# SERIES DE FOURIER

## *PLAN*



Il est utile d'avoir lu le chapitre L3/HERMITN.PDF, qui traite des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ munis d'un produit scalaire à valeurs complexes.

## *Préambule historique*

En 1746, D'Alembert étudie l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

dont il donne les solutions sous la forme $F(ct + x) + G(ct - x)$ où F et G sont arbitraires. ($c$ est la vitesse de propagation de l'onde). Vers 1750, Daniel Bernoulli pensait que toute solution peut s'obtenir comme superposition d'une série d'harmoniques, par exemple :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{nx}{l}) \cos(\frac{nct}{l})$$

dans le cas où les deux extrémités de la corde sont fixées. Or dans le cas où la position initiale est donnée par une condition $y(x, 0) = \varphi(x)$, ceci implique que $\varphi(x)$ puisse se développer en série trigonométrique $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{nx}{l})$. A l'époque, ceci paraissait impossible, l'argument principal étant par exemple qu'une fonction non périodique ne pouvait se représenter par une série de fonctions périodiques. Qu'on songe par exemple à une expression telle que $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ pour représenter la fonction $x^2$, alors que celle-ci n'est pas périodique. L'égalité de la série et de la fonction est néanmoins valable sur $[-\pi, \pi]$, comme on le verra.

Le problème fut relancé en 1821 lorsque Fourier développa sa *théorie analytique de la chaleur*. L'équation de la chaleur s'écrit $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, où $T(x, t)$ est la température à l'instant $t$ au point d'abscisse $x$ et D le coefficient de diffusivité thermique. Si l'on maintient une température nulle aux extrémités, une solution formelle est donnée par :

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{nx}{l}\right) \exp\left(-\frac{Dn^2t}{l^2}\right)$$

avec, là aussi, l'obligation d'avoir $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{nx}{l}\right)$ si la température initiale est donnée par $T(x, 0) = \varphi(x)$. Fourier donne un certain nombre d'exemples et établit un lien de réciprocité entre les formules suivantes :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos(nx)\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\sin(nx)\,dx$$

et

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Dès lors, les séries trigonométriques vont se trouver au cœur du développement de l'analyse au XIXème. La série dont les coefficients sont ainsi définis s'appelle **série de Fourier** associée à φ. Les questions qui se développeront alors portent sur les points suivants :

- La fonction φ peut-elle être arbitraire ? Ce qui nécessite une réflexion sur la notion de fonction et de continuité.
- Pour quelles fonctions φ les expressions $a_n$ et $b_n$ sont-elles calculables ? Question liée au développement de la théorie de l'intégration.
- Les séries convergent-elles, et si oui, est-ce vers φ ? Ce qui nécessite une théorie de la convergence.
- φ étant donnée, y a-t-il unicité de la série trigonométrique qui converge vers φ (si tant est qu'il en existe une) ?

Continuité, intégration, convergence. A l'époque de Fourier, aucune de ces notions n'est clairement précisée. Il faudra plus d'un siècle pour éclaircir la plupart des questions relatives aux séries trigonométriques, avec la notion de fonction développée par Dirichlet (1829), et celle d'intégrale par Riemann (1854) puis par Lebesgue (1902). Signalons enfin que c'est en réfléchissant sur un problème d'unicité des séries trigonométriques que Cantor développa sa théorie des ensembles .

Les formules de Fourier entrent dans un cadre beaucoup plus général, celui de l'analyse ou de la décomposition d'un objet, puis celui de la synthèse ou de la reconstruction de l'objet à partir de ses éléments décomposés. Voici quelques exemples :

- Dans un espace vectoriel euclidien muni d'une base ($\boldsymbol{e}_i$).

  Un procédé de décomposition d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ consiste à calculer les produits scalaires $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i>$. Ces informations sont redondantes si, à la place d'une base, on dispose d'un système générateur.

  Le procédé de reconstruction consiste à retrouver $\boldsymbol{v}$ à partir des $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i>$. Si la base est orthonormée, il suffit de calculer $\sum <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i> \boldsymbol{e}_i$. Sinon, il faudra au préalable déterminer la base ($\boldsymbol{\varepsilon}_i$) dite duale de la base ($\boldsymbol{e}_i$) et définie par les relations $<\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j> = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ On a alors $\boldsymbol{v} = \sum <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i> \boldsymbol{\varepsilon}_i$. (Le produit scalaire des deux membres avec chaque $\boldsymbol{e}_i$ donne le même résultat)

- Les séries de Fourier, objet de ce chapitre. Il s'agit de décomposer un signal périodique φ de période 2π en la somme d'harmoniques de la forme $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$. Sous certaines hypothèses, on a :

  Procédé de décomposition :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx$$

  Procédé de reconstitution :

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

- La transformée de Fourier, objet d'un chapitre du niveau L3. On peut le voir comme cas limite du cas précédent si on considére une fonction $f$ périodique de période 2T sur l'intervalle [–T, T], que l'on cherche à décomposer en harmonique de la forme $\cos(\frac{2\pi nx}{T})$ et $\sin(\frac{2\pi nx}{T})$, lorsque T tend vers $+\infty$. On est amené à remplacer le paramètre discret $n$ élément de $\mathbb{Z}$ par un paramètre continu ξ élément de $\mathbb{R}$. Sous certaines hypothèses :

  Procédé de décomposition :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-2i\pi\xi t)\,dt,$$

  Si $f$ est un signal dépendant du temps $t$, on cherche à détecter dans ce signal la densité de l'harmonique de la forme $\exp(2i\pi\xi t)$ de fréquence ξ. L'intégrale précédente fournira une information sur cette harmonique.

  Procédé de reconstruction :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \exp(2i\pi\xi x)\,d\xi$$

  La symétrie des deux procédés est remarquable.

- La transformée de Fourier discrète (TFD ou DFT *discrete Fourier transform*), s'appliquant sur une suite de N valeurs $s(0)$, $s(1)$, ..., $s(N-1)$ obtenues par exemple par échantillonnage d'une fonction.

  Procédé de décomposition :

$$\hat{s}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s(k) \exp(-\frac{2i\pi nk}{N})$$

Procédé de recomposition :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}(k) \exp(\frac{2i\pi nk}{N})$$

Si les séries de Fourier et la transformée de Fourier jouent des rôles importants sur le plan théorique, la DFT joue un rôle essentiel sur le plan pratique. En effet, un signal est en général connu non sous forme de définition fonctionnelle mathématique, mais sous forme de suites discrètes de valeurs obtenues par échantillonnage. Il est résulte que seule la DFT est applicable. Le calcul de tous les coefficients $\hat{s}(n)$ à partir des $s(k)$ semble nécessiter a priori un nombre d'opérations (additions, multiplications) de l'ordre de $O(N^2)$, mais un algorithme performant a été mis au point vers Cooley et Tuckey en 1965. Cet algorithme, appelé transformée de Fourier rapide, (TFR ou FFT *fast Fourier transform*) nécessite seulement un nombre d'opérations de l'ordre de O(N lnN). Le gain est considérable. Il est fréquent qu'on ait à calculer un million de coefficients. Un algorithme en $O(N^2)$ demande de l'ordre de mille milliards de calculs, alors qu'un algorithme en O(N lnN) en demande de l'ordre de quelques millions. Dans le premier cas, le temps de calcul nécessaire se mesure en semaines, alors qu'il se mesure en secondes dans le second !! On estime qu'aujourd'hui, la moitié du temps des super-ordinateurs est consacré à calculer une FFT.

- L'analyse par ondelettes, domaine d'étude qui n'existait pas avant 1990 et qui a connu depuis un développement foudroyant en particulier dans la compression des données. Le terme *ondelettes* est inconnu d'un de mes dictionnaire de mathématiques édité en 1993, mais apparaît dans un autre dictionnaire, édité en 1999. Comparable à la transformée de Fourier, il s'agit d'obtenir une information sur une harmonique de fréquence $\xi_0$, mais localisée au voisinage d'un instant $t_0$. On introduit donc des fonctions de fréquence $\xi_0$, mais tendant rapidement vers 0 au delà d'un certain voisinage de $t_0$. Si $(\psi_{t_0,\xi_0})$ est une telle famille de fonctions, on a, sous certaines hypothèses :

Procédé de décomposition :

$$<f, \psi_{t_0,\xi_0}> = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{t_0,\xi_0}(t)\,dt$$

La quantité $<f, \psi_{t_0,\xi_0}>$ donne une information sur l'harmonique de fréquence $\xi_0$, au voisinage de $t_0$.

Procédé de reconstruction :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} <f, \psi_{t_0,\xi_0}>\, h_{t_0,\xi_0}(t)\,dt_0\,d\xi_0$$

pour certaines fonctions $h_{t_0,\xi_0}$ qui jouent le rôle de base duale relativement aux $\psi_{t_0,\xi_0}$.

## *I : Espace préhilbertien des fonctions 2π-périodiques*

### 1- Produit scalaire, norme

Soit E l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R}$ 2π-périodiques, continues par morceaux, à valeurs complexes. On définit le produit scalaire à valeurs complexes de deux telles fonctions par :

$$<f, g> = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{a+2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\,dt$$

La norme euclidienne associée est :

$$\| f \|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt}$$

Le facteur $\frac{1}{2\pi}$ est choisi de façon que la fonction constante 1 soit de norme 1. Pour définir une fonction périodique de période $2\pi$, il suffit de la définir sur un intervalle de longeur $2\pi$. Les valeurs aux points de discontinuité ne changent pas la valeur de l'intégrale.

On note que :

$$\| f \|_2 = 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = 0 \Rightarrow f = 0$$

seulement si $f$ est continue. Si $f$ est continue par morceaux, $f$ peut être non nulle aux points de discontinuités, sauf si on a convenu que la valeur en un point de discontinuité est la moyenne entre la limite à droite et à gauche de ce point. On peut adopter cette convention, ou sinon retenir que $\| f \|_2 = 0$ implique que $f$ est nulle sauf en un nombre fini de points.

**2- Polynômes trigonométriques**

On appelle polynôme trigonométrique une combinaison linéaire finie à coefficients complexes des fonctions $e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Quitte à rajouter éventuellement des coefficients nuls, on peut supposer qu'un tel polynôme s'écrit :

$$P = \sum_{n=-N}^{N} c_n \, e^{inx}$$

En écrivant $e^{inx}$ sous la forme $\cos(nx) + i\sin(nx)$ et en regroupant les coefficients des entiers opposés, on peut également écrire :

$$P = c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n + c_{-n}) \cos(nx) + i(c_n - c_{-n}) \sin(nx)$$

Si on note $a_n = c_n + c_{-n}$ (et en particulier $\frac{a_0}{2} = c_0$), et $b_n = i(c_n - c_{-n})$, on obtient :

$$P = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Inversement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$

Pour le produit scalaire précédent, la famille $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une famille orthonormale. En effet :

$$\langle e^{inx}, e^{ipx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \, e^{ipx} \, dx = \begin{cases} 1 \text{ si } n = p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Il en résulte que les $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée du sous-espace F de E des polynômes trigonométriques.

Regardons ce qu'il en est pour la famille $\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. On a :

$\langle 1, 1 \rangle = 1$

Pour $n$ différent de 0

$$<\cos(nx), \cos(nx)> = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)\, dt = \frac{1}{2}$$

de même, $<\sin(nx), \sin(nx)> = \frac{1}{2}$

Pour $n$ et $m$ quelconques : $<\cos(nx), \sin(mx)> = 0$

Pour $n$ différent de $m$ : $<\cos(nx), \cos(mx)> = 0$ et $<\sin(nx), \sin(mx)> = 0$

Ainsi, la famille est orthogonale, mais pas normée. Les résultats précédents peuvent également se retrouver au moyen des formules $\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ et $\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$, en utilisant l'orthonormalité des exponentielles.

**3- Séries trigonométriques**

On appelle série trigonométrique une série dont les sommes partielles sont de la forme $\sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx}$. La somme d'une telle série sera notée :

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx}$$

ou encore :

$$S = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \lim_{N\to\infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

On notera bien que le sens donné ici à $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ est $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N}$ et non $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} + \lim_{M\to-\infty} \sum_{n=-M}^{-1}$ avec deux indices N et M indépendants.

La question se pose de savoir si une telle série converge et dans quel sens. Il y a en effet trois types de convergence qui interviennent dans ce chapitre (revoir le chapitre L2/SUITESF.PDF):

❑ *La convergence simple* :

La **convergence simple** signifie que, pour tout $x$, $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx}$ existe, ce qui ne signifie rien d'autre que la série converge en tout $x$, ou que la somme $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$ est définie pour tout $x$.

❑ *La convergence uniforme* :

Si on note $S_N$ la somme partielle $\sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx}$, la **convergence uniforme** signifie que $\| S - S_N \|_\infty$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, avec $\| f \|_\infty = \text{Sup } \{|f(x)|, x \in \mathbf{R}\} = \text{Sup } \{|f(x)|, x \in [-\pi, \pi]\}$. Il suffit pour cela que la série $\sum c_n e^{inx}$ converge **normalement**, ce qui se produit si et seulement si $\sum |c_n|$ converge.

❑ *La convergence en moyenne quadratique* :
La **convergence en moyenne quadratique** est la convergence au sens de la norme euclidienne : $\| S - S_N \|_2$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Le carré de $\| S - S_N \|_2$ est la valeur moyenne de $(S - S_N)^2$. La convergence en moyenne quadratique, comme son nom l'indique, est une convergence en moyenne. L'écart de la somme de la série et de la somme partielle est en moyenne arbitrairement petit, même si ponctuellement, il peut être important.

Comme $\| f \|_2 \le \| f \|_\infty$, la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne quadratique et la convergence simple. Par contre, il n'existe pas de relation simple entre la convergence en moyenne quadratique et la convergence simple.

### 4- Théorème de Weierstrass

**THÉORÈME DE WEIERSTRASS**
*Soit f une fonction continue 2π-périodique. Alors il existe une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f.*

Autrement dit, toute fonction continue 2π-périodique est adhérente au sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques pour la norme $\| \ \|_\infty$. On peut également énoncer ce théorème comme suit :
*Soit f une fonction continue 2π-périodique et ε un réel strictement positif. Alors il existe un polynôme trigonométrique* P *tel que* $\| f - P \|_\infty < \varepsilon$.
ou encore :
*Le sous-espace vectoriel* F *des polynômes trigonométriques est dense pour la norme uniforme dans l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques continues.*

Démonstration
❑ Pour $x$ réel, on pose $Q_k(x) = \lambda_k \left(\frac{1 + \cos(x)}{2}\right)^k$. La constante $\lambda_k$ est choisie de façon que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)\, dt = 1.$$

$Q_k$ est un polynôme trigonométrique que nous écrirons éventuellement $Q_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} a_{nk}\, e^{inx}$ sans chercher à expliciter les $a_{nk}$.

On pose ensuite $P_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) Q_k(t)\, dt$. Ce sont ces polynômes qui vont tendre uniformément vers $f$. En effet :

a) On a $P_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) Q_k(x - t)\, dt$. Il suffit pour cela d'effectuer le changement de variable $t \leftarrow x - t$ et utiliser la périodicité des fonctions.

b) $P_k$ est un polynôme trigonométrique. Il suffit d'utiliser la forme de $P_k$ donnée en a) et celle de $Q_k$ donnée par $\sum_{n=-k}^{k} a_{nk}\, e^{inx}$. On obtient pour $P_k(x)$ une combinaison linéaire de $e^{inx}$.

c) $f$ étant continue sur un segment, elle est uniformément continue (voir le chapitre L1/INTEGRAL.PDF pour la notion de *continuité uniforme* et une démonstration), donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in [-\pi, \pi],\ \forall\, y \in [-\pi, \pi],\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

d) On a $|P_k(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x - t) - f(x)|\, Q_k(t)\, dt$. Remarquer que $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)Q_k(t)\, dt$ vu la condition imposée sur l'intégrale de $Q_k$.

e) $\varepsilon$ étant donné, et $\alpha$ étant le nombre défini par le c), on pose $I_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x - t) - f(x)|\, Q_k(t)\, dt$. On a alors $I_k \leq \varepsilon$ car, pour $t$ élément de $[-\alpha, \alpha]$, $|f(x - t) - f(x)| \leq \varepsilon$ et $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)\, dt = 1$, $Q_k$ étant positive.

f) On pose $J_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{-\alpha} |f(x - t) - f(x)|\, Q_k(t)\, dt + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\pi} |f(x - t) - f(x)|\, Q_k(t)\, dt$. On a :

$$J_k \leq 2\, \| f \|_\infty \times \operatorname{Sup}\, \{Q_k(x) \mid \pi \geq |x| \geq \alpha\}.$$

par simple majoration.

g) $\operatorname{Sup}\, \{Q_k(x) \mid \pi \geq |x| \geq \alpha\}$ tend vers 0 quand $k$ tend vers $+\infty$, car, pour $x \in [\alpha, \pi]$, on a :

$$Q_k(x) \leq Q_k(\alpha) = \lambda_k \left(\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}\right)^k \text{ avec } 0 \leq \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} < 1$$

Cherchons un majorant de $\lambda_k$ :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(x)\, dx = 1$$

donc

$$\begin{aligned} 2\pi &= \lambda_k \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(x)}{2}\right)^k dx \\ &= 2\lambda_k \int_{0}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(x)}{2}\right)^k dx \\ &> 2\lambda_k \int_{0}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(x)}{2}\right)^k \sin(x)\, dx = 2\lambda_k \int_{-1}^{1} \left(\frac{1 + u}{2}\right)^k du = \frac{4\lambda_k}{k + 1} \end{aligned}$$

donc la suite $(\lambda_k)$ est majorée par une suite arithmétique et $Q_k(\alpha)$ tend bien vers 0 quand $k$ tend vers l'infini.

On peut donc choisir K tel que, $\forall\, k \geq K$, $J_k \leq \varepsilon$ et donc $|P_k(x) - f(x)| \leq I_k + J_k \leq 2\varepsilon$ pour tout $x$ de $[-\pi, \pi]$. On a ainsi prouvé la convergence uniforme de la suite $(P_k)$ vers $f$.

**COROLLAIRES**

(i) *Soit $f$ une fonction continue par morceaux $2\pi$-périodique et $\varepsilon$ un réel strictement positif. Alors il existe un polynôme trigonométrique P tel que* $\| f - P \|_2 < \varepsilon$.

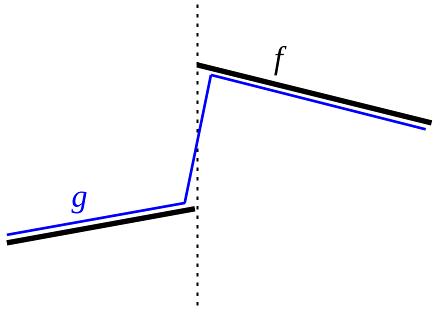
(i-bis) *Toute fonction* 2π-*périodique continue par morceaux est limite pour la norme de la convergence en moyenne quadratique d'une suite de polynômes trigonométriques*.

(ii) *Soit* $f$ *une fonction* 2π-*périodique et continue par morceaux, telle que, pour tout* $n$ *élément de* $\mathbb{Z}$, $\langle e^{inx}, f\rangle = 0$. *Alors* $\| f \|_2 = 0$ *et donc* $f = 0$ *si* $f$ *est continue, ou* $f = 0$ *sauf en un nombre fini de points si* $f$ *est seulement continue par morceaux.*

(ii-bis) *La famille des* ($e^{inx}$) *forme un système orthonormé maximal, ce qui signifie qu'il n'existe aucune fonction de norme non nulle orthogonale au sous-espace vectoriel engendré par les exponentielles, i.e. au sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques..*

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : On notera le changement d'hypothèse ($f$ est seulement supposée continue par morceaux) et le changement de conclusion (la norme utilisée n'est plus la norme de la convergence uniforme mais celle de la convergence en moyenne quadratique). $f$ étant continue par morceaux, on peut approximer $f$ par une fonction $g$ continue telle que $\| f - g \|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Il suffit pour cela, aux voisinages des points de discontinuités de $f$, d'approximer $f$ par une fonction affine dont la pente est assez raide pour que l'intégrale de $|f - g|^2$ soit suffisamment petite. En dehors de ces voisinages, on prend $f = g$.




On applique ensuite le théorème de Weierstrass sur $g$ pour en déduire l'existence d'un polynôme trigonométrique P tel que $\| g - P \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. On a a fortiori $\| g - P \|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\| f - P \|_2 < \varepsilon$.

❑ (i-bis) : Autre formulation du (i) :

*Toute fonction* 2π-*périodique continue par morceaux est adhérente au sous-espace vectoriel* F *des polynômes trigonométriques pour la norme de la convergence en moyenne quadratique*.

(i-bis) n'est que la reformulation séquentielle de cette phrase.

On peut dire aussi :

*Le sous-espace vectoriel* F *des polynômes trigonométriques est dense pour la norme de la convergence quadratique dans l'espace vectoriel* E *des fonctions* 2π-*périodiques continues par morceaux.*

❑ (ii) : Soit $f$ orthogonale à tous les $e^{inx}$. Par combinaison linéaire, $f$ est orthogonale à tout polynôme trigonométrique. $f$ est en particulier orthogonale à tout polynôme de la suite ($P_n$) de polynômes trigonométriques qui converge vers $f$ pour la norme $\| \ \|_2$. On a alors :

$$0 \leq \langle f, f\rangle = \left|\langle f, f\rangle - \langle P_n, f\rangle\right| = \left|\langle f - P_n, f\rangle\right| \leq \| f - P_n \|_2 \, \| f \|_2$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or $\| f - P_n \|_2$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. En passant à la limite, on obtient bien $\| f \|_2 = 0$.

❑ (ii-bis) : On a déjà vu que les fonctions $x \to e^{inx}$ étaient deux à deux orthogonales. La maximalité de la famille n'est qu'une reformulation de la propriété (ii).
Ainsi, le sous-espace vectoriel F des polynômes trigonométriques est strictement inclus dans l'espace vectoriel E des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux, mais suffisamment vaste dans E pour que $F^\perp = \{0\}$.

On a également :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0 \text{ et } f \text{ continue} \Rightarrow f = 0$$

puisque l'hypothèse précédente signifie que $f$ est orthogonale aux éléments de l'ensemble $\{\cos(nx) \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{\sin(nx) \mid n \in \mathbf{N}\}$, or cet ensemble engendre le sous-espace vectoriel F des polynômes trigonométriques. $f$ est donc orthogonal à F, donc est nulle.

**5- Coefficients de Fourier**

La suite de polynômes trigonométriques convergeant vers $f$ n'est pas forcément facile à calculer (d'ailleurs, nous n'avons donné aucune expression explicite). On préfère opérer avec une série, car on passe aisément d'une somme partielle à la suivante en ajoutant un seul terme. Or il est facile de définir une série liée à $f$. Pour cela, appelons $F_N$ le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométrique de la forme $\sum_{n=-N}^{N} \lambda_n e^{inx}$, et projetons orthogonalement $f$ sur ce sous-espace. Notons $S_N(f)$ le projeté :

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \langle e^{inx}, f\rangle\, e^{inx}$$

Il s'agit bien d'un élément de $F_N$, et $f - S_N(f)$ est bien orthogonale à $F_N$. En effet, pour tout $p$ compris entre –N et N :

$$\langle e^{ipx}, f - S_N(f)\rangle = \langle e^{ipx}, f\rangle - \langle e^{ipx}, S_N(f)\rangle = \langle e^{ipx}, f\rangle - \langle e^{ipx}, \sum_{n=-N}^{N} \langle e^{inx}, f\rangle\, e^{inx}\rangle$$

$$= \langle e^{ipx}, f\rangle - \sum_{n=-N}^{N} \langle e^{inx}, f\rangle \langle e^{ipx}, e^{inx}\rangle = \langle e^{ipx}, f\rangle - \langle e^{ipx}, f\rangle = 0$$

$S_N(f)$ est la somme partielle d'une série dont la somme (si la série converge) est :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle e^{inx}, f\rangle\, e^{inx}$$

On notera :

$$c_n = \langle e^{inx}, f\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, f(x)\,dx$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, f(x)\,dx$$

La série S($f$) s'appelle **série de Fourier** associée à $f$, et les coefficients $a_n$, $b_n$ et $c_n$ s'appellent **coefficients de Fourier** de $f$. Au besoin, on précisera $a_n(f)$, $b_n(f)$, $c_n(f)$. Les sommes partielles de la série s'écrivent :

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)$$

On utilise plutôt $a_n$ et $b_n$ pour une fonction $f$ à valeurs réelles et $c_n$ pour $f$ à valeurs complexes. On remarque que, si $f$ est paire, $b_n$ est nul pour tout $n$, et si $f$ est impaire, $a_n$ est nul pour tout $n$. On note parfois $c_n(f) = \hat{f}(n)$ de sorte que $\hat{f}$ désigne la suite des coefficients $c_n$.

On se pose la question de savoir :
- ❑ Pour quelles fonctions $f$ y a-t-il convergence de la série de Fourier ?
- ❑ Et y a-t-il convergence vers $f$ ?
- ❑ De quel type de convergence s'agit–il :
  - a) de la convergence pour la norme $\|\ \|_2$ ?
  - b) de la convergence simple ? Et dans ce cas, pour quels $x$ y a-t-il convergence ?
  - c) de la convergence uniforme ?

On rappelle que la convergence uniforme entraîne nécessairement les deux autres. C'est la convergence la plus forte.

Ces questions sont délicates et ont grandement conduit au XIX$^{\text{ème}}$ siècle au développement de la théorie des ensembles d'une part en ce qui concerne le point b), de l'intégrale de Lebesgue d'autre part, en ce qui concerne le point a). Dans le cas général, la série de Fourier peut converger ou non, et si elle converge, elle peut converger vers $f$ ou non. On a donc cherché à préciser des hypothèses sur $f$ assurant la convergence vers $f$.

*EXEMPLES* :

❑ Coefficients de Fourier de la fonction **signe** $\text{sg}(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \in\, ]0,\pi[ \\ -1 \text{ pour } x \in\, ]-\pi,0[ \end{cases}$ :

Cette fonction étant impaire, $a_n$ est nul pour tout $n$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\, dt = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{4}{n\pi} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La série de Fourier associée est donc $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impair}} \dfrac{\sin(nx)}{n}$. On ne se prononce pas pour le moment sur le fait de savoir si cette série converge et si elle est égale à sg($x$).

On aurait pu aussi calculer :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\,\text{sg}(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -e^{-int}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-int} - e^{int}\, dt$$

$$= -\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\, dt = -\frac{i}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{2i}{n\pi} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

❑ Coefficients de Fourier de la fonction $|x|$ sur $[-\pi, \pi]$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t| \, dt = \pi$$

et $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\, dt = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\, dt \text{ en intégrant par parties}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\frac{4}{n^2\pi} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La série de Fourier associée est $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impair}} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

❑ Coefficients de Fourier de la fonction impaire $x$ sur $]-\pi, \pi[$ :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\, dt = -2\,\frac{(-1)^n}{n} \text{ en intégrant par parties}$$

La série de Fourier associée est $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin(nx)}{n}$

❑ Coefficients de Fourier de la fonction paire $x^2$ sur $]-\pi,\pi[$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{2}{3}\pi^2$$

et $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\, dt = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} 2t\sin(nt)\, dt \text{ en intégrant par parties}$$

$$= (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

La série de Fourier associée est $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

Voici quelques propriétés des coefficients de Fourier :

**PROPOSITION**

(i) $c_n(\lambda f) = \lambda c_n(f)$ *et* $c_n(f+g) = c_n(f) + c_n(g)$

(ii) *Si f et g sont continues,* $f = g \Leftrightarrow \forall\, n,\ c_n(f) = c_n(g)$

(iii) *La suite* $\hat{f}$ *est bornée et* $\|\hat{f}\|_\infty = \text{Sup}\,\{|c_n| \mid n \in \mathbb{Z}\} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt = \|f\|_1$

(iv) $\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0$ (**lemme de Riemann-Lebesgue**)

Démonstration :

❑ (i) : évident. Cela découle de la linéarité de l'intégrale.

❑ (ii) : $\forall\, n,\ c_n(f) = c_n(g) \Rightarrow \forall\, n,\ c_n(f-g) = 0$ ce qui signifie que $f - g$ est orthogonale à toutes les exponentielles, or nous avons déjà vu que cela signifiait que, étant continue, la fonction considérée, ici $f - g$, était nulle.

Si $f$ et $g$ sont continues par morceaux, on aura $f = g$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Les deux propriétés (i) et (ii) peuvent se résumer en disant que l'application $f \to \hat{f}$ est une application linéaire injective, l'espace de départ étant ou bien l'espace vectoriel des fonctions continues $2\pi$-périodiques, ou bien l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux $2\pi$-périodique, la valeur de la fonction aux points de discontinuité étant la moyenne entre la limite à gauche et la limite à droite. En particulier, une fonction continue possédant des coefficients de Fourier tous nuls est nécessairement nulle. Nous montrerons plus loin que $\hat{f}$ appartient à $l^2$, espace vectoriel des suites $(c_n)$ telles que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ converge.

[Réciproquement, si on se donne une telle suite $c$, existe-t-il une fonction $f$ dont les coefficients de Fourier soient justement la suite $c$ (autrement dit, l'application $f \to \hat{f}$ est-elle surjective ?). La réponse est au-delà de ce qu'on peut faire dans ce chapitre. Disons simplement qu'une telle fonction existe, mais qu'elle n'est pas continue par morceaux ; elle est de carré intégrable, mais au sens de l'intégrale développée par Lebesgue au début du siècle, plus complète que l'intégrale de Riemann.]

❑ (iii) : évident.

❑ (iv) : <u>Démonstration 1</u> :
Au moyen de la relation de Chasles, on se ramène à des intervalles $[a, b]$ où $f$ est continue. On commence par montrer cette propriété pour les fonctions en escalier. Par linéarité, il suffit même de la montrer pour les fonctions constantes égales à 1 sur un intervalle $[c, d]$ quelconque :

$$\int_c^d e^{-int}\,dt = -\frac{1}{in}(e^{-ind} - e^{-inc}) \text{ qui tend vers 0 quand } n \text{ tend vers } \pm\infty.$$

Soit maintenant $f$ continue. $f$ est limite uniforme de fonctions en escalier $(f_k)$ (voir le chapitre L2/SUITESF.PDF). Alors :

$$\int_a^b f(t)e^{-int}\,dt = \int_a^b (f(t) - f_k(t))\,e^{-int}\,dt + \int_a^b f_k(t)e^{-int}\,dt$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $k$ tel que $\| f - f_k \|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. On a alors :

$$\left| \int_a^b f(t)e^{-int}\,dt \right| \leq \varepsilon + \left| \int_a^b f_k(t)e^{-int}\,dt \right|$$

Pour ce $k$, il existe N tel que, pour tout $|n| \geq N$, $\left| \displaystyle\int_a^b f_k(t)e^{-int}\,dt \right| < \varepsilon$

donc, pour $|n| \geq N$, $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)e^{-int}\,dt \right| < 2\varepsilon$ .

<u>Démonstration 2</u> :
Soit $f$ continue par morceaux :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u + \frac{\pi}{n})\,e^{-inu}\,du$$

en posant $t = u + \dfrac{\pi}{n}$ et en profitant de la périodicité des fonctions.

$$\Rightarrow \qquad c_n = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(t + \frac{\pi}{n}))\, e^{-int}\, dt$$

$$\Rightarrow \qquad |c_n| \leq \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(t) - f(t + \frac{\pi}{n})\right|\, dt$$

La suite de fonctions $\varphi_n : t \to \left|f(t) - f(t + \dfrac{\pi}{n})\right|$ que l'on intègre converge simplement vers la fonction nulle sauf éventuellement aux points $t$ où $f$ est discontinue et qui sont en nombre fini. En outre, $f$ étant bornée, il en est de même de la suite $(\varphi_n)$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (voir le chapitre L2/SUITESF.PDF) pour conclure que l'intégrale, et donc $(c_n)$, converge vers 0.

<u>Démonstration 3</u> :
Soit $f$ continue par morceaux et $\varepsilon > 0$. On peut approximer $f$ par une fonction continue g aux points de discontinuité de $f$ en prenant pour $g$ des pentes assez raides, de façon que $\| f - g \|_1 < \varepsilon$, où l'on pose $\| f - g \|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|\, dt$. On sait par ailleurs (théorème de Weierstrass pour les fonctions continues. voir les exercices du chapitre L2/EVNORME.PDF) que toute fonction $g$ continue sur un segment est limite uniforme de polynômes trigonométriques $P_k$. Soit K entier tel que $\| g - P_K \|_\infty < \varepsilon$. On a a fortiori $\| g - P_K \|_1 \leq \| g - P_K \|_\infty < \varepsilon$, donc $\| f - P_K \|_1 < 2\varepsilon$. On a alors, pour $n$ supérieur en valeur absolue au degré de $P_K$ :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - P_K)\, e^{-int}\, dt \quad \text{car } \langle e_n, P_K \rangle = 0$$

donc $|c_n| < 2\varepsilon$.

<u>Démonstration 4</u> :
Par la relation de Chasles, on se ramène à des intervalles où $f$ est continue. Sur cet intervalle, on approxime $f$ par un polynôme P uniformément à moins de $\varepsilon$ (Théorème de Weierstrass pour les fonctions continues). Pour ce polynôme, on a, en intégrant par parties :

$$\int_a^b P(t)e^{-int}\, dt = -\frac{P(b)e^{-inb}}{in} + \frac{P(a)e^{ina}}{in} + \frac{1}{in}\int_a^b P'(t)e^{-int}\, dt$$

expression qui tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini. Pour $n$ assez grand, on a donc :

$$\left|\int_a^b P(t)e^{-int}\, dt\right| < \varepsilon$$

et donc :

$$\left|\int_a^b f(t)e^{-int}\, dt\right| \leq \left|\int_a^b (f(t) - P(t))e^{-int}\, dt\right| + \left|\int_a^b P(t)e^{-int}\, dt\right|$$

$$\leq (b - a)\, \| f - P \|_\infty + \varepsilon < (b - a + 1)\, \varepsilon.$$

Démonstration 5 :
Au moyen de la relation de Chasles, on se ramène à des intervalles $[a, b]$ où $f$ est continue. Sur un tel intervalle, $f$ est uniformément continue, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon, \exists \alpha, \forall x, \forall y, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles $[t_k, t_{k+1}]$, $0 \leq k < \mathrm{N}$, de longueur strictement inférieure à $\alpha$. On a alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(t) - f(t_k))\,e^{-int}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k)e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

La deuxième somme vaut $\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} f(t_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} f(t_k)\,\frac{1}{in}\,(\exp(-int_k) - (\exp(-int_{k+1}))$, qui tend vers 0 quand $n$ tend vers $\pm\infty$ (le numérateur est borné et le dénominateur contient $n$ en facteur). On peut donc le rendre inférieur à $\varepsilon$ pour $|n|$ assez grand.

En ce qui concerne la première somme, les $f(t) - f(t_k)$ sont majorés en module par $\varepsilon$, puisque, sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, $|t - t_k|$ est inférieur à $\alpha$ et on applique l'hypothèse de continuité uniforme. Il en résulte que la première somme est majorée en module par $\varepsilon$ et que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$ est majorée par $2\varepsilon$ pour $|n|$ assez grand.

❑ On notera que si $f$ est $\mathrm{C}^1$, la démonstration est beaucoup plus simple. Il suffit en effet d'effectuer une intégration par parties, en posant $u(t) = f(t)$ et $v'(t) = e^{-int}$. On obtient alors :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = -\frac{f(\pi)e^{-in\pi}}{in} + \frac{f(-\pi)e^{in\pi}}{in} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } f(\pi)e^{-in\pi} = f(-\pi)e^{in\pi} \text{ à cause de la périodicité.}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{c_n(f) = \frac{1}{in}\,c_n(f')}$ produit d'une quantité $\frac{1}{in}$ qui tend vers 0 par une quantité $c_n(f')$ qui est bornée.

La formule ci-dessus est encore valable si $f$ est continue et $\mathrm{C}^1$ par morceaux (i.e. $f$ est continue, et il existe une subdivision $-\pi = x_0 < x_1 < ... < x_n = \pi$ telle que la restriction de $f$ à tout intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ se prolonge en une fonction $\mathrm{C}^1$ à $[x_k, x_{k+1}]$). La formule d'intégration par partie est en effet valide pour les fonctions continues $\mathrm{C}^1$ par morceaux. Cette formule repose sur le fait que $uv$ est une primitive de $\int u'v + uv' = \int (uv)'$. Or, si $u$ et $v$ sont continues $\mathrm{C}^1$ par morceaux, avec une subdivision adaptée $-\pi = x_0 < x_1 < ... < x_n = \pi$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} (uv)' = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (uv)' = \sum_{k=0}^{n-1} (uv)(x_{k+1}^-) - (uv)(x_k^+)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (uv)(x_{k+1}) - (uv)(x_k) \text{ en utilisant la continuité de } uv$$

$$= (uv)(x_n) - (uv)(x_0) = (uv)(\pi) - (uv)(-\pi)$$

La formule est fausse si $uv$ est simplement $C^1$ par morceaux, (i.e. seulement continue par morceaux ainsi que sa dérivée et pas nécessairement continue), car les termes $(uv)(x_k^+)$ et $(uv)(x_k^-)$ ne se simplifieront pas dans la somme. Il n'y a donc pas de formule d'intégration par parties pour les fonctions seulement $C^1$ par morceaux.

La relation $c_n(f') = inc_n(f)$ s'interprête en remarquant que, si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$ est la série de Fourier associée à $f$, alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n\, e^{inx}$ (obtenue en dérivant terme à terme) est la série de Fourier associée à $f'$, ce qui est somme toute fort raisonnable. Par récurrence, si $f$ est $C^k$, alors $c_n(f^{(k)}) = (in)^k\, c_n(f)$, autrement dit, $c_n(f) = o(\frac{1}{n^k})$ quand $n$ tend vers $\pm\infty$. Plus $f$ est régulière, plus ses coefficients de Fourier convergent vite vers 0. Si $f$ est $C^\infty$, ses coefficients sont dits **à convergence rapide**. Ils sont négligeables devant toute puissance de $\frac{1}{n}$.

La propriété (iv) énonce également que les suites $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$ tendent vers 0.

*EXEMPLE* :

❑ La série de Fourier de la fonction $|x|$ sur $[-\pi,\pi]$ vaut $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{\cos(nx)}{n^2}$. On remarque bien que la fonction est $C^1$ par morceaux et que les coefficients sont de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$, négligeables devant $\frac{1}{n}$.

## *II : Convergence des séries de Fourier*

Contrairement à ce qu'on a longtemps cru, la continuité par morceaux pas plus que la continuité de $f$ ne suffit à assurer la convergence de la série de Fourier vers $f$, qu'elle soit simple ou normale. Il est possible que la série de Fourier d'une fonction continue diverge en une infinité de points. Cependant, en renforçant les hypothèses, on obtient des résultats satisfaisants. Voici quelques étapes de l'histoire de cette longue quête :

- En 1821, Fourier publie son *Traité analytique de la chaleur*. Pour lui, il ne fait pas de doute que la série permet de reconstituer la fonction. Il donne plusieurs exemples mais pas de démonstration, ce qui lui sera beaucoup reproché.
- En 1829, Dirichlet donne une première démonstration, pour les fonctions continues par morceaux et monotones. La démonstration que nous donnons plus bas s'inspire directement de la démonstration de Dirichlet.
- En 1873, Du Bois-Reymond donne l'exemple d'une fonction continue pour laquelle la série de Fourier diverge en un point, réduisant à néant les espoirs de montrer que la somme de toute série

de Fourier d'une fonction continue est égale à cette fonction. On se donne alors pour objectif d'une part d'affaiblir les hypothèses données par Dirichlet, d'autre part de préciser la nature des ensembles sur lesquels une série de Fourier peut diverger.

- En 1881, Jordan étend le théorème de Dirichlet aux fonctions dites à variations bornées.
- En 1922, Kolmogorov donne un exemple de fonction intégrable dont la série de Fourier diverge en tout point.
- En 1966, Kahane et Carleson prouve que la série de Fourier de toute fonction continue converge vers cette fonction sauf sur un ensemble de mesure nulle (i.e. ensemble éventuellement infini mais qu'on peut inclure dans une réunion d'intervalles dont la somme des longueurs est arbitrairement petite. Les rationnels forment un ensemble de mesure nulle).

### 1- Convergence en moyenne quadratique

Il s'agit de la convergence pour la norme $\| \ \|_2$.

**PROPOSITION**

*Soit f continue par morceaux, 2π-périodique. Alors les sommes partielles convergent vers f pour la norme* $\| \ \|_2$.

*En outre, on dispose des formules suivantes* (**formule de Parseval**) *où* $a_n$ *et* $b_n$ *sont supposés réels :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{a_0^{\,2}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\,2} + b_n^{\,2})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \overline{c_n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) \,\mathrm{d}t = \frac{a_0\, a_0'}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n a_n' + b_n b_n')$$

*où* $d_n$, $a_n'$ *et* $b_n'$ *sont les coefficients de Fourier de la fonction g.*

Les formules de Parseval se résument également sous la forme :

$$\| \hat{f} \|_2 = \| f \|_2 \text{ et } <\hat{f}, \hat{g}> = <f, g>$$

où le produit scalaire et la norme des membres de gauche est défini dans l'espace $l^2$ des séries de carrés sommables, à savoir $\| c \|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2}$ et $<c, d> = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} d_n$.

<u>Démonstration</u> :

❑ $c_n = <e_n, f>$ est le produit scalaire de $f$ par $e_n$. Ce nombre est la composante de la projection orthogonale de $f$ sur la droite engendrée par $e_n$. Plus généralement $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx}$ est la projection de $f$ sur le sous-espace vectoriel $E_N$ engendré par $\{e_n \mid -N \le n \le N\}$. Il est en effet facile de vérifier que, pour tout $n$ élément de $[\![ -N, N ]\!]$, $e_n$ et $f - S_N$ sont orthogonaux, en rappelant que les $e_n$ sont orthonormés :

$$<e_n, S_N - f> = <e_n, S_N> - <e_n, f> = c_n - c_n = 0$$

Il en résulte également que, puisque $S_N$ et $f - S_N$ sont orthogonaux, on a :

$\| f \|_2^{\,2} = \| S_N \|_2^{\,2} + \| f - S_N \|_2^{\,2}$ d'après le théorème de Pythagore

On a en particulier :

$$\| S_N \|_2^{\,2} \le \| f \|_2^{\,2}$$

soit encore :

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \quad \textbf{(inégalité de Bessel)}$$

Quand N tend vers l'infini, on obtient :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt$$

ce qui prouve que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ est convergente, (et donne une dernière démonstration du fait que $c_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $\pm\infty$).

Il existe plusieurs méthodes pour montrer que l'inégalité précédente est en fait une égalité.

❑ Méthode 1 :

La série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|^2$ relative à la fonction $g$ est également convergente, et il en est de même de la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} d_n$ puisque $|\overline{c_n} d_n| \leq \dfrac{|c_n^2| + |d_n^2|}{2}$.

Considérons maintenant la fonction auxiliaire $h(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t+x) \, dt$. Que $f$ et $g$ soient continues ou seulement continues par morceaux, $h$ est continue. En effet, en prenant une suite quelconque convergeant à droite vers 0, on montre (théorème de convergence dominée, l'hypothèse de domination étant vérifiée par une fonction constante puisque $f$ et $g$ sont bornées) que la limite de $h$ à droite de $x$ est $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t+x^+) \, dt$, où l'on a noté $g(t+x^+)$ la limite de $g$ à droite de $t+x$. La différence entre $t \to \overline{f(t)} g(t+x^+)$ et $t \to \overline{f(t)} g(t+x)$ est une fonction en escalier, nulle sauf en un nombre fini de point. La différence des intégrales est donc nulle, de sorte que $h(x) = h(x^+)$. On montre de même que la limite à gauche est égale à $h(x)$.

Cherchons les coefficients de Fourier de $h$ :

$$< e_n, h > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \, e^{-inx} \, dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t+x) \, dt \, e^{-inx} \, dx$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \overline{f(t)} g(t+x) \, e^{-inx} \, dx dt$$

où D est le carré $[-\pi, \pi]^2$. On utilise le théorème de Fubini pour changer l'ordre d'intégration (voir L2/INTMULT.PDF). On admettra que ce théorème s'applique avec $f$ et $g$ continues par morceaux.

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \overline{f(t)} \, e^{int} g(t+x) \, e^{-in(t+x)} \, dx dt$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, e^{int} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} g(t+x)\, e^{-in(t+x)}\, dx \right] dt$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, e^{int} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-inx}\, dx \right] dt$$

en utilisant la périodicité de $g$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, e^{int}\ dt \times d_n = \overline{c_n} d_n$$

La série de Fourier associée à $h$ est donc $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} d_n\, e^{inx}$ mais cette série est normalement convergente.

Elle est donc continue. Elle possède les mêmes coefficients de Fourier que $h$. En effet :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_k} d_k\, e^{ikx}\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{c_k} d_k\, e^{ikx}\, e^{-inx}\, dx$$

car pour une série convergeant normalement sur une segment, on peut intervertir les symboles de sommation et d'intégration

$= \overline{c_n} d_n$ en utilisant l'orthogonalité de la famille $(e^{inx})$

$h$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} d_n\, e^{inx}$ étant deux fonctions continues ayant mêmes coefficients de Fourier, ces deux fonctions sont égales, propriété vue dans le I. Nous avons donc prouvé que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t+x)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n} d_n\, e^{inx}$$

Pour $x = 0$, on obtient la deuxième formule de Parseval. Pour $f = g$, on obtient la première.

Enfin, cette première formule de Parseval exprime que

$$\lim_{N\to+\infty} \| S_N \|_2 = \| f \|_2$$

puisque $\| S_N \|_2^2$ n'est autre que la somme partielle $\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$.

La relation $\| f \|_2^2 = \| S_N \|_2^2 + \| f - S_N \|_2^2$ permet donc de conclure que

$$\lim_{N\to+\infty} \| f - S_N \|_2 = 0$$

autrement dit, $S_N$ converge vers $f$ au sens de la norme $\| \ \|_2$. Nous rappelons que cela ne signifie nullement que $S_N$ converge vers $f$ pour la convergence simple ou uniforme.

Concluons en remarquant que $\| f - S_N \|_2$ n'est autre que la distance (au sens de la norme de la convergence quadratique) de $f$ au sous-espace vectoriel $E_N$ des polynômes trigonométriques engendrés par les $e^{inx}$, $-N \leq n \leq N$. En effet, pour $g$ élément de $E_N$, $S_N - g$ est encore orthogonal à $f - S_N$, de sorte que le théorème de Pythagore s'applique encore :

$$\| f - g \|_2^2 = \| S_N - g \|_2^2 + \| f - S_N \|_2^2 \geq \| f - S_N \|_2^2 \Rightarrow \| f - g \|_2 \geq \| f - S_N \|_2$$

avec égalité si et seulement si $g = S_N$.

❑ <u>Méthode 2</u> :
Le théorème de Weierstrass montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\| f - P \|_2 < \varepsilon$. Soit N un entier tel que P appartienne à $E_N$. Pour tout $n \geq N$, P appartient à $E_n$ car $E_N$ est inclus dans $E_n$. Sachant que $f - S_n$ est orthogonal à $E_n$ et donc à $S_n - P$, on a, par le théorème de Pythagore :

$$\| f - P \|_2^2 = \| S_n - P \|_2^2 + \| f - S_n \|_2^2$$

donc $\| f - S_n \|_2 \leq \| f - P \|_2 < \varepsilon$

On a montrer que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \| f - S_n \|_2 < \varepsilon$$

autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = f$ pour la norme $\| \ \|_2$.

De l'inégalité, $\big| \| f \|_2 - \| S_n \|_2 \big| \leq \| f - S_n \|_2$, on en déduit également que $\lim\limits_{n\to+\infty} \| S_n \|_2 = \| f \|_2$ ou encore, en prenant les carrés des normes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt$$

et l'on reconnaît la première formule de Parseval.

Maintenant qu'on a montré que $\| \hat{f} \|_2 = \| f \|_2$, on en déduit la seconde formule de Parseval, en utilisant la formule de polarisation (voir le chapitre L3/HERMITN.PDF) d'une part sur $\langle f, g \rangle$ et d'autre part sur $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{4} \left( \| f + g \|_2^2 - \| f - g \|_2^2 - i \| f + ig \|_2^2 + i \| f - ig \|_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \| \hat{f} + \hat{g} \|_2^2 - \| \hat{f} - \hat{g} \|_2^2 - i \| \hat{f} + i\hat{g} \|_2^2 + i \| \hat{f} - i\hat{g} \|_2^2 \right) \\ &= \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \end{aligned}$$

La formule de Parseval permet d'obtenir des séries difficiles à sommer en général.

*EXEMPLES :*

❑ Soit $f(x) = \text{sg}(x)$ sur $]-\pi, \pi[$. Sa série de Fourier associée est $\dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n \text{ impair}} \dfrac{\sin(nx)}{n}$. La formule de Parseval donne :

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1 \Rightarrow \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ou encore :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

On en déduit d'ailleurs une autre sommation :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Il est utile de connaître la somme de cette série, très courante.

❑ Soit $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. Sa série de Fourier associée est $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{\cos(nx)}{n^2}$. La formule de Parseval donne :

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

ou encore :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$

Un raisonnement comparable au précédent donne alors $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$.

❑ Soit $f(x) = x$ sur $]-\pi, \pi[$. Sa série de Fourier est $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}$. La formule de Parseval donne :

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ formule déjà vue plus haut.}$$

❑ Soit $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$. Sa série de Fourier est $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$. La formule de Parseval donne :

$$\frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{5} \text{ d'où } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

❑ La formule de Parseval correspondant au produit scalaire de $f(x) = x$ et $g(x) = \mathrm{sg}(x)$ donne :

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \,\mathrm{sg}(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ déjà rencontrée}$$

**2- Convergence normale**

**PROPOSITION :**

(i) *Soit* $S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{inx}$ *la somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur* $[-\pi, \pi]$. *Alors cette série est précisément la série de Fourier de* S.

(ii) *Soit* $f$ *continue de classe* $C^1$ *par morceaux. Alors la série de Fourier converge normalement vers f.*

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : La convergence normale permet d'échanger les symboles d'intégration sur un segment et de sommation. Donc :

$$c_n(S) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k e^{ikx}\, e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\, e^{-inx}\, dx \qquad \text{car } \sum \lambda_k e^{ikx}\, e^{-inx} \text{ converge normalement}$$

$$= \lambda_n \qquad \text{car seule l'intégrale pour } k = n \text{ est non nulle}$$

Donc la série de Fourier de S est la propre série trigonométrique ayant servi à définir S.

❑ (ii) : Nous avons vu que $c_n(f) = \dfrac{1}{in} c_n(f')$ et donc que $|c_n(f)| = \left| \dfrac{1}{in} c_n(f') \right| = \left| \dfrac{c_n(f')}{n} \right|$

$\Rightarrow \qquad |c_n(f)| \le \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\right) \qquad$ en utilisant l'inégalité $ab \le \dfrac{a^2 + b^2}{2}$

Or les deux séries de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ et $|c_n(f')|^2$ sont toutes deux convergentes. Il en est donc de même de la série de terme général $|c_n(f)|$, ce qui signifie que la série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx}$ est normalement convergente vers une fonction continue S. D'après le (i), $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx}$ est la série de Fourier de S. Donc S et $f$ sont deux fonctions continues ayant même série de Fourier. Elles sont donc égales.

*EXEMPLES* :

❑ Dans le chapitre L2/SERIENTR.DOC, on a développé en série entière la fonction qui à $x$ élément de $]-1, 1[$ associe $\dfrac{1 - x^2}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2}$, $\theta$ étant un paramètre donné, et on a trouvé :

$$\frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta)\, x^n$$

Considérons maintenant cette expression comme une égalité entre deux fonctions de $\theta$, $x$ étant le paramètre. La série trigonométrique converge normalement. Elle est donc la série de Fourier du membre de droite, et donc de la fonction $\dfrac{1 - x^2}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2}$ qui lui est égale. On a ainsi le développement en série de Fourier de $\theta \to \dfrac{1 - x^2}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2}$. En particulier, on a :

$$\forall\, x \in\, ]-1, 1[,\ \forall\, n \geq 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2} \cos(n\theta)\, d\theta = 2\pi\, x^n$$

$$\forall\, x \in\, ]-1, 1[,\ \forall\, n \geq 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2} \sin(n\theta)\, d\theta = 0$$

intégrales qu'il n'aurait pas été facile de calculer directement. D'ailleurs, que valent ces intégrales pour $|x| > 1$ ?

❑ Les hypothèses du théorème (ii) s'appliquent à la fonction $|x|$ ou $x^2$ sur $[-\pi, \pi]$. On a donc, sur cet intervalle :

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

avec les deux séries qui convergent normalement.

Pour $x = 0$, les deux formules donnent respectivement $\displaystyle\sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Pour $x = \pi$, la deuxième donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

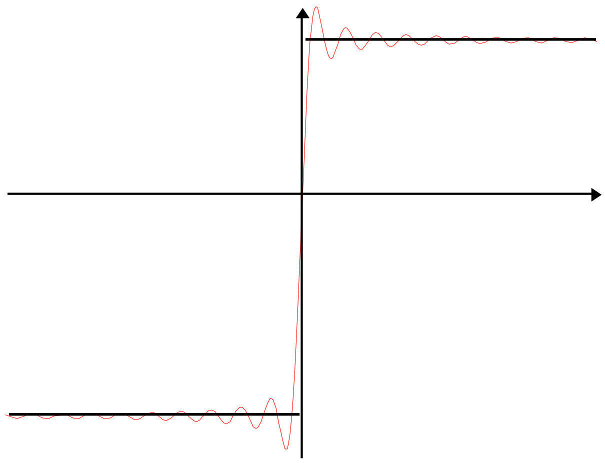
**3- Convergence simple**

Une hypothèse plus faible est contenue dans le théorème suivant :

**THEOREME DE DIRICHLET** :

*Soit f de classe* $C^1$ *par morceaux* (*mais non nécessairement continue*). *Alors la série de Fourier converge simplement vers f, aux points x en lesquels f est continue. Aux points x où f est discontinue, la série de Fourier converge vers la moyenne* $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ *des limites à gauche et à droite de f en x.*

Si $f$ est discontinue, il est impossible qu'il y ait convergence uniforme vers $f$ (puisque les sommes partielles sont continues et pas $f$) ; ci-dessous la trentième somme partielle de la série de Fourier de la fonction $\mathrm{sg}(x)$ :



<u>Démonstration</u> :
Dirichlet donna en 1829 une première démonstration de convergence des séries de Fourier. Dirichlet supposait les fonctions monotones, mais nous pouvons adapter sa démonstration à nos propres hypothèses.

❑ Soit $S_N$ une somme partielle de la série de Fourier d'une fonction de classe $C^1$ par morceaux. On a :

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}\, dt$$

Arrêtons-nous à cette expression. Elle est de la forme $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, s_N(x-t)\, dt$ avec $s_N(u) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inu}$. On peut aussi l'écrire sous la forme $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, s_N(t)\, dt$ en faisant le changement de variables $x - t \to t$ et en tenant compte de la périodicité des fonctions pour se ramener à un intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$. Il s'agit d'une intégrale de $f$ pondérée par une fonction $s_N$. On parle de **produit de convolution**. On remarque que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_N$ vaut 1. Par ailleurs, $s_N(t)$ prend la valeur $2N + 1$ lorsque $t = 0$, valeur d'autant plus grande que N est grand. Calculons plus précisément $s_N(t)$ :

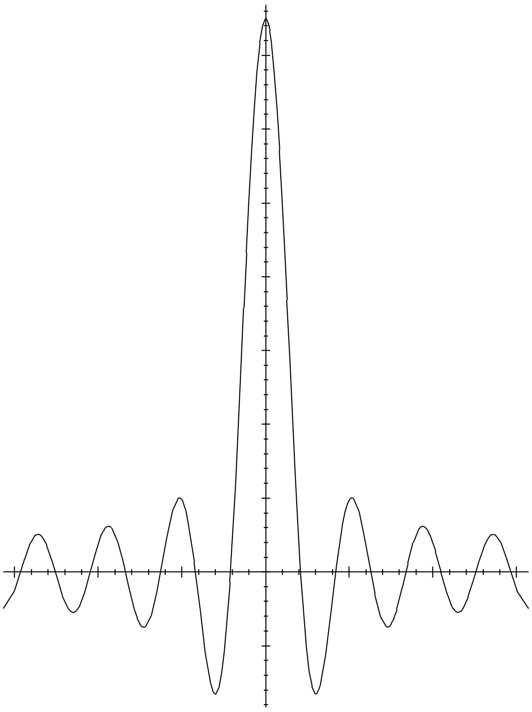
$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-int} \qquad \text{somme d'une suite géométrique de raison } e^{-it}$$

$$= e^{iNt}\,\frac{1 - e^{-i(2N+1)t}}{1 - e^{-it}} \qquad \text{pour } t \neq 0$$

$$= e^{iNt}\,\frac{e^{-i(N+1/2)t}\,2i\sin(N+\frac{1}{2})t}{e^{-it/2}\,2i\sin(\frac{t}{2})}$$

$$= \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin(Nt)\cos(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} + \cos(Nt)$$

Voici le graphe de $s_N(t)$ :



$s_N$ approxime une distribution de Dirac, impulsion ponctuelle en $t = 0$. On peut comprendre pourquoi $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, s_N(t)\, dt$ a de bonnes chances de donner une valeur proche de $f(x)$. En effet, $s_N(t)$ prend des valeurs importantes au voisinage de 0, de sorte que l'intégrale doit valoir approximativement $\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x-t)\, s_N(t)\, dt$ avec $\varepsilon$ petit. $f(x-t)$ est proche de $f(x)$ sur l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$. On obtient donc comme valeur approchée $\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)s_N(t)\, dt = f(x)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s_N(t)\, dt$. Or $\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} s_N(t)\, dt$ vaut à peu près $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_N(t)\, dt = 1$, d'où la valeur finale $f(x)$. Il nous reste à affiner ce raisonnement empirique. Commençons par tenir compte du fait que $f$ peut être discontinue en $x$, mais admet néanmoins une limite à gauche et à droite de $x$. Pour cela, coupons l'intégrale en deux :

$$\mathrm{S_N}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)\,\frac{\sin(\mathrm{N}+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)\,\frac{\sin(\mathrm{N}+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t$$

Considérons la première intégrale (respectivement la deuxième). Notons $f(x^-)$ la limite à gauche de $x$ (respectivement $f(x^+)$ sa limite à droite). On a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)\,\frac{\sin(\mathrm{N}+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (f(x-t)-f(x^+))\,\frac{\sin(\mathrm{N}+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x^+)\,\frac{\sin(\mathrm{N}+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t$$

Ecrivons $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (f(x-t)-f(x^+))\,\frac{\sin(\mathrm{N}+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t$ sous la forme (au facteur $\frac{1}{2\pi}$ près) :

$$\int_{-\pi}^{0} \frac{f(x-t)-f(x^+)}{\sin(\frac{t}{2})}\sin(\mathrm{N}+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{0} \frac{f(x-t)-f(x^+)}{\sin(\frac{t}{2})}\cos(\frac{t}{2})\sin(\mathrm{N}t)\,\mathrm{d}t$$

$$+ \int_{-\pi}^{0} (f(x-t)-f(x^+))\cos(\mathrm{N}t)\,\mathrm{d}t$$

La première intégrale fait intervenir la fonction qui, à $t$, associe $\displaystyle\frac{f(x-t)-f(x^+)}{\sin(\frac{t}{2})}\cos(\frac{t}{2})$. Cette fonction admet une limite finie quand $t$ tend vers $0^-$, à savoir $-2f\,'(x^+)$. Elle est donc continue par morceaux sur $[-\pi, 0]$. La fonction intervenant dans la deuxième intégrale, qui à $t$ associe $f(x-t) - f(x^+)$ est également continue par morceaux. Quitte à prolonger ces fonctions par la fonction nulle sur $[0, \pi]$, on peut se ramener à une intégrale entre $-\pi$ et $\pi$ et appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue vu en I-5). Ce lemme permet de conclure que les deux intégrales tendent vers 0 quand N tend vers l'infini.

Quant à $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x^+)\,\frac{\sin(\mathrm{N}+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t$, une fois mis $f(x^+)$ en facteur, il suffit de revenir aux exponentielles pour voir que :

$$\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(\mathrm{N}+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{0} \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} e^{-int}\,\mathrm{d}t = \pi$$

Cela montre donc que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)\,\frac{\sin(\mathrm{N}+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t$ tend vers $\frac{f(x^+)}{2}$ quand N tend vers $+\infty$.

On procède de même pour l'autre moitié et l'on montre ainsi que $S_N(x)$ tend vers $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ quand N tend vers $+\infty$.

*EXEMPLES* :

❑ Le théorème de Dirichlet s'applique aux fonctions $x$ et $\text{sg}(x)$ sur $]-\pi, \pi[$. Pour tout $x$ de $]-\pi, \pi[$, on a :

$$\text{sg}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}$$

Les deux séries convergent simplement, ce qui n'allait pas de soi a priori. En $\pm\pi$, la moyenne des limites à droite et à gauche des deux fonctions est nulle, et chaque série s'annule en ces points.

Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on vérifiera que les deux égalités conduisent à la relation $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$, formule déjà rencontrée dans le chapitre L2/SERIES.PDF.

❑ Si la fonction est seulement continue, il se peut que la série de Fourier diverge. Des contre-exemples sont cependant difficiles à élaborer. Une épreuve de concours CPGE CCP 2004 MP en donne un, à savoir, la fonction paire $f$ $2\pi$-périodique définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin((2^{n^3} + 1)\frac{x}{2})$$

On montre que la série de Fourier de $f$ diverge en 0. Cela n'est pas en soi un défaut des séries de Fourier, mais plutôt un défaut du procédé de sommation choisi, à savoir la limite usuelle des sommes partielles. Il existe en effet d'autres procédés de sommation permettant de donner un sens à des séries de Fourier qui divergent au sens usuel. Par exemple, Fejer a montré peu après 1900 que, si $f$ est continue par morceaux, la moyenne arithmétique des sommes partielles converge vers $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, et que, si $f$ est continue, cette moyenne converge uniformément (cette dernière propriété constituant d'ailleurs une démonstration du théorème de Weierstrass pour les fonctions continues). On dit que les sommes partielles convergent au sens de Cesaro. Le procédé de sommation de Cesaro est donc mieux adapté que le procédé usuel puisqu'il nécessite moins d'hypothèses, mais il est plus compliqué à mettre en œuvre. On peut enfin montrer que, si $f$ est continue, $f$ est égale à sa série de Fourier en tout point où celle-ci converge.

### 4- Cas des fonctions T-périodiques

Si T est la période de la fonction $f$, on note $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la **pulsation**. La fonction $t \to F(t) = f(\dfrac{t}{\omega})$ est alors périodique de période $2\pi$ et on peut lui appliquer les résultats précédents. On revient à $f$ en posant $f(x) = F(\omega x) = F(t)$, où $t = \omega x$.

On prend comme base $e^{int} = e^{i\omega nx}$, $\sin(nt) = \sin(n\omega x)$ et $\cos(nt) = \cos(n\omega x)$ sur un intervalle de longueur T, par exemple $[0, T]$. Le produit scalaire est donné par :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\mathrm{F}(t)}\ \mathrm{G}(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(\frac{t}{\omega})}\ g(\frac{t}{\omega})\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \overline{f(x)}\ g(x)\ \mathrm{d}x \text{ avec } x = \frac{t}{\omega}$$

Les coefficients de Fourier sont :

$$c_n = \langle e^{i\omega nx}, f\rangle = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-in\omega x}\ f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$a_0 = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \cos(n\omega x)\ f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \sin(n\omega x)\ f(x)\ \mathrm{d}x$$

En particulier, pour une fonction périodique de période 1, on a :

$$c_n = \langle e^{2i\pi nx}, f\rangle = \int_0^1 e^{-2i\pi nx}\ f(x)\ \mathrm{d}x$$

La série de Fourier associée à $f$ est $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ e^{in\,\omega x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)$. Celle-ci converge vers $f$ pour la norme $\|\ \ \|_2$. Si $f$ est continue $\mathrm{C}^1$ par morceaux, la série converge normalement vers $f$. Si $f$ est non continue mais $\mathrm{C}^1$ par morceaux, alors la série converge simplement vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. On dispose de la formule de Parseval :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} |f(x)|^2\ \mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n}\ d_n = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \overline{f(x)}g(x)\ \mathrm{d}x = \frac{a_0\ a_0'}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_na_n' + b_nb_n')$$

Le terme constant $\frac{a_0}{2}$ est la valeur moyenne de $f$ sur une période.

La formule de Parseval possède une interprétation physique. Si $f$ représente une intensité de courant par exemple, la formule $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)$ obtenue dans les cas favorables exprime le fait qu'une intensité périodique peut s'obtenir comme superposition de courant sinusoïdaux. $\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} |f(x)|^2\ \mathrm{d}x$ est proportionnel à la puissance moyenne au cours d'une période, alors que $\frac{a_0^2}{4}$ est proportionnel à la puissance du courant continu, $\frac{1}{2}\ a_n^2$ est proportionnel à la puissance moyenne du courant en $\cos(n\omega x)$, $\frac{1}{2}\ b_n^2$ est proportionnel à la puissance moyenne du courant en $\sin(n\omega x)$. Ainsi, la formule de Parseval exprime que la puissance totale est la somme des puissances de chaque harmonique.

*EXEMPLE* :

❑ Pour tout $x$ élément de [0, 1], on a :

$$x(1-x) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^3} = \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{\pi^2 n^2}$$

Pour la première égalité, on considère la fonction 2-périodique et impaire, égale à $x(1-x)$ sur [0, 1]. On a alors $a_n = 0$ pour tout $n$ et :

$$b_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = ... = \begin{cases} \dfrac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3} = 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{8}{n^3\pi^3} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour la seconde égalité, on considère la fonction 1-périodique égale à $x(1-x)$ sur [0, 1]. Remarquer alors que la fonction est paire, donc $b_n = 0$ pour tout $n$ et :

$$\frac{a_0}{2} = \int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

$$\forall\, n \geq 1,\ a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x = ... = -\frac{1}{n^2\pi^2}$$

Les deux fonctions étant continues et $C^1$ par morceaux, elles sont égales à leur développement en série de Fourier.

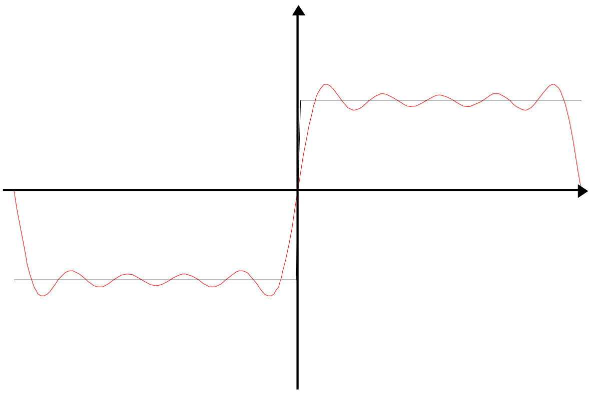
Cet exemple ne remet pas en cause le fait qu'une fonction n'a qu'un seul développement en série de Fourier. En effet, les deux développements obtenus s'appliquent à deux fonctions différentes, l'une impaire, l'autre paire, même si ces deux fonctions coïncident sur [0, 1].

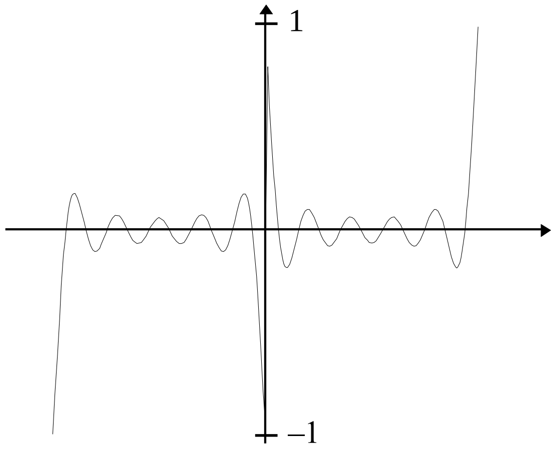
### *Annexe I : Quelques représentations graphiques*

On représente ci-dessous les trois types de fonctions les plus courantes qu'on puisse rencontrer, ainsi qu'une somme partielle de leur série de Fourier, pour $x$ variant de $-\pi$ à $\pi$. On trace également à droite la différence des deux (dans ce cas, on ne prend pas de repère orthonormé) :

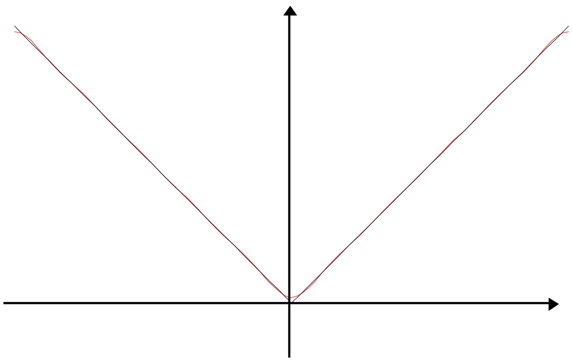
❑ $sg(x)$ et $\dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$

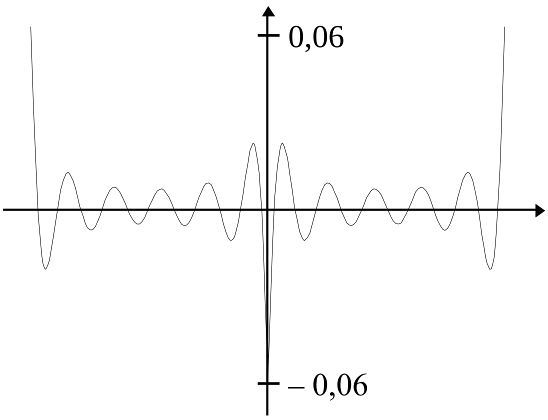
La fonction est $C^1$ par morceaux. Il y aura convergence simple sans convergence uniforme, et la série converge lentement (terme général en $\frac{1}{n}$). L'approximation est médiocre. Augmenter le nombre de termes ne fait pas diminuer l'écart entre la première oscillation et la fonction au voisinage du point de discontinuité (phénomène dit **de Gibbs**. Voir la partie *Exercices*) :






❑ $|x|$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{4}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$. La convergence de la série est normale, donc uniforme, comme il convient pour une fonction continue $C^1$ par morceaux. L'approximation est bonne sur tout l'intervalle, même avec peu de termes. On notera que, dans le deuxième graphique, la différence $y$ entre fonction et somme partielle varie de – 0,06 à 0,06 alors qu'il variait de –1 à 1 dans le cas précédent.

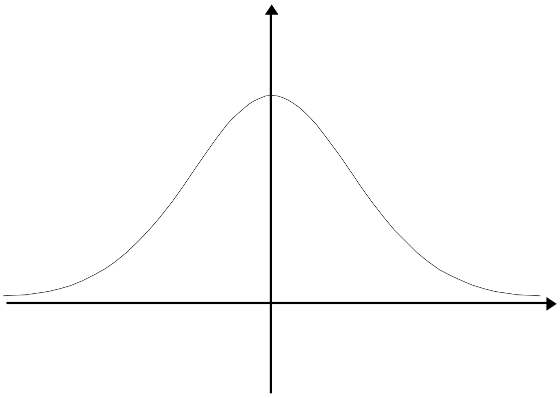


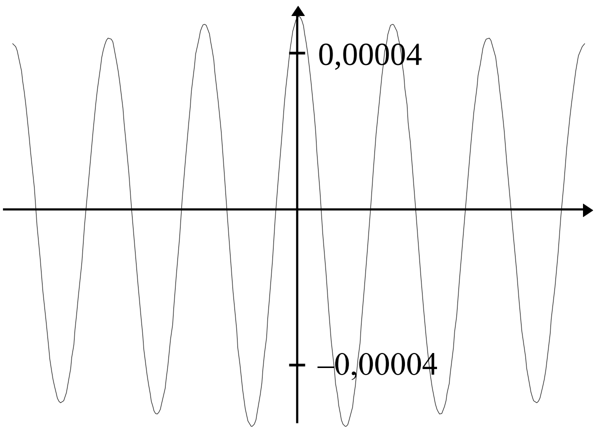



❑ $\exp(\cos(x))$ et $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{10} a_n \cos(nx)$. La fonction est $C^\infty$ donc les coefficients de Fourier tendent vers 0 très rapidement. Les valeurs approchées des $a_n$ sont, à partir de $n = 0$ :

2.532131755
1.130318208
0.2714953395
0.04433684985
0.005474240438
0.0005429261447
0.00004497732298
0.000003198436413
0.0000001992125295
0.00000001103672340
0.0000000005506384482

La convergence de la série est normale et l'approximation excellente. On ne voit qu'un seul graphique dans le premier dessin. La différence des deux fonctions est inférieure à $10^{-10}$ et n'est pas visualisable à l'écran. On se limite donc aux cinq premières harmoniques pour le deuxième graphique, avec une différence très faible.






### ***Annexe II : quelques sommes de séries***

On donne ci-dessous sans preuve quelques séries de Fourier. La plupart sont prouvables avec les éléments développés dans ce chapitre, mais pas toutes. On trouvera certaines démonstration dans le cours ou dans la partie exercices.

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1}{2}\,\frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\cos(x) + 1} \qquad \text{pour } |r| < 1,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1 - r\cos(x)}{r^2 - 2r\cos(x) + 1} \qquad \text{pour } |r| < 1,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{r\cos(x) - r^2}{r^2 - 2r\cos(x) + 1} \qquad \text{pour } |r| < 1,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(nx) = \frac{r\sin(x)}{r^2 - 2r\cos(x) + 1} \qquad \text{pour } |r| < 1,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos(nx)}{n} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{r^2 - 2r\cos(x) + 1} \qquad \text{pour } |r| < 1,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin(nx)}{n} = \arctan \frac{r\sin(x)}{1 - r\cos(x)} \qquad \text{pour } |r| < 1,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = \ln \frac{1}{|2 \sin(x/2)|} \qquad x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n} = \ln\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \qquad \text{sur } ]-\pi, \pi[$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1} = -\frac{1}{2}\ln(\tan(\frac{x}{2})) \qquad \text{sur } ]0, \pi[$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{sur } ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = -\frac{1}{2}\ln(\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})) \qquad \text{sur } ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{sur } ]0, \pi[$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2} \qquad \text{sur } ]0, 2\pi[$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{sg}(x) \qquad \text{sur } ]-\pi, \pi[$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \qquad \text{sur } ]0, \pi[$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{x}{2} \qquad \text{sur } ]-\pi, \pi[$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12} \qquad \text{sur } [0, 2\pi]$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2-2\pi x}{8} \qquad \text{sur } ]0, \pi[$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{6x^2-6\pi x+\pi^2}{24} \qquad \text{sur } ]0, \pi[$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2-3x^2}{12} \qquad \text{sur } [-\pi, \pi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2-x} \ln(\tan(\frac{t}{2}))\,dt \qquad \text{sur } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impair}} \frac{\cos(nx)}{n^2} = |x| \qquad \text{sur } [-\pi, \pi]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} = -\int_0^{x} \ln(2\sin(\frac{t}{2}))\,dt \qquad \text{sur } [0,2\pi]$$

$$\sum_{n \text{ impair}} \frac{\sin(nx)}{n^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{x} \ln(\tan(\frac{t}{2}))\,dt \qquad \text{sur } [0, \pi]$$

$$\sum_{n\text{ pair}} \frac{\sin(nx)}{n^2} = -\frac{1}{2}\int_0^x \ln(2\sin(t))\,dt \qquad \text{sur } [0, \pi]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n^2} = \int_0^x \ln(2\cos\frac{t}{2})\,dt \qquad \text{sur } [-\pi, \pi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = \frac{\pi x}{4} \qquad \text{sur } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{\pi x - x^2}{2} \qquad \text{sur } [0, \pi]$$

$$\sum_{n\text{ impair}} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{\pi x}{4} \qquad \text{sur } [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sum_{n\text{ pair}} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{\pi x - 2x^2}{4} \qquad \text{sur } [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(nx)}{n^2} = \frac{\pi x}{4} \qquad \text{sur } [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)\sin(nk)}{n^2} = \frac{k(\pi - h)}{2} \qquad \text{pour } 0 \le k \le h \le \pi,\ h + k \le \pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nx)}{n^3} = \frac{x^3 - \pi^2 x}{12} \qquad \text{sur } [-\pi, \pi]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} \qquad \text{sur } [0, 2\pi]$$

$$\sum_{n\text{ impair}} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \frac{\pi^2 x - \pi x^2}{8} \qquad \text{sur } [0, \pi]$$

$$\sum_{n\text{ pair}} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \frac{2x^3 - 3\pi x^2 + \pi^2 x}{24} \qquad \text{sur } [0, \pi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2 - x} \int_0^p \ln(\tan(\frac{t}{2}))\,dt\,dp + \sum_{n\text{ impair}} \frac{1}{n^3}$$

$$\text{sur } [0, \pi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3} = \frac{\pi x(\pi - x)}{8} \qquad \text{sur } [0, \pi]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3} = \int_0^x \int_0^p \ln(2\sin\frac{t}{2})\,dt\,dp + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad \text{sur } [0, 2\pi]$$

$$\sum_{n\text{ impair}} \frac{\cos(nx)}{n^3} = \frac{1}{2}\int_0^x \int_0^p \ln(\tan\frac{t}{2})\,dt\,dp + \sum_{n\text{ impair}} \frac{1}{n^3} \qquad \text{sur } [0, \pi]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(nx)}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} - \int_0^x \int_0^p \ln(2 \cos \frac{t}{2})\, dt\, dp \quad \text{sur } [0, 2\pi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3 - 4\pi x^2}{32} \qquad \text{sur } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4} = \frac{8\pi^4 - 60\pi^2 x^2 + 60\pi x^3 - 15x^4}{720} \qquad \text{sur } [0, 2\pi]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(nx)}{n^4} = \frac{2\pi x^3 - 3x^4}{6} \qquad \text{sur } [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n+\alpha} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-x)\alpha} \qquad \text{sur } ]0, 2\pi[$$

$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin(\pi\alpha)}{(\alpha^2 - n^2)\pi} \cos(nx) \qquad \text{sur } [-\pi,\pi]$$

$$\text{cotan}(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \text{ ou } \text{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}$$

$$\frac{1}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{1}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{(\alpha^2 - n^2)\pi} \qquad \text{pour } \alpha \in ]-1, 1[$$

ou $$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} \qquad \text{sur } [-\pi, \pi]$$

$$\sin(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \qquad \text{sur } ]0, \pi[$$

$$\cos(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2nx) \qquad \text{sur } ]0, \pi[$$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x + n\pi)^2} \qquad \text{sur } ]0, \pi[$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{z^2 + n^2} = \frac{\pi \text{ch}(xz)}{2z\text{sh}(\pi z)} + \frac{1}{2z^2} \qquad \text{sur } [-\pi, \pi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1 + n^2} = \frac{\pi \text{ch}(x - \pi)}{2\text{sh}(\pi)} + \frac{1}{2} \qquad \text{sur } [0, 2\pi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin(nx)}{z^2 + n^2} = \frac{\pi \text{sh}(xz)}{2\text{sh}(\pi z)} \qquad \text{sur } ]-\pi, \pi[$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{z^2 - n^2} = \frac{\pi\cos(xz)}{2z\sin(\pi z)} + \frac{1}{2z^2}$$ pour $x \in [-\pi, \pi]$, $z \notin \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n \sin(nx)}{z^2 - n^2} = \frac{\pi\sin(xz)}{2\sin(\pi z)}$$ pour $x \in ]-\pi, \pi[$, $z \notin \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\operatorname{th}(\pi)} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\operatorname{sh}(\pi)} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2} = \frac{\pi}{2z\operatorname{th}(\pi z)} + \frac{1}{2z^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2-n^2} = \frac{\pi}{2z\tan(\pi z)} + \frac{1}{2z^2}$$ $z \notin \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2+n^2} = \frac{\pi}{2z\operatorname{sh}(\pi z)} + \frac{1}{2z^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2-n^2} = \frac{\pi}{2z\sin(\pi z)} + \frac{1}{2z^2}$$ $z \notin \mathbb{Z}$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$$ $z \notin \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^4}{960}$$

## *Exercices*

**1- Enoncés**

**Exo.1)** a) Quel est le développement en série de Fourier de la fonction définie sur $]-\pi, \pi[$ par $\frac{x^3 - \pi^2 x}{12}$ ?

b) En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

c) Donner la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

**Exo.2) Le phénomène de Gibbs** : Soit $f$ la fonction périodique de période $2\pi$ définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

a) Donner son développement en série de Fourier.

b) Que donne l'identité de Parseval ?

c) On pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$. Calculer la dérivée de $S_n(x)$ et déterminer le plus petit $x$ positif qui annule cette dérivée. Soit $x_n$ ce nombre.

d) Déterminer $\lim_{n\to\infty} S_n(x_n) - f(x_n)$ et vérifier numériquement que cette limite est non nulle.

Approximer $f$ par une somme partielle $S_n$ de sa série de Fourier n'empêchera pas l'apparition d'un écart quasi constant entre $S_n$ et $f$ au voisinage de la discontinuité de $f$, même si on augmente la valeur de $n$.

**Exo.3)** Soit $0 < h < \pi$ et $f$ $2\pi$-périodique, affine par morceaux, dont le graphe sur $[-\pi, \pi]$ est constitué des segments de droite joignant les points $(-\pi, 0)$, $(-h, 0)$, $(0, \frac{1}{h})$, $(h, 0)$, $(\pi, 0)$.

a) Quel est le développement en série de Fourier de $f$ ?

b) En déduire l'expression de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nh)}{n^2}$ sur $[0, \pi]$.

c) Que vaut $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(nx)}{n^4}$, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ?

**Exo.4)** Soit $z$ un nombre complexe non entier. On considère $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(t) = \exp(izt)$. On pose $\sin(zt) = \frac{e^{izt} - e^{-izt}}{2i}$, $\mathrm{sh}(zt) = \frac{e^{zt} - e^{-zt}}{2}$, $\cos(zt) = \frac{e^{izt} + e^{-izt}}{2}$, $\mathrm{ch}(zt) = \frac{e^{zt} + e^{-zt}}{2}$, $\tan(zt) = \frac{\sin(zt)}{\cos(zt)}$, $\mathrm{th}(zt) = \frac{\mathrm{sh}(zt)}{\mathrm{ch}(zt)}$, $\mathrm{cotan} = \frac{1}{\tan}$, $\mathrm{coth} = \frac{1}{\mathrm{th}}$.

a) Développer $f$ en série de Fourier.

b) En déduire, $\cos(zt)$ et $\sin(zt)$ sous forme de séries trigonométrique en $t$ sur $]-\pi, \pi[$.

c) Montrer que $\frac{1}{\tan(z\pi)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$ et $\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}$.

d) En déduire également les valeurs de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ et $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2}$.

e) Donner les valeurs de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 + n^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{z^2 - (2n+1)^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{z^2 + (2n+1)^2}$.

f) Montrer que, pour $t$ appartenant à $]0, \pi[$ : $1 = \frac{\sin(t)}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi} + \frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi}\right)$. En déduire la valeur de l'**intégrale de Dirichlet** $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

**Exo.5)** Soit $c_n(f)$ les coefficients de Fourier complexes de la fonction $2\pi$-périodique $f$. Quels sont les coefficients de Fourier des fonctions suivantes ?

a) $\overline{f}$

b) $x \to e^{ikx} f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $x \to f(x + a)$

d) $x \to f(-x)$

e) $x \to \overline{f(-x)}$

f) $x \to \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} f\left(\frac{x}{\mathrm{N}} + \frac{2k\pi}{\mathrm{N}}\right)$, $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$

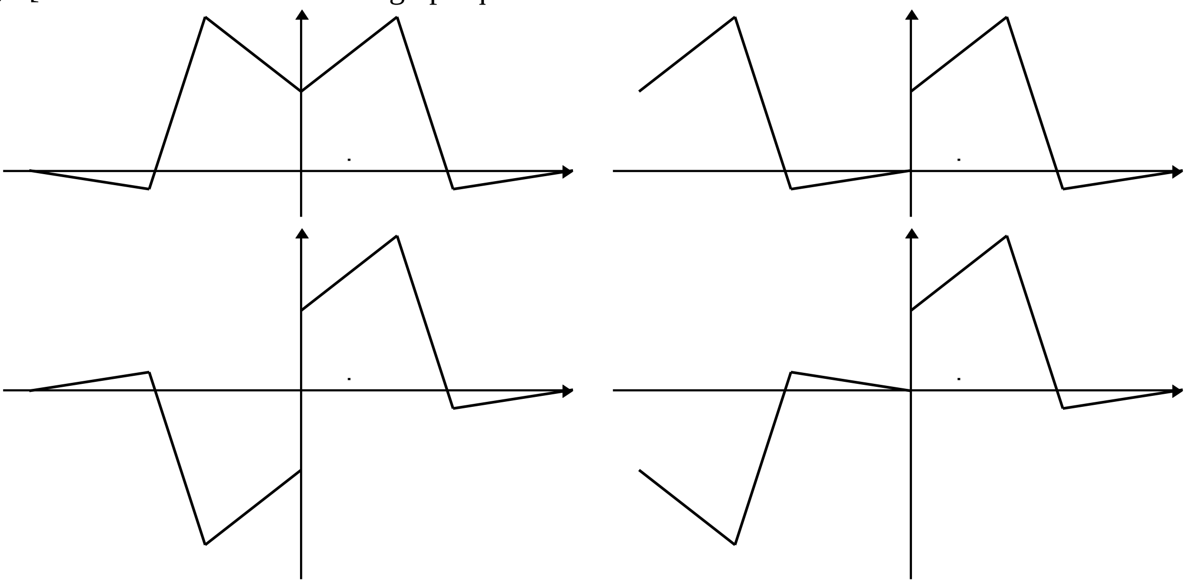
**Exo.6)** a) La famille des fonctions $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthogonale maximale dans l'espace des fonctions continues par morceaux $2\pi$-périodiques sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il est impossible de trouver une fonction continue par morceaux orthogonale à cette famille, à l'exception des fonctions nulles sauf en un nombre fini de points. Il est de même de la réunion des familles $(\cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ puisque celle-ci engendre les $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$. Utiliser ce résultat pour montrer que :

a) La famille $(\cos(nx))_{n\in\mathbf{N}}$ ***seule*** est orthogonale maximale pour le produit scalaire $<f, g> = \int_0^\pi \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$ dans l'espace des fonctions continues par morceaux π-périodiques.

b) La famille $(\sin(nx))_{n\in\mathbf{N}}$ ***seule*** est orthogonale maximale pour le même produit scalaire dans le même espace.

c) Exprimer $\sin(x)$ comme série de la famille (a) et $\cos(x)$ comme série de la famille (b) sur $]0, \pi[$ (Si ! Si ! C'est possible !).

**Exo.7)** Soit $f$ définie sur $]0, \pi[$ à valeurs réelles. Il y a quatre façons naturelles de prolonger $f$ sur $]-\pi, \pi[$ comme on le voit dans les graphiques ci-dessous.



On prolonge ensuite $f$ en une fonction 2π-périodique. Que peut-on dire des coefficients de Fourier $a_n$ et $b_n$ de $f$ sur $]-\pi, \pi[$ dans chacun des quatre cas ?

**Exo.8)** On admettra que $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}$ (prouvé dans un précédent exercice). Soient deux réels $a$ et $b$ tels que $0 < a < b < \pi$.

a) Que vaut $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\, dt$ ?

b) Que vaut $\lim_{n\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\, dt$ ?

c) Soit $f$ de classe $C^1$. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t) \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\, dt$ ? $\lim_{n\to\infty} \int_0^b f(t) \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\, dt$ ?

**Exo.9)** On considère l'équation différentielle $xy'' + y' - xy = 0$, où $y$ est fonction de $x$.

a) Chercher la solution développable en série entière, telle que $y(0) = 1$.

b) On va chercher une expression de $y$ sous forme d'intégrale. Pour cela, $x$ étant donné, on considère la fonction $g$ définie par $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \sqrt{2}}{2^n\, n!} \cos(nt)$. Calculer $g(t)$ et expliquer comment retrouver $y$ à partir de $g$.

c) En déduire $y$ sous forme d'intégrale. Simplifier l'expression trouvée et prouver que

$y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp(x\cos(t))\, dt$

**Exo.10)** Soit $f : x \in \mathbf{R} - 2\pi\mathbf{Z} \to \frac{1}{2}\text{cotan}(\frac{x}{2})$

a) Montrer que, pour tout $n$ entier strictement positif, $f(x)\sin(nx)$ est intégrable sur $]0,2\pi[$.

b) On pose $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$. Calculer $b_1$ et $b_{n+1} - b_n$. En déduire la valeur de $b_n$ pour tout $n$.

c) A-t-on $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ ?

**Exo.11)** Fourier, dans son *Traité analytique de la Chaleur* (1822), s'est posé le problème suivant. Considérons le domaine plan $\{(x, y) \mid x \geq 0, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$. En chaque point de ce domaine est définie une température T vérifiant

(i) $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$

(ii) $\forall\, x > 0$, $T(x, \frac{\pi}{2}) = T(x, -\frac{\pi}{2}) = 0$

(iii) $\forall\, y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $T(0, y) = 1$.

Fourier se propose de trouver une solution T.

a) Quelles sont les solutions de (i) et (ii) de la forme $f(x)g(y)$ avec $g$ paire ? Lesquelles ont physiquement un sens ?

b) Fourier considère une fonction T s'exprimant comme série de fonctions trouvées précédemment de façon à vérifier la condition (iii). Trouver une expression de T.

## 2- Solutions

**Sol.1)** a) La fonction est impaire donc $a_n = 0$. On trouvera ensuite $b_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$. La fonction est continue et $C^1$ par morceaux, donc on a l'égalité :

$$\forall\, x \in [-\pi, \pi],\ \frac{x^3 - \pi^2 x}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$$

avec convergence normale de la série.

b) Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$-\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2})$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. Cette formule est remarquable, dans le sens où on n'en possède pas pour la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$.

c) On applique la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{x^3 - \pi^2 x}{12})^2 \,dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

d'où, après le calcul de l'intégrale :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

**Sol.2)** On prendra garde qu'on a donné une définition de $f$ sur $]0, 2\pi[$ et qu'il convient donc de calculer ses coefficients de Fourier en prenant une intégrale $\int_0^{2\pi}$ et non $\int_{-\pi}^{\pi}$, ou bien utiliser l'expression de $f$ sur $]-\pi, 0[$ (ou même sur $]-2\pi, 0[$) qui est égale par périodicité à $\frac{-\pi - x}{2}$.

a) On remarquera que $f$ est impaire. Donc $a_n = 0$ pour tout $n$ et :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(nx) \,dx = \frac{1}{n}$$

La fonction $f$ est $C^1$ par morceaux. Le théorème de Dirichlet permet de conclure que :

$$\forall\, x \in\, ]0, 2\pi[,\ \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

b) L'identité de Parseval donne $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 \,dt = \frac{\pi^2}{12} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

c) $S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \mathrm{Re}(e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}) = \mathrm{Re}(e^{ix} \frac{e^{inx/2}}{e^{ix/2}} \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})})$

$$= \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Cette dérivée s'annule si et seulement si $\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ soit $\left(n+\frac{1}{2}\right)x = \frac{x}{2} + 2k\pi$ ou bien $\left(n+\frac{1}{2}\right)x = \pi - \frac{x}{2} + 2k\pi$, ce qui donne respectivement $x = \frac{2k\pi}{n}$ dont la valeur minimale positive vaut $\frac{2\pi}{n}$, ou bien $\frac{(2k+1)\pi}{n+1}$ dont la valeur positive minimale est $\frac{\pi}{n+1}$. C'est cette dernière valeur que l'on cherche.

d) $S_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\frac{k}{n+1}}$ et l'on reconnaît une somme de Riemann qui tend vers $\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t}\, dt = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ quand $n$ tend vers l'infini.

Donc $\lim_{n\to\infty} S_n(x_n) - f(x_n) = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\, dt - \frac{\pi}{2} \approx 0,28114$

**Sol.3)** a) On vérifiera que la série de Fourier de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{\sin^2\left(\frac{nh}{2}\right)}{\pi h^2 n^2} \cos(nx)$. $f$ étant continue et $C^1$ par morceaux, il y a égalité entre $f$ et sa série de Fourier.

b) Pour $x = 0$, on obtient $\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{\sin^2\left(\frac{nh}{2}\right)}{\pi h^2 n^2} = \frac{1}{h}$, donc en remplaçant $h$ par $2h$, on a, après regroupement des termes :

$$\forall\, h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nh)}{n^2} = \frac{\pi h - h^2}{2}$$

Les deux membres étant invariant par la transformation $h \to \pi - h$, la formule est valide également sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Les deux membres étant continus (la série converge normalement), l'égalité est valide en 0 et en $\pi$.

c) On applique l'identité de Parseval, ce qui donne :

$$\frac{1}{4\pi^2} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4\left(\frac{nh}{2}\right)}{\pi^2 h^4 n^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^{0} \frac{(x+h)^2}{h^4}\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^h \frac{(h-x)^2}{h^4}\, dx$$

$$= \frac{1}{3\pi h}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(\frac{nh}{2})}{n^4} = \frac{\pi h^3}{24\pi} - \frac{h^4}{32}$$

Remplaçons $\frac{h}{2}$ par $x$. Pour tout $x$ élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(nx)}{n^4} = \frac{\pi x^3}{3} - \frac{x^4}{2}$$

**Sol.4)** a) $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(izt - int)\, dt = \frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^n}{iz - in}(\exp(iz\pi) - \exp(-iz\pi)) = (-1)^n \frac{\sin(z\pi)}{\pi(z-n)}$

$f$ est continue par morceaux sur $]-\pi, \pi[$, donc le théorème de Dirichlet donne :

$$\forall\ t \in\ ]-\pi, \pi[,\ \exp(izt) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(z\pi)}{\pi(z-n)} \exp(int)$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\exp(izt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\exp(int)}{z-n} + \frac{\exp(-int)}{z+n}\right)$$

ou :

$$\boxed{\exp(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2} (2z\cos(nt) + 2in\sin(nt))}$$

Pour $t = \pm\pi$, $\frac{\exp(iz\pi) + \exp(-iz\pi)}{2} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(z\pi)}{\pi(z-n)}$ qu'on peut écrire sous la forme

$$\boxed{\cos(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + 2\,\frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2}}$$

b) $\exp(izt)$ est la somme de la fonction paire $\cos(zt)$ et de la fonction impaire $i\sin(zt)$ de la variable $t$, donc en séparant sa série en la partie paire et la partie impaire, on obtient :

$$\boxed{\forall\ t \in\ ]-\pi, \pi[,\ \cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + 2\,\frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}\ z\cos(nt)}$$ pour la partie paire

$$\boxed{\forall\ t \in\ ]-\pi, \pi[,\ \sin(zt) = 2\,\frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}\ n\sin(nt)}$$ pour la partie impaire

c) En divisant le développement de $\cos(\pi z)$ trouvé en a) par $\sin(\pi z)$, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}}$$

On prend ensuite la formule de $\cos(zt)$ pour $t = 0$, et on divise les deux membres pas $\sin(\pi z)$. Cela donne :

$$\boxed{\frac{1}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}}$$

Remarquer l'analogie entre les développements, mais avec ici une alternance de signe pour le sinus

*REMARQUE* :

❑ En développant pour $|z| < 1$ chaque terme $\frac{z}{z^2 - n^2} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k-1}}{n^{2k}}$, on obtient, si on admet la permutation des symboles de sommation :

$$\text{cotan}(\pi z) = \frac{1}{\pi z} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k-1}}{n^{2k}} = \frac{1}{\pi z} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)\,z^{2k-1}$$

où $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ (séries de Riemann). En calculant un développement limité de $\text{cotan}(z)$ au voisinage de $z = 0$ à l'ordre 2N, on en déduit les valeurs de $\zeta(2k)$ pour $k \leq$ N. Cela explique que l'on puisse calculer toute valeur demandée de $\zeta(2k)$. Rappelons qu'on ne connaît aucune méthode pour calculer les $\zeta(2k + 1)$. Par exemple :

$$\text{cotan}(\pi z) = \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} - \frac{\pi^3 z^3}{45} - \frac{2\pi^5 z^5}{945} + o(z^5) \text{ donc } \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \text{ etc...}$$

d) On a :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z(-1)^n}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

On peut dériver termes à termes ces deux séries. En effet, au voisinage de tout $z$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{2z}{z^2 - n^2}$ ou $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$ est le terme général d'une série qui converge normalement. On obtient alors respectivement :

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}}$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\tan(\pi z)\sin(\pi z)}}$$

e) ❑ Remplaçons $z$ par $iz$ dans le développement de $\frac{1}{\tan(\pi z)}$. On obtient :

$$\frac{1}{\tan(i\pi z)} = \frac{1}{i\pi z} - \frac{2iz}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2} = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{iz\tan(i\pi z)} - \frac{1}{2z^2}$$

qui sécrit aussi, en ajoutant le terme manquant pour $n = 0$ et en remarquant que $\cos(iz) = \mathrm{ch}(z)$ et $\sin(iz) = i\mathrm{sh}(z)$, et donc $\tan(iz) = i\mathrm{th}(z)$ :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{z\mathrm{th}(\pi z)} + \frac{1}{2z^2}}$$

❑ En particulier, pour $z = 1$ :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\mathrm{th}(\pi)} + \frac{1}{2}}$$

❑ On procède de même avec le développement de $\frac{1}{\sin(i\pi z)}$, ce qui conduit à :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 + n^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{z\mathrm{sh}(\pi z)} + \frac{1}{2z^2}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\mathrm{sh}(\pi)} + \frac{1}{2}}$$

❑ Pour $t = \frac{\pi}{2}$ dans le développement de $\sin(zt)$ (le même remplacement dans celui de $\cos(zt)$ redonne une des formules déjà énoncées), on obtient :

$$\sin(\frac{z\pi}{2}) = 2 \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2} \; n\sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$= -2 \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{z^2 - n^2} \; n\sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$= -2 \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - (2n+1)^2} \; (2n+1) \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2})$$

$$= 2 \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{z^2 - (2n+1)^2}$$

donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{z^2 - (2n+1)^2} = \frac{\pi}{4\cos(\frac{z\pi}{2})}$$

❑ Remplaçant $z$ par $iz$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{z^2+(2n+1)^2} = \frac{\pi}{4\mathrm{ch}(\frac{z\pi}{2})}$$

f) On prend la formule du d) $\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^n}{z+n} + \frac{(-1)^n}{z-n})$, on remplace $\pi z$ par $t$, et on multiplie les deux membres par $\dfrac{\sin(t)}{\pi}$. On obtient :

$$1 = \frac{\sin(t)}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^n\sin(t)}{t+n\pi} + \frac{(-1)^n\sin(t)}{t-n\pi}) = \frac{\sin(t)}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi} + \frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi})$$

On intègre sur $]0, \pi[$. Remarquer que la série converge normalement, ce qui permet de permuter les symboles de sommation et d'intégration :

$$\pi = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi} + \frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi})\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-n\pi}^{(-n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

en changeant de variable dans les deux intégrales

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

en changeant d'indice dans la deuxième série

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$ en utilisant la relation de Chasles

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$ la fonction à intégrer étant paire

donc :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

De multiples démonstrations de la valeur de l'intégrale de Dirichlet. Voir le chapitre L2/SERIES.PDF.
On trouvera des démonstrations de certaines des formules précédentes en utilisant la notion de fonctions holomorphes dans le chapitre L3/HOLOMRPH.PDF.

**Sol.5)** Appliquer la définition du calcul du coefficient de Fourier $c_n$ et effectuer des changements de variables. On se borne ici à prouver le f).

a) $\overline{c_{-n}(f)}$
b) $c_{n-k}(f)$

c) $e^{ina}\, c_n(f)$
d) $c_{-n}(f)$
e) $\overline{c_n(f)}$
f) Le coefficient de Fourier demandé vaut :

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\, f\left(\frac{x}{N}+\frac{2k\pi}{N}\right) dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{2k\pi/N}^{2(k+1)\pi/N} e^{-in(Nu-2k\pi)}\, f(u)\, du$$

avec $u = \dfrac{x}{N}+\dfrac{2k\pi}{N}$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{2k\pi/N}^{2(k+1)\pi/N} e^{-inNu}\, f(u)\, du \qquad \text{car } e^{2ink\pi}=1$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inNu}\, f(u)\, du \qquad \text{en se ramenant à l'intervalle } [0, 2\pi] \text{ par périodicité}$$

$$= c_{nN}(f)$$

**Sol.6)** a) Soit $f$ continue par morceaux $\pi$-périodique telle que, $\forall\, n$, $<\cos(nx), f> = 0$. donc :

$$\forall\, n,\ \int_0^{\pi} \cos(nt)\, f(t)\, dt = 0$$

On considère la fonction $g$ $2\pi$-périodique, paire, égale à $f$ sur $]0, \pi[$. On a alors :

$$\forall\, n,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\, g(t)\, dt = 2\int_0^{\pi} \cos(nt)\, g(t)\, dt = 0$$

et $\quad \forall\, n,\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\, g(t)\, dt = 0 \quad$ (intégration d'une fonction impaire)

donc $g$ est orthogonale sur $[-\pi, \pi]$ à la famille de fonctions $(\cos(nt))_{n\in\mathbf{N}} \cup (\sin(nt))_{n\in\mathbf{N}}$, donc $g = 0$.
b) Procéder de même en définissant $g$ impaire.
c) ❑ On considère la fonction paire sur $]-\pi, \pi[$, égale à $\sin(x)$ sur $[0, \pi]$. Donc $b_n = 0$ et

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } n = 1 \\ \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{(-1)^{n-1}-1}{n-1} - \dfrac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}\right) \text{ sinon} \end{array}\right.$$

$$= \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{2}{2p+1} - \dfrac{2}{2p-1}\right) \text{ si } n \text{ est pair de la forme } 2p \end{array}\right.$$

Bref, $a_{2p} = -\dfrac{4}{\pi(4p^2-1)}$. La fonction $2\pi$-périodique paire égale à $\sin(x)$ sur $[0, \pi]$ est continue $C^1$ par morceaux, donc : $\forall\, x \in [0, \pi]$, $\sin(x) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2px)}{4p^2-1}$.

❑ On considère la fonction impaire sur $]-\pi, 0[\ \cup\ ]0, \pi[$, égale à $\cos(x)$ sur $]0, \pi[$, de façon que $a_n = 0$. Il reste :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin((n+1)x)+\sin((n-1)x)\,dx \\
&= \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } n = 1 \\ -\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}+\dfrac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}\right) \text{ sinon}\end{array}\right. \\
&= \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{2}{2p+1}+\dfrac{2}{2p-1}\right) \text{ si } n \text{ est pair de la forme } 2p\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Bref, $b_{2p} = \dfrac{8p}{\pi(4p^2-1)}$. La fonction $2\pi$-périodique impaire égale à $\cos(x)$ sur $]0, \pi[$ est $C^1$ par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet : $\forall\, x \in\ ]0, \pi[$, $\cos(x) = \dfrac{8}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{p\sin(2px)}{4p^2-1}$. Si on trace sur $]0, \pi[$ le graphe du cosimus et une somme partielle de la série, on observera un phénomène de Gibbs (cf Exo.2) au voisinage de 0 et de $\pi$.

**Sol.7)** Respectivement, de gauche à droite et de haut en bas :

*f* paire ⇔ les coefficients $b_n$ sont nuls
*f* périodique de période $\pi$ ⇔ les indices des coefficients non nuls sont pairs
*f* impaire ⇔ les coefficients $a_n$ sont nuls
*f* anti-périodique de période $\pi$ ⇔ les indices des coefficients non nuls sont impairs.

**Sol.8)** a) La limite est nulle. On applique le lemme de Riemann-Lebesque à la fonction $2\pi$-périodique valant $\dfrac{1}{\sin(t)}$ sur $[a, b]$ et nulle sur $[-\pi, \pi] \setminus [a, b]$, et qui est $C^1$ par morceaux.

b)
$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt &= \int_0^b \left(\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}\right)\sin(nt)\,dt + \int_0^b \frac{\sin(nt)}{t}\,dt \\
&= \int_0^b \left(\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}\right)\sin(nt)\,dt + \int_0^{nb} \frac{\sin(u)}{u}\,du
\end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = nt$ dans la deuxième intégrale.

On vérifiera que la fonction $t \to \dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t-\sin(t)}{t\sin(t)}$ se prolonge en une fonction $C^1$ en 0. La fonction $2\pi$-périodique valant $\dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t}$ sur $[0, b]$ et 0 sur $[-\pi, \pi] \setminus [0, b]$ est alors $C^1$ par morceaux. On lui applique le lemme de Riemann-Lebesgue pour montrer que $\lim_{n\to\infty}\int_0^b \left(\dfrac{1}{\sin(t)}-\dfrac{1}{t}\right)\sin(nt)\,dt = 0$.

Par ailleurs, $\lim_{n\to\infty}\int_0^{nb}\dfrac{\sin(u)}{u}\,du = \int_0^{\infty}\dfrac{\sin(u)}{u}\,du = \dfrac{\pi}{2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt = \frac{\pi}{2}$. Noter que la fonction $\frac{1}{\sin(t)}$ n'est pas $C^1$ par morceaux, donc le lemme de Riemann-Lebesgue ne peut s'y appliquer.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^b f(t)\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt = f(0)\frac{\pi}{2}$.

Appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue pour la première intégrale.
Pour la deuxième intégrale, écrire que :

$$f(t)\frac{\sin(nt)}{\sin(t)} = \left(\frac{f(t)}{\sin(t)} - \frac{f(0)}{t}\right) + \frac{f(0)}{t}.$$

Vérifier que $\frac{f(t)}{\sin(t)} - \frac{f(0)}{t}$ se prolonge en une fonction $C^1$ en 0. On lui applique le lemme de Riemann-Lebesgue. On aura ensuite, en utilisant le b) :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b f(t)\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^b f(0)\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt = f(0)\frac{\pi}{2}$$

**Sol.9)** a) On cherche $y$ sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$. L'équation devient :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} - a_{n-1})x^n = 0$$

donc $a_1 = 0$ et $\forall\, n \geq 1$, $a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}$. Par récurrence, tous les $a_{2n+1}$ sont nuls et $a_{2n} = \frac{1}{4^n\, n!^2}$.

Donc $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n\, n!^2}$

b) $g(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n\sqrt{2}}{2^n\, n!}\cos(nt) = \mathrm{Re} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n\sqrt{2}}{2^n\, n!} e^{int} = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\exp(\frac{xe^{it}}{2})) = \sqrt{2}\exp(\frac{x\cos(t)}{2})\cos(\frac{x\sin(t)}{2})$.

La série trigonométrique définissant $g$ étant normalement convergente, c'est la série de Fourier de $g$.
On lui applique la formule de Parseval :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(x\cos(t))\cos^2(\frac{x\sin(t)}{2})\,dt = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n\, n!^2} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n\, n!^2} = 1 + y$$

c) Donc :

$$y = -1 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(x\cos(t))\cos^2(\frac{x\sin(t)}{2})\,dt$$

$$= -1 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(x\cos(t))\,(1 + \cos(x\sin(t)))\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \exp(x\cos(t))\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(x\cos(t) + ix\sin(t))\,\mathrm{d}t$

$$= \mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(xe^{it})\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\,e^{int}}{n!}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^n\,e^{int}}{n!}\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

On a pu permuter $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ car la série de fonctions de $t$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$.

Donc :

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(x\cos(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \exp(x\cos(t))\,\mathrm{d}t$$

**Sol.10)** a) La fonction $x \to f(x)\sin(nx)$ se prolonge par continuité en 0 et en $2\pi$.

b) $\displaystyle b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{cotan}(\frac{x}{2})\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2(\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x = 1$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{cotan}(\frac{x}{2})\,(\sin((n+1)x) - \sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{cotan}(\frac{x}{2})\cos((n+\frac{1}{2})x)\sin(\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\frac{x}{2})\cos((n+\frac{1}{2})x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos((n+1)x) + \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$$

donc $\forall\, n,\ b_n = 1$

c) La série de Fourier de $f$ est $\sum \sin(nx)$. Elle diverge en général. D'ailleurs, $f$ n'est pas continue par morceaux. On notera cependant que, si on utilise la somme formelle $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ sans se soucier de savoir si la série converge et sans se soucier de la valeur de $z$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx) = \mathrm{Im}\sum_{n=0}^{\infty} e^{inx} = \mathrm{Im}\,\frac{1}{1-e^{ix}} = \mathrm{Im} - \frac{e^{-ix/2}}{2i\sin(x/2)} = \mathrm{Re}\,\frac{e^{-ix/2}}{2\sin(x/2)} = \frac{1}{2}\mathrm{cotan}(\frac{x}{2})$$

**Sol.11)** a) Cherchons les solutions de (i) non identiquement nulles, donc telles qu'il existe $x_0$ et $y_0$ satisfaisant $f(x_0) \neq 0$ et $g(y_0) \neq 0$. Si $T(x, y) = f(x)g(y)$ est de laplacien nul, alors $g(y)f''(x) + f(x)g''(y) = 0$. En particulier, posons $\lambda = \dfrac{f''(x_0)}{f(x_0)} = -\dfrac{g''(y_0)}{g(y_0)}$.

- Si $\lambda > 0$, soit $\omega > 0$ tel que $\lambda = \omega^2$. $g$ est solution de $g'' + \omega^2 g = 0$ (en prenant $x = x_0$ et $y$ quelconque) donc est de la forme :

$g(y) = \alpha \cos(\omega y) + \beta \sin(\omega y)$

et $f$ est solution de $f'' - \omega^2 f = 0$ (en prenant $x$ quelconque et $y = y_0$), donc est de la forme :

$f(x) = \gamma \operatorname{ch}(\omega x) + \delta \operatorname{sh}(\omega x)$

- Si $\lambda < 0$, on pose $\omega > 0$ tel que $\omega^2 = -\lambda$ et on trouvera, en procédant comme ci-dessus :
  $\left[\begin{array}{l} g(y) = \alpha \operatorname{ch}(\omega y) + \beta \operatorname{sh}(\omega y) \\ f(x) = \gamma \cos(\omega x) + \delta \sin(\omega x) \end{array}\right.$
- Si $\lambda = 0$, alors $g'' = f'' = 0$ et $\left[\begin{array}{l} g(y) = \alpha y + \beta \\ f(x) = \gamma x + \delta \end{array}\right.$

La condition (ii) avec $g$ non identiquement nulle exclut les deux derniers cas. Donc $g$ est de la forme $\alpha \cos(\omega y) + \beta \sin(\omega y)$. $g$ étant supposée paire, la seule possibilité est de prendre $g$ proportionnelle à $\cos(\omega y)$ et plus précisément à $\cos((2n + 1)y)$, $n$ entier, pour que $g$ s'annule en $\pm \dfrac{\pi}{2}$.

On a alors $f(x) = \gamma \operatorname{ch}(\omega x) + \delta \operatorname{sh}(\omega x)$. $f$ a physiquement un sens si $f$ admet une limite finie en $+\infty$, et pour cela, il faut que $\gamma + \delta = 0$. Donc $f$ est proportionnelle à $\exp(-\omega x) = \exp(-(2n + 1)x)$.

Finalement, $f(x)g(y)$ est proportionnel à $\exp(-(2n + 1)x)\cos((2n + 1)y)$

b) Fourier cherche donc T sous la forme :

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \exp(-(2n + 1)x) \cos((2n + 1)y)$$

La condition (iii) est réalisée si : $\forall\, y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos((2n + 1)y)$. La série de droite est $2\pi$-périodique, paire, et change de signe quand on ajoute $\pi$ à $y$. Considérons donc la fonction $2\pi$-périodique valant 1 sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $-1$ sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ (on vérifiera qu'elle est bien paire) et développons-la en série de Fourier. On vérifiera qu'on obtient :

$$\forall\, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos((2n + 1)y)}{2n + 1}$$

On prendra donc $\lambda_n = \dfrac{4}{\pi} \dfrac{(-1)^n}{2n + 1}$.

L'expression obtenue pour T est :

$$T = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \exp(-(2n + 1)x) \cos((2n + 1)y)$$

On peut calculer la somme de la série de la façon suivante. Pour tout $x > 0$ :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp(-(2n + 1)x) \cos((2n+1)y)$$

on peut dériver terme à terme en se plaçant sur un intervalle centré en $x$ contenu dans $]0, +\infty[$. La série dérivée converge normalement sur un tel intervalle.
On reconnaît alors dans le membre de droite la partie réelle d'une série géométrique.

$$= \mathrm{Re}\Big(-\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)x} e^{i(2n+1)y}\Big)$$

$$= -\frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big(e^{-x+iy}\,\frac{1}{1+e^{-2x+2iy}}\Big)$$
$$= -\frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big(e^{-x+iy}\,\frac{1+e^{-2x-2iy}}{1+e^{-4x}+2e^{-2x}\cos(2y)}\Big)$$
$$= -\frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big(e^{-x+iy}\,\frac{e^{2x}+e^{-2iy}}{e^{2x}+e^{-2x}+2\cos(2y)}\Big)$$
$$= -\frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big(\frac{e^{x+iy}+e^{-x-iy}}{2\mathrm{ch}(2x)+2\cos(2y)}\Big)$$
$$= -\frac{4}{\pi}\,\frac{e^{x}\cos(y)+e^{-x}\cos(y)}{2\mathrm{ch}(2x)+2\cos(2y)}$$
$$= -\frac{4}{\pi}\,\frac{\mathrm{ch}(x)\cos(y)}{\mathrm{ch}(2x)+\cos(2y)}$$
$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{\mathrm{ch}(x)\cos(y)}{\mathrm{sh}^2(x)+\cos^2(y)}$$

et il suffit d'intégrer par rapport à $x$. On obtient alors :

$$\mathrm{T} = \frac{2}{\pi}\arctan\Big(\frac{\cos(y)}{\mathrm{sh}(x)}\Big) + \varphi(y)$$

pour une certaine fonction $\varphi$. On a par ailleurs :

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \exp(-(2n+1)x)\sin((2n+1)y)$$

partie imaginaire de la même série, ce qui conduit à

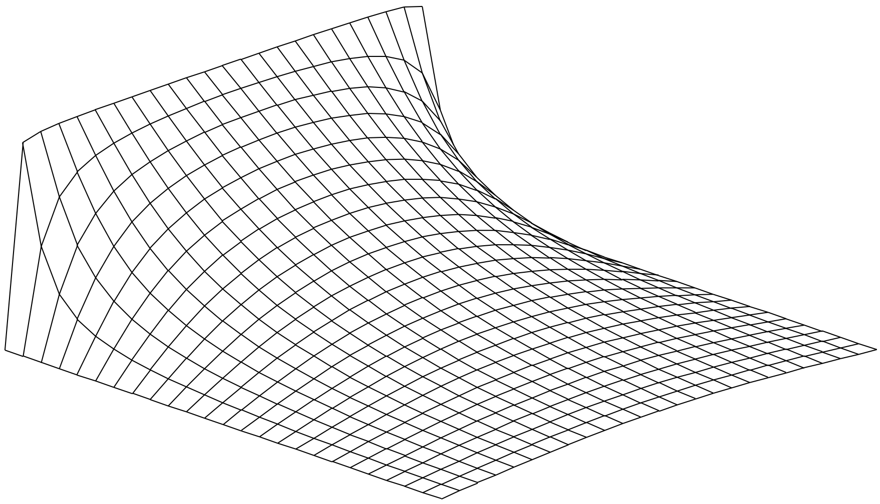
$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{\mathrm{sh}(x)\sin(y)}{\mathrm{sh}^2(x)+\cos^2(y)}$$

On compare avec $\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{2}{\pi}\arctan\Big(\frac{\cos(y)}{\mathrm{sh}(x)}\Big) + \varphi(y)\Big) = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\mathrm{sh}(x)\sin(y)}{\mathrm{sh}^2(x)+\cos^2(y)} + \varphi'(y)$

et l'on conclut que $\varphi' = 0$ et donc $\varphi = \mathrm{Cte}$. Cette constante est nulle vu la condition (ii).
Finalement :

$$\mathrm{T} = \frac{2}{\pi}\arctan\Big(\frac{\cos(y)}{\mathrm{sh}(x)}\Big)$$

On peut vérifier a posteriori que cette expression est bien solution. Ci-dessous, on a tracé la surface d'équation $z = \mathrm{T}(x, y)$ :



◆