ESPACES DE BANACH

Plan

I : Exemples

1- Définition

Un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (E, $\|\ \|$) est dit **espace de Banach** s'il est complet pour la distance associée à sa norme[1]. Dans un tel espace, il y a équivalence entre suite convergente et suite de Cauchy, une suite de Cauchy (u_n) de E vérifiant la propriété :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, p \geq N, \| u_n - u_p \| < \varepsilon.$

Voir L3/METRIQUE.PDF pour la définition d'un espace complet et ses propriétés. On y montre en particulier que :

dans tout espace métrique, toute suite de Cauchy est bornée.

dans un espace métrique complet, toute intersection décroissante $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ d'une suite de fermés F_n non vides dont le diamètre tend vers 0 est non vide.

[1] Dans son livre *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Laurent Schwartz raconte : "*Lorsque j'étais en Pologne en 1959, j'avais été intrigué par un tramway portant l'écriteau « Banach ». On m'expliqua que son terminus était la place Banach [...]. Pour le principe, me suis-je dit, je vais le prendre. Or ce fut impossible parce qu'il était ... complet. Cette petite histoire remportait tous les ans le même succès, et les élèves se souvenaient ainsi de la définition des espaces de Banach. A l'étranger, ce type d'astuce ne faisait pas rire, et était même parfois reçu dans un silence glacial, ce qui est profondément désagréable. Il semble qu'il s'agisse là d'humour exclusivement français !*" ☺

tout espace métrique E se plonge dans un unique espace métrique complet $\hat{E}$ dans lequel E est dense. $\hat{E}$ s'appelle le **complété** de E.

2- Cas de la dimension finie

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets. La démonstration est donnée dans L1/SUITES.PDF

Pour tout n, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets. D'une manière générale, tout espace vectoriel de **de dimension finie** sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet. Deux démonstrations en sont données dans L2/EVNORME.PDF, qui utilisent le théorème de Bolzano-Weierstrass ou la notion de compact. On en donne une troisième ci-dessous, en même temps qu'on redémontre le théorème d'équivalence des normes en dimension finie.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme N. Soit $(e_1, ..., e_n)$ l'une de ses bases. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$. Posons $N_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Montrons que N et N_1 sont équivalentes.

On a déjà, pour tout x de E :

$$N(x) = N(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, N(e_i) \leq CN_1(x) \qquad \text{avec } C = \text{Sup}\,\{N(e_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

La réciproque se fait par récurrence sur n. Si dim(E) = 1, E est isomorphe à $\mathbb{K}$ et la norme N est proportionnelle à la valeur absolue ou au module, qui est identique à N_1 en prenant 1 comme base de $\mathbb{K}$. Les deux normes sont donc équivalentes. De plus, $\mathbb{K}$ est complet.

Supposons la propriété d'équivalence des normes démontrées et la complétude prouvée pour tout espace de dimension $n - 1$. Montrons-la pour E.

Commençons par l'équivalence des normes. Soit φ_i l'application : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \to x_i$ et $H_i = \text{Ker}(\varphi_i)$.

Les H_i sont de dimension $n - 1$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, les H_i sont complets. Etant complets dans (E, N), ils sont également fermés. L'ensemble $F_i = H_i + e_i = \{x + e_i \mid x \in H_i\}$, translaté de H_i est également fermé, et de même l'union finie $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Or 0 n'appartient à aucun F_i, donc n'appartient pas à $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$, donc il n'est pas adhérent à cette union pour la norme N. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \varnothing$ (la boule étant définie par la norme N). Il en résulte que :

$$\forall\, i,\ \forall\, y_i \in H_i,\ N(y_i + e_i) \geq \varepsilon$$

car $y_i + e_i \in F_i$ donc $y_i + e_i \notin B(0, \varepsilon)$. Si x est un élément de E dont une composante x_i est non nulle, on a :

$$x = \sum_{k\neq i} x_k e_k + x_i e_i = x_i(\sum_{k\neq i} \frac{x_k}{x_i}\, e_k + e_i) \qquad \text{de la forme } x_i(y_i + e_i),\ y_i \in H_i$$

donc $\quad N(x) = |x_i|\, N(y_i + e_i) \geq |x_i|\varepsilon$

donc $\quad |x_i| \leq \dfrac{N(x)}{\varepsilon}$

donc $\quad N_1(x) \leq \dfrac{nN(x)}{\varepsilon}$

On a ainsi prouvé l'équivalence des deux normes. Quant à la complétude, elle se montre d'abord pour la norme N_1. En effet, si on a une suite de Cauchy pour N_1, alors chaque composante de la suite dans la base $(e_1, ..., e_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{K}$, donc converge, donc la suite de vecteurs converge également pour N_1. Puis, l'équivalence des normes permet d'en déduire que, si on a une suite de Cauchy pour une norme N, alors c'est une suite de Cauchy pour N_1, donc elle converge pour N_1, donc elle converge pour N.

Dans un espace de dimension infinie, le fait qu'une suite de Cauchy est convergente peut être mis en défaut comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. Ainsi, la question de savoir si un espace vectoriel normé est de Banach se pose uniquement pour les espaces de dimension infinie.

3- Exemples en dimension infinie

EXEMPLE 1 :

Soit $l^\infty(\mathbf{R})$ l'ensemble des suites réelles bornées, muni de la norme suivante :

$$\| (a_m)_{m\in\mathbf{N}} \|_\infty = \operatorname*{Sup}_{m\in\mathbf{N}} |a_m|$$

Alors $l^\infty(\mathbf{R})$ est un Banach. En effet, considérons une suite de Cauchy dans cet espace. Il s'agit donc de suite de suites. Notons $a(n) = (a_{mn})_{m\in\mathbf{N}}$ le terme général de cette suite. Considérons, pour chaque m, la suite $(a_{mn})_{n\in\mathbf{N}}$ d'indice m. Pour tout n et p, on a :

$$|a_{mn} - a_{mp}| \leq \| a(n) - a(p) \|_\infty$$

Comme $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $l^\infty(\mathbf{R})$, il en résulte que, pour tout m, $(a_{mn})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$. Elle est donc convergente, vers une limite l_m :

$$l_m = \lim_{n\to\infty} a_{mn}$$

On obtient ainsi une suite $l = (l_m)_{m\in\mathbf{N}}$. Cette suite est bornée. En effet, dans $l^\infty(\mathbf{R})$, la suite $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, donc est bornée :

$$\exists M, \forall n, \| a(n) \|_\infty \leq M$$

donc :

$$\forall n, \forall m, |a_{mn}| \leq M$$

donc, en faisant tendre n vers l'infini :

$$\forall m, |l_m| \leq M$$

Enfin, la suite $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l dans $l^\infty(\mathbf{R})$. En effet, la suite $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ étant de Cauchy dans $l^\infty(\mathbf{R})$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \| a(n) - a(p) \|_\infty \leq \varepsilon$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \forall m, |a_{mn} - a_{mp}| \leq \varepsilon$$

donc, en faisant tendre p vers $+\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall m, |a_{mn} - l_m| \leq \varepsilon$$

donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \sup_{m\in\mathbf{N}} \left|a_{mn} - l_m\right| \leq \varepsilon$$

donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \| a(n) - l \|_\infty \leq \varepsilon$$

ce qui signifie bien que $\lim\limits_{n\to\infty} a(n) = l$ dans $l^\infty(\mathbf{R})$.

La même démonstration s'applique à $l^\infty(\mathbf{C})$, espace vectoriel des suites complexes bornées.

EXEMPLE 2 :

Soit E = $C^0([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur un segment $[a, b]$, muni de la norme $\| f \|_\infty = \text{Sup } \{\left|f(x)\right| , x \in [a, b]\}$, à valeurs réelles ou complexes. Alors cet espace est un Banach. La démonstration est comparable à celle de l'exemple 1. Soit (f_n) une suite de Cauchy. Alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, p \geq N, \| f_n - f_p \|_\infty \leq \varepsilon$$

donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, p \geq N, \forall\, x, \left|f_n(x) - f_p(x)\right| \leq \varepsilon$$

Il en résulte, que, pour tout x, la suite $(f_n(x))$ constitue une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, donc converge vers un nombre que nous noterons $f(x)$. Si on fait tendre p vers l'infini dans la dernière inégalité, on obtient :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, x, \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

ce qu'on peut écrire encore sous la forme :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, x, \| f_n - f \|_\infty \leq \varepsilon$$

ce qui signifie que f est la limite de f_n pour la norme $\| \ \|_\infty$. Il reste à montrer que f est élément de E, i.e est continue, pour conclure que E est complet. Ce dernier point est démontré dans le chapitre L2/SUITESF.PDF portant sur les suites et séries de fonctions : la limite d'une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

EXEMPLE 3 :

De même, soit E = $C^1([a, b]]$ l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables sur $[a, b]$ à valeurs réelles, muni de la norme $N(f) = \left|f(a)\right| + \| f' \|_\infty = \left|f(a)\right| + \text{Sup}\{\left|f'(x)\right|, x \in [a, b]\}$. Il s'agit d'un Banach. En effet, soit (f_n) une suite de Cauchy pour la norme N. Comme $\left|f(a)\right| \leq N(f)$, il en résulte que $(f_n(a))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$, donc converge. De même, comme $\| f' \|_\infty \leq N(f)$, la suite (f_n') est une suite de Cauchy dans $(C^0([a, b], \| \ \|_\infty)$ qui est un espace de Cauchy d'après l'exercice précédent, donc elle converge uniformément vers une fonction continue g. Ainsi, (f_n) est une suite de fonctions de classe C^1 telle que $(f_n(a))$ converge et que la suite des dérivées converge uniformément vers une fonction continue g. Le théorème de dérivation des suites de fonctions (voir L2/SUITESF.PDF) permet de conclure que la suite (f_n) converge uniformément sur le compact $[a, b]$ vers la primitive G de g qui prend la valeur $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ en a. G est C^1 et $\lim\limits_{n\to\infty} N(f_n - G) = 0$.

Puisque toute suite de Cauchy de E converge dans E, E est un Banach.

EXEMPLE 4 :

Soit $(E, \| \ \|)$ un Banach, X un espace vectoriel topologique et $\mathcal{C}(X, E)$ l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de X dans E. E est muni de la distance $d(u, v) = \| u - v \|$

On a vu dans L3/METRIQUE.PDF que $\mathcal{C}(X, E)$ est un espace complet pour la distance :

$$\delta(f, g) = \operatorname*{Sup}_{x\in X} d(f(x), f(y)) = \operatorname*{Sup}_{x\in X} \| f(x) - f(y) \|$$

Pour montrer que $\mathcal{C}$(X, E) est un Banach, il suffit de remarquer que δ est issu de la norme suivante :

$$\| f \|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in X} \| f(x) \|$$

Dans le cas où X = [a, b] et E = $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$), on retrouve le fait que $C^0([a, b])$ est un Banach.

Dans le cas où X = $\mathbf{N}$ et E = $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$), on retrouve le fait que $l^\infty(\mathbf{R})$ (ou $l^\infty(\mathbf{C})$) est un Banach, une suite $x = (x_n)$ étant vue comme la fonction $x : n \in \mathbf{N} \to x_n$. On prend sur $\mathbf{N}$ la topologie discrète de sorte que tout élément x de $l^\infty(\mathbf{R})$ est une fonction bornée nécessairement continue sans vérification supplémentaire.

EXEMPLE 5 :

Considérons $\mathbf{R}$[X] muni de la norme N_∞ suivante :

$$\text{si } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,\ N_\infty(P) = \operatorname*{Sup}_{0\le k\le n} |a_k|$$

Pour tout n, prenons $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} X^k$. Il s'agit d'une suite de Cauchy pour la norme N_∞. En effet, pour $p \ge n$, $U_p - U_n = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k+1} X^k$ dont la norme vaut $\frac{1}{n+2}$ et qu'on peut rendre plus petit que tout ε strictement positif pour $p \ge n \ge \frac{1}{\varepsilon}$. Cependant, (U_n) ne converge pas dans $\mathbf{R}$[X]. En effet, si la limite L existait, avec L de degré N, pour $n > N$, $U_n - L$ possèderait le terme $\frac{1}{N+1} X^{N+1}$, donc on aurait $N_\infty(U_n - L) \ge \frac{1}{N+1}$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $\mathbf{R}$[X] n'est pas complet.

Quant à la quantité $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} X^k$ qu'on pourrait proposer comme limite, elle n'est pas un polynôme.

($\mathbf{R}$[X], N_∞) est isométrique à l'espace vectoriel $c_{00}(\mathbf{R})$ des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, au moyen de l'isométrie qui, à un polynôme $P = \sum_{k\ge0} a_k X^k$, associe la suite $a = (a_k)_{k\ge0}$. On munit $c_{00}(\mathbf{R})$ de la norme $\| a \|_\infty = \operatorname*{Sup}_{k\ge0} |a_k|$.

EXEMPLE 6 :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur [0,1], munie de la norme dite de la convergence en moyenne :

$$\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

Considérons la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n(x) = n(\sqrt{n} - 1)x \text{ sur } [0, \frac{1}{n}]$$

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \text{ sur } [\frac{1}{n}, 1]$$

On pourra vérifier que, pour $p > n$:

$$\| f_n - f_p \|_1 = \frac{3}{2} (\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{p}}) - \frac{1}{2} (\frac{1}{n} - \frac{1}{p})$$

de sorte que la suite (f_n) est de Cauchy pour la norme $\| \ \|_1$. Cependant, elle ne converge vers aucune fonction continue sur [0,1]. Elle converge bien simplement sur [0, 1] vers la fonction $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$, mais cette fonction n'est pas continue en 0. Autrement dit, il faudrait se placer dans l'espace plus grand $L^1([0, 1])$ des fonctions intégrables sur [0, 1] pour espérer qu'une suite de Cauchy converge.

EXEMPLE 7 :

L'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ au sens de Lebesgue muni de la norme :

$$\| f \| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$$

est un Banach. Une des présentations de l'intégrale de Lebesgue consiste d'ailleurs à définir $L^1(\mathbb{R})$ comme le complété de l'espace vectoriel E des fonctions continues à support compact (i.e. nulles en dehors d'un intervalle borné) muni de la norme précédente (l'intégrale de la fonction continue étant alors celle de Riemann).

EXEMPLE 8 :

Un espace préhilbertien qui est complet s'appelle un **espace de Hilbert**. Le chapitre L3/HILBERT.PDF leur est dédié.

PROPOSITION

Soit F *un Banach et* E *un espace vectoriel normé. Soit* L(E, F) *l'espace vectoriel des applications linéaires continues de* E *dans* F *muni de la norme subordonnée aux normes de* E *et* F. *Alors* L(E, F) *est un Banach*.

On souligne que, dans le contexte de ce chapitre, L(E, F) est l'espace vectoriel des applications linéaires **continues** de E dans F. Quant à l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires de E dans F, continues ou non, on le désignera par Hom(E, F), espace vectoriel des homomorphismes de E dans F.

On rappelle que la norme sur L(E, F) subordonnée aux normes de E et F est définie par :

$$||| f ||| = \text{Sup } \{\frac{\| f(x) \|}{\| x \|}, x \in E, x \neq 0\}$$

$$= \text{Sup } \{\| f(x) \|, x \in B(0, 1)\} \quad \text{où B(0, 1) est la boule unité de E}$$

$$= \text{Sup } \{\| f(x) \|, x \in S\} \quad \text{où S est la sphère unité de E}$$

$||| f |||$ est le plus petit rapport de Lipschitz de f. (Voir L2/EVNORME.PDF)

<u>Démonstration</u> :

❑ Soit une suite de Cauchy (f_n) dans L(E, F). Pour tout x de E, on a donc :

$$\| f_n(x) - f_p(x) \| \leq ||| f_n - f_p ||| \, \| x \|$$

ce qui montre que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F qui est complet, donc convergente vers une limite qu'on notera $f(x)$.
Comme, pour tout n, tout (x, y) de E^2, et tout scalaire λ, $f_n(\lambda x + y) = \lambda f_n(x) + f_n(y)$, un passage à la limite donne $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ ce qui montre que f est linéaire.
En outre, la suite $(||| f_n |||)$ étant de Cauchy est bornée, donc $\exists$ M, $\forall$ n, $||| f_n ||| \leq M$, donc $\forall x \in B(0, 1)$, $\| f_n(x) \| \leq M$. En passant à la limite, on obtient $\| f(x) \| \leq M$ ce qui prouve que f est continue et donc élément de L(E, F).
Enfin :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \forall x \in B(0, 1), \| f_n(x) - f_p(x) \| \leq \varepsilon$$

et en faisant tendre p vers l'infini, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in B(0, 1), \| f_n(x) - f(x) \| \leq \varepsilon$$

donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, ||| f_n - f ||| \leq \varepsilon$$

ce qui montre que (f_n) converge vers f dans L(E, F).

COROLLAIRE

On appelle **espace dual topologique** *l'espace* L(E, $\mathbb{K}$) *où* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *corps de l'espace vectoriel* E. *On le note* E'. *C'est un Banach.*

E' est donc l'espace vectoriel des formes linéaires **continues** de E dans $\mathbb{K}$. E' est inclus dans E* = Hom(E, $\mathbb{K}$), espace vectoriel de toutes les formes linéaires, continues ou non, de E dans $\mathbb{K}$. E* s'appelle le **dual algébrique** de E. $\mathbb{K}$ étant complet, E' est un Banach d'après la proposition précédente. La norme sur E' est définie comme suit. Pour tout $\varphi \in E'$, on a :

$$
\begin{aligned}
||| \varphi ||| &= \mathrm{Sup} \left\{ \frac{| \varphi(x) |}{\| x \|}, x \neq 0 \right\} \\
&= \mathrm{Sup} \{ | \varphi(x) |, x \in B(0, 1) \} \quad \text{où B(0, 1) est la boule unité} \\
&= \mathrm{Sup} \{ | \varphi(x) |, x \in S \} \quad \text{où S est la sphère unité}
\end{aligned}
$$

PROPOSITION

Tout espace vectoriel normé (E, $\| \ \|$) *se plonge dans un unique Banach* $\hat{E}$ *dans lequel* E *est dense.*

Démonstration :

❑ Il suffit de prouver que le complété $\hat{E}$ de E peut être muni d'une structure d'espace vectoriel normé. Rappelons comment est construit le complété de E. On forme l'ensemble SCE des suites de Cauchy sur E. On y définit une relation d'équivalence :

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \, \mathcal{R} \, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \| a_n - b_n \| = 0$$

Le complété $\hat{E}$ de E est l'ensemble quotient SCE/$\mathcal{R}$ de SCE par cette relation d'équivalence. Il reste à prouver que $\hat{E}$ est un espace vectoriel normé.
SCE est un espace vectoriel. Il n'est pas difficile en effet de vérifier que la somme de deux suites de Cauchy de E est une suite de Cauchy, de même que le produit d'une suite de Cauchy par un scalaire.

Soit H le sous-espace vectoriel de SCE constitué des suites de limites nulles. On a, pour toutes suites de Cauchy (a_n) et (b_n) :

$$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \,\mathcal{R}\, (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \| a_n - b_n \| = 0 \Leftrightarrow (a_n - b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathrm{H}$$

Ainsi, la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est définie par le sous-espace vectoriel H, et $\hat{\mathrm{E}}$ n'est autre que SCE/H. On a montré que L3/QUOTIENT.DOC qu'un tel espace pouvait être muni d'une structure vectorielle, la projection canonique SCE $\to$ SCE/H étant linéaire. Si $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont deux éléments de $\hat{\mathrm{E}}$, représentés par les suites de Cauchy $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$, alors on pose $\hat{a} + \hat{b} = (\widehat{a + b})$, et $\lambda\hat{a} = (\widehat{\lambda a})$.

$\hat{\mathrm{E}}$ est par ailleurs muni d'une norme. Si $\hat{a}$ est élément de $\hat{\mathrm{E}}$, représenté par la suite de Cauchy $a = (a_n)$, on pose :

$$\| \hat{a} \| = \lim_{n\to\infty} \| a_n \|$$

La limite existe car la suite $(\| a_n \|)$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$ (utiliser $\big|\| a_n \| - \| a_p \|\big| \leq \| a_n - a_p \|$), et on vérifie qu'elle ne dépend pas du représentant choisi dans la classe d'équivalence $\hat{a}$. Il n'est pas difficile de montrer qu'on a ainsi défini une norme sur $\hat{\mathrm{E}}$. Par exemple :

$$\| \hat{a} \| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \| a_n \| = 0 \Rightarrow a \in \mathrm{H} \Rightarrow \hat{a} = 0$$

ou $$\| \hat{a} + \hat{b} \| = \| (\widehat{a + b}) \| = \lim_{n\to\infty} \| a_n + b_n \| \leq \lim_{n\to\infty} \| a_n \| + \| b_n \| = \| \hat{a} \| + \| \hat{b} \|$$

Enfin, cette norme est associée à la distance $\delta(\hat{a}, \hat{b}) = \| \hat{a} - \hat{b} \| = \lim_{n\to\infty} \| a_n - b_n \|$, qui est précisément la distance sur $\hat{\mathrm{E}}$ qui étend la distance sur E et pour laquelle $\hat{\mathrm{E}}$ est complet.

Cette proposition permet de multiplier les exemples à l'infini. Prendre un espace vectoriel normé quelconque. S'il n'est pas de Banach, on aura un exemple de Banach en prenant son complété. S'il est de Banach, on aura un exemple de non-Banach en prenant un sous-espace vectoriel non fermé (puisqu'une partie d'un espace complet est un espace complet si et seulement si elle est fermée).

II : Propriétés

1- Propriété de Cauchy pour les fonctions

On dispose pour la convergence des fonctions d'un critère comparable à celui des suites de Cauchy.

PROPOSITION

Soit f une application d'une partie U *d'un espace vectoriel normé* E *à valeurs dans un Banach* F. *Soit a un point adhérent à* U. *Alors il y a équivalence entre :*

(i) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \mathrm{U}}} f(x)$ *existe*

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, r > 0, \forall\, x \in \mathrm{B}(a, r) \cap \mathrm{U}, \forall\, y \in \mathrm{B}(a, r) \cap \mathrm{U}, \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$

<u>Démonstration</u>

i) $\Rightarrow$ ii)

Si l est la limite, alors :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, r > 0, \forall\, x \in B(a, r), \| f(x) - l \| < \varepsilon/2$

donc $\forall\, x \in B(a, r), \forall\, y \in B(a, r), \| f(x) - f(y) \| = \| f(x) - l + l - f(y) \| \le \| f(x) - l \| + \| l - f(y) \| < \varepsilon$

ii) $\Rightarrow$ i)

On utilise la caractérisation séquentielle des limites. Pour montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in U}} f(x)$ existe, il suffit de montrer que, pour toute suite (x_n) de U convergeant vers a, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existe. Prenons donc une suite (x_n) dans U, convergeant vers a. Montrons que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy. On a :

$\forall\, r > 0, \exists\, N, \forall\, n \ge N, \| x_n - a \| < r$ (*)

or $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, r > 0, \forall\, x \in B(a, r) \cap U, \forall\, y \in B(a, r) \cap U, \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$ (**)

donc si on applique (*) avec le r donné dans (**), et $x = x_n$, $y = x_p$ avec $n \ge N$ et $p \ge N$, on a :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \ge N, \forall\, p \ge N, \| f(x_n) - f(x_p) \| < \varepsilon$

F étant un Banach, la suite $(f(x_n))$ converge vers une limite que nous noterons l. Cette limite ne dépend pas de la suite (x_n) choisie. Si (y_n) est en effet une autre suite de limite a, le même raisonnement montrera que $(f(y_n))$ converge vers une limite l'. Mais on aura $l = l'$ en considérant la suite imbriquée $(f(x_0), f(y_0), f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), ...)$ qui doit aussi converger. On aura alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in U}} f(x) = l$.

2- Fonction uniformément continue et suite de Cauchy

On rappelle deux propriétés, démontrées dans le chapitre L3/METRIQUE.PDF, mais que nous énonçons ici lorsque les espaces métriques sont des espaces vectoriels normés.

PROPOSITION

(i) *Soit f définie sur une partie* A *d'un espace vectoriel normé et uniformément continue. Alors l'image par f d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.*

(ii) *Si, de plus, f est à valeurs dans un espace vectoriel de Banach* F*, alors f se prolonge de manière unique en une application uniformément continue sur* $\overline{A}$.

La proposition (ii) permet par exemple de définir l'intégrale d'une fonction continue $f : [a, b] \to F$ où F est un espace de Banach, ce que nous décrivons brièvement ci-après. Soit E l'espace des fonctions bornées sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans F. E est muni de la norme :

$\| f \|_\infty = \mathrm{Sup}\, \{ \| f(x) \|, x \in [a, b]\}$ (où $\| f(x) \|$ est la norme dans F de $f(x)$).

Soit A le sous-espace des fonctions en escalier définie sur $[a, b]$ à valeurs dans F. Pour chaque φ de A, il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ telle que la restriction de φ à chaque $]a_i, a_{i+1}[$ soit constante, égale à un vecteur φ_i de F. On peut définir $I(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\, \varphi_i$, dont on montre qu'elle ne dépend pas de la subdivision choisie. L'application I de A dans F est une application lipschitzienne, donc uniformément continue. Elle se prolonge en une application sur $\overline{A}$, que nous continuerons à noter I. Pour f dans $\overline{A}$, on définit ainsi $\int_a^b f(t)\, dt = I(f)$. Le sous-espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans F est contenu dans $\overline{A}$, ce qui permet de définir l'intégrale d'une fonction continue. Plus généralement, on peut montrer que $\overline{A}$ est constitué des fonctions ayant une limite à droite et à gauche de chaque point, appelées **fonctions réglées**.

3- Séries de vecteurs

Soit $\sum u_n$ une série de vecteurs d'un **espace de Banach** (E, $\| \ \|$). Cette série converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge, donc si et seulement si la suite (S_n) est de Cauchy. Il en résulte le critère de convergence des séries suivant :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, p \geq n, \|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\| < \varepsilon$$

DEFINITION

Une série de vecteurs $\sum u_n$ est dite **normalement convergente** *si la série $\sum \| u_n \|$ converge.*

On dispose alors du théorème suivant :

PROPOSITION

Dans un espace de Banach E, *on dispose alors de l'implication suivante* :

$$\sum u_n \textit{ converge normalement} \Rightarrow \sum u_n \textit{ converge}$$

Démonstration :

❑ En effet, si la série $\sum u_n$ converge normalement, alors $\sum \| u_n \|$ converge, donc la suite des sommes partielles forme une suite de Cauchy, donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, p \geq n, \sum_{k=n+1}^{p} \| u_k \| < \varepsilon$$

donc, par inégalité triangulaire :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, p \geq n, \|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{p} \| u_k \| < \varepsilon$$

donc la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est de Cauchy dans E complet, donc $\sum$ un converge.

EXEMPLES :

❑ La proposition généralise le fait qu'une série de fonctions normalement convergente sur un intervalle est uniformément convergente sur cet intervalle. Voir L2/SUITESF.PDF.

❑ Soit u un endomorphisme continu défini sur un Banach E, et tel que $|||\, u \,||| < 1$, ou $|||\, u \,|||$ est la norme d'endomorphismes subordonnée à la norme de E (voir L2/EVNORME.PDF). Alors $\mathrm{Id} - u$ est inversible, $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ converge et est égal à $(\mathrm{Id} - u)^{-1}$.

En effet, la norme d'endomorphisme vérifie la propriété : $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $|||\, u^n \,||| \leq |||\, u \,|||^n$. La série $\sum |||\, u \,|||^n$ étant convergente (géométrique de raison strictement inférieure à 1), il en est a fortiori de même de $\sum |||\, u^n \,|||$, de sorte que la série $\sum u^n$ converge normalement. Enfin :

$$(\mathrm{Id} - u) \circ \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} u^n - \sum_{n=0}^{\infty} u^{n+1} = \mathrm{Id}$$

On peut de même définir l'**exponentielle d'un endomorphisme continu** par $\exp(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{u^n}{n!}$ pour tout endomorphisme u continu sur un espace de Banach. En effet, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ est normalement convergente, puisque $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{|||\, u\, |||^n}{n!} = \exp(|||\, u\, |||)$ converge. Donc, a fortiori, $\sum \dfrac{|||\, u^n\, |||}{n!}$ est aussi convergente. On note de même $\exp(\mathrm{M}) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\mathrm{M}^n}{n!}$, **exponentielle de matrice**, pour toute matrice carrée M. Des exemples de calcul d'exponentielle de matrice sont donnés dans les exercices du chapitre L2/EVNORME.PDF.

On peut se demander si exp(A) × exp(B) = exp(A + B) pour toutes matrices A et B de même taille. Nous devons alors faire le produit de deux séries. On utilise les résultats vus dans le paragraphe sur les produits de Cauchy de deux séries (voir L2/SERIES), et qui restent valables en remplaçant valeur absolue ou module par norme. On a :

$$\exp(\mathrm{A}) \times \exp(\mathrm{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{B}^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{\mathrm{A}^p}{p!} \times \frac{\mathrm{B}^{n-p}}{(n-p)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \mathrm{A}^p\mathrm{B}^{n-p}$$

et l'on reconnaît un binôme de Newton **à condition que les matrices A et B commutent**. Donc, **si A et B commutent** :

$$\exp(\mathrm{A}) \times \exp(\mathrm{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{B})^n}{n!} = \exp(\mathrm{A} + \mathrm{B})$$

Ce résultat est faux si A et B ne commutent pas.
On a donc en particulier exp(M) × exp(–M) = exp(O) = I, où O est la matrice nulle, donc exp(–M) est égal à $(\exp(\mathrm{M}))^{-1}$. Le calcul de exp(M) est particulièrement facile lorsque M est diagonale. Si $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$, alors $\exp(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \exp(\lambda_p) \end{pmatrix}$. Si M n'est pas diagonale mais semblable à une matrice diagonale, (i.e. $\mathrm{M} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{DP}$) alors, $\mathrm{M}^n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{D}^n\mathrm{P}$ et $\exp(\mathrm{M}) = \mathrm{P}^{-1}\exp(\mathrm{D})\mathrm{P}$.

Plus généralement, pour t réel, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n M^n}{n!} = \exp(tM)$. Ces matrices interviennent dans la résolution de systèmes différentiels linéaires. On montre que si $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1 vérifiant $V'(t) = MV(t)$ et $V(0) = V_0$, alors la solution est $V(t) = \exp(tM)V_0$. Voir le chapitre L2/EQDIFF2.PDF. Dans ledit chapitre, on justifie également que, pour toute matrice carrée, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$ (ce qui peut se montrer également en trigonalisant la matrice A dans $\mathbb{C}$).

Dans un espace normé de dimension infinie qui n'est pas un Banach, on peut avoir une série de vecteurs $\sum u_n$ normalement convergente, sans qu'elle soit convergente. Munissons par exemple $\mathbb{R}[X]$ de la norme suivante :

$$N(\sum_{k=0}^{n} a_n X^n) = \sum_{k=0}^{n} |a_n|$$

La série $\sum \dfrac{X^n}{n^2}$ est alors normalement convergente puisque $N(\dfrac{X^n}{n^2}) = \dfrac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente, mais la série diverge. En effet, s'il existait un polynôme P de degré p vers lequel converge la série $\sum \dfrac{X^n}{n^2}$, alors, pour $n > p$, $N(P - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k^2})$ devrait tendre vers 0 quand n tend vers l'infini, mais cette quantité est supérieure à $\dfrac{1}{(p+1)^2}$.

III : Propriété de Baire

1- Définition

On dit qu'un espace topologique E est **de Baire** si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense :

$$(\forall n, O_n \text{ ouvert et } \overline{O_n} = E) \Rightarrow \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n} = E$$

Par passage au complémentaire, un espace est de Baire si et seulement si toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

$$(\forall n, F_n \text{ fermé et } \overset{\circ}{F_n} = \varnothing) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)^{\circ} = \varnothing$$

On rappelle en effet que, pour toute partie A d'un espace topologique, $(\overline{A})^c = \overset{\circ}{(A^c)}$, où ^{c} désigne le complémentaire. Ci-dessus, on passe de la première définition à la seconde en prenant $F_n = O_n{}^c$.
On peut aussi utiliser les contraposées. Dans un espace de Baire, si une intersection dénombrable d'ouverts n'est pas dense, l'un des ouverts n'est pas dense. Dans un espace de Baire, si une réunion dénombrable de fermés n'est pas d'intérieur vide, l'un des fermés n'est pas d'intérieur vide.

Une partie incluse dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est dite **maigre** (ou de **première catégorie**). Dans un espace de Baire, une partie maigre est donc d'intérieur vide.

$$A \text{ maigre} \Leftrightarrow \exists (F_n)_{n\in\mathbb{N}},\ A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \text{ et } \forall n, F_n \text{ est fermé et } \overset{\circ}{F_n} = \varnothing$$

Le complémentaire B d'une partie maigre A vérifie :

$$B^c \text{ maigre} \Leftrightarrow \exists\, (F_n)_{n\in\mathbf{N}},\ B^c \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \text{ et } \forall\, n,\ F_n \text{ est fermé et } \overset{\circ}{F_n} = \varnothing$$

$$\Leftrightarrow \exists\, (F_n)_{n\in\mathbf{N}},\ \bigcap_{n=1}^{\infty} {F_n}^c \subset B \text{ et } \forall\, n,\ {F_n}^c \text{ est ouvert et } (\overset{\circ}{F_n})^c = E$$

$$\Leftrightarrow \exists\, (F_n)_{n\in\mathbf{N}},\ \bigcap_{n=1}^{\infty} {F_n}^c \subset B \text{ et } \forall\, n,\ {F_n}^c \text{ est ouvert et } \overline{{F_n}^c} = E$$

$$\Leftrightarrow \exists\, (O_n)_{n\in\mathbf{N}},\ \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \subset B \text{ et } \forall\, n,\ O_n \text{ est ouvert et } \overline{O_n} = E$$

$\Leftrightarrow$ B contient une intersection d'ouverts denses

Dans un espace de Baire, une telle partie B est dense.

THEOREME DE BAIRE

(i) *Tout espace métrique complet est de Baire. En particulier, tout Banach est de Baire.*

(ii) *Tout espace topologique localement compact est de Baire.*

La propriété de Baire étant purement topologique et le fait d'être complet étant lié à la métrique, il serait plus juste de dire que tout espace topologique E, dont la topologie peut être définie par une métrique pour lequel E est complet, est un espace de Baire.

Démonstration :

❑ (i) : Soit E espace métrique complet et $(O_n)_{n\geq 1}$ une famille d'ouverts denses. Soit $O = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de montrer que $B(x, \varepsilon) \cap O \neq \varnothing$.

Comme O_1 est dense, $\exists\, y_1 \in B(x, \varepsilon) \cap O_1$, qui est un ouvert, donc il existe une boule ouverte de centre y_1 incluse dans $B(x, \varepsilon) \cap O_1$, et une boule fermée $B_f(y_1, r_1)$ de rayon r_1 plus petit incluse dans cette boule ouverte. On peut supposer en outre que $r_1 \leq 1$, et on a $B_f(y_1, r_1) \subset B(x, \varepsilon) \cap O_1$. Posons $r_0 = \varepsilon$.

Comme O_2 est dense, $\exists\, y_2 \in B(y_1, r_1) \cap O_2$, qui est un ouvert, donc il existe une boule ouverte de centre y_2 incluse dans $B(y_1, r_1) \cap O_2$, et une boule fermée $B_f(y_2, r_2)$ de rayon r_2 plus petit incluse dans cette boule ouverte. On peut supposer en outre que $r_2 \leq \frac{1}{2}$, et on a donc $B_f(y_2, r_2) \subset B(y_1, r_1) \cap O_2$.

On itère, construisant ainsi une suite (y_n) d'éléments de E et de nombres (r_n) tels que :

$\forall\, n \geq 1,\ r_n \leq \frac{1}{n}$

$\forall\, n \geq 1,\ B_f(y_n, r_n) \subset B(y_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$

On a donc en particulier $B_f(y_n, r_n) \subset B_f(y_{n-1}, r_{n-1})$. Ces boules forment une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0. Donc, E étant complet, il existe y élément de $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_f(y_n, r_n)$. Comme, pour tout n, $B_f(y_n, r_n) \subset O_n$, on a $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$. De plus, $y \in B(y_1, r_1) \subset B(x, \varepsilon)$. Donc $y \in B(x, \varepsilon) \cap O$. On a ainsi montré que O est dense.

❑ (ii) : Dans le cas où l'espace E est localement compact, on modifie légèrement la démonstration précédente, en remplaçant les boules par des voisinages et en particulier, en remplaçant $B_f(y_n, r_n)$ par un voisinage compact de y_n. On obtient une suite décroissante de compacts non vides donc son intersection est non vide.

EXEMPLES :

❑ Un exemple simple d'espace qui n'est pas de Baire est donné par $\mathbb{Q}$, qui est dénombrable. Notons $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \geq 1\}$. Prendre $O_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$. Tous les O_n sont des ouverts denses, mais $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = \emptyset$. On remarque que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, ni localement compact.

❑ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors il existe un intervalle ouvert non vide sur lequel f' est bornée. En effet, soit $F_N = \{x, \forall n, \left|\frac{f(x+1/n) - f(x)}{n}\right| \leq N\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x, \left|\frac{f(x+1/n) - f(x)}{n}\right| \leq N\}$. F_N est un fermé comme intersection des parties $\{x, \left|\frac{f(x+1/n) - f(x)}{n}\right| \leq N\}$ qui sont des fermés, chacun étant l'image réciproque du fermé $[0, N]$ par l'application continue $x \to \left|\frac{f(x+1/n) - f(x)}{n}\right|$. Par hypothèse, pour tout x, la suite $(\frac{f(x+1/n) - f(x)}{n})$ converge, donc est bornée. Donc tout x appartient à l'un des F_N. Donc $\bigcup_{N=1}^{\infty} F_N = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ étant de Baire,et d'intérieur non vide, l'un des F_N est d'intérieur non vide. Il existe donc un intervalle I ouvert non vide tel que $I \subset F_N$. Pour tout x de I, en passant à la limite, on obtient $|f'(x)| \leq N$.

❑ On donne ici une démonstration du **lemme de Croft** qui s'énonce ainsi : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $a > 0$, la suite $(f(na))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Une démonstration de cette propriété a été donnée dans les exercices du chapitre L3/METRIQUE, avec l'hypothèse plus forte *f uniformément continue*. Pour montrer sa validité dans le cas de f continue, on utilise la propriété de Baire.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout N, posons $F_N = \{x \mid \forall n \geq N, |f(nx)| \leq \varepsilon\}$. Alors F_N est un fermé et, par hypothèse, $\bigcup_{N=1}^{\infty} F_N =]0, +\infty[$. Comme $]0, +\infty[$ est de Baire (car localement compact), au moins l'un des F_N est d'intérieur non vide, et contient un intervalle $]a, b[$ avec $a < b$. Prenons $M > \mathrm{Max}(N, \frac{a}{b-a})$, de sorte que $Mb - Ma > a$. Dans ce cas, pour $n \geq M$, $nb - na > a$, ou encore $nb > (n+1)a$ et les intervalles $]na, nb[$ se chevauchent, de sorte que, pour tout $x > Ma$, x est dans l'un des intervalles $]na, nb[$, avec $n \geq M > N$. Mais $\frac{x}{n}$ est alors dans $]a, b[$ donc dans F_N, de sorte que $|f(x)| \leq \varepsilon$. On a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall x > M, |f(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui est la conclusion à montrer.

2- Le théorème de Banach-Steinhaus

Considérons deux espaces normés E et F et $(u_j)_{j\in J}$ une famille infinie (par exemple une suite) d'applications linéaires de E dans F. Comparons les propriétés suivantes, où l'ordre des quantificateurs change :

(i) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \forall j \in J, \| u_j(x) \| \leq M \| x \|$

(ii) $\forall x \in E, \exists M \in \mathbb{R}, \forall j \in J, \| u_j(x) \| \leq M \| x \|$

(iii) $\forall j \in J, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \| u_j(x) \| \leq M \| x \|$

(iv) $\forall x \in E, \forall j \in J, \exists M \in \mathbb{R}, \| u_j(x) \| \leq M \| x \|$

La propriété (iv) ne présente aucun intérêt particulier. Elle est triviale si $x = 0$ et sinon tout aussi triviale en prenant $M = \dfrac{\| u_j(x) \|}{\| x \|}$. M dépend de j et de x.

La propriété (iii) exprime que toutes les applications linéaires u_j sont lipschitziennes, donc continues. On a $|\!|\!| u_j |\!|\!| \leq M$ et M dépend de j.

La propriété (ii) exprime que, pour tout x, la famille $(u_j(x))_{j\in J}$ est bornée en norme par le nombre $M \| x \|$. M dépend de x.

La propriété (i) exprime que la quantité M du (ii) ne dépend pas de x, et aussi que le coefficient de Lipschitz du (iii) ne dépend pas de j. Autrement dit, la famille $(|\!|\!| u_j |\!|\!|)_{j\in J}$ est majorée par le même nombre M.

On a donc (i) $\Rightarrow$ ((ii) et (iii)). On s'intéresse à la réciproque ((ii) et (iii)) $\Rightarrow$ (i). Dans le cas où E est de dimension finie, il est inutile de supposer (iii) car une application linéaire dont l'espace de départ est un espace vectoriel normé de dimension finie est nécessairement continue.

PROPOSITION

Si E *est un espace vectoriel normé de dimension finie, et* $(u_j)_{j\in J}$ *une famille d'applications linéaires de* E *dans un espace vectoriel normé* F. *Alors il y a équivalence entre* :

(i) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall j \in J, |\!|\!| u_j |\!|\!| \leq M$

(ii) $\forall x \in E, (\| u_j(x) \|)_{j\in J}$ *est bornée*

<u>Démonstration</u> :

❑ Il suffit de montrer (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $(e_1, ..., e_p)$ est une base de E. Alors, pour $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ élément de la boule unité de E, et pour tout $j \in J$:

$$\| u_j(x) \| = \| \sum_{i=1}^{p} x_i u_j(e_i) \| \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i| \| u_j(e_i) \| \leq \underset{1 \leq i \leq p}{\text{Max}} |x_i| \times \sum_{i=1}^{p} \| u_j(e_i) \| \leq \text{Cte} \times \sum_{i=1}^{p} \| u_j(e_i) \|$$

où Cte est un majorant de $\underset{1 \leq i \leq p}{\text{Max}} |x_i| = N_1(x)$, quantité bornée sur la boule unité de E, en vertu de l'équivalence des normes en dimension finie. Mais pour chaque i, d'après (ii), la famille $(\| u_j(e_i) \|)_{j\in J}$ est bornée. Soit M_i un majorant. On a alors, pour tout x dans la boule unité de E, et pour tout j de J :

$$\| u_j(x) \| \leq \text{Cte} \times \sum_{i=1}^{p} M_i$$

donc

$$||| u_j ||| \leq \text{ Cte} \times \sum_{i=1}^{p} \mathrm{M}_i$$

Le majorant ne dépend pas de j. On a donc prouvé que la famille $(||| u_j |||)_{j\in\mathrm{J}}$ est bornée par la quantité $\mathrm{M} = \text{Cte} \times \sum_{i=1}^{p} \mathrm{M}_i$, ce qui prouve (i).

Si E est de dimension infinie, l'implication ((ii) et (iii)) $\Rightarrow$ (i) est généralement fausse. Par exemple, prendre $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ avec $\| \mathrm{P} \| = \underset{k}{\mathrm{Max}} \left| a_k \right|$ si $\mathrm{P} = \sum_k a_k \mathrm{X}^k$ et, pour tout j entier, $u_j : \begin{array}{l} \mathrm{E} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{P} \to ja_j \end{array}$. Alors, pour tout P, la suite $(u_j(\mathrm{P}))$ tend vers 0 (elle est nulle dès que j dépasse deg(P)) donc la suite est bornée donc (ii) est vérifié. Par ailleurs, le lecteur vérifiera que $||| u_j ||| = j$ donc (iii) est vérifié, mais pas (i).

Cependant, si E est un Banach, l'implication ((ii) et (iii)) $\Rightarrow$ (i) est de nouveau vraie, comme pour la dimension finie. Nous intégrons ci-dessous l'hypothèse (iii) dans le préambule du théorème.

THEOREME DE BANACH-STEINHAUS

Si E *est un* ***Banach****, et* $(u_j)_{j\in\mathrm{J}}$ *une famille d'applications linéaires continues de* E *dans un espace vectoriel normé* F. *Alors il y a équivalence entre* :

(i) $\exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall\, j \in \mathrm{J}, ||| u_j ||| \leq \mathrm{M}$

(ii) $\forall\, x \in \mathrm{E}, (\| u_j(x) \|)_{j\in\mathrm{J}}$ *est bornée*

<u>Démonstration</u> :

❑ On a déjà vu que (i) $\Rightarrow$ (ii).

❑ Supposons (ii). Pour tout N entier, posons :

$$\mathrm{F_N} = \{x \mid \forall\, j, \| u_j(x) \| \leq \mathrm{N}\}$$
$$= \bigcap_{j\in\mathrm{J}} \{x \mid \| u_j(x) \| \leq \mathrm{N}\}$$

$\mathrm{F_N}$ est l'ensemble des x pour lesquels la famille $(\| u_j(x) \|)_{j\in\mathrm{J}}$ est bornée par le nombre N. Chaque partie $\{x \mid \| u_j(x) \| \leq \mathrm{N}\}$ est fermée, comme image réciproque du fermé [0, N] par l'application continue $x \to \| u_j(x) \|$. Donc $\mathrm{F_N}$ est un fermé comme intersection de fermés. Or l'hypothèse (ii) traduit le fait que tout x de E est élément d'un certain $\mathrm{F_N}$. Autrement dit :

$$\mathrm{E} = \bigcup_{\mathrm{N}=1}^{\infty} \mathrm{F_N}$$

E est d'intérieur non vide, donc il en est de même de $\bigcup_{\mathrm{N}=1}^{\infty} \mathrm{F_N}$. E étant un Banach, c'est un espace de Baire, donc l'un des $\mathrm{F_N}$ est d'intérieur non vide. Soit donc N tel que $\mathrm{F_N}$ soit d'intérieur non vide. Il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ et $r > 0$ tel que la boule fermée $\mathrm{B_f}(x_0, r)$ est incluse dans $\mathrm{F_N}$. Alors, pour tout y de norme inférieure ou égale à 1, on a :

$x_0 \in \mathrm{B_f}(x_0, r) \subset \mathrm{F_N}$ donc $\forall\, j, \| u_j(x_0) \| \leq \mathrm{N}$

$x_0 + ry \in \mathrm{B_f}(x_0, r) \subset \mathrm{F_N}$ donc $\forall\, j, \| u_j(x_0 + ry) \| \leq \mathrm{N}$

donc $\forall\, j, \| u_j(ry) \| \leq 2\mathrm{N}$ (inégalité triangulaire)

donc $\forall\, j, \| u_j(y) \| \leq \dfrac{2\mathrm{N}}{r}$

donc $\quad \forall j, ||| u_j ||| \leq \dfrac{2\mathrm{N}}{r} = \mathrm{M}$

et le (i) est prouvé.

Dans ce cas, les u_j sont **équicontinues**, dans le sens où :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in \mathrm{E}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathrm{E}, \forall j \in \mathrm{J}, \| x - x_0 \| < \alpha \Rightarrow \| u_j(x) - u_j(x_0) \| < \varepsilon$$

Prendre $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{M}}$.

On voit que la démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i) repose sur le fait que l'un des $\mathrm{F_N}$ est d'intérieur non vide. On peut donc utiliser la fin de la démonstration précédente pour obtenir la variante suivante du théorème de Banach-Steinhaus :

COROLLAIRE 1

Soit E *un espace vectoriel normé,et* $(u_j)_{j\in\mathbf{N}}$ *une famille d'applications linéaires continues de* E *dans un espace vectoriel normé* F. *Soit* A *l'ensemble des* x *de* E *pour lesquels* $(\| u_j(x) \|)_{j\in \mathrm{J}}$ *est bornée. Alors :*

ou bien A *est une partie maigre de* E

ou bien A *n'est pas maigre et dans ce cas,* A = E *et les* u_j *sont équicontinues*

Démonstration :

❑ Avec les notations précédentes, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \{x \mid (\| u_j(x) \|)_{j\in\mathbf{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \{x \mid \exists \mathrm{N}, \forall j, \| u_j(x) \| \leq \mathrm{N}\} \\ &= \{x \mid \exists \mathrm{N}, x \in \mathrm{F_N}\} \\ &= \bigcup_{\mathrm{N}=1}^{\infty} \mathrm{F_N} \end{aligned}$$

Si A n'est pas maigre, l'un des $\mathrm{F_N}$ est d'intérieur non vide et la fin de la démonstration précédente prouve le (i) $\exists$ M, $\forall j$, $||| u_j ||| \leq \mathrm{M}$, (donc les u_j sont équicontinues). De plus, comme (i) $\Rightarrow$ (ii), A = E.

COROLLAIRE 2

Soit E *un* ***Banach****,et* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite d'applications linéaires continues de* E *dans un espace vectoriel normé* F, *convergeant simplement sur* E *vers une application* u. *Alors* u *est une application linéaire continue et la convergence est uniforme sur tout compact de* E.

Démonstration :

❑ On prend ici J = $\mathbf{N}$, la famille (u_j) étant la suite (u_n).

La convergence simple signifie que, pour tout x de E, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$. Le fait que u soit linéaire s'obtient par simple passage à la limite à partir de la linéarité des u_n. Par exemple :

$$u(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} u_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda u_n(x) = \lambda \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lambda u(x)$$

et de même pour $u(x + y)$.

La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ étant convergente, elle est bornée, et ceci pour tout x. Donc (ii) est vraie. Donc (i) aussi. Ainsi :

$$\exists \mathrm{M}, \forall n, ||| u_n ||| \leq \mathrm{M}$$

donc

$$\exists \mathrm{M}, \forall n, \forall x, \| u_n(x) \| \leq \mathrm{M} \| x \|$$

donc, en faisant tendre n vers l'infini :

$$\exists \text{ M}, \forall x, \| u(x) \| \leq \text{M} \| x \|$$

ce qui prouve que u est continue. On a également, pour tout n, $|||\, u_n - u \,||| \leq 2\text{M}$, ce qui prouve que la famille $(u_n - u)$ est aussi équicontinue.
Enfin, le fait que la convergence soit uniforme sur tout compact résulte d'un théorème d'Ascoli, démontré dans un exercice de L3/TOPOLOG.PDF, et appliqué ici à la suite $(u_n - u)$.

Le théorème de Banach-Steinhaus permet de montrer qu'une suite (u_n) d'applications linéaires est équicontinue, alors même que les $|||\, u_n \,|||$ peuvent être délicates à calculer, en utilisant le fait que les $\| u_n(x) \|$ sont bornées pour tout x d'un Banach E (ou sinon pour tout x d'une partie non maigre).
On peut aussi utiliser la contraposée. Si la suite $(|||\, u_n \,|||)$ se calcule facilement et est non bornée, l'ensemble A des x tels que la suite $(\| u_n(x) \|)$ est bornée, est une partie maigre. Donc son complémentaire, ensemble B des x tels que la suite $(\| u_n(x) \|)$ est non bornée, est dense si E est un Banach. En particulier $\text{B} \neq \emptyset$. Cela peut permettre de prouver l'existence non évidente d'objets. Malheureusement, cette existence est non constructive et ne permet généralement pas de décrire explicitement un tel objet.

EXEMPLES :

❑ Soit $c_{00}(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles $x = (x_n)$ nulles à partir d'un certain rang :

$$\exists \text{ N}, \forall n > \text{N}, x_n = 0$$

On munit $c_{00}(\mathbf{R})$ de la norme $\| x \|_\infty = \operatorname{Sup}_{n \in \mathbf{N}} |x_n|$. On a vu plus haut que $c_{00}(\mathbf{R})$ n'est pas un espace de Banach. Montrons que $c_{00}(\mathbf{R})$ ne vérifie pas la propriété de Baire ni le théorème de Banach-Steinhaus.

Pour tout n, soit $u_n : c_{00}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ définie par $u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k$. u_n est linéaire, continue, de norme $n + 1$.

En effet, $|u_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |x_k| \leq (n + 1) \| x \|_\infty$, donc $|||\, u_n \,||| \leq n + 1$. Pour la suite $x = (1, 1, ..., 1, 0, 0, ...)$ constituée de $n + 1$ coefficients 1, on a $|u_n(x)| = (n + 1) \| x \|_\infty$, ce qui prouve que $|||\, u_n \,||| = n + 1$.
Posons $\text{F} = \{x \in c_{00}(\mathbf{R}) \mid \forall n, |u_n(x)| \leq 1\}$. Pour tout n, $\{x \in c_{00}(\mathbf{R}) \mid |u_n(x)| \leq 1\}$ est fermé comme image réciproque de $[0, 1]$ par l'application continue $|u_n|$. F est fermé comme intersection de ces fermés. F est d'intérieur vide. En effet, soit $x \in \text{F}$ et $r > 0$. Montrons qu'il existe $y \in \text{B}(x, r)$ et $y \notin \text{F}$. Si les termes de x s'annulent au-delà du rang N, il suffit de prendre :

$$y = (x_0, x_1, ..., x_\text{N}, r, r, ..., r, 0, 0, ...)$$

où le nombre n de r est tel que $u_{n+\text{N}}(y) = \sum_{k=0}^{\text{N}} x_k + nr > 1$.

On a $c_{00}(\mathbf{R}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} m\text{F}$. En effet, pour tout x, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est stationnaire, donc bornée donc il existe m tel que : $\forall n, |u_n(x)| \leq m$, donc $\dfrac{x}{m} \in \text{F}$ donc $x \in m\text{F}$.

$c_{00}(\mathbf{R})$ est donc réunion dénombrable d'ensembles fermés d'intérieur vide. $c_{00}(\mathbf{R})$ est donc maigre dans lui-même. Son intérieur étant égal à lui-même donc non vide, il ne vérifie pas la propriété de Baire.
$c_{00}(\mathbf{R})$ ne vérifie pas non plus le théorème de Banach-Steinhaus. Pour tout x, $(u_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, mais $(|||\, u_n\, |||)$ ne l'est pas.

Les u_n sont toutes continues, et pour tout x, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ existe et vaut $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k = u(x)$. Ainsi, la suite (u_n) converge simplement vers u. u est une application linéaire, mais n'est pas continue. En effet, si on prend $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, ...)$, avec n termes $\frac{1}{n}$, alors $\|\, x_n \,\|_\infty = \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, mais $u(x_n) = 1$ pour tout n.

❑ Soit $E = C^0([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, muni de la norme $\|\, f \,\|_\infty = \operatorname*{Sup}\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. E muni de cette norme est un Banach. Soit $a \in [0, 1[$. Considérons la suite de formes linéaires $u_n : f \in E \to n(f(a + \frac{1}{n}) - f(a))$, définies pour $n \geq \frac{1}{1-a}$. Pour tout n, on a :

$$|u_n(f)| \leq 2n \,\|\, f \,\|_\infty$$

ce qui prouve que tous les u_n sont des formes linéaires continues et que $|||\, u_n \,||| \leq 2n$. On a en fait $|||\, u_n \,||| = 2n$, comme on le voit en prenant pour f la fonction continue affine par morceaux, valant -1 sur $[0, a]$, $2n(x-a) - 1$ sur $[a, a + \frac{1}{n}]$ et 1 sur $[a + \frac{1}{n}, 1]$. Pour cette fonction, on a $\|\, f \,\|_\infty = 1$ et $|u_n(f)| = 2n$. Ainsi, la suite $(|||\, u_n \,|||)$ n'est pas bornée. Il en résulte que l'ensemble B des fonctions f, pour lesquelles $(u_n(f))$ n'est pas bornée, est le complémentaire d'une partie maigre de E, et en particulier est dense, puisque E est un Banach. Pour un tel f, la suite $(u_n(f))$ n'étant pas bornée diverge quand n tend vers l'infini, et en particulier, la fonction f ne peut être dérivable en a. On a ainsi montré que l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ non dérivables en a est dense dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme de la convergence uniforme.

IV : Le théorème de Hahn-Banach

Le théorème décrit dans ce paragraphe s'applique à tous les espaces vectoriels normés réels ou complexes, qu'ils soient des Banach ou non.

1- Prolongement d'une forme linéaire

PROPOSITION

Soit $(E, \|\ \|)$ *un espace vectoriel normé,* F *un sous-espace vectoriel distinct de* E, f *une forme linéaire continue sur* F *de norme subordonnée* $|||\, f \,|||$, a *un vecteur n'appartenant pas à* F, $G = F \oplus \mathrm{Vect}(a)$. *Alors, on peut prolonger* f *en une forme linéaire continue sur* G *avec la même norme subordonnée.*

Démonstration :

❑ On traite d'abord le cas où le corps de base est $\mathbf{R}$. Soit α réel et posons $g(x) = f(x)$ si $x \in F$ et $g(a) = \alpha$, ce qui définit par linéarité un prolongement linéaire g de f à G :

$$\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbf{R}, g(x + \lambda a) = f(x) + \lambda\alpha$$

Reste à montrer qu'on peut choisir α de façon que le prolongement de f soit continu, en conservant la même norme. On veut que :

$$\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \left|g(x + \lambda a)\right| \leq ||| f ||| \, \| x + \lambda a \|$$

On aura alors $||| g ||| \leq ||| f |||$, mais par ailleurs, on ne peut avoir $||| g ||| < ||| f |||$ puisque $g_{|F} = f$. L'inégalité désirée est trivialement vérifiée pour $\lambda = 0$ par définition de $||| f |||$. On peut donc supposer $\lambda \neq 0$, et remplacer x par λx :

$$\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbf{R}^*, \left|g(\lambda x + \lambda a)\right| \leq ||| f ||| \, \| \lambda x + \lambda a \|$$

On peut alors simplifier par $\left|\lambda\right|$, ce qui donne l'inégalité plus simple :

$$\forall x \in F, \left|g(x + a)\right| \leq ||| f ||| \, \| x + a \|$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in F, -||| f ||| \, \| x + a \| \leq g(x + a) = f(x) + \alpha \leq ||| f ||| \, \| x + a \|$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in F, -||| f ||| \, \| x + a \| - f(x) \leq \alpha \leq ||| f ||| \, \| x + a \| - f(x)$$

On trouvera un tel α si :

$$\forall (x, y) \in F^2, -||| f ||| \, \| x + a \| - f(x) \leq ||| f ||| \, \| y + a \| - f(y) \qquad (***)$$

car il suffira de prendre α entre $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in F} (-||| f ||| \, \| x + a \| - f(x))$ et $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{y\in F} (||| f ||| \, \| y + a \| - f(y))$

Or :

$$(***) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \leq ||| f ||| \, \| x + a \| + ||| f ||| \, \| y + a \|$$

$$\Leftrightarrow f(y - x) \leq ||| f ||| \, (\| x + a \| + \| y + a \|)$$

ce qui est bien vrai car :

$$f(y - x) \leq \left|f(y - x)\right| \leq ||| f ||| \, \| y - x \| = ||| f ||| \, \| y + a - x - a \| \leq ||| f ||| \, (\| x + a \| + \| y + a \|)$$

Ainsi, on peut trouver α. Le prolongement n'est pas nécessairement unique si :

$$\operatorname*{Sup}_{x\in F} (-||| f ||| \, \| x + a \| - f(x)) < \operatorname*{Inf}_{y\in F} (||| f ||| \, \| y + a \| - f(y))$$

car alors tout α compris entre ces deux valeurs convient.

❑ On traite maintenant le cas où le corps de base est $\mathbf{C}$. Si f est une forme linéaire sur F, alors $\mathrm{Re}(f)$ est une forme linéaire sur F, considéré comme espace vectoriel réel, où Re désigne la partie réelle. On a, pour tout x de F :

$$f(ix) = if(x)$$

donc

$$\mathrm{Re}(f(ix)) = \mathrm{Re}(if(x)) = -\mathrm{Im}(f(x))$$

donc

$$f(x) = \mathrm{Re}(f(x)) - i\mathrm{Re}(f(ix))$$

Ainsi, $\mathrm{Re}(f)$ permet de reconstituer f. Prenons pour g un prolongement continu de $\mathrm{Re}(f)$ au sous-espace vectoriel $G = F \oplus \mathrm{Vect}(a)$, de même norme que $\mathrm{Re}(f)$, comme fait précédemment, le corps de base étant $\mathbf{R}$, et considérons la fonction $h : G \to \mathbf{C}$ suivante :

$$\forall u \in G, h(u) = g(u) - ig(iu)$$

Alors h est une forme linéaire. On a en effet :

$$\forall (u, v) \in G^2, h(u + v) = h(u) + h(v) \qquad \text{car c'est vrai pour } g$$

et, pour tout $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$, avec $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda)$, $\beta = \mathrm{Im}(\lambda)$, et tout u de G :

$$\begin{aligned} h(\lambda u) &= g(\lambda u) - ig(i\lambda u) \\ &= g(\alpha u + i\beta u) - ig(i\alpha u - \beta u) \\ &= g(\alpha u) + g(i\beta u) - ig(i\alpha u) + ig(\beta u) \\ &= \alpha g(u) + \beta g(iu) - \alpha ig(iu) + \beta ig(u) \qquad \text{car } g \text{ est } \mathbf{R}\text{-linéaire} \end{aligned}$$

$= \alpha g(u) - \alpha i g(iu) + \beta g(iu) + \beta i g(u)$
$= \alpha h(u) + i\beta h(u)$
$= \lambda h(u)$

h est un prolongement de f à G, puisque, pour $x \in$ F :

$$h(x) = g(x) - ig(ix) = \mathrm{Re}(f(x)) - i\mathrm{Re}(f(ix)) = f(x)$$

Enfin, h est continue, avec la même norme que f car, pour tout u de G, choisissons λ complexe de module 1 tel que $|h(u)| = \lambda h(u)$. On a alors :

$$|h(u)| = \lambda h(u) = h(\lambda u) \in \mathbf{R}$$

donc :

$$|h(u)| = \mathrm{Re}(h(\lambda u)) = g(\lambda u)$$
$$\leq |||\, g \,|||\, \|\, \lambda u \,\| = |||\, g \,|||\, \|\, u \,\| \qquad \text{car } |\lambda| = 1$$
$$\leq |||\, \mathrm{Re}(f) \,|||\, \|\, u \| \qquad \text{car } |||\, g \,||| = |||\, \mathrm{Re}(f) \,|||$$

Mais $|||\, \mathrm{Re}(f) \,||| \leq |||\, f \,|||$ car, pour tout x de F, $|\mathrm{Re}(f(x))| \leq |f(x)| \leq |||\, f \,|||\, \|\, x \,\|$, donc :

$$|h(u)| \leq |||\, f \,|||\, \|\, u \,\|$$

donc $|||\, h \,||| \leq |||\, f |||$, et comme $h_{|F} = f$, on a $|||\, h \,||| = |||\, f |||$

EXEMPLE :

❑ Soit E = $l^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme :

$$\|\, (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \,\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n|$$

Soit F le sous-espace vectoriel des suites convergentes. Soit a la suite de terme général $(-1)^n$. Soit G = F $\oplus$ Vect(a). Soit f la forme linéaire définie sur F par :

$$\forall\, x = (x_n) \in F,\ f(x) = \lim_{n \to \infty} x_n$$

f est continue de norme 1 car :

$$\forall\, x \in F,\ |f(x)| = \left| \lim_{n \to \infty} x_n \right| = \lim_{n \to \infty} |x_n| \leq \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n| = \|\, x \,\|$$

avec égalité pour les suites constantes. La proposition de prolongement énonce que f se prolonge en une forme linéaire sur G de norme 1. Le prolongement consiste à attribuer une valeur α bien choisie comme image de la suite $((-1)^n)$. Plus précisément, reprenons l'encadrement vu plus haut :

$$\forall\, x \in F,\ -|||\, f \,|||\, \|\, x + a \,\| - f(x) \leq \alpha \leq |||\, f \,|||\, \|\, x + a \,\| - f(x)$$

Ici, $|||\, f \,||| = 1$. L'inégalité devient :

$$\forall\, x = (x_n) \in F,\ -\|\, x + a \,\| - \lim_{n \to \infty} x_n \leq \alpha \leq \|\, x + a \,\| - \lim_{n \to \infty} x_n \qquad (****)$$

Or, si l est la limite de x, on a $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n} + (-1)^{2n} = l + 1$ donc :

$$|l + 1| = \lim_{n \to \infty} |x_{2n} + (-1)^{2n}| \leq \|\, x + a \,\|$$

et également, $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n+1} + (-1)^{2n+1} = l - 1$ donc :

$$|l - 1| = \lim_{n \to \infty} |x_{2n+1} + (-1)^{2n+1}| \leq \|\, x + a \,\|$$

On en déduit que $|l| + 1 \leq \| x + a \|$ car $|l| + 1$ est égal à $|l + 1|$ ou à $|l - 1|$. Par conséquent, pour vérifier l'inégalité (****), il suffit que :

$$\forall\, l \in \mathbf{R},\ -|l| - 1 - l \leq \alpha \leq |l| + 1 - l$$

$$\Leftrightarrow \qquad \forall\, l \in \mathbf{R}, \begin{cases} -1 \leq \alpha \leq 1 & \text{si } l = 0 \\ -1 - 2l \leq \alpha \leq 1 & \text{si } l > 0 \\ -1 \leq \alpha \leq 1 - 2l & \text{si } l < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad -1 \leq \alpha \leq 1$$

Cette condition est également nécessaire comme on le voit en prenant x identiquement nulle.
Ainsi, un prolongement g continu de f à $F \oplus \mathrm{Vect}(a)$ est donné par :

$$\begin{cases} g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ si } (x_n) \text{ converge} \\ g(a) = \alpha \text{ pour } a = ((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}},\ \alpha \in [-1, 1] \end{cases}$$

Il y a donc autant de prolongement possible que de valeurs de α. Un cas particulier est donné par $\alpha = 0$, pour lequel g peut être définie comme la limite au sens de Césaro (voir *théorème de Césaro* dans les exercices de L1/SUITES.PDF) :

$$\forall\, y = (y_n) \in G,\ g(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

valide aussi bien pour les éléments x de F que pour la suite a de terme général $(-1)^n$. Pour $\alpha \neq 0$, on peut interpréter g comme une généralisation du théorème de Césaro dont la démonstration est laissée au lecteur :

$$\forall\, y = (y_n) \in G,\ g(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (1 + \alpha(-1)^k)\, y_k$$

On vérifiera que, si la suite y est convergente, $g(y)$ est égale à sa limite, si pour $y = a$, $g(a) = \alpha$.

2- Le théorème de Hahn-Banach

Il s'énonce comme généralisation du prolongement précédent à l'espace tout entier.

THEOREME

Soit (E, $\|\ \|$) *un espace vectoriel normé,* F *un sous-espace vectoriel distinct de* E, *f une forme linéaire continue sur* F *de norme subordonnée* $|||\, f\, |||$. *Alors, on peut prolonger f en une forme linéaire continue sur* E *avec la même norme subordonnée.*

La démonstration, qui, repose sur l'axiome du choix, est admise. Le fait d'utiliser cet axiome se traduit, dans la plupart des cas, par l'impossibilité de donner explicitement ce prolongement. L'intérêt d'un tel théorème est donc purement théorique.

EXEMPLE :

❑ Soit $E = l^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme :

$$\| (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|$$

Soit F le sous-espace vectoriel des suites convergentes. Soit f la forme linéaire de norme 1 définie par :

$$\forall\, x = (x_n) \in F,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Alors, il est possible de prolonger f sur $l^{\infty}(\mathbb{R})$ tout entier en une forme linéaire g continue de norme 1. g pourrait s'interprêter comme la définition d'une limite généralisée qu'on pourrait attribuer à toute suite bornée, mais comme on n'a pas d'expression explicite de g, son utilisation concrète est fort limitée.

L'exemple précédent est un peu artificiel. Voici des applications plus intéressantes du théorème de Hahn-Banach :

PROPOSITION

Soit E *un espace vectoriel normé.*

(i) *Soit x un élément de* E. *Alors il existe une forme linéaire* φ *de norme subordonnée égale à* 1 *telle que* $\varphi(x) = \| x \|$.

(ii) *Soit x un élément de* E. *Si, pour toute forme linéaire continue* φ, *on a* $\varphi(x) = 0$, *alors* $x = 0$.

(iii) *Soient x et y deux éléments de* E. *Alors on a* $x \neq y$ *si et seulement si il existe une forme linéaire continue* φ *telle que* $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

(iv) *L'espace* E *s'injecte naturellement et façon isométrique dans son bidual* E".

(v) *Soit* A *une partie de* E. *Alors* A *est borné si et seulement si, pour toute forme linéaire continue* φ, $\varphi(\mathrm{A})$ *est borné.*

Si E un espace vectoriel normé, on rappelle que son dual topologique E' est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E. E' est lui-même un espace vectoriel normé, la norme d'une forme linéaire continue étant subordonnée à la norme de E (et à la valeur absolue ou au module sur le corps de base $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Donc E' admet lui-même un dual topologique noté E" est appelé le **bidual topologique** de E. Il s'agit de l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E'.

Démonstration :

❑ (i) : Si $x = 0$, l'affirmation est triviale. Supposons donc $x \neq 0$. Considérons la droite D engendrée par x et la forme linéaire φ définie sur D par $\varphi(\lambda x) = \lambda \| x \|$. φ est continue et $||| \varphi ||| = 1$. D'après le théorème de Hahn-Banach, φ se prolonge en une forme linéaire continue sur E de norme subordonnée toujours égale à 1.

❑ (ii) : On prend comme cas particulier de forme linéaire φ la forme définie en (i). On a :

$$0 = \varphi(x) = \| x \|$$

donc $x = 0$.

❑ (iii) : On raisonne sur la contraposée du (iii) : $x = y$ si et seulement si, pour tout forme linéaire continue φ, $\varphi(x) = \varphi(y)$. La condition est évidemment nécessaire. Son caractère suffisant se montre en appliquant le (ii) à $y - x$. On dit que l'espace dual E' sépare les points de l'espace E.

❑ (iv) : Soit $x \in \mathrm{E}$. On lui associe un élément de E" noté $\hat{x}$ défini par :

$$\forall \varphi \in \mathrm{E}', \hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

Le fait que l'application $x \in \mathrm{E} \to \hat{x} \in \mathrm{E}''$ est une application linéaire, se montre sans difficulté. Le (ii) exprime par ailleurs que cette application est injective. Il reste à montrer que c'est une isométrie, i.e. que la norme de $\hat{x}$ en tant que forme linéaire sur E' est précisément égale à $\| x \|$. Si $x = 0$, alors $\hat{x}$ aussi. Considérons le cas où $x \neq 0$. Pour tout φ de E', on a :

$$\left|\hat{x}(\varphi)\right| = \left|\varphi(x)\right| \leq ||| \varphi ||| \, \| x \|$$

donc $\hat{x}$ est lipschitzienne de rapport $\| x \|$, donc $||| \hat{x} ||| \leq \| x \|$, où $||| \hat{x} |||$ est le plus petit rapport de Lipschitz de $\hat{x}$. Prenons maintenant la forme linéaire définie en (i). On a $||| \varphi ||| = 1$ et :

$$\left|\hat{x}(\varphi)\right| = \left|\varphi(x)\right| = \| x \| = ||| \varphi ||| \, \| x \|$$

Cela prouve que le rapport de Lipschitz de $\hat{x}$ est supérieur ou égal à $\| x \|$, et donc qu'on a bien $||| \hat{x} ||| = \| x \|$.
En général, l'image de E est différente de E'', en particulier si E n'est pas un Banach, puisque E'' en est un en tant que dual d'un espace vectoriel normé. L'Exo.3) donne également comme exemple l'espace E = $c_0(\mathbf{R})$ des suites convergeant vers 0 et qui est un Banach, pour lequel le bidual E'' = $l^\infty(\mathbf{R})$ des suites bornées est plus gros.

❑ (v) : On se place dans E', qui est un Banach, et soit F = $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ le corps de base de E. On applique le théorème de Banach-Steinhaus à la famille $(\hat{x})_{x\in A}$ d'applications linéaires continues de E' dans F. Ce théorème énonce qu'il y a équivalence entre :

$\exists$ M $\in \mathbf{R}$, $\forall x \in$ A, $\| x \| = ||| \hat{x} ||| \leq$ M

$\forall \varphi \in$ E', $(\hat{x}(\varphi))_{x\in A} = (\varphi(x))_{x\in A}$ est bornée

ce qui n'est rien d'autre que l'équivalence entre :

A est borné

$\forall \varphi \in$ E', φ(A) est borné

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Soit $l^1(\mathbf{R})$ l'ensemble des suites réelles $a = (a_m)_{m\in\mathbf{R}}$ telles que $\sum |a_m|$ converge. On pose :

$$\| a \|_1 = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|$$

a) Montrer que $\| \ \|$ est une norme.

b) Montrer que $l^1(\mathbf{R})$ muni de cette norme est un Banach.

Exo.2) Soit $c_0(\mathbf{R})$ l'espace des suites réelles $a = (a_m)_{m\in\mathbf{R}}$ de limite nulle, muni de la norme suivante :

$$\| a \|_\infty = \operatorname{Sup}_{m\in\mathbf{N}} |a_m|$$

a) Montrer qu'il s'agit d'un Banach.

b) Montrer qu'il s'agit du complété de l'espace vectoriel $c_{00}(\mathbf{R})$ des suites nulles à partir d'un certain rang, muni de la norme correspondante.

Exo.3) Les espaces $c_0(\mathbf{R})$, $l^1(\mathbf{R})$ et $l^\infty(\mathbf{R})$ sont définis avec leur norme dans les Exo.1), Exo.2) et I.3.Exemple 1).

a) On considère l'application φ qui, à $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ élément de $l^1(\mathbf{R})$, associe la forme linéaire $\varphi(b)$ sur $c_0(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall\, a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in c_0(\mathbf{R}),\ \varphi(b)(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, b_n$$

Montrer que φ est un isomorphisme isométrique de Banach entre $l^1(\mathbf{R})$ et le dual topologique de $c_0(\mathbf{R})$.

b) On considère l'application ψ qui, à $c = (c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ élément de $l^\infty(\mathbf{R})$, associe la forme linéaire $\psi(c)$ sur $l^1(\mathbf{R})$ définie :

$$\forall\, b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in l_1(\mathbf{R}),\ \psi(c)(b) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, c_n$$

Montrer que ψ est un isomorphisme isométrique de Banach entre $l^\infty(\mathbf{R})$ et le dual topologique de $l^1(\mathbf{R})$.

Exo.4) Soit X un espace normé, X' son dual topologique, (x_n) une suite de X, (φ_n) une suite de X'.

a) Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) (x_n) est bornée

(ii) $\forall\, \varphi \in X'$, $(\varphi(x_n))$ est bornée

d'abord dans le cas où X est de dimension finie, puis dans le cas général (Indication : dans le cas général, utiliser l'Exo.3 et appliquer le théorème de Banach-Steinhaus dans le dual topologique de X).

b) Montrer que (iii) $\Rightarrow$ (iv), avec :

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

(iv) $\forall\, \varphi \in X'$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0$

et que (iv) $\Rightarrow$ (iii) est vrai en dimension finie, mais peut-être faux sinon, y compris si X est un Banach.

c) Montrer que (v) $\Rightarrow$ (vi), avec :

(v) (φ_n) est bornée

(vi) $\forall\, x \in X$, $(\varphi_n(x))$ est bornée

et que (vi) $\Rightarrow$ (v) dans le cas où X est un Banach.

d) Montrer que (vii) $\Rightarrow$ (viii) avec :

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = 0$

(viii) $\forall\, x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$

et que (viii) $\Rightarrow$ (vii) est vrai en dimension finie, mais peut-être faux sinon, y compris si X est un Banach.

Exo.5) Soit E = $C^0([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur [0, 1] à valeurs réelles muni de la norme de la convergence uniforme : $\| f \|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On considère les formes linéaires suivantes, de E dans $\mathbf{R}$:

$$u_n(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

a) Montrer que les u_n sont continues et que, pour tout $n \geq 1$, $||| u_n ||| = 2$.

b) Rappeler pourquoi, pour tout f, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(f) = 0$

c) Montrer qu'il existe une partie B dense de E, telle que, pour tout f de B, $u_n(f)$ n'est pas un $O(\frac{1}{n})$.

Exo.6) Soit (E, $\| \ \|$) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Sur l'ensemble quotient E/F (dont on notera x + F les éléments), on définit :

$$N(x + F) = \operatorname*{Inf}_{y \in F} \| x + y \|$$

a) Montrer N est un norme définissant la même topologie que la topologie quotient.

b) Si E est un Banach, E/F est-il un Banach ?

Exo.7) Soit E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique et F un sous-espace vectoriel. Soit a un élément de E. Montrer l'équivalence entre :

(i) a est adhérent à F

(ii) $\forall f \in E', f_{|F} = 0 \Rightarrow f(a) = 0$

Exo.8) a) Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel fermé de E tel que F ≠ E, a un élément de E qui n'appartient pas à F. Montrer que F ⊕ Vect(a) est fermé.

b) Soit φ une forme linéaire définie sur un espace vectoriel normé E. Montrer que φ est continue si et seulement si Ker(φ) est un fermé de E.

c) Soit E = $C^0([0, 1])$ muni de la norme $N(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt$, et soit φ la forme linéaire définie par $\varphi(f) = f(0)$. Montrer que φ n'est pas continue. Trouver f tel que f soit adhérent à Ker(φ) sans appartenir à Ker(φ).

Exo.9) Soit (X, d) un espace métrique et E = $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de X dans $\mathbb{R}$. On a vu dans l'exemple 4 du I-3) que E est un Banach lorsqu'on le munit de la norme :

$$\| f \|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in X} |f(x)|$$

Soit a un point de X. A tout x de X, on associe la fonction $\delta_x : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall z \in X, \delta_x(z) = d(x, z) - d(a, z)$$

a) Montrer que : $\forall x \in X, \delta_x \in E$

b) Montrer que l'application $\delta : x \in X \to \delta_x \in E$ est une isométrie.

En particulier δ est injective. Cet exercice fournit une autre démonstration de l'existence du complété de X. Il suffit d'injecter X dans E au moyen de l'application δ et de prendre pour complété l'adhérence de δ(X) dans E. E étant un Banach, cette adhérence est un espace complet.

Exo.10) Soit $c_0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites complexes de limite nulle, et $c(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites complexes convergentes. On munit ces deux espaces de la norme :

$$\forall a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \| a \|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

et du produit terme à terme :

$$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \times (b_n)_{n\in\mathbf{N}} = (a_nb_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

Ils forment alors chacun une algèbre normée. $c(\mathbf{R})$ est une algèbre unitaire, le neutre e pour le produit interne étant la suite constante égale à 1. Cette suite n'appartient pas à $c_0(\mathbf{R})$, et $c_0(\mathbf{R})$ n'admet pas de neutre pour le produit.

On appelle morphisme de $c_0(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ toute forme linéaire continue φ (application linéaire continue de $c_0(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$) vérifiant de plus :

$$\forall\, a \in c_0(\mathbf{R}),\ \forall\, b \in c_0(\mathbf{R}),\ \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

On appelle morphisme de $c(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ toute forme linéaire continue ψ vérifiant de plus :

$$\forall\, a \in c(\mathbf{R}),\ \forall\, b \in c(\mathbf{R}),\ \psi(ab) = \psi(a)\psi(b) \qquad \text{et} \qquad \psi(e) = 1$$

On note respectivement $\mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R}))$ et $\mathrm{Mor}(c(\mathbf{R}))$ l'ensemble de ces morphismes sur chacun des deux espaces.

a) Déterminer explicitement les éléments de $\mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R}))$ et $\mathrm{Mor}(c(\mathbf{R}))$. Vérifier qu'il existe une bijection naturelle entre ces deux ensembles.

b) On munit $\mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R}))$ d'une topologie, la plus faible rendant continue pour chaque a de $c_0(\mathbf{R})$ l'application $\varphi \in \mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R})) \to \varphi(a)$. On procède de même pour $\mathrm{Mor}(c(\mathbf{R}))$. Montrer que les deux espaces topologiques ainsi obtenus sont des compacts homéomorphes, et qu'ils sont aussi homéomorphes à $\overline{\mathbf{N}}$, compactifié d'Alexandrov de $\mathbf{N}$. (Voir L3/TOPOLOG.PDF pour la notion de compactifié d'Alexandrov).

c) On considère l'algèbre $\mathrm{C}(\overline{\mathbf{N}})$ des fonctions continues sur $\overline{\mathbf{N}}$. Montrer que $\mathrm{C}(\overline{\mathbf{N}})$ est isomorphe en tant qu'algèbre à $c(\mathbf{R})$ et que cet isomorphisme est une isométrie lorsqu'on munit $\mathrm{C}(\overline{\mathbf{N}})$ de la norme $\| f \|_\infty = \underset{x\in\overline{\mathbf{N}}}{\mathrm{Sup}} \left| f(x) \right|$.

Cet exercice illustre dans un cas particulier une dualité dite **de Gelfand** entre la catégorie d'un certain type d'algèbres commutatives unitaires et la catégorie des espaces compacts.

2- Solutions

Sol.1) a) ne pose pas de difficulté.

b) Considérons une suite de Cauchy dans cet espace. Notons $a(n) = (a_{mn})_{m\in\mathbf{N}}$ le terme général de cette suite. Comme dans le cas de $l^\infty(\mathbf{R})$ donné dans le cours, on considére pour chaque m la suite des composantes $(a_{mn})_{n\in\mathbf{N}}$. Pour tout n et p, on a :

$$\left| a_{mn} - a_{mp} \right| \leq \| a(n) - a(p) \|_1$$

Comme $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $l^\infty(\mathbf{R})$, il en résulte que, pour tout m, $(a_{mn})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$. Elle est donc convergente, vers une limite l_m :

$$l_m = \lim_{n\to\infty} a_{mn}$$

On obtient ainsi une suite $l = (l_m)_{m\in\mathbf{N}}$. Vérifions que $\sum \left| l_m \right|$ est convergente. Comme la suite $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $l^1(\mathbf{R})$, elle est bornée. Donc :

$$\exists\, \mathrm{M},\ \forall\, n,\ \| a(n) \|_1 \leq \mathrm{M}$$

donc :

$$\exists \text{ M}, \forall n, \sum_{m=0}^{\infty} |a_{mn}| \leq \text{M}$$

En particulier,

$$\exists \text{ M}, \forall n, \forall k, \sum_{m=0}^{k} |a_{mn}| \leq \text{M}$$

donc, en faisant tendre n vers l'infini :

$$\exists \text{ M}, \forall k, \sum_{m=0}^{k} |l_m| \leq \text{M}$$

La suite des sommes partielles $\sum_{m=0}^{k} |l_m|$ croît avec k et est majorée par M. Donc elle converge. Donc $\sum |l_m|$ converge.

Vérifions enfin que $\lim_{n\to\infty} a(n) = l$ dans $l^1(\mathbf{R})$. La suite $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ étant de Cauchy, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ N}, \forall n \geq \text{N}, \forall p \geq \text{N}, \| a(n) - a(p) \|_1 \leq \varepsilon$$

donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ N}, \forall n \geq \text{N}, \forall p \geq \text{N}, \sum_{m=0}^{\infty} |a_{mn} - a_{mp}| \leq \varepsilon$$

A fortiori :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ N}, \forall n \geq \text{N}, \forall p \geq \text{N}, \forall k, \sum_{m=0}^{k} |a_{mn} - a_{mp}| \leq \varepsilon$$

donc, en faisant tendre p vers l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ N}, \forall n \geq \text{N}, \forall k, \sum_{m=0}^{k} |a_{mn} - l_m| \leq \varepsilon$$

puis, en faisant tendre k vers l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ N}, \forall n \geq \text{N}, \sum_{m=0}^{\infty} |a_{mn} - l_m| \leq \varepsilon$$

autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ N}, \forall n \geq \text{N}, \| a(n) - l \|_1 \leq \varepsilon$$

ce qui est bien la définition de $\lim_{n\to\infty} a(n) = l$.

Sol.2) a) Puisque $c_0(\mathbf{R}) \subset l^\infty(\mathbf{R})$ et que $l^\infty(\mathbf{R})$ est un Banach, il suffit de montrer que $c_0(\mathbf{R})$ est fermé dans $l^\infty(\mathbf{R})$, puisque toute partie fermée d'un espace complet est un espace complet. Soit $(a(n))_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $c_0(\mathbf{R})$ convergeant vers une limite $l = (l_m)_{m\in\mathbf{N}}$. Il s'agit de montrer que $l \in c_0(\mathbf{R})$. Pour tout n, notons $a(n) = (a_{mn})_{m\in\mathbf{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme on a $\lim_{n\to\infty} a(n) = l$, on a :

$$\exists \text{ N}, \forall n \geq \text{N}, \| a(n) - l \|_\infty \leq \varepsilon$$

et en particulier $\| a(\text{N}) - l \|_\infty \leq \varepsilon$. Donc :

$\forall\, m, |a_{mN} - l_m| \leq \varepsilon$

Comme $a(N) = (a_{mN})_{m\in\mathbf{N}}$ est une suite de limite nulle, on a :

$\exists\, M, \forall\, m \geq M, |a_{mN}| \leq \varepsilon$

donc :

$\forall\, m \geq M, |l_m| \leq |l_m - a_{mN}| + |a_{mN}| \leq 2\varepsilon$

ce qui prouve que $\lim\limits_{m\to\infty} l_m = 0$.

b) Il suffit de prouver que $c_{00}(\mathbf{R})$ est dense dans $c_0(\mathbf{R})$. Pour toute suite $a = (a_n)$ de $c_0(\mathbf{R})$, prendre la suite dans $c_{00}(\mathbf{R})$ dont le terme général est $a(n) = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, 0, 0, \text{etc.})$. On a :

$\| a(n) - a \| = \operatorname*{Sup}\limits_{p>n} |a_p|$

Comme a est une suite de limite nulle, on a :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, |a_n| \leq \varepsilon$

A fortiori :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, p \geq n, |a_p| \leq \varepsilon$

donc

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \operatorname*{Sup}\limits_{p>n} |a_p| \leq \varepsilon$

donc

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \| a(n) - a \|_\infty$

donc

$\lim\limits_{n\to\infty} a(n) = a$

donc a est adhérent à $c_{00}(\mathbf{R})$, et $c_{00}(\mathbf{R})$ est bien dense dans $c_0(\mathbf{R})$.

Si on reprend l'exemple 5 du I-3) en se plaçant dans $c_{00}(\mathbf{R})$, la suite (U_n) de $c_{00}(\mathbf{R})$ définie par :

$\forall\, n, U_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n+1}, 0, 0, 0, ...)$

converge vers $l = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+3}, ...)$ élément de $c_0(\mathbf{R})$.

Sol.3) a) $\varphi(b)$ est bien définie, car si $a = (a_n)$ est une suite de limite nulle, elle est bornée, et si $b = (b_n)$ est une suite telle que $\sum |b_n|$ converge, la suite a étant bornée, on a aussi $\sum |a_n b_n|$ convergente. Il est trivial de vérifier que $\varphi(b)$ est une application linéaire.

Elle est continue car lipschitzienne :

$$|\varphi(b)(a)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, |b_n| \leq \| a \|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = \| a \|_\infty \| b \|_1$$

donc on a $|||\, \varphi(b)\, ||| \leq \| b \|_1$, où $|||\, \varphi(b)\, |||$ est le plus petit rapport de Lipschitz de $\varphi(b)$.

Par ailleurs, prenons pour $a = (a_n)$ la suite définie par :

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \leq N \text{ et } b_n \geq 0 \\ -1 \text{ si } n \leq N \text{ et } b_n < 0 \\ 0 \text{ si } n > N \end{cases}$$

on a :

$$\varphi(b)(a) = \sum_{n=0}^{N} |b_n| \leq ||| \varphi(b) ||| \, \| a \|_\infty \leq ||| \varphi(b) |||$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient $\| b \|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \leq ||| \varphi(b) |||$. On a donc finalement $\| b \|_1 = ||| \varphi(b) |||$ pour tout suite b. Cela prouve que φ est une isométrie de $l^1(\mathbf{R})$ sur un sous-espace vectoriel du dual topologique de $c_0(\mathbf{R})$, et qu'en particulier, φ est injective.
Il reste à montrer que φ est surjective. Soit donc θ une forme linéaire continue sur $c_0(\mathbf{R})$. Si e_n est la suite identiquement nulle sauf son n-ème terme qui vaut 1, posons $b_n = \theta(e_n)$. Pour une suite a dont les termes sont nuls au delà du (N + 1)-ème terme, on a :

$$a = \sum_{n=0}^{N} a_n \, e_n$$

donc, θ étant linéaire :

$$\theta(a) = \sum_{n=0}^{N} a_n \, \theta(e_n) = \sum_{n=0}^{N} a_n \, b_n$$

Mais une suite a quelconque de $c_0(\mathbf{R})$ est la limite pour $\| \ \|_\infty$ de ses suites tronquées au N-ème terme $a^N = (a_0, a_1, a_2, ..., a_N, 0, 0, 0, ...)$, car $\| a - a^N \|_\infty = \text{Sup } \{|a_k|, k > N\}$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, en utilisant le fait (a_n) converge vers 0. θ étant continue, on a donc pour tout élément a de $c_0(\mathbf{R})$:

$$\theta(a) = \theta(\lim_{N\to\infty} a^N) = \lim_{N\to\infty} \theta(a^N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \, b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, b_n$$

Par ailleurs, en prenant comme plus haut la suite a définie par :

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \leq N \text{ et } b_n \geq 0 \\ -1 \text{ si } n \leq N \text{ et } b_n < 0 \\ 0 \text{ si } n > N \end{cases}$$

on a $|\theta(a)| = \sum_{n=0}^{N} |b_n| \leq ||| \theta |||$ pour tout N, ce qui prouve que $\sum |b_n|$ converge. Il en résulte que $\theta = \varphi(b)$ avec $b = (b_n) \in l^1(\mathbf{R})$, et que φ est bien surjective.

b) La démarche est analogue au a). On montrera successivement que $\psi(c)(b)$ est la somme d'une série convergente, que $\psi(c)$ est linéaire, qu'elle est continue avec :

$$|\psi(c)(b)| \leq \| b \|_1 \, \| c \|_\infty$$

ce qui montre que $||| \psi(c) ||| \leq \| c \|_\infty$.
Prendre ensuite pour b la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ème qui vaut 1. On a alors :

$$|\psi(c)(b)| = |c_n| \leq ||| \psi(c) ||| \, \| b \|_1 = ||| \psi(c) |||$$

ce qui prouve que, $\forall n$, $|c_n| \leq ||| \psi(c) |||$, donc $\| c \|_\infty \leq ||| \psi(c) |||$ et donc $\| c \|_\infty = ||| \psi(c) |||$. Ainsi, ψ est une isométrie de $l^\infty(\mathbf{R})$ sur un sous-espace vectoriel du dual topologique de $l^1(\mathbf{R})$.
Il reste à montrer que ψ est surjective. Pour θ forme linéaire continue sur $l^1(\mathbf{R})$, prendre comme au a) les mêmes suites e_n, poser $c_n = \psi(e_n)$ et adapter la fin de la démonstration du a).

L'exercice prouve donc que le bidual topologique de $c_0(\mathbf{R})$ ne redonne pas $c_0(\mathbf{R})$ comme c'est le cas dans un espace vectoriel euclidien ou un espace de Hilbert, mais l'espace $l^\infty(\mathbf{R})$ qui est plus gros. De même, le bidual de $l^1(\mathbf{R})$ est le dual de $l^\infty(\mathbf{R})$ et est difficile à décrire explicitement. Il contient $l^1(\mathbf{R})$ mais est plus gros. Ainsi, dans le IV-2 relatif au théorème de Hahn-Banach, on a montré l'existence d'une forme linéaire continue f sur $l^\infty(\mathbf{R})$ telle que, pour tout suite convergente $x = (x_n)$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. f ne peut se définir à partir d'un élément $a = (a_n)$ de $l^1(\mathbf{R})$ sous la forme $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ car cette expression change de valeur si on modifie la valeur de x_n pour un n tel que $a_n \neq 0$, alors que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ reste le même.

Sol.4) a) L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est facile. En effet, si (x_n) est bornée et φ continue, on a :

$$\exists\, \mathrm{M},\ \forall\, n,\ \| x_n \| \leq \mathrm{M}$$

donc

$$\forall\, n,\ |\varphi(x_n)| \leq |||\, \varphi\, |||\ \| x_n \| \leq \mathrm{M}\ |||\, \varphi\, |||$$

donc la suite $(\varphi(x_n))$ est bornée.

Réciproquement, soit d'abord X de dimension finie, munie d'une base $(e_1, ..., e_p)$. Prenons pour φ les éléments de la base duale $(e_1^*, ..., e_p^*)$. On rappelle que $e_i^*(x)$ est la composante de x selon e_i, autrement dit, $x = \sum\limits_{i=1}^{p} e_i^*(x)e_i$. Par hypothèse, pour toute forme linéaire φ, la suite $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Donc, pour tout i, la suite $(e_i^*(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Donc la suite $(\sum\limits_{i=1}^{p} |e_i^*(x_n)|)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. Donc la suite $(\mathrm{N}_1(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, où N_1 est la norme définie par $\mathrm{N}_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} |e_i^*(x)|$. Par équivalence des normes, on en déduit que la suite $(\| x_n \|)$ est bornée.

Soit maintenant X espace vectoriel normé de dimension quelconque. soit E = X' le dual topologique de X, qui est un Banach, soit F = $\mathbf{K}$, et, pour tout n, soit :

$$u_n : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$
$$\varphi \to \varphi(x_n)$$

u_n n'est autre que la forme linéaire $\hat{x}_n$, élément du bidual X'' de X, vu dans l'Exo.3. On y a montré que $|||\, u_n\, ||| = |||\, \hat{x}_n\, ||| = \| x_n \|$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Banach-Steinhaus, E = X' étant un Banach. Par hypothèse, pour tout φ, la suite $(u_n(\varphi))$ est bornée, donc la suite (u_n) est équicontinue, autrement dit :

$$\exists\, \mathrm{M},\ \forall\, n,\ |||\, u_n\, ||| \leq \mathrm{M}$$

et comme $|||\, u_n\, ||| = \| x_n \|$, on a bien montré que la suite (x_n) est bornée.

b) Si (x_n) converge vers 0 et si φ est une forme linéaire continue, alors $(\varphi(x_n))$ converge vers 0.

Si X est de dimension finie de base $(e_1, ..., e_p)$ et si (iv) est vrai, alors en prenant la base duale, on a, pour tout i, $\lim\limits_{n\to\infty} e_i^*(x_n) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{p} e_i^*(x_n)\, e_i = 0$. Mais $\sum\limits_{i=1}^{p} e_i^*(x_n)\, e_i = x_n$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Cette réciproque est fausse en général si X est de dimension infinie. Prenons X = $c_0(\mathbf{R})$ qui est un Banach. L'Exo.4) montre que X' = $l^1(\mathbf{R})$. Prenons la suite de X dont le terme général est $x(n) = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...,)$ où le seul terme non nul est 1 situé à la n-ème place. $(x(n))$ ne converge pas vers 0 puisque $\| x(n) \|_\infty = 1$. Mais si on prend une forme linéaire continue φ définie par la suite (b_n) telle que $\sum |b_n|$ converge et, pour tout $a = (a_n)$ dans X, $\varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$, alors, pour tout n, $\varphi(x(n)) = b_n$ de limite nulle. Ainsi, (iv) est vérifié, mais pas (iii).

c) Ce n'est que le théorème de Banach-Steinhaus dans le cas où l'espace d'arrivée F est le corps de base de E.

d) Si $||| \varphi_n ||| \to 0$, comme $\| \varphi_n(x) \| \leq ||| \varphi_n ||| \, \| x \|$, on a évidemment $\| \varphi_n(x) \| \to 0$.
Réciproquement, soit X de dimension finie. Prenons une base $(e_1, ..., e_p)$ de X et $(e_1^*, ..., e_p^*)$ sa base duale. Pour tout φ de X', on a $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \varphi(e_i)\, e_i^*$. D'après l'hypothèse (viii), pour tout i, la suite $(\varphi_n(e_i))$ tend vers 0, donc la suite $(\sum_{i=1}^{p} \varphi_n(e_i)\, e_i^*)$ aussi, donc la suite (φ_n) aussi.

Cette réciproque est fausse en général si X est de dimension infinie. Prenons X = $c_0(\mathbf{R})$ et X' = $l^1(\mathbf{R})$. Prenons la suite de X' dont le terme général φ_n est associé à la suite (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...,) où le seul terme non nul est 1 situé à la n-ème place. Pour tout $a = (a_n)$ de X, on a $\varphi_n(a) = a_n$ qui converge vers 0 par définition de $c_0(\mathbf{R})$. Mais $||| \varphi_n ||| = 1$. Donc on a (viii), mais pas (vii).
Un autre contre-exemple est donné par la suite (u_n) de l'Exo.6).
Pour résumer :

(x_n) est bornée $\Leftrightarrow \forall \varphi \in X', (\varphi(x_n))$ est bornée	sans condition
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \forall \varphi \in X', \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0$	réciproque en dimension finie
(φ_n) est bornée $\Rightarrow \forall x \in X, (\varphi_n(x))$ est bornée	réciproque si X est un Banach
$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = 0 \Rightarrow \forall x \in X, \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$	réciproque en dimension finie

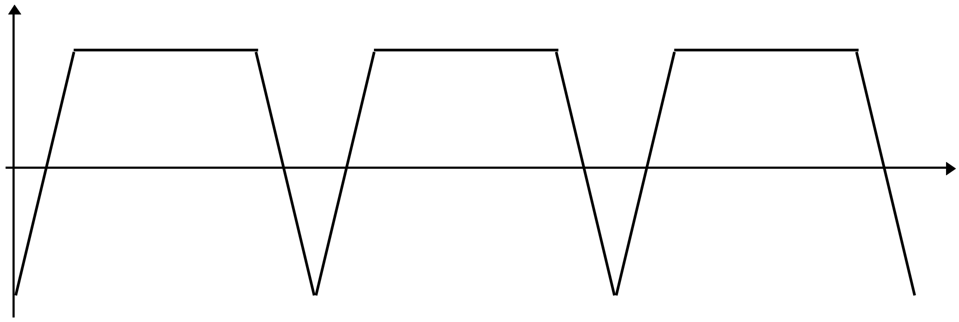
Sol.5) a) Il n'est pas difficile de montrer que, pour tout f, $|u_n(f)| \leq 2 \| f \|_\infty$, ce qui prouve que les u_n sont continues et que $||| u_n ||| \leq 2$. Pour montrer que $||| u_n ||| = 2$, prendre des fonctions f de norme 1 pour lesquelles $u_n(f)$ est aussi proche de 2 que possible. Si on pouvait prendre des fonctions continues par morceaux, il suffirait de prendre f telle que $f(\frac{k}{n}) = -1$ pour $0 \leq k < n$ et $f = 1$ ailleurs. On aurait alors $\| f \|_\infty = 1$ et $u_n(f) = 2$. Cependant, f n'est pas continue. On la modifie donc légèrement pour satisfaire cette dernière hypothèse. Soit $\varepsilon < \frac{1}{2n}$ et f continue telle que :

$\forall k \in \{0, ..., n\}, \quad f(\frac{k}{n}) = -1$

$\forall k \in \{1, ..., n\}, \forall x \in [\frac{k-1}{n} + \varepsilon, \frac{k}{n} - \varepsilon], \quad f(x) = 1$

f est affine sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k-1}{n} + \varepsilon]$ et sur $[\frac{k}{n} - \varepsilon, \frac{k}{n}]$ (et donc comprise entre – 1 et 1)

Ci-dessous une représentation graphique de f lorsque $n = 3$:



On a $\| f \|_\infty = 1$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = -1$ et $\int_0^1 f(t)\,dt = 1 - 2n\varepsilon$ donc $u_n(f) = 2 - 2n\varepsilon$ donc $|||\, u_n \,||| \geq 2 - 2n\varepsilon$. Si fait tendre ε vers 0, on trouve $|||\, u_n \,||| \geq 2$, et donc $|||\, u_n \,||| = 2$.

b) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$ est une somme de Riemann associée à f. La limite de ces sommes est $\int_0^1 f(t)\,dt$ quand n tend vers l'infini.

c) Puisque, pour tout n, $|||\, u_n \,||| = 2$, la suite de terme général $|||\, nu_n \,|||$ n'est pas bornée. E étant complet, le corollaire 1 du théorème de Banach-Steinhaus permet de conclure qu'il existe une partie dense B (complémentaire d'une partie maigre) telle que, pour tout $f \in$ B, la suite $(nu_n(f))$ n'est pas bornée. Donc pour un tel f, $(u_n(f))$ n'est pas un $O(\frac{1}{n})$.

Dans L1/INTEGRAL.PDF, on démontre le b), et on montre que, si f est C^1, alors $u_n(f) = O(\frac{1}{n})$.

Sol.6) a) Cette question est comparable à l'Exo.12 de L3/TOPOLOG.PDF. F est un sous-groupe de E qui agit sur lui de façon isométrique, le transformé de $x \in$ E par $y \in$ F étant $x + y$. L'orbite de x par cette action n'est autre que x + F. Si on pose $\delta(x + F, y + F) = N(x - y + F)$, alors on montre dans le dit exercice que δ est une distance sur E/F qui lui confère la même topologie que la topologie quotient. Nous ne referons pas la démonstration qu'il suffit d'adapter. Il reste à montrer que N est une norme. On utilise le fait que δ est une distance.

$N(x + F) = 0 \Rightarrow \delta(F, x + F) = 0$

$\Rightarrow x + F = F$ élément nul dans E/F

$N(x + y + F) = \delta(x + y + F, F) \leq \delta(x + y + F, y + F) + \delta(y + F, F)$

$\leq \delta(x + F, F) + \delta(y + F, F)$

$\leq N(x + F) + N(y + F)$

Si $\lambda = 0$, $N(\lambda x + F) = N(F) = 0$

Si $\lambda \neq 0$, $N(\lambda x + F) = \operatorname{Inf}_{y \in F} \| \lambda x + y \|$

$= |\lambda| \operatorname{Inf}_{y \in F} \| x + \frac{y}{\lambda} \|$

$= |\lambda| \operatorname{Inf}_{y \in F} \| x + y \|$ en renommant $\frac{y}{\lambda}$ en y

$= |\lambda|\ N(x)$

b) Supposons que E soit un Banach. On va montrer que E/F est un Banach. Soit $(x_n + \mathrm{F})$ une suite de Cauchy dans E/F. On a donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{M}, \forall\, n \geq \mathrm{M}, \forall\, p \geq \mathrm{M}, \mathrm{N}(x_n - x_p + \mathrm{F}) < \varepsilon$$

donc

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{M}, \forall\, n \geq \mathrm{M}, \forall\, p \geq \mathrm{M}, \exists\, z \in \mathrm{F}, \| x_n - x_p + z \| < \varepsilon$$

On va construire dans E une suite (y_n) extraite de (x_n) modulo F, qui est de Cauchy.

Pour $m \geq 1$, on prend $\varepsilon = \dfrac{1}{2^{m-1}}$. Alors :

$$\exists\, \mathrm{M}_m, \forall\, n \geq \mathrm{M}_m, \forall\, p \geq \mathrm{M}_m, \exists\, z_m \in \mathrm{F}, \| x_n - x_p + z_m \| < \frac{1}{2^{m-1}}$$

On peut en outre supposer que les M_m forment une suite strictement croissante. On a donc, pour tout m, en prenant $n = \mathrm{M}_m$ et $p = \mathrm{M}_{m+1}$:

$$\exists\, z_m \in \mathrm{F}, \| x_{\mathrm{M}_m} - x_{\mathrm{M}_{m+1}} + z_m \| < \frac{1}{2^{m-1}}$$

On pose $y_1 = x_{\mathrm{M}_1}$ et pour tout $m \geq 2$, $y_m = x_{\mathrm{M}_m} - z_1 - z_2 - ... - z_{m-1}$. On a donc, pour tout m :

$$\| y_m - y_{m+1} \| < \frac{1}{2^{m-1}}$$

La suite (y_m) est de Cauchy de E, car, pour $p \geq m$:

$$\begin{aligned} \| y_p - y_m \| &\leq \| y_p - y_{p-1} \| + \| y_{p-1} - y_{p-2} \| + ... + \| y_{m+1} - y_m \| \\ &\leq \frac{1}{2^{p-2}} + \frac{1}{2^{p-3}} + ... + \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^{m-2}} \end{aligned}$$

qu'on peut rendre plus petit que ε pour $p \geq m$ assez grand. E étant un Banach, la suite (y_m) converge vers une limite l. Donc, la projection canonique de E sur E/F étant continue, la suite $(x_{\mathrm{M}_m} + \mathrm{F})$ converge vers $l + \mathrm{F}$. La suite de Cauchy $(x_n + \mathrm{F})$ admettant une sous-suite qui converge, elle est elle-même convergente (voir L3/METRIQUE.PDF/III-2). On a donc montré que E/F est un Banach.

Sol.7) Montrons (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit a adhérent à F. a est donc limite d'une suite (x_n) de F. Si f est une forme linéaire continue nulle sur F, on a : $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) = 0$, donc, en passant à la limite, $f(a) = 0$.

Montrons (ii) $\Rightarrow$ (i). Par l'absurde, si a n'est pas adhérent à F, alors $\exists\, r > 0$, $\mathrm{B}(a, r) \cap \mathrm{F} = \varnothing$, donc :

$$\forall\, y \in \mathrm{F}, \| y - a \| \geq r$$

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{F} + \mathrm{Vect}(a)$. Soit g la forme linéaire définie sur G par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathrm{F}, g(x) = 0 \\ g(a) = 1 \end{cases}$$

Vérifions que g est une forme linéaire continue :

$$\forall\, x \in \mathrm{F}, \forall\, \lambda \in \mathbf{K}, \left| g(x + \lambda a) \right| = \left| g(x) + \lambda g(a) \right| = \left| \lambda \right|$$

et, pour $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} \| x + \lambda a \| &= \left|\lambda\right| \, \| \frac{x}{\lambda} + a \| = \left|\lambda\right| \, \| a - y \| \qquad \text{avec } y = -\frac{x}{\lambda} \in \mathrm{F} \\ &\geq \left|\lambda\right| r \end{aligned}$$

Il en résulte que $\left| g(x + \lambda a) \right| \leq \dfrac{1}{r} \| x + \lambda a \|$ (y compris pour $\lambda = 0$), de sorte que g est une forme linéaire continue sur G de norme inférieure ou égale à $\dfrac{1}{r}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue sur E, mais celle-ci est nulle sur F et non nulle en a, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Sol.8) a) $a \notin$ F et F est fermé, donc $\exists\, r > 0$, B(a, r) $\cap$ F = $\varnothing$ donc :

$$\forall\, x \in \text{F},\ \| a - x \| \geq r$$

Soit maintenant y adhérent à F $\oplus$ Vect(a). Utilisant la caractérisation séquentielle des fermés, il existe donc une suite (x_n) dans F et une suite (λ_n) dans le corps de base $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lambda_n a$. Etant convergente, la suite ($x_n + \lambda_n a$) est de Cauchy, donc, avec le r ci-dessus :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \text{N},\ \forall\, n \geq \text{N},\ \forall\, p \geq \text{N},\ \| x_n + \lambda_n a - x_p - \lambda_p a \| < \varepsilon r$$

Montrons que la suite (λ_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons l'inégalité précédente, pour n et p supérieurs ou égaux à N :

$$\| x_n + \lambda_n a - x_p - \lambda_p a \| < \varepsilon r$$

donc $\quad \| x_n - x_p + (\lambda_n - \lambda_p)a \| < \varepsilon r$

Si $\lambda_n - \lambda_p = 0$, on a évidemment $|\lambda_n - \lambda_p| < \varepsilon$. Si $\lambda_n - \lambda_p \neq 0$, on a :

$$\| \frac{x_n - x_p}{\lambda_n - \lambda_p} + a \| < \frac{\varepsilon r}{|\lambda_n - \lambda_p|}$$

Mais $x = -\dfrac{x_n - x_p}{\lambda_n - \lambda_p} \in$ F et $\| a - x \| \geq r$, donc :

$$r < \frac{\varepsilon r}{|\lambda_n - \lambda_p|}$$

donc $\quad |\lambda_n - \lambda_p| < \varepsilon$

Ainsi, (λ_n) est de Cauchy, donc converge vers une limite l. Comme ($x_n + \lambda_n a$) converge vers y, il en résulte que (x_n) converge vers $y - la$. Comme, pour tout n, $x_n \in$ F et que F est fermé, cette limite $y - la$ est élément de F. Donc $y = (y - la) + la \in$ F $\oplus$ Vect(a).
Donc F $\oplus$ Vect(a) est fermé.

b) Si φ est continue, alors Ker(φ) = $\varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par l'application continue φ.

La réciproque est comparable au a) ou à l'Exo.8). Si F = Ker(φ) est fermé, soit $a \notin$ F et donc tel que $\varphi(a) \neq 0$. On a alors E = F $\oplus$ Vect(a). Quitte à diviser a par $\varphi(a)$, on peut supposer que $\varphi(a) = 1$. Comme F est fermé, a n'est pas adhérent à F donc :

$$\exists\, r > 0,\ \text{B}(a, r) \cap \text{F} = \varnothing$$

donc :

$$\forall\, x \in \text{F},\ \| a - x \| \geq r$$

ou encore, en changeant x en $-x$:

$$\forall\, x \in \text{F},\ \| a + x \| \geq r$$

Pour tout $y = x + \lambda a$ de E, avec $x \in$ F, et $\lambda \neq 0$, on a :

$$\| y \| = \| x + \lambda a \| = |\lambda|\ \| a + \frac{x}{\lambda} \| \geq |\lambda|\ r \qquad \text{car } \frac{x}{\lambda} \in \text{F}$$

Donc :

$$|\lambda| \leq \frac{1}{r} \| y \|$$

relation trivialement vraie pour $\lambda = 0$. Mais λ n'est autre que $\varphi(y)$, donc :

$$|\varphi(y)| \leq \frac{1}{r} \| y \|$$

ce qui signifie que φ est continue, avec $|||\, \varphi\, ||| \leq \dfrac{1}{r}$

c) Pour $g_n(t) = (1 - t)^n$, on a $g_n \to 0$ pour N, mais $\varphi(g_n) = 1$ ne tend pas vers $\varphi(0) = 0$. Donc φ n'est pas continue.

Ker(φ) n'est donc pas fermé. Prendre $f(t) = 1 - t$ et $f_n(t) = nt$ sur $[0, \dfrac{1}{n+1}]$, $f_n(t) = 1 - t$ sur $[\dfrac{1}{n+1}, 1]$.

f n'appartient pas à Ker(φ) car $\varphi(f) = 1 \neq 0$, les f_n appartiennent à Ker(φ) et la suite (f_n) converge vers f pour la norme N quand n tend vers $+\infty$. Donc f est adhérent à Ker(φ).

Sol.9) a) δ_x est continue car les applications $z \to \mathrm{d}(x, z)$ et $z \to \mathrm{d}(a, z)$ le sont. En outre, δ_x est bornée car :

$$\forall z \in X, \left|\delta_x(z)\right| = \left|\mathrm{d}(x, z) - \mathrm{d}(a, z)\right| \leq \mathrm{d}(a, x)$$

b) Il s'agit de montrer que, pour tout x et tout y de X, on a $\mathrm{d}(x, y) = \|\, \delta_x - \delta_y \,\|_\infty$. Or, pour tout z de X :

$$\left|\delta_x(z) - \delta_y(z)\right| = \left|\mathrm{d}(x, z) - \mathrm{d}(a, z) - \mathrm{d}(y, z) + \mathrm{d}(a, z)\right| = \left|\mathrm{d}(x, z) - \mathrm{d}(y, z)\right| \leq \mathrm{d}(x, y)$$

donc $\quad \|\, \delta_x - \delta_y \,\|_\infty \leq \mathrm{d}(x, y)$

De plus :

$$\left|\delta_x(x) - \delta_y(x)\right| = \left|\mathrm{d}(x, x) - \mathrm{d}(a, x) - \mathrm{d}(y, x) + \mathrm{d}(a, x)\right| = \mathrm{d}(x, y)$$

donc $\quad \|\, \delta_x - \delta_y \,\|_\infty = \mathrm{d}(x, y)$

Sol.10) a) Pour tout entier naturel n, soit δ_n la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le n-ème qui vaut 1. δ_n est élément de $c_0(\mathbf{R})$ et de $c(\mathbf{R})$. On a $\delta_n^2 = \delta_n$, et pour $m \neq n$, $\delta_n\delta_m = 0$.

Si φ est un morphisme de $c_0(\mathbf{R})$, on a :

$\forall n, \varphi(\delta_n) = \varphi(\delta_n^2) = \varphi(\delta_n)^2$ donc, pour tout n, $\varphi(\delta_n) = 0$ ou $\varphi(\delta_n) = 1$

$\forall n \neq m, 0 = \varphi(0) = \varphi(\delta_n\delta_m) = \varphi(\delta_n)\varphi(\delta_m)$ donc, $\forall n \neq m$, $\varphi(\delta_n) = 0$ ou $\varphi(\delta_m) = 0$

Par conséquent, on a :

ou bien $\forall n$, $\varphi(\delta_n) = 0$. On notera ω cette application φ.

ou bien, $\exists n$, $\varphi(\delta_n) = 1$ et cet n est unique. On notera φ_n cette application φ.

Tout suite $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $c_0(\mathbf{R})$ est la limite, pour $\|\ \|_\infty$, des suites $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\delta_k$. En effet, $a - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\delta_k$ est la suite dont les termes entre les rang 0 et n inclus sont nuls, les termes au-delà du rang n étant identiques à ceux de la suite a. Donc :

$$\|\, a - \sum_{k=0}^{n} a_k\delta_k \,\| = \mathrm{Sup}\, \{\left|a_k\right|, k > n\}$$

quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini du fait que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Comme les morphismes sont supposés continus, on a :

ou bien $\varphi = \omega$ et alors :

$$\omega(a) = \omega(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\delta_k) = \lim_{n\to\infty} \omega(\sum_{k=0}^{n} a_k\delta_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\, \omega(\delta_k) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

ou bien $\varphi = \varphi_n$ pour un certain entier n, et alors :

$$\varphi_n(a) = \varphi_n(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k\delta_k) = \lim_{m\to\infty} \varphi_n(\sum_{k=0}^{m} a_k\delta_k) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k\ \varphi_n(\delta_k) = \lim_{m\to\infty} a_n = a_n$$

Ainsi, nécessairement, un morphisme de $c_0(\mathbf{R})$ est ou bien l'application ω identiquement nulle, ou bien l'application φ_n qui, à une suite, associe son n-ème terme. Réciproquement, il n'est pas difficile de vérifier que chacune de ces fonctions est un morphisme de $c_0(\mathbf{R})$. On n'oubliera de vérifier que les φ_n sont effectivement continus.
On a donc $\mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R})) = \{\varphi_n, n \in \mathbf{N}\} \cup \{\omega\}$, en bijection avec $\mathbf{N} \cup \{\omega\}$.

Si ψ est un morphisme de $c(\mathbf{R})$, alors sa restriction à $c_0(\mathbf{R})$ est un morphisme φ de $c_0(\mathbf{R})$, donc l'une des applications trouvées ci-dessus. Toute suite a de $c(\mathbf{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $a = b + \lambda e$, où $b \in c_0(\mathbf{R})$, $\lambda \in \mathbf{R}$, e la suite constante égale à 1. Cette décomposition s'obtient en prenant $\lambda = \lim_{n\to\infty} a_n$ et $b = a - \lambda e$, de limite nulle. On a alors :

$$\psi(a) = \psi(b) + \lambda\psi(e) = \varphi(b) + \lambda \qquad \text{puisque } \varphi \text{ est la restriction de } \psi \text{ à } c_0(\mathbf{R}), \text{ et } \psi(e) = e.$$

Si $\varphi = \omega$, alors $\psi(a) = \lambda = \lim_{n\to\infty} a_n$
Si $\varphi = \varphi_n$, alors $\psi(a) = b_n + \lambda = (a_n - \lambda) + \lambda = a_n$.
Ainsi, nécessairement, un morphisme de $c(\mathbf{R})$ est ou bien l'application *lim* associant à une suite sa limite, ou bien les φ_n précédemment définis. Réciproquement, on vérifiera que chacune de ces fonctions est un morphisme de $c(\mathbf{R})$.
On a donc $\mathrm{Mor}(c(\mathbf{R})) = \{\varphi_n, n \in \mathbf{N}\} \cup \{lim\}$, en bijection avec $\mathbf{N} \cup \{lim\}$ ou à $\mathbf{N} \cup \{\omega\}$.
b) Soit $\varphi \in \mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R}))$. Une prébase de voisinages de φ est donné par :

$$V(\varphi, a, \varepsilon) = \{\zeta \in \mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R})), |\zeta(a) - \varphi(a)| < \varepsilon\} \qquad a \in c_0(\mathbf{R}), \varepsilon > 0$$

Pour $\varphi = \varphi_n$, $a = \delta_n$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$V(\varphi, \delta_n, \frac{1}{2}) = \{\zeta \in \mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R})), |\zeta(\delta_n) - 1| < \frac{1}{2}\}$$
$$= \{\zeta \in \mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R})), \zeta(\delta_n) = 1\}$$

car on a vu que l'image de δ_n par tout morphisme ne peut valoir que 0 ou 1, et 0 est exclu.

$$= \{\varphi_n\}$$

car le seul morphisme valant 1 en δ_n est φ_n.
Cela prouve que les φ_n sont des points isolés dans $\mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R}))$. La démonstration est identique et il en est de même si on considère les φ_n comme éléments de $\mathrm{Mor}(c(\mathbf{R}))$.
Pour $\varphi = \omega$, on a :

$$V(\omega, a, \varepsilon) = \{\zeta \in \mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R})), |\zeta(a) - \omega(a)| < \varepsilon\}$$
$$= \{\zeta \in \mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R})), |\zeta(a)| < \varepsilon\}$$
$$= \{\omega\} \cup \{\varphi_n, |\varphi_n(a)| < \varepsilon\}$$
$$= \{\omega\} \cup \{\varphi_n, |a_n| < \varepsilon\}$$

Comme toute suite a de $c_0(\mathbf{R})$ tend vers 0, $\exists$ N, $\forall n \geq$ N, $|a_n| < \varepsilon$, donc :

$$\{\omega\} \cup \{\varphi_n, n \geq N\} \subset V(\omega, a, \varepsilon)$$

Réciproquement, $\{\omega\} \cup \{\varphi_n, n \geq N\}$ est aussi un voisinage de ω en prenant par exemple la suite a des $\dfrac{1}{n}$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{N-1}$. Les $\{\omega\} \cup \{\varphi_n, n \geq N\}$ ainsi obtenus forment une base de voisinages de ω. Cela prouve que ω est adhérent à toute partie $\{\varphi_n, n \geq N\}$.

Comme $\mathbf{N}$ est constitué de points isolés n et que son compactifié d'Alexandrov $\overline{\mathbf{N}}$ consiste à lui ajouter un point dit à l'infini ∞, dont une base de voisinage est donnée par $[N, +\infty[\cup \{\infty\}$, on voit que la topologie de $\mathrm{Mor}(c_0(\mathbf{R}))$ correspond à celle du compactifié $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, avec l'homéomorphisme $n \leftrightarrow \varphi_n$ et $\infty \leftrightarrow \omega$.

Considérons maintenant dans $\mathrm{Mor}(c(\mathbf{R}))$ les voisinages du morphisme *lim* :

$$\begin{aligned} V(lim, a, \varepsilon) &= \{\zeta \in \mathrm{Mor}(c(\mathbf{R})), \left|\zeta(a) - lim(a)\right| < \varepsilon\} \\ &= \{lim\} \cup \{\varphi_n, \left|\varphi_n(a) - lim(a)\right| < \varepsilon\} \\ &= \{lim\} \cup \{\varphi_n, \left|a_n - lim(a)\right| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

Par définition de la limite, la condition $\left|a_n - lim(a)\right| < \varepsilon$ est vérifiée dès que n est assez grand. On trouve le fait qu'un voisinage de *lim* contient une partie $\{lim\} \cup \{\varphi_n, n \geq N\}$. On conclut comme précédemment, avec l'homéomorphisme $n \leftrightarrow \varphi_n$ et $\infty \leftrightarrow lim$ entre $\overline{\mathbf{N}}$ et $\mathrm{Mor}(c(\mathbf{R}))$.

c) Soit f une fonction continue sur $\overline{\mathbf{N}}$. Les entiers n étant des points isolés, $f(n)$ prend une valeur réelle quelconque. Cependant, la continuité de f doit être assurée en ∞. On a doit donc avoir :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists W \text{ voisinage de } \infty, \forall x \in W, \left|f(x) - f(\infty)\right| < \varepsilon$$

Puisque tout voisinage de ∞ contient une partie du type $[N, +\infty[$, $N \in \mathbf{N}$, on peut se limiter à ce type de partie, et f doit vérifier :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \left|f(n) - f(\infty)\right| < \varepsilon$$

ce qui exprime que $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = f(\infty)$.

On définit alors une application $f \in C(\overline{\mathbf{N}}) \to (f(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la démonstration précédente prouvant que la suite $(f(n))$ est convergente. Cette application est bijective, la réciproque étant définie en prolongeant f par continuité en ∞ par $f(\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$. Il n'est pas difficile de vérifier qu'il s'agit d'un morphisme d'algèbres. Il s'agit d'une isométrie car :

$$\begin{aligned} \| f \|_\infty &= \mathrm{Sup}\, \{\left|f(x)\right|, x \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}\} \\ &= \mathrm{Sup}\, \{\left|f(x)\right|, x \in \mathbf{N}\} \qquad \text{car } \left|f(\infty)\right| \leq \mathrm{Sup}\, \{\left|f(x)\right|, x \in \mathbf{N}\} \text{ par continuité} \\ &= \| (f(n)) \|_\infty \end{aligned}$$

◆