.

Sol.4) a) On a les équivalences :

$$x \in (\sum_{i\in I} F_i)^\perp$$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, y \in \sum_{i\in I} F_i,\ \langle y \mid x\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, i \in I,\ \forall\, y \in F_i,\ \langle y \mid x\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, i \in I,\ x \in F_i^\perp$

$\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{i\in I} (F_i^\perp)$

b) On a les implications suivantes :

$$x \in \sum_{i\in I} (F_i^\perp)$$

$\Rightarrow \quad \exists\, i_1, i_2, ..., i_p \in I,\ \exists\, x_1 \in F_{i_1}^\perp,\ \exists\, x_2 \in F_{i_2}^\perp, ..., \exists\, x_p \in F_{i_p}^\perp,\ x = x_1 + ... + x_p$

$\Rightarrow \quad \exists\, i_1, i_2, ..., i_p \in I,\ \forall\, y \in F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap ... \cap F_{i_p},\ \langle y \mid x\rangle = 0$

$\Rightarrow \quad \forall\, y \in \bigcap_{i\in I} F_i,\ \langle y \mid x\rangle = 0$

$\Rightarrow \quad x \in (\bigcap_{i\in I} F_i)^\perp$

c) Si E est un Hilbert et si les F_i sont fermés, alors, pour tout i, $F_i = (F_i^\perp)^\perp$. Posons $G_i = F_i^\perp$ de sorte que $F_i = G_i^\perp$. On a :

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I} (G_i^\perp)$$

$$= (\sum_{i\in I} G_i)^\perp \qquad \text{d'après le a) appliqué aux } G_i$$

donc $(\bigcap_{i\in I} F_i)^\perp = (\sum_{i\in I} G_i)^{\perp\perp}$

$$= \overline{\sum_{i\in I} G_i} \qquad \text{car pour tout sous-espace vectoriel G d'un Hilbert, } G^{\perp\perp} = \overline{G}$$

$$= \overline{\sum_{i\in I} (F_i^\perp)}$$

On ne peut se passer de l'adhérence dans le membre de droite, attendu que le membre de gauche est fermé puisqu'il s'agit d'un orthogonal. Si on prend $E = l^2(\mathbf{R})$ et, pour tout n, F_n égal au sous-espace vectoriel des suites dont le n-ème terme est nul, on a $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = \{0\}$, donc $(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n)^\perp = E$. Mais $F_n^\perp$ est la droite engendré par la suite $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ avec un 1 en n-ème place, et $\sum_{n=0}^{\infty} F_n^\perp$ est l'espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang. C'est l'adhérence de $\sum_{n=0}^{\infty} F_n^\perp$ qui permet de retrouver $(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n)^\perp = E$.

Si E est un Hilbert mais que les F_i ne sont pas fermés, on n'a plus $F_i = G_i^\perp$ et la démonstration est en défaut. Prenons $I = \{1, 2\}$ avec $E = l^2(\mathbf{R})$, F_1 le sous-espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang, F_2 la droite engendrée par la suite $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$. On a $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, donc $(F_1 \cap F_2)^\perp = E$. Mais $F_1^\perp = \overline{F_1}^\perp = E^\perp = \{0\}$ et $F_2^\perp$ est un hyperplan fermé, de sorte que $\overline{F_1^\perp + F_2^\perp}$ est égal à $\overline{F_2}^\perp = F_2^\perp \neq E$, et l'on a seulement $\overline{\sum_{i\in I} (F_i^\perp)} \subsetneq (\bigcap_{i\in I} F_i)^\perp$.

Si E n'est pas un Hilbert, on n'a pas non plus nécessairement $F_i = G_i^\perp$, même si F_i est fermé. Prenons $I = \{1, 2\}$, $E = C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$, F_1 l'hyperplan fermé noyau de la forme linéaire continue $f \in \mathrm{E} \to \int_0^{1/2} f(t)\,dt$. On a vu que $\mathrm{F}_1^\perp = \{0\}$. Soit F_2 la droite engendré par la fonction constante 1. $\mathrm{F}_2^\perp$ est l'hyperplan noyau de la forme linéaire $f \to \int_0^{1} f(t)\,dt$. Comme ci-dessus, on a $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \{0\}$, donc $(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2)^\perp = \mathrm{E}$. Mais $\mathrm{F}_1^\perp = \{0\}$, donc $\overline{\mathrm{F}_1^\perp + \mathrm{F}_2^\perp}$ est égal à $\overline{\mathrm{F}_2}^\perp = \mathrm{F}_2^\perp \neq \mathrm{E}$, et l'on a seulement $\overline{\sum_{i\in\mathrm{I}} (\mathrm{F}_i^\perp)} \underset{\neq}{\subset} (\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i)^\perp$.

Sol.5) u est continue car, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 1}$ élément de H, on a :

$$\| u(x) \| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^{\;2}}{n^2}} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\;2}} = \| x \|$$

u est bijective de réciproque $u^{-1} : y = (y_n)_{n\geq 1} \in \mathrm{Im}(u) \to u^{-1}(y) = (ny_n)_{n\geq 1}$.
Im(u) n'est pas fermée. En effet, Im(u) contient pour tout n la suite $y(n) = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, ...)$ nulle à partir du rang $n + 1$, image de la suite $(1, 1, ..., 1, 0, 0, ...)$ avec n fois le terme 1. Si Im(u) était fermé, Im(u) contiendrait la suite $y(\infty) = (\frac{1}{n})_{n\geq 1}$, égale dans $l^2(\mathbf{R})$ à $\lim_{n\to\infty} y(n)$. En effet :

$$y(\infty) - y(n) = (0, 0, ..., 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, ...)$$

et $\quad \| y(\infty) - y(n) \| = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$ quantité qui tend vers 0 quand n tend versl'infini.

Mais dans ce cas, on aurait $y(\infty) = u(\mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ est la suite constante égale à 1. C'est absurde car $\mathbf{1}$ n'est pas élément de $l^2(\mathbf{R})$.
Im(u) est dense dans H car tout élément $y = (y_n)_{n\geq 1}$ de H vérifie $y = \lim_{n\to\infty} y(n)$ avec $y(n)$ la suite égale à $(y_1, y_2, ..., y_n, 0, 0, 0, ...)$, élément de Im($u$) comme image par u de la suite de H égale à $(y_1, 2y_2, ..., ny_n, 0, 0, 0, ...)$.
u^{-1} n'est pas continue car si on prend e_n la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ème qui vaut 1, e_n est élément de Im(u), $\| e_n \| = 1$ alors que $\| u^{-1}(e_n) \| = \| (0, 0, ..., 0, n, 0, 0, 0, ...) \| = n$. Il n'existe donc aucune constante C telle que : $\forall y \in \mathrm{Im}(u), \| u^{-1}(y) \| \leq \mathrm{C} \| y \|$.

Sol.6) a) $y \in \mathrm{Ker}(u^*) \Leftrightarrow u^*(y) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{H}, 0 = \langle x \mid u^*(y)\rangle = \langle u(x) \mid y\rangle \Leftrightarrow y \in \mathrm{Im}(u)^\perp$.
b) Appliquant le a) sur u^* au lieu de u, on obtient :

$\mathrm{Ker}(u^{**}) = \mathrm{Im}(u^*)^\perp$

donc $\quad \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u^*)^\perp \qquad$ car $u^{**} = u$

donc $\quad \mathrm{Ker}(u)^\perp = (\mathrm{Im}(u^*)^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(u^*)}$

c) L'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$ est triviale. Réciproquement :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u) &\Rightarrow (u^* \circ u)(x) = 0 \\ &\Rightarrow \langle (u^* \circ u)(x), x\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle u(x), u(x)\rangle = 0 \\ &\Rightarrow u(x) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(u)$

d) L'inclusion $u^*(\overline{\mathrm{Im}(u)}) \subset \mathrm{Im}(u^*)$ est triviale. Réciproquement :

$$y \in \mathrm{Im}(u^*) \Rightarrow \exists\, x,\ y = u^*(x)$$

Projetons x orthogonalement sur $\overline{\mathrm{Im}(u)}$. On a alors $x = z + t$ avec $z \in \overline{\mathrm{Im}(u)}$ et $t \perp \overline{\mathrm{Im}(u)}$ (et donc a fortiori $t \perp \mathrm{Im}(u)$). Il suffit de montrer que $u^*(t) = 0$. On aura alors $y = u^*(x) = u^*(z) \in u^*(\overline{\mathrm{Im}(u)})$.

$$<u^*(t), u^*(t)> = <t, (u \circ u^*)(t)>$$
$$= 0 \qquad \text{car } (u \circ u^*)(t) \in \mathrm{Im}(u) \text{ et } t \perp \mathrm{Im}(u).$$

Donc $u^*(t) = 0$

REMARQUE :

Il n'est pas possible ici de se passer de l'adhérence de l'image (sauf en dimension finie, où tout sous-espace vectoriel est fermé car complet), comme le montre l'exercice précédent donnant l'opérateur linéaire $u : x = (x_n)_{n \geq 1} \in l^2(\mathbf{R}) \to u(x) = (\frac{x_n}{n})_{n \geq 1} \in l^2(\mathbf{R})$, dont l'image $\mathrm{Im}(u)$ est non fermée et dense dans $\mathrm{H} = l^2(\mathbf{R})$. Pour cet exemple, $u = u^*$, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^*) \neq \mathrm{H}$ et $\overline{\mathrm{Im}(u)} = \overline{\mathrm{Im}(u^*)} = \mathrm{H}$. On constate alors que :

- dans le b), u est injective, donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, $\mathrm{Ker}(u)^\perp = \mathrm{H}$ qui est bien égal à $\overline{\mathrm{Im}(u^*)}$ mais non à $\mathrm{Im}(u^*)$.
- dans le d), la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ appartient à $\mathrm{H} = \overline{\mathrm{Im}(u)}$ mais n'appartient pas à $\mathrm{Im}(u)$. $u^*(\overline{\mathrm{Im}(u)})$ possède donc $u^*((\frac{1}{n})_{n\geq 1}) = (\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$, tout comme $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Im}(u)$. Mais $u^*(\mathrm{Im}(u))$ ne possède pas cet élément. On a donc $u^*(\mathrm{Im}(u)) \neq \mathrm{Im}(u^*)$.

Sol.7) En appliquant l'hypothèse à $x + y$, on obtient que $<u(x) \mid y> + <u(y) \mid x>$ est réel. Puis en appliquant ce qui précède à ix, on obtient que $- i<u(x) \mid y> + i<u(y) \mid x>$ est réel, donc $<u(x) \mid y> - <u(y) \mid x>$ est imaginaire pur. Posons :

$$<u(x) \mid y> + <u(y) \mid x> = a$$
$$<u(x) \mid y> - <u(y) \mid x> = ib$$

avec a et b réel. On a alors :

$$<u(x) \mid y> = \frac{a + ib}{2}$$
$$<u(y) \mid x> = \frac{a - ib}{2}$$

donc $\quad <u(x) \mid y> = \overline{<u(y) \mid x>} = <x \mid u(y)>$

donc $\quad u = u^*$

Sol.8) Le résultat résulte directement de la relation $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$ montrée dans un exercice précédent. On a en effet :

$$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$$
$$= \mathrm{Ker}(u \circ u^*) \qquad \text{car } u \text{ est normal}$$
$$= \mathrm{Ker}(u^{**} \circ u^*) \qquad \text{car } u^{**} = u$$
$$= \mathrm{Ker}(u^*) \qquad \text{en appliquant la relation } \mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u) \text{ sur } u^*$$

Mais il est intéressant aussi de donner une démonstration directe. Si $x \in \text{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0$ donc $u^*u(x) = 0$. Comme u est normal, $uu^* = u^*u$ et on a aussi $uu^*(x) = 0$ donc :

$$0 = \langle uu^*(x) \mid x\rangle = \langle u^*(x) \mid u^*(x)\rangle = \| u^*(x) \|^2$$

donc $u^*(x) = 0$

On a montré que $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^*)$. Mais la même inclusion s'applique à u^* car u^* est normal également puisque $u^*u^{**} = u^*u = uu^* = u^{**}u^*$. Donc $\text{Ker}(u^*) \subset \text{Ker}(u^{**}) = \text{Ker}(u)$. Finalement $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^*)$.

Il en résulte d'après l'exercice 5 que $\overline{\text{Im}(u)} = \overline{\text{Im}(u^*)}$.

Sol.9) Pour tout x de B, on a :

$$\begin{aligned} \left|\langle u(x), x\rangle\right| &\leq \| u(x) \| \, \| x \| && \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.} \\ &\leq \| u \| \, \| x \| \, \| x \| \\ &\leq \| u \| && \text{car } \| x \| \leq 1 \end{aligned}$$

donc $M \leq \| u \|$.

Réciproquement, pour tout x et y de H, on a :

$$\begin{aligned} \langle u(x + y) \mid x + y\rangle &= \langle u(x) + u(y) \mid x + y\rangle \\ &= \langle u(x) \mid x\rangle + \langle u(y) \mid x\rangle + \langle u(x) \mid y\rangle + \langle u(y) \mid y\rangle \\ &= \langle u(x) \mid x\rangle + \langle y \mid u(x)\rangle + \langle u(x) \mid y\rangle + \langle u(y) \mid y\rangle \\ &\qquad \text{car } u \text{ est auto-adjoint} \\ &= \langle u(x) \mid x\rangle + \overline{\langle u(x) \mid y\rangle} + \langle u(x) \mid y\rangle + \langle u(y) \mid y\rangle \\ &\qquad \text{si le corps de base est } \mathbb{R}\text{, ne pas tenir compte du conjugué} \\ &= \langle u(x) \mid x\rangle + 2\,\text{Re}(\langle u(x) \mid y\rangle) + \langle u(y) \mid y\rangle \end{aligned}$$

De même :

$$\langle u(x - y) \mid x - y\rangle = \langle u(x) \mid x\rangle - 2\,\text{Re}(\langle u(x) \mid y\rangle) + \langle u(y) \mid y\rangle$$

Donc, en retranchant membre à membre :

$$\langle u(x + y) \mid x + y\rangle - \langle u(x - y) \mid x - y\rangle = 4\,\text{Re}(\langle u(x) \mid y\rangle)$$

Par ailleurs, pour tout z de H, $\left|\langle u(z) \mid z\rangle\right| \leq M \| z \|^2$. En effet, l'inégalité est trivialement vérifiée si $z = 0$, et, pour $z \neq 0$, elle se déduit de l'inégalité $\left|\langle u(\frac{z}{\| z \|}) \mid \frac{z}{\| z \|}\rangle\right| \leq M$, vraie car $\frac{z}{\| z \|}$ est élément de B. On a alors, pour x et y dans B :

$$\begin{aligned} \left|4\text{Re}(\langle u(x) \mid y\rangle)\right| &= \left|\langle u(x + y) \mid x + y\rangle - \langle u(x - y) \mid x - y\rangle\right| \\ &\leq \left|\langle u(x + y) \mid x + y\rangle\right| + \left|\langle u(x - y) \mid x - y\rangle\right| \\ &\leq M(\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2) \\ &\leq M(2\| x \|^2 + 2\| y\|^2) \\ &\leq 4M \end{aligned}$$

donc $\left|\text{Re}(\langle u(x) \mid y\rangle)\right| \leq M$.

Appliquons cette inégalité à $y = \frac{u(x)}{\| u(x) \|}$. On obtient : $\forall\, x \in B$, $\| u(x) \| \leq M$. Donc $\| u \| \leq M$.

Il résulte de cet exercice que, si u est auto-adjoint, alors $u = 0 \Leftrightarrow \forall\, x, \langle u(x), x\rangle = 0$. Cette équivalence est fausse si u n'est pas auto-adjoint : dans le plan euclidien, prendre pour u un quart de tour.

b) Soit u normal. Alors, pour tout x :

$$\begin{aligned}
\| u(x) \|^2 &= \langle u(x) \mid u(x)\rangle \\
&= \langle x \mid u^*u(x)\rangle && \text{par définition de l'adjoint} \\
&= \langle x \mid uu^*(x)\rangle && \text{car } uu^* = u^*u \\
&= \langle u^*(x) \mid u^*(x)\rangle && \text{par définition de l'adjoint} \\
&= \| u^*(x) \|^2
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x, $\| u(x) \| = \| u^*(x) \|$. On retrouve le fait que $\| u \| = \| u^* \|$, valide pour tout endomorphisme continu, mais la relation $\forall\ x \in \mathrm{H}$, $\| u(x) \| = \| u^*(x) \|$, valide pour un endomorphisme normal, est plus forte. Par exemple, pour u l'endomorphisme non normal de $\mathbf{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a u^* de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et on vérifiera que $\| u \| = \| u^* \| = 1$, mais pour $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $u(x) = 0$ alors que $u^*(x) \neq 0$.

Réciproquement, supposons que : $\forall\ x \in \mathrm{H}$, $\| u(x) \| = \| u^*(x) \|$. On a donc, pour tout x de H :

$$\| u(x) \|^2 = \| u^*(x) \|^2$$

donc $\langle u(x) \mid u(x)\rangle = \langle u^*(x) \mid u^*(x)\rangle$

donc $\langle x \mid u^*u(x)\rangle = \langle x \mid uu^*(x)\rangle)$ par définition de l'adjoint

donc $\langle x \mid (u^*u - uu^*)(x)\rangle) = 0$

Remarquant que $u^*u - uu^*$ est auto-adjoint, on peut appliquer le a) et conclure que $u^*u - uu^* = 0$. Donc $u^*u = uu^*$ et u est normal.

c) Pour tout x de la boule unité B :

$$\begin{aligned}
\| u^*u(x) \|^2 &= \langle u^*u(x) \mid u^*u(x)\rangle \\
&= \langle u(x) \mid uu^*u(x)\rangle && \text{par définition de l'adjoint} \\
&= \langle x \mid u^*uu^*u(x)\rangle && \text{par définition de l'adjoint} \\
&= \langle x \mid u^*u^*uu(x)\rangle && \text{car } u^*u = uu^* \\
&= \langle uu(x) \mid uu(x)\rangle && \text{par définition de l'adjoint} \\
&= \| u^2(x) \|^2
\end{aligned}$$

donc $\| u^*u(x) \| = \| u^2(x) \|$. En prenant la borne supérieure des deux membres, on obtient $\| u^*u \| = \| u^2 \|$. Or on a vu dans le paragraphe sur les adjoints que $\| u^*u \| = \| u \|^2$. Donc $\| u^2 \| = \| u \|^2$.

Cette égalité est fausse si u n'est pas normal. Prendre par exemple $\mathrm{H} = \mathbf{R}^2$ et u de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $u^2 = 0$ de norme nulle, alors que $\| u \| \neq 0$.

Sol.10) a) Pour tout f de H, on a :

$$\| u(f) \| = \sqrt{\int_0^1 t^2 f^2(t)\, \mathrm{d}t} \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\, \mathrm{d}t} = \| f \| \qquad \text{donc } \| u \| \leq 1$$

Pour tout entier n strictement positif, considérons la fonction $f_n : t \to \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \\ nt + 1 - n \text{ si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$.

On vérifiera que $\| f_n \| = \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$ et que $\| u(f_n) \| = \dfrac{1 - 5n + 10n^2}{30n^3} \sim \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$ quand n tend vers l'infini. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\| u(f_n) \|}{\| f_n \|} = 1$, ce qui entraîne que $\| u \| \geq 1$. On a donc finalement $\| u \| = 1$.

u est auto-adjoint car, pour tout f et g éléments de H :

$$\langle u(f) \mid g\rangle = \int_0^1 tf(t)g(t)\, \mathrm{d}t = \langle f \mid u(g)\rangle$$

u n'admet aucune valeur propre, car si λ est valeur propre de u de vecteur propre f, alors, pour tout t de $[0, 1]$, $u(f)(t) = tf(t) = \lambda f(t) \Rightarrow \forall\ t \neq \lambda,\ f(t) = 0 \Rightarrow f = 0$ presque partout. Donc $f = 0$ dans $L^2([0, 1])$.

b) Ecrivant que $u(x_n) = u(x_n) - y + y$, on a :

$$\| u \| = \lim_{n\to\infty} \left|<u(x_n) \mid x_n>\right| = \lim_{n\to\infty} \left|<u(x_n) - y \mid x_n> + <y \mid x_n>\right|$$

mais $\lim\limits_{n\to\infty} <u(x_n) - y \mid x_n> = 0$

car $\left|<u(x_n) - y \mid x_n>\right| \leq \| u(x_n) - y \| \, \| x_n \|$

$\leq \| u(x_n) - y \| \to 0$ quand n tend vers l'infini.

Donc $\| u \| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|<y \mid x_n>\right|$

On a ensuite :

$$\| y \| = \| \lim_{n\to\infty} u(x_n) \|$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \| u(x_n) \|$ par continuité de la norme

$\leq \| u \|$ car, pour tout n, $\| u(x_n) \| \leq \| u \| \, \| x_n \| \leq \| u \|$

Puis :

$$\| u \| = \lim_{n\to\infty} \left|<y \mid x_n>\right|$$

$\leq \| y \|$ car, pour tout n, $\left|<y \mid x_n>\right| \leq \| y \| \, \| x_n \| \leq \| y \|$

ce qui donne finalement $\| u \| = \| y \|$. y est non nul car on a supposé que u était non nul.

On décompose x_n sur Vect(y) et son orthogonal : $x_n = \lambda_n y + w_n$, $w_n \perp y$. On en tire :

$$\left|<y \mid x_n>\right| = \left|<y \mid \lambda_n y>\right| = \left|\lambda_n\right| \, \| y \|^2$$

Puisque le membre de gauche tend vers $\| u \| = \| y \|$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\lambda_n\right| = \dfrac{1}{\| y \|}$.

Par le théorème de Pythagore, on a :

$$\| x_n \|^2 = \left|\lambda_n\right|^2 \| y \|^2 + \| w_n \|^2$$

donc $0 \leq \| w_n \|^2 = \| x_n \|^2 - \left|\lambda_n\right|^2 \| y \|^2 \leq 1 - \left|\lambda_n\right|^2 \| y \|^2 \to 0$ quand n tend vers l'infini

donc $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, et par continuité de u, $\lim\limits_{n\to\infty} u(w_n) = 0$

Par conséquent :

$$u(x_n) = u(\lambda_n y + w_n) = \lambda_n u(y) + u(w_n)$$

$\Rightarrow \quad \lambda_n u(y) = u(x_n) - u(w_n)$

Le membre de droite tend vers y quand n tend vers l'infini. Cela impose que (λ_n) converge vers une constante C et, passant à la limite, que $Cu(y) = y$. $\dfrac{1}{C}$ est une valeur propre de u et son module vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left|\lambda_n\right|} = \| y \| = \| u \|$.

c) Soit λ une valeur propre, de vecteur propre x. Alors :

$<u(x) \mid x> = <x \mid u(x)>$ car u est auto-adjoint

$\Leftrightarrow \quad <\lambda x \mid x> = <x \mid \lambda x>$ car $u(x) = \lambda x$

$\Leftrightarrow \quad \overline{\lambda}<x \mid x> = \lambda<x \mid x>$

$\Rightarrow \quad \overline{\lambda} = \lambda$ en simplifiant par $<x \mid x>$, non nul car $x \neq 0$

$\Rightarrow \quad \lambda \in \mathbf{R}$

Soient maintenant $\lambda \neq \mu$, $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$.On a :

$$\begin{array}{lll} & <u(x) \mid y> = <x \mid u(y)> & \text{car } u \text{ est auto-adjoint} \\ \Leftrightarrow & <\lambda x \mid y> = <x \mid \mu y> & \\ \Leftrightarrow & \lambda<x \mid y> = \mu <x \mid y> & \text{car } \lambda \text{ est réel. On le sort du produit scalaire sans conjugué} \\ \Rightarrow & <x \mid y> & \text{car } \lambda \neq \mu \end{array}$$

donc $E_\lambda \perp E_\mu$.

Chaque E_λ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $u - \lambda\mathrm{Id}$. Etant fermé dans l'espace complet H, E_λ est lui-même un espace complet, et étant préhilbertien par restriction du produit scalaire, il est lui-même un espace de Hilbert. Chacun E_λ peut donc être muni d'une base de Hilbert. Les sous-espaces propres étant deux à deux orthogonaux, la réunion de ces bases de Hilbert forme une famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs propres de u. Montrons que cette famille est une base de Hilbert de H. Il s'agit de montrer que $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})$ est dense dans H. Soit F le sous-espace vectoriel orthogonal à $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})$. F est un sous-espace vectoriel fermé de H, donc un espace de Hilbert. Il est stable par u, car, pour tout x de F et tout i élément de I :

$$<u(x) \mid e_i> = <x \mid u(e_i)> = 0 \qquad \text{car } u(e_i) \in \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I}) \text{ et } x \in F$$

donc $\forall\, i \in I,\ u(x) \perp e_i$

donc $u(x) \perp \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})$

donc $u(x) \in F$

La restriction de u à F reste un endomorphisme auto-adjoint. Cette restriction est également un opérateur compact car $\overline{u(B \cap F)} \subset \overline{u(B)}$ compact, donc $\overline{u(B \cap F)}$ est compact comme fermé inclus dans un compact. Si F était différent de $\{0\}$, il existerait donc au moins une valeur propre de la restriction de u à F et au moins un vecteur propre de u dans F, mais c'est absurde, puisque tout vecteur propre de u est élément de l'un des E_λ et donc élément de $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})$. Donc $F = \{0\}$, ou encore $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})^\perp = \{0\}$. Par conséquent :

$$\overline{\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})} = \mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$$

ce qui prouve que $(e_i)_{i\in I}$ est une base de Hilbert de H.

On a aussi $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ dense dans H, puisque $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I}) \subset \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ et que $\mathrm{Vect}((e_i)_{i\in I})$ est dense dans H.

REMARQUE :

Si $x = \sum\limits_{i\in I} x_i e_i$ et si λ_i est la valeur propre associée à e_i, on a alors $u(x) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i e_i$. Cette relation est vraie pour toute famille finie, puis vraie pour la somme infinie par continuité de u. Un raisonnement rigoureux demanderait l'usage des familles sommables, mais on peut y échapper en écrivant que :

$$u(x) = \sum_{i\in I} <e_i \mid u(x)>\, e_i$$

$$= \sum_{i\in I} <u^*(e_i) \mid x>\, e_i$$

$$= \sum_{i\in I} <u(e_i) \mid x>\, e_i \qquad \text{car } u \text{ est auto-adjoint}$$

$= \sum_{i\in I} <\lambda_i e_i \mid x> e_i$

$= \sum_{i\in I} \lambda_i <e_i \mid x> e_i$ car les λ_i sont réels

$= \sum_{i\in I} \lambda_i x_i e_i$

Sol.11) a) u est continu car, pour tout f de H :

$$\| u(f) \| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \left| e^{i\theta} f(e^{i\theta})\right|^2 d\theta} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\theta})\right|^2 d\theta} = \| f \| \qquad \text{donc } \| u \| = 1$$

L'adjoint de u est défini par : $\forall z \in \mathbb{U}$, $u^*(f)(z) = \overline{z}f(z)$. En effet, pour tout f et g de H :

$$<f \mid u(g)> = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{i\theta})}\, e^{i\theta} g(e^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} \overline{e^{-i\theta} f(e^{i\theta})}\, g(e^{i\theta})\, d\theta = <u^*(f) \mid g>$$

Comme $u \neq u^*$, u n'est pas auto-adjoint. Cependant, u est normal car :

$$(u \circ u^*)(f)(z) = u(u^*(f))(z) = zu^*(f)(z) = z\overline{z}f(z) = |z|^2 f(z) = f(z)$$

et on vérifiera de même que $(u^* \circ u)(f)(z) = f(z)$. Donc $u \circ u^* = u^* \circ u$.
u n'admet pas de valeur propre λ car un vecteur propre associé vérifierait :

$$\forall z \in \mathbb{U},\ u(f)(z) = zf(z) = \lambda f(z)$$

donc $\forall z \neq \lambda$, $f(z) = 0$
donc $f = 0$ presque partout
donc $f = 0$ dans $L^2(\mathbb{U})$

b) Comme $\| u^* \circ u \| = \| u \|^2$ et que u est non nul, $u^* \circ u$ est non nul.
$u^* \circ u$ est auto-adjoint car $(u^* \circ u)^* = u^* \circ u^{**} = u^* \circ u$.
$u^* \circ u$ est compact car, B étant la boule unité fermée de H, on a :

$$\overline{(u^* \circ u)(B)} = \overline{(u^*(u(B)))} \subset \overline{(u^*(\overline{u(B)}))}$$

avec $\overline{u(B)}$ compact car u est un opérateur compact, donc $u^*(\overline{u(B)})$ est un compact comme image d'un compact par l'application continue u^*, donc a fortiori un fermé donc égal à son adhérence. Par conséquent, $\overline{(u^* \circ u)(B)}$ est un fermé inclus dans le compact $u^*(\overline{u(B)})$, donc est compact.
Tout sous-espace propre E_λ de $u^* \circ u$ est stable par u car, u étant normal, u commute avec $u \circ u^*$. Donc, pour tout x de E_λ, on a :

$$(u^* \circ u)(u(x)) = u((u^* \circ u)(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

donc $u(x) \in E_\lambda$
La boule unité fermée de E_λ est $B \cap E_\lambda$. Comme la restriction de $u^* \circ u$ à E_λ vaut λId, on a :

$$\overline{(u^* \circ u)(B \cap E_\lambda)} = \overline{\{\lambda x, x \in B \cap E_\lambda\}} = \overline{\lambda(B \cap E_\lambda)} = \lambda\, \overline{B \cap E_\lambda}$$
$$= \lambda(B \cap E_\lambda)$$

car B et E_λ sont fermés (E_λ est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $u^* \circ u - \lambda\text{Id}$). Donc, λ étant non nul :

$$B \cap E_\lambda = \frac{1}{\lambda}\,\overline{(u^* \circ u)(B \cap E_\lambda)} \subset \frac{1}{\lambda}\,\overline{(u^* \circ u)(B)}$$

On a vu que $\overline{(u^* \circ u)(B)}$ est compact et il en est de même de son image par l'homéomorphisme $\frac{1}{\lambda}$ Id. La boule unité $B \cap E_\lambda$ de E_λ est un fermé inclus dans un compact, donc est un compact. D'après le théorème de Riesz rappelé dans l'énoncé, E_λ est de dimension finie.
La restriction de u à E_λ est un opérateur normal sur un espace vectoriel complexe de dimension finie. On sait dans ce cas que u est diagonalisable, propriété rappelée en préambule de l'exercice. On peut alors choisir une base de Hilbert dans chaque sous-espace propre (y compris l'éventuel sous-espace propre E_0 sur lequel u s'annule). La réunion de ces bases forme une base de Hilbert de l'espace H entier. En effet, le sous-espace vectoriel engendré par cette réunion est dense dans $\sum_\lambda E_\lambda$, lui-même dense dans H comme on l'a vu dans l'exercice précédent.

REMARQUE :
Si la valeur propre de u relativement à e_i est λ_i, alors e_i est aussi vecteur propre de u^* avec la valeur propre $\overline{\lambda_i}$. En effet, pour tout j :

$$<u^*(e_i) \mid e_j> = <e_i \mid u(e_j)> = <e_i \mid \lambda_j e_j> = \begin{cases} \overline{\lambda_j} \text{ ou } \overline{\lambda_i} \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

donc $\quad u^*(e_i) = \sum_{j \in I} <e_j \mid u^*(e_i)>\, e_j = \sum_{j \in I} \overline{<u^*(e_i) \mid e_j>}\, e_j = \overline{\lambda_i}\, e_i$

Il en résulte également que, si $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, alors $u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i e_i$ et $u^*(x) = \sum_{i \in I} \overline{\lambda_i}\, x_i e_i$.

◆