# FONCTIONS ANALYTIQUES

## *PLAN*

I : Fonctions holomorphes
- 1) Dérivation
- 2) Conditions de Cauchy
- 3) Applications conformes

II - Intégrale de Cauchy
- 1) Chemins
- 2) Indice d'un point par rapport à une courbe
- 3) Primitives
- 4) La formule intégrale de Cauchy

III : Propriétés
- 1) Prolongement analytique
- 2) Séries de Laurent
- 3) Théorème de Liouville
- 4) Principe du maximum
- 5) Formule des résidus
- 6) Suites et séries de fonctions holomorphes

Exercices
- 1) Enoncés
- 2) Solutions

Soit $\Omega$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dispose des notions distinctes suivantes :

(i) $f$ admet au voisinage de chaque point de $\Omega$ un développement en série entière.
(ii) $f$ est $C^\infty$ sur $\Omega$.
(iii) $f$ est $C^1$ sur $\Omega$.
(iv) $f$ est dérivable en chaque point de $\Omega$.

Dans les chapitres L1/DERIVEE.PDF et L2/SERIENTR.PDF, on montre que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv), mais que toutes les réciproques sont fausses. Si on prend maintenant pour $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction de $\Omega$ dans $\mathbb{C}$, les implications précédentes restent valides (il suffit d'adapter les démonstrations en remplaçant réel par complexe, et valeur absolue par module), mais il est tout à fait remarquable que l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) est vraie, ce que ce chapitre se propose de montrer, rendant les quatre notions équivalentes. Une fonction vérifiant la propriété (i) est dite **analytique**. Une fonction vérifiant la propriété (iv) est dite **holomorphe**. Sur $\mathbb{C}$, une fois la preuve de (iv) $\Rightarrow$ (i) établie, il n'y a pas de différence entre ces deux mots et ils peuvent être indifféremment utilisés.

Dans tout le chapitre, on note $D(a, r)$ le disque ouvert de centre $a$ et de rayon $r$.

## *I : Fonctions holomorphes*

### 1- Dérivation

**DEFINITION**

*Soit $\Omega$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, et $f$ une fonction de $\Omega$ à valeurs complexes. Soit $z_0$ un élément de $\Omega$. On dit que $f$ est* **dérivable** *en $z_0$ si $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe. Cette limite s'appelle* **dérivée** *de $f$ en $z_0$ et est notée $f'(z_0)$. Si $f$ est dérivable en tout point de $\Omega$, on dit que $f$ est* **holomorphe** *sur $\Omega$. On note* $\mathrm{H}(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\Omega$.*
*Si $f$ est holomorphe sur $\Omega$, c'est une* **primitive** *de sa dérivée.*

L'égalité $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$ est équivalente à dire que :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mathrm{o}(z - z_0)$$

avec $\mathrm{o}(z - z_0)$ négligeable devant $z - z_0$ quand $z$ tend vers $z_0$. $f$ est donc continue en $z_0$.

On étend sans difficulté aux fonctions complexes les démonstrations donnant les régles de calcul de dérivation. Ainsi :

$f \in \mathrm{H}(\Omega)$ et $g \in \mathrm{H}(\Omega) \Rightarrow f + g \in \mathrm{H}(\Omega)$, $fg \in \mathrm{H}(\Omega)$ et $(f + g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$

Si de plus $g$ ne s'annule pas sur $\Omega$, $\dfrac{f}{g} \in \mathrm{H}(\Omega)$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathrm{U}$ et $g : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes, alors $g \circ f$ est holomorphe et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

Si $f$ est un homéomorphisme[1] holomorphe d'un ouvert $\Omega$ sur un ouvert U et si $f'$ ne s'annule pas, alors $f^{-1}$ est holomorphe et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$. On peut montrer en fait (et nous admettrons) que l'hypothèse "*homéomorphisme holomorphe*" peut être remplacée par "*bijective holomorphe*" et que "*$f'$ ne s'annule pas*" est superflue, car automatiquement vérifiée si $f$ est bijective et holomorphe.

*EXEMPLES* :

❑ Les fonctions polynomiales sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. Les fractions rationnelles de deux polynômes sont holomorphes sur l'ouvert égal à $\mathbb{C}$ privé des zéros du dénominateur de la fraction.

❑ La fonction $f : z \to |z|$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$. En effet, s'il existait un point $z_0$ où elle est dérivable, alors, pour tout complexe $u$ de module 1, on aurait a fortiori, pour $t$ réel :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{|z_0 + tu| - |z_0|}{tu} = f'(z_0)$$

Si $z_0$ est non nul, en prenant $u$ orthogonal à $z_0$, on vérifiera que la limite précédente vaut 0, et qu'elle vaut $\dfrac{1}{u}$ si $u$ est colinéaire à $z_0$ et de même sens, empêchant d'attribuer toute valeur cohérente à $f'(z_0)$.

Si $z_0$ est nul, en prenant $u = \pm 1$, on se ramène au cas de la fonction $t \in \mathbb{R} \to |t|$ non dérivable en 0.

---

[1] On rappelle qu'une application $f$ est un homéomorphisme si $f$ est bijective, et si $f$ et sa réciproque sont continues. Voir les chapitres L3/METRIQUE.PDF ou L3/TOPOLOG.PDF.

❑ Les séries entières sont holomorphes sur leur disque ouvert de convergence, et la dérivation s'effectue terme à terme. La démonstration est comparable à celle qui est faite pour les fonctions à valeurs réelles (voir le chapitre L2/SERIENTR.PDF). Ainsi, comme attendu :

$$(e^z)' = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!})' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z$$

❑ **Le logarithme complexe** : La fonction $z \to e^z$ étant holomorphe et bijective depuis l'ouvert $\Omega = \{z \mid -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$ sur $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite réelle $]-\infty, 0]$, elle admet une réciproque appelée **logarithme complexe**, notée Log. En polaire, si $z = re^{i\theta} = \exp(\ln(r) + i\theta)$ avec $-\pi < \theta < \pi$, on a $\text{Log}(z) = \ln(r) + i\theta$.
En particulier, $\text{Log}(0) = 1$.
En utilisant la relation $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ avec $f(z) = e^z$, la dérivée de Log vérifie, comme attendu :

$$\text{Log}'(z) = \frac{1}{\exp(\text{Log}(z))} = \frac{1}{z}$$

On notera que la fonction $z \to \dfrac{1}{z}$ est définie sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, mais que Log n'en est une primitive que sur $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ . Il est impossible de prolonger Log sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, car, par exemple, si $z$ tend vers le réel strictement négatif $-r$ avec un argument $\theta$ positif, $\text{Log}(z)$ tend vers $\ln(r) + i\pi$, alors que, si $z$ tend vers $-r$ avec un argument négatif, alors $\text{Log}(z)$ tend vers $\ln(r) - i\pi$. La différence vaut $2i\pi$ et il n'y a pas de valeur définie pour prolonger Log en $-r$. Ainsi, contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$ où toute fonction continue sur un intervalle y admet une primitive, une fonction continue d'un ouvert U dans $\mathbb{C}$, même holomorphe, n'admet pas nécessairement de primitive sur U. On verra que cette question est liée à la forme topologique de U, et que toute fonction holomorphe admet néanmoins localement une primitive.

On prendra également garde qu'on n'a pas nécessairement $\text{Log}(z_1z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$ car Log arrive dans $\Omega$, et si $\text{Log}(z_1)$ et $\text{Log}(z_2)$ ont tous deux une partie imaginaire comprise entre $-\pi$ et $\pi$, il n'en est pas nécessairement de même de la somme. De même, on n'a pas $\text{Log}(e^z) = z$ si $\text{Im}(z)$ n'est pas compris entre $-\pi$ et $\pi$. Ainsi, pour $z_1 = z_2 = \exp(\dfrac{2i\pi}{3})$, on a :

$$\text{Log}(z_1z_2) = \text{Log}(\exp(\frac{4i\pi}{3})) = \text{Log}(\exp(-\frac{2i\pi}{3})) = -\frac{2i\pi}{3} \in ]-\pi, \pi[$$

mais $\quad \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2) = 2 \times \dfrac{2i\pi}{3} = \dfrac{4i\pi}{3}$

$\text{Log}(z_1z_2)$ diffère de $\text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$ d'un multiple de $2i\pi$.
Par contre, on a bien $\text{Log}(\dfrac{1}{z}) = -\text{Log}(z)$ car si $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in ]-\pi, \pi[$, alors :

$$\text{Log}(z) = \ln(r) + i\theta$$

et $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r} e^{-i\theta} \qquad$ avec $-\theta \in ]-\pi, \pi[$

donc $\quad \text{Log}(\dfrac{1}{z}) = \ln(\dfrac{1}{r}) - i\theta = -\ln(r) - i\theta = -\text{Log}(z)$

Au lieu d'enlever de $\mathbb{C}$ la demi-droite réelle $]-\infty, 0]$, on peut aussi prendre un réel $\alpha$ quelconque et considérer $\Omega_\alpha = \{z \mid \alpha < \text{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$. La fonction $z \to e^z$ est bijective de $\Omega_\alpha$ sur $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite $\{re^{i\alpha} \mid r \geq 0\}$. Sa réciproque définit une autre fonction logarithme que la fonction précédente. La demi-droite que l'on retire de $\mathbb{C}$ pour inverser l'exponentielle est affaire de choix personnel.

❑ **sinus et cosinus complexes** : On définit les fonctions **sinus** et **cosinus** sur $\mathbb{C}$ par $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Ces deux fonctions sont holomorphes et, comme attendu :

$$\sin'(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z)$$

$$\cos'(z) = i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin(z)$$

On a, pour tout $y$ réel :

$\sin(iy) = i\,\text{sh}(y)$ où sh est le sinus hyperbolique

$\cos(iy) = \text{ch}(y)$ où ch est le cosinus hyperbolique

sh et ch s'étendent également au plan complexe. Par ailleurs, on pourra vérifier que sin et cos vérifient les règles de calcul usuelles relatives à la somme ou la différence des arguments.

**PROPOSITION**

*Soit $\Omega$ un ouvert* ***connexe*** *de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction holomorphe de dérivée partout nulle. Alors $f$ est constante.*

Pour la définition de connexe, voir L3/TOPOLOG.PDF.

Les ouverts connexes de $\mathbb{C}$ jouent donc un rôle comparable aux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $\Omega$ n'est pas connexe, $f$ peut être constante sur une composante connexe de $\Omega$ et prendre une autre valeur constante sur une autre composante connexe. D'une manière générale, l'étude d'une fonction holomorphe pouvant se faire de manière indépendante sur chaque composante connexe, il n'y a pas d'inconvénient à supposer $\Omega$ ouvert connexe. On désigne parfois sous le terme de **domaine** de $\mathbb{C}$ une partie non vide ouverte connexe de $\mathbb{C}$.

La démonstration du même résultat pour une fonction d'une variable réelle à valeurs réelle, basée sur le théorème de Rolle ou des accroissements finis, ne peut être directement adaptée sur $\mathbb{C}$ car le théorème de Rolle n'y est pas vérifié.

<u>Démonstration</u> :

❑ Soit $a \in \Omega$, et soit $r > 0$ tel que le disque $D(a, r)$ de centre $a$ et de rayon $r$ soit inclus dans $\Omega$. Pour $b \in D(a, r)$, et pour $t$ réel élément de $[0, 1]$, $a + t(b - a) \in D(a, r)$, donc on peut considérer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 (b-a)f'(a + t(b-a))\,dt = \Big[f(a + t(b-a))\Big]_0^1 = f(b) - f(a)$$

Comme le terme de gauche est nul car $f'$ est supposée nulle, on a $f(b) = f(a)$. On a ainsi montré que $f$ est localement constante. Soit alors $k$ une valeur prise par $f$. L'ensemble $U = \{z \mid f(z) = k\}$ est :

non vide puisqu'on a supposé $k \in f(\Omega)$

fermé, car image réciproque du fermé $\{k\}$ par l'application continue $f$ (voir L3/TOPOLOG.PDF). On peut aussi utiliser une caractérisation séquentielle : si $z$ est adhérent à U, il existe une suite $(z_n)$ de U qui converge vers $z$. On a $\forall\, n$, $f(z_n) = k$, donc, $f$ étant continue, par passage à la limite, $f(z) = k$, ce qui prouve que $z \in$ U, et donc que U est fermé.

ouvert car $f$ est localement constante. Donc si $z$ appartient à U, il existe un disque ouvert centré en $z$ sur laquelle $f$ est constante, égale à $f(z) = k$, donc ce disque est inclus dans U.

$\Omega$ étant connexe, la seule partie non vide ouverte et fermée contenue dans $\Omega$ est $\Omega$. Donc U = $\Omega$.

## 2- Conditions de Cauchy

$\mathbb{C}$ étant un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^2$, on peut associer à une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(f(x+iy)) \\ \mathrm{Im}(f(x+iy)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

Réciproquement, à une fonction F : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to F(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on peut associer la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$.

Il y a une relation entre le fait que $f$ soit dérivable en un point $z_0 = x_0 + iy_0$ de son domaine de définition, et le fait que F soit différentiable en $(x_0, y_0)$. (Voir le chapitre L2/CALCDIF2.PDF pour la notion de fonction différentiable).

**PROPOSITION**

*Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$, soit $z_0$ élément de $\Omega$ de partie réelle $x_0$ et de partie imaginaire $y_0$. Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre* :

(i) *$f$ est dérivable en $z_0$.*

(ii) F *est différentiable en* $(x_0, y_0)$ *et la différentielle de* F *est une similitude directe de* $\mathbb{R}^2$.

La notion de dérivabilité sur $\mathbb{C}$ est donc plus forte que la notion de différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$, puisque s'y ajoute le fait que la différentielle est une similitude (éventuellement de rapport nul).

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii) : Selon l'hypothèse, on a $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$. En séparant partie réelle et imaginaire, on obtient :

$$P(x, y) = P(x_0, y_0) + \mathrm{Re}(f'(z_0))(x - x_0) - \mathrm{Im}(f'(z_0))(y - y_0) + o(\| (x - x_0, y - y_0) \|)$$
$$Q(x, y) = Q(x_0, y_0) + \mathrm{Im}(f'(z_0))(x - x_0) + \mathrm{Re}(f'(z_0))(y - y_0) + o(\| (x - x_0, y - y_0) \|)$$

ce qui signifie que P et Q sont tous deux différentiables en $(x_0, y_0)$ avec :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathrm{Re}(f'(z_0)) \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\,\mathrm{Im}(f'(z_0))$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathrm{Im}(f'(z_0)) \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = \mathrm{Re}(f'(z_0))$$

On a donc $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array}\right.$. Ces deux conditions s'appellent **conditions de Cauchy**.

La matrice jacobienne de F en $(x_0, y_0)$ est la matrice :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(f'(z_0)) & -\mathrm{Im}(f'(z_0)) \\ \mathrm{Im}(f'(z_0)) & \mathrm{Re}(f'(z_0)) \end{pmatrix}$$

On obtient la matrice de la similitude directe correspondant, dans le plan complexe, au produit par $f'(z_0)$. Son rapport est $|f'(z_0)|$ et son angle est $\arg(f'(z_0))$ (quelconque si $f'(z_0)$ est nul).

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i) : Réciproquement, une matrice de similitude directe étant le produit d'une homothétie par une rotation, donc de la forme $\lambda\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, on suppose maintenant qu'il existe deux réels $a$ (= $\lambda\cos(\theta)$) et $b$ (= $\lambda\sin(\theta)$) tels que :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Autrement dit, on suppose ici que P et Q vérifient les conditions de Cauchy avec :

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ b = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array}\right.$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P(x_0, y_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \\ &= P(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \\ Q(x, y) &= Q(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \\ &= Q(x_0, y_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(z) &= P(x, y) + iQ(x, y) \\ &= P(x_0, y_0) + iQ(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + i(b(x - x_0) + a(y - y_0)) + o(\|(x-x_0, y-y_0)\|) \\ &= f(z_0) + (a + ib)(x - x_0) + i(y - y_0)) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \\ &= f(z_0) + (a + ib)(z - z_0) + o(z - z_0) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $f$ est dérivable de dérivée :

$$f'(z_0) = a + ib = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) - i\,\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Les conditions de Cauchy peuvent souvent aider à déterminer des fonctions holomorphes vérifiant certaines conditions.

*EXEMPLES* :

❑ Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f$ holomorphe sur $\Omega$. Montrons que, si $f$ est à valeurs réelles, alors $f$ est constante. On a en effet Q = 0, donc $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$, donc $f' = \dfrac{\partial Q}{\partial y} + i\,\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$ sur $\Omega$, et, $\Omega$ étant connexe, $f$ = Cte.

❑ La fonction $f : z \to \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point. En effet, la matrice jacobienne de l'application de $\mathbf{R}^2$ associée $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, qui n'est pas une matrice de similitude.

❑ La fonction $f : z \to |z|^2$ est dérivable seulement en 0. En effet, la matrice jacobienne de l'application de $\mathbf{R}^2$ associée $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ vaut $\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui n'est une matrice de similitude (nulle) que pour $x = y = 0$. On a $f'(0) = 0$.

❑ **Conditions de Cauchy en polaire** : Soit P et Q deux fonctions de $\mathbf{R}^2 \setminus \{0,0\}$ dans $\mathbf{R}^2$, vérifiant les conditions de Cauchy. Considérons les fonctions composées :

$$(r, \theta) \in \,]0, +\infty[\, \times \,]-\pi, \pi[\, \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \to P(x, y) = \tilde{P}(r, \theta)$$

et de même pour Q. On a :

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\,r\sin(\theta)\,\frac{\partial P}{\partial x} + r\cos(\theta)\,\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$= -\,r\sin(\theta)\,\frac{\partial Q}{\partial y} - r\cos(\theta)\,\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{en utilisant les conditions de Cauchy}$$

$$= -\,r\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) = -\,r\,\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial r}$$

et $$r\,\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} = r\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) = r\cos(\theta)\,\frac{\partial P}{\partial x} + r\sin(\theta)\,\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$= r\cos(\theta)\,\frac{\partial Q}{\partial y} - r\sin(\theta)\,\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \theta}$$

Réciproquement, on pourra vérifier que les conditions $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = -\,r\,\dfrac{\partial \tilde{Q}}{\partial r} \\ r\,\dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial r} = \dfrac{\partial \tilde{Q}}{\partial \theta} \end{array}\right.$ redonnent bien les conditions de Cauchy $\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{array}\right.$, avec $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \cos(\theta)\,\dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial r} - \dfrac{\sin(\theta)}{r}\,\dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \sin(\theta)\,\dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial r} + \dfrac{\cos(\theta)}{r}\,\dfrac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta}$, et de même pour Q. La dérivée de la fonction holomorphe associée $f = P + iQ$ vérifie :

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} - i\,\frac{\partial P}{\partial y} = \cos(\theta)\,\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\,\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} - i\left(\sin(\theta)\,\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\,\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta}\right)$$

$$= e^{-i\theta}\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} - \frac{i}{r}\,\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta}\right)$$

On peut ainsi vérifier directement que la fonction Log est holomorphe. Pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$, on a $\mathrm{Log}(z) = \ln(r) + i\theta$, de sorte que $\tilde{\mathrm{P}} = \ln(r)$ et $\tilde{\mathrm{Q}} = \theta$. On a bien :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{\mathrm{P}}}{\partial\theta} = 0 = -r\,\dfrac{\partial\tilde{\mathrm{Q}}}{\partial r} \\ r\,\dfrac{\partial\tilde{\mathrm{P}}}{\partial r} = 1 = \dfrac{\partial\tilde{\mathrm{Q}}}{\partial\theta} \end{cases}$$

Log vérifie les conditions de Cauchy, donc est holomorphe. Sa dérivée est :

$$\mathrm{Log}'(z) = \frac{e^{-i\theta}}{r} = \frac{1}{z}$$

❑ **La racine carrée complexe** : Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$. La fonction $f : z = re^{i\theta} \in \Omega \to \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, est holomorphe. Pour le voir, comme ci-dessus, on utilise les conditions de Cauchy en polaire. On a ici $\tilde{\mathrm{P}} = \sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})$ et $\mathrm{Q} = \sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})$, et on a bien :

$$\frac{\partial\tilde{\mathrm{P}}}{\partial\theta} = -\frac{\sqrt{r}}{2}\sin(\frac{\theta}{2}) = -r\,\frac{\partial\tilde{\mathrm{Q}}}{\partial r}$$

$$r\,\frac{\partial\tilde{\mathrm{P}}}{\partial r} = \frac{\sqrt{r}}{2}\cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{\partial\tilde{\mathrm{Q}}}{\partial\theta}$$

Les conditions de Cauchy étant vérifiées en tout point, la fonction $f$ est holomorphe. Sa dérivée est :

$$f'(z) = e^{-i\theta}\,(\frac{\partial\tilde{\mathrm{P}}}{\partial r} - \frac{i}{r}\,\frac{\partial\tilde{\mathrm{P}}}{\partial\theta}) = e^{-i\theta}\,\frac{1}{2\sqrt{r}}\,(\cos(\frac{\theta}{2}) + i\sin(\frac{\theta}{2})) = e^{-i\theta}\,\frac{1}{2\sqrt{r}}\,e^{i\theta/2}$$

$$= \frac{e^{-i\theta/2}}{2\sqrt{r}} = \frac{1}{2\sqrt{r}e^{i\theta/2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

comme attendu. On aurait pu aussi calculer cette dérivée comme dérivée d'une fonction composée, en remarquant que $\exp(\frac{\mathrm{Log}(z)}{2}) = \exp(\frac{\ln(r) + i\theta}{2}) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} = \sqrt{z}$. Comme pour la fonction Log, la fonction $\sqrt{z}$ ne peut se prolonger sur l'axe des réels négatifs, puisque, si par exemple on fait tendre $z$ vers $-1$ par argument positif, alors $\sqrt{z}$ tend vers $e^{i\pi/2} = i$, alors que si on fait tendre $z$ vers $-1$ par argument négatif, alors $\sqrt{z}$ tend vers $e^{-i\pi/2} = -i$. Il n'y a pas de limite unique.

*NOTATIONS* :

❑ On rencontre parfois les notations suivantes, résultant du changement de variables :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy \\ x - iy \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial x} + i\,\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial\bar{z}}$$

$$\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial y} + i\,\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial z} - i\,\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}$$

d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\,(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Avec les notations précédentes, en supposant les conditions de Cauchy vérifiées, on obtient, pour une fonction holomorphe *f* :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x} - i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x} - i\,\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} - \ i\,\frac{\partial P}{\partial y} = f'$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x} + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x} + i\,\frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

### 3- Applications conformes

**DEFINITION**

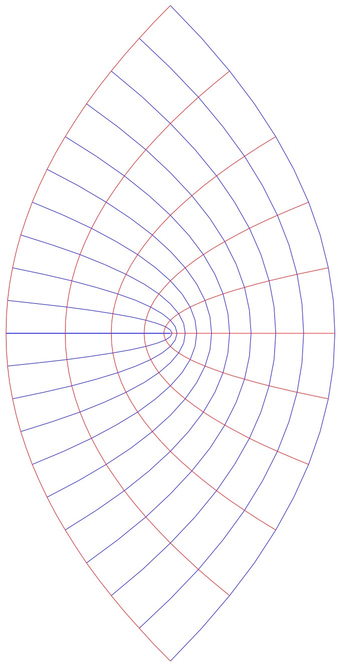
*Soit* F *une application d'un ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}^2$ *à valeurs dans* $\mathbf{R}^2$. *On dit que* F *est une* **application conforme** *sur* Ω *si, en chaque point de* Ω, F *est différentiable de différentielle inversible et si la différentielle de* F *conserve les angles orientés.*

Dire que la différentielle dF de F conserve les angles orientés, cela signifie que, en tout point M de Ω, si θ est l'angle ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) entre deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, alors θ est aussi l'angle entre les vecteurs dF(M)($\boldsymbol{u}$) et dF(M)($\boldsymbol{v}$), où dF(M) est la différentielle de F calculée en M. Pour que cela ait un sens, il faut que les vecteurs, ainsi que leurs images soient non nuls, ce pour quoi on suppose dF(M) inversible.

Il n'est pas difficile de montrer qu'une application linéaire inversible L qui conserve les angles oreintés est une similitude directe. Pour cela, on considère le triangle rectangle isocèle dont les côtés sont donnés par les vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, où ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) forme une base orthonormée directe. Puisque L conserve les angles, l'image du triangle par L est aussi un triangle rectangle isocèle, d'où l'on tire que L($\boldsymbol{u}$) et L($\boldsymbol{v}$) sont orthogonaux et de même norme, l'orientation de (L($\boldsymbol{u}$), L($\boldsymbol{v}$)) étant directe. Donc $\left(\frac{L(\boldsymbol{u})}{\| L(\boldsymbol{u}) \|}, \frac{L(\boldsymbol{v})}{\| L(\boldsymbol{v}) \|}\right)$ est une base orthonormée directe, qui se déduit de ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$) par une rotation. L est la similitude directe composée de cette rotation et de l'homothétie de rapport $\| L(\boldsymbol{u}) \| = \| L(\boldsymbol{v}) \|$.

Comme toute application F sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, qui est différentiable en tout point et dont la différentielle est une similitude directe, est l'associée d'une application holomorphe *f* sur un ouvert de $\mathbf{C}$, on voit que les applications conformes sont les applications holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas. Cela a des conséquences intéressantes en cartographie. Il existe des représentations conformes planes de la sphère terrrestre privée des pôles, par exemple la projection de Mercator. Si on applique à une carte de Mercator une application holomorphe bijective, on obtiendra un autre type de carte, mais la représentation restera conforme : localement, en tout point, les angles seront respectés. Cependant, la taille des objets, dépendant du rapport de la similitude, variera d'un point à un autre.

Voici ci-dessous comment un quadrillage du demi-plan Re($z$) ≥ 0 est modifié par l'application conforme $z \to z^2$. Si $z = x + iy$, on a $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. L'origine est au centre du dessin.



En rouge, on a les images des demi-droites de partie imaginaire $y$ donnée, parallèle à l'axe réel. Ces images ont pour équation paramétrique $x \geq 0 \to \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ \pm 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ou d'équation $Y^2 = 4Xy^2 + 4y^4$. Ce sont des paraboles (et le demi-axe réel positif pour $y = 0$), chaque parabole étant la réunion des images des deux demi-droites de parties imaginaires $\pm y$.
Les courbes bleues sont les images des droites de partie réelle $x \geq 0$, parallèles à l'axe imaginaire pur. Ce sont des paralboles de représentation paramétrique $y \in \mathbb{R} \to \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, ou d'équation $Y^2 = -4Xx^2 + 4x^4$, (et aussi le demi-axe réel négatif pour $x = 0$, image de l'axe imaginaire pur qui a été replié sur ce demi-axe réel au cours de la transformation).
Au voisinage de chaque point, les deux courbes se coupent à angle droit, de même que les droites du quadrillage initial, puisque les angles droits sont conservés par une application conforme.

## *II : Intégrale de Cauchy*

### 1- Chemins

Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Un **chemin** $\gamma$ dans $\Omega$ est la donnée d'un paramétrage

$$t \in [a, b] \to \gamma(t) \in \Omega$$

qui est continu, $C^1$ par morceaux, et tel que $\gamma'$ s'annule en au plus un nombre fini de points. $\gamma'(t)$ définit le vecteur tangent à la courbe en tout point où cette quantité est définie et non nulle. Le chemin est **fermé** ou est un **lacet** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Si $f$ est une fonction continue sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on définit l'**intégrale curviligne** ou **intégrale de Cauchy** de $f$ le long de $\gamma$ par le nombre complexe suivant :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

Un **changement de paramétrage admissible** est une application $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, $C^1$, bijective, strictement croissante, à dérivée non nulle sauf en un nombre fini de points. Par changement de variable, on a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(u)))\,\gamma'(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_\alpha^\beta f((\gamma \circ \varphi)(u))\,(\gamma \circ \varphi)'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\gamma \circ \varphi} f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

de sorte que le paramétrage $\gamma \circ \varphi : u \in [\alpha, \beta] \to (\gamma \circ \varphi)(u) \in \Omega$ donne la même intégrale curviligne. La courbe définie par ces deux paramétrages est la même, et parcourue dans le même sens. Aussi, le plus souvent, on ne précise pas le paramétrage définissant le chemin mais on décrit simplement la courbe parcourue, avec son point de départ et son point d'arrivée, le choix du paramétrage étant laissé à l'utilisateur.

Si on prend $\varphi$ strictement décroissante, donc avec $a = \varphi(\beta)$ et $b = \varphi(\alpha)$, on parcourt la courbe dans le sens contraire au sens initial, et l'on a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha f(\gamma(\varphi(u)))\,\gamma'(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_\alpha^\beta f((\gamma \circ \varphi)(u))\,(\gamma \circ \varphi)'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_{\gamma \circ \varphi} f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

L'intégrale a changé de signe.

Soit un chemin $\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ est suivi d'un chemin $\gamma_2 : [b, c] \to \Omega$ (i.e. le point final de $\gamma_1$ est le point initial de $\gamma_2$ : $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$). On peut toujours choisir les paramétrages de façon que le paramètre $b$ soit final chez $\gamma_1$ et initial chez $\gamma_2$). Soit $\gamma$ le paramétrage $t \in [a, c] \to \begin{cases} \gamma_1(t) \text{ si } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) \text{ si } t \in [b, c] \end{cases}$. On a collé bout à bout les deux chemins. La relation de Chasles appliquée sur $[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$ permet de voir que :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Cela permet par exemple de découper le chemin $C^1$ par morceaux en une suite de chemins $C^1$.

Dernière propriété, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \operatorname*{Sup}_{\gamma([a,b])} |f| \times \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \operatorname*{Sup}_{\gamma([a,b])} |f| \times L(\gamma)\end{aligned}$$

avec $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$, longueur de la courbe définie par $\gamma$.

*EXEMPLES* :

❑ Si $f$ admet une primitive F sur $\Omega$, et si le chemin part du point $z_0$ pour arriver au point $z_1$, alors :

$$\int_\gamma f(z) \, dz = F(z_1) - F(z_0)$$

En effet, pour un paramétrage donné $\gamma$ défini sur $[a, b]$ et tel que $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$ :

$$\int_\gamma f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \gamma'(t) \, dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \, \gamma'(t) \, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) \, dt$$
$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_1) - F(z_0)$$

Si $f$ admet une primitive et si $\gamma$ est fermé (autrement dit est un lacet), alors $\int_\gamma f(z) \, dz = 0$ puisque on aura $z_0 = z_1$ et donc $F(z_1) = F(z_0)$.

Malheureusement, la situation précédente est rare. En effet, au vu du préambule du présent chapitre, il est nécessaire que $f$ soit holomorphe pour admettre une primitive sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$, car si $f$ est la dérivée de F sur $\Omega$, alors F est holomorphe sur $\Omega$ de dérivée $f$, et le préambule énonce que F est analytique, donc indéfiniment dérivable, donc $f$ aussi, donc $f$ est holomorphe. Mais il faut aussi des conditions supplémentaires sur la forme topologique de $\Omega$, comme nous l'avons vu dans l'introduction de la fonction Log, qui est une primitive de $\frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C} \setminus \, ]-\infty, 0]$ mais pas sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La difficulté est comparable à celle des intégrales curvilignes de formes différentielles non exactes ou sur des domaines inadéquats (voir le chapitre L2/CALCDIF2.PDF).

❑ Soit $r > 0$. Considérons le chemin $\gamma : t \in [0, 2\pi] \to re^{it}$, paramétrage du cercle de centre 0 et de rayon $r$ parcouru dans le sens direct. Pour $n$ entier relatif différent de $-1$, $z^n$ admet pour primitive $\frac{z^{n+1}}{n+1}$. Il en résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \int_\gamma z^n \, dz = 0$$

Mais :

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} \, ire^{it} \, dt = 2i\pi \qquad \text{indépendant de } r.$$

Le fait que cette intégrale est non nulle prouve d'ailleurs qu'il est impossible de trouver une primitive de $\frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tout entier.

Si on considère le paramétrage $t \in [0, 4\pi] \to re^{it}$ (on fait deux fois le tour du cercle), $\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz$ vaut $4i\pi$. Si on prend $t \in [0, 2\pi] \to re^{-it}$ (on parcourt le cercle en sens inverse du sens trigonométrique), on obtient $-2i\pi$.

Cet exemple est fondamental. Au facteur $2i\pi$ près, l'intégrale $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ donne le nombre de tours qu'on a effectué autour de 0, ainsi que le sens utilisé. Dans le paragraphe qui suit, on généralise cette notion à une courbe quelconque, et à un point quelconque.

## 2- Indice d'un point par rapport à un lacet

**DEFINITION**

*Soit z un complexe, $\gamma$ un lacet dans $\mathbb{C}$ ne passant pas par z. On appelle* **indice** *de z par rapport à $\gamma$ l'intégrale* $\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta}$.

**THEOREME**

*Soit $\gamma$ un lacet dans $\mathbb{C}$.*

(i) *La fonction $z \to \mathrm{Ind}_\gamma(z)$, définie sur le complémentaire de la courbe parcourue par $\gamma$, est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.*

(ii) *Elle est constante sur chaque composante connexe du complémentaire de $\gamma$, nulle sur la composante qui s'étend jusqu'à l'infini.*

Démonstration :

❑ (i) Simplifions les notations. On peut d'abord supposer qu'on utilise un paramétrage du lacet tel que $[a, b] = [0, 1]$. Il suffit pour cela d'effectuer le changement de variable qui, à $t \in [0, 1]$, associe $a + t(b - a) \in [a, b]$. Puis, par une translation de vecteur $-z$, on se ramène au lacet $t \to \gamma(t) - z$ que nous renommerons du même nom $\gamma$, et au calcul de l'indice de 0 par rapport à ce lacet. Ces deux ajustements permettent de se ramener à un indice à calculer de la forme $\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt$, 0 n'appartenant pas au lacet $\gamma$.

Pour tout $t$, $\gamma(t)$ peut s'exprimer en coordonnées cartésiennes $x(t) + iy(t)$, avec $x$ et $y$ des fonctions continues $C^1$ par morceaux sur $[0, 1]$, mais aussi en polaire : $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$, avec $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, fonction strictement positive, continue, $C^1$ par morceaux, dérivable aux points où $\gamma$ est dérivable. Il n'est pas évident qu'il en soit de même pour $\theta(t)$. Mais si c'est le cas, on a nécessairement, en dérivant :

$$\gamma' = r'e^{i\theta} + ri\theta'e^{i\theta}$$

donc $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{r'}{r} + i\theta'$

donc nécessairement :

$$\theta' = \frac{1}{i}\left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{r'}{r}\right)$$

Considérons donc la fonction $\Theta : t \in [0, 1] \to \frac{1}{i}\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)} - \frac{r'(u)}{r(u)}\,du + \theta_0$, $\theta_0$ étant un argument de $\gamma(0)$. La fonction $\Theta$ est continue, $C^1$ par morceaux, dérivable aux points où $\gamma$, et donc $r$, est dérivable, de dérivée $\Theta' = \frac{1}{i}\left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{r'}{r}\right)$ et vérifie $\Theta(0) = \theta_0$. Montrons que, pour tout $t$, $\Theta(t)$ est un argument de $\gamma(t)$, i.e. $\gamma(t) = r(t)e^{i\Theta(t)}$, ou $\dfrac{\gamma(t)}{r(t)e^{i\Theta(t)}} = 1$. Il suffit de vérifier que cette expression est constante, car, en $t = 0$, on a :

$$\frac{\gamma(0)}{r(0)e^{i\Theta(0)}} = \frac{\gamma(0)}{r(0)\exp(i\theta_0)} = \frac{\gamma(0)}{\gamma(0)} = 1$$

La fonction $t \to \dfrac{\gamma(t)}{r(t)e^{i\Theta(t)}}$ est continue, $C^1$ par morceaux. Pour montrer qu'elle est constante, il suffit de montrer que, aux points où elle est dérivable, sa dérivée est nulle. De fait, cette dérivée a pour numérateur :

$$\gamma' re^{i\Theta} - \gamma(r'e^{i\Theta} + ir\Theta' e^{i\Theta}) = e^{i\Theta}(\gamma' r - \gamma r' - i\gamma r \frac{1}{i}(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{r'}{r})) = 0$$

On peut alors calculer l'indice de 0 par rapport au lacet :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 i\,(\Theta'(t) + \frac{r'(t)}{r(t)})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(\Theta(1) - \Theta(0) + \ln(r(1)) - \ln(r(0))$$

Comme $\gamma$ est un lacet, $\gamma(1) = \gamma(0)$, donc leurs modules $r(0)$ et $r(1)$ sont égaux, et leurs arguments $\Theta(0)$ et $\Theta(1)$ différent d'un multiple de $2\pi$. On a donc :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\Theta(1) - \Theta(0)}{2\pi} \in \mathbf{Z}$$

$\Theta$ étant une fonction continue, $\dfrac{\Theta(1) - \Theta(0)}{2\pi}$ s'interprète bien comme le nombre de fois que l'on a tourné autour de 0.

❑ (ii) Etant à valeurs entières, pour montrer que la fonction $z \to \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est constante sur chaque composante connexe, il suffit de montrer qu'elle est continue. Cette fonction est une intégrale dépendant du paramètre $z$. Pour tout $\zeta$ de la forme $\gamma(t)$, la fonction $z \to \dfrac{1}{\zeta - z}$ est continue. Pour montrer que l'intégrale dépendant d'un paramètre est continue en tout point $z_0$ du complémentaire du lacet, il suffit de vérifier une hypothèse de domination au voisinage de chaque $z_0$ élément de ce complémentaire (voir *Intégrales dépendant d'un paramètre* dans L2/SUITESF.PDF). Ce lacet, étant représenté par une fonction continue sur le compact [0, 1], est compact, donc fermé. Donc son complémentaire est ouvert. Donc, si $z_0$ appartient au complémentaire du lacet, il existe un disque ouvert $D(z_0, r)$ centré en $z$ de rayon $r > 0$, entièrement inclus dans le complémentaire. Autrement dit, pour tout $\zeta$ élément du lacet, on a $|\zeta - z| \geq r$ et donc $\dfrac{1}{|\zeta - z|} \leq \dfrac{1}{r}$. L'hypothèse de domination est vérifiée pour $z$ de $D(z_0, r)$ avec la fonction constante intégrable $\zeta \to \dfrac{1}{r}$. $\mathrm{Ind}_\gamma$ est donc continue sur ce disque, donc en $z_0$.

Pour montrer que l'indice est nul sur la composante connexe s'étendant à l'infini, et puisque l'indice est constant sur une composante connexe, il suffit de montrer $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ tend vers 0 quand $z$ tend vers l'infini. Il suffit pour cela de justifier l'échange entre les symboles de limite et d'intégration dans le calcul suivant :

$$\lim_{z\to\infty} \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lim_{z\to\infty} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma 0\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Il convient là aussi de donner une hypothèse de domination. Le lacet, compact, étant borné, il est inclus dans un disque D(0, R). Pour $z$ extérieur au disque D(0, 2R), et pour $\zeta$ élément du lacet, on a :

$$|\zeta - z| \geq |z| - |\zeta| \geq 2R - R = R$$

donc $\dfrac{1}{|\zeta - z|} \leq \dfrac{1}{R}$

et l'hypothèse de domination est vérifiée pour tout tel $z$ avec la fonction intégrable $\zeta \to \dfrac{1}{R}$.

*REMARQUE* :

❑ On peut montrer que la démonstration donnée de l'existence de $\Theta$ s'applique à toute fonction continue $t \in \mathbb{R} \to \gamma(t) \in S^1$, où $S^1$ désigne le cercle unité, sous la forme suivante :

**THEOREME DU RELEVEMENT**

*Soit $t \in \mathbb{R} \to \gamma(t) \in S^1$ une fonction continue. Alors il existe une fonction continue $t \to \Theta(t)$ telle que, pour tout $t$, $\gamma(t) = e^{i\Theta(t)}$. $\Theta$ s'appelle* **relèvement** *de $\gamma$. Si $\gamma$ est de classe $C^k$, $\Theta$ l'est également.*

La démonstration, admise ici, est plus délicate, car on ne suppose pas la fonction $\gamma$ dérivable.

*EXEMPLE* :

❑ Soit $\gamma = C(\omega, r)$ le cercle de centre $\omega$ de rayon $r$. Alors $\text{Ind}_\gamma(z) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ si } |z - \omega| < r \\ 0 \text{ si } |z - \omega| > r \end{array}\right.$.

Si $|z - \omega| > r$, $z$ appartient à la composante connexe s'étendant jusqu'à l'infini, donc $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$.

Si $|z - \omega| < r$, $z$ appartient à la même composante connexe que $\omega$ et on peut supposer $z = \omega$, pour lequel le calcul direct de $\text{Ind}_\gamma(\omega)$ est aisé.

On appréciera la puissance de la notion d'indice en tentant de vérifier directement la valeur de $\text{Ind}_\gamma(z)$ en dehors du cas où $z = \omega$. Ce calcul direct de $\text{Ind}_\gamma(z)$ est possible mais n'est guère évident. Prendre pour simplifier $\omega = 0$, $r = 1$ et $z = a$ réel strictement positif, différent de 0 et de 1. Prendre $t \in [-\pi, \pi] \to e^{it}$ comme paramétrage du cercle. Il s'agit de calculer :

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it} - a} \, dt = ... = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - a\cos(t)}{1 - 2a\cos(t) + a^2} \, dt$$

Pour y parvenir, effectuer le changement de variable $u = \tan(\frac{t}{2})$, décomposer la fraction obtenue en éléments simples, trouver une primitive faisant intervenir des arctan... On verra d'autres exemples d'intégrales difficiles ou impossibles à calculer directement, et dont on trouve la valeur en intégrant la bonne fonction holomorphe le long du bon chemin.

**3- Primitives**

On approfondit la question de savoir si une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ admet une primitive. On a vu plus haut que, si c'est le cas et si $\gamma$ est un lacet alors $\int_\gamma f(z) \, dz = 0$. On s'intéresse donc aux fonctions $f$ et aux domaines $\Omega$ vérifiant cette dernière condition.

Commençons par un cas élémentaire. Soit T une surface triangulaire de sommets A, B, C. On note $\partial$T la frontière de T, i.e. la réunion [AB] $\cup$ [BC] $\cup$ [CA] des trois côtés. Cette frontière forme un lacet qu'on oriente dans le A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A.

**LEMME DE GOURSAT**

*Soit f une fonction* ***holomorphe*** *sur un ouvert* $\Omega$ *de* $\mathbb{C}$*, et soit un triangle* T *inclus dans* $\Omega$*. Alors* :

(i) $\displaystyle\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$

(ii) *La conclusion reste vraie pour f continue sur* $\Omega$*, holomorphe sauf en un nombre fini de points de* $\Omega$*.*

Cette relation peut s'interpréter comme une sorte de relation de Chasles pour les intégrales de $\mathbb{C}$, puisqu'on peut l'écrire :

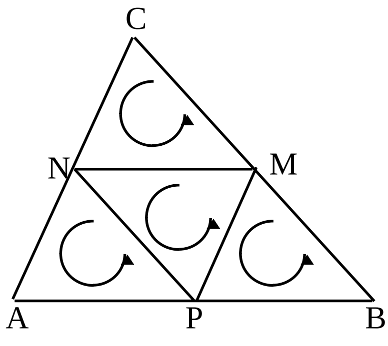
$$\int_{[AB]} f(z)\,dz + \int_{[BC]} f(z)\,dz + \int_{[CA]} f(z)\,dz = 0$$

donc $\displaystyle\int_{[AB]} f(z)\,dz + \int_{[BC]} f(z)\,dz = -\int_{[CA]} f(z)\,dz = \int_{[AC]} f(z)\,dz$

Notons cependant que, pour l'appliquer, on suppose non seulement *f* continue, mais holomorphe. De plus, le domaine $\Omega$ doit contenir le triangle T et pas seulement $\partial$T.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : Posons $I = \left| \displaystyle\int_{\partial T} f(z)\,dz \right|$. Divisons le triangle T en quatre triangles en prenant les milieux M, N, P de chaque côté.




On a :

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \int_{ABCA} f(z)\,dz = \int_{APNA} f(z)\,dz + \int_{PBMP} f(z)\,dz + \int_{MCNM} f(z)\,dz + \int_{NPMN} f(z)\,dz$$

Les intégrales sur les segments intermédiaires [MN], [NP], [PN] s'annulent en effet puisqu'elles interviennent dans les intégrales de deux lacets triangulaires effectués dans des sens différents.

Nécessairement, au moins l'une des quatre intégrales de droites a un module supérieur ou égal à $\dfrac{|I|}{4}$, sinon la somme des quatre intégrales aurait un module strictement inférieur au module $|I|$ de l'intégrale de gauche. Notons $T_1$ le triangle correspondant. Il est semblable au triangle initial par une similitude de rapport $\frac{1}{2}$. On itère le procédé, définissant au rang $n$ un triangle $T_n$, semblable au triangle initial par une similitude de rapport $\frac{1}{2^n}$ et vérifiant $\left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|I|}{4^n}$. Les triangles $T_n$ forment une suite décroissante de compacts inclus les uns dans les autres. Il existe un élément $z_0$ commun à tous les $T_n$ (Voir *Espaces compacts* dans L3/METRIQUE.PDF).

Compte tenu de la similitude de rapport $\frac{1}{2^n}$, il existe une constante C vérifiant simultanément :

$$\forall z \in \partial T_n,\ |z - z_0| \leq \frac{C}{2^n}.$$

$$L(\partial T_n) \leq \frac{C}{2^n} \qquad L(\partial T_n) \text{ étant la longueur du périmètre du triangle.}$$

$f$ étant holomorphe, $f$ est dérivable en $z_0$ et l'on a :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

$o(z - z_0)$ vérifiant : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, |z - z_0| \leq \delta \Rightarrow |o(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Pour tout $n$, on a :

$$\int_{\partial T_n} f(z)\,dz = \int_{\partial T_n} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\,dz + \int_{\partial T_n} o(z - z_0)\,\varepsilon(z)\,dz$$

Comme le chemin $\partial T_n$ est un lacet et que $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ admet une primitive (à savoir $f(z_0)z + \frac{f'(z_0)(z - z_0)^2}{2}$), l'intégrale $\int_{\partial T_n} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\,dz$ est nulle. Il reste donc :

$$\int_{\partial T_n} f(z)\,dz = \int_{\partial T_n} o(z - z_0)\,dz$$

Si on choisit $n$ assez grand pour que le triangle $T_n$ soit inclus dans le disque $D(z_0, \delta)$, on a :

$$|o(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \leq \frac{\varepsilon C}{2^n}$$

donc $$\left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\varepsilon C}{2^n} \times L(\partial T_n) = \frac{\varepsilon C^2}{4^n}$$

Comme par ailleurs, $\forall n$, $\left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|I|}{4^n}$, on en déduit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ |I| \leq \varepsilon C^2$$

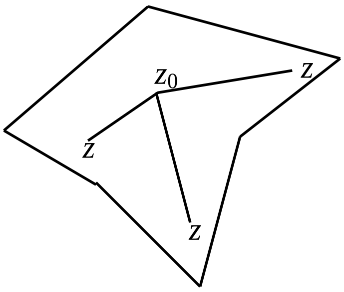
Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a nécessairement $I = 0$.

❑ (ii) La démonstration ci-dessus reste valide si le point $z_0$ intersection des $T_n$ est un point où $f$ est dérivable. Cela montre que, si le triangle T ne possède pas de points où $f$ n'est pas dérivable, alors on a encore $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$. Dans le cas contraire, soit S les points de T où $f$ n'est pas dérivable, et notons $k$ son cardinal. Comme ci-dessus, on subdivise T en quatre triangles et on exprime $\displaystyle\int_{\partial T} f(z)\,dz$ en la somme de quatre intégrales curvilignes. On itère $n$ fois ce procédé, T étant alors subdivisé en $4^n$ petits triangles semblables à $T_n$, de même que son intégrale. Parmi les $4^n$ petits triangles, au plus $6k$ possède un élément de S (le cas le plus défavorable étant lorsque chaque point de S se situe à un sommet commun à 6 petits triangles). T étant compact et $f$ continue sur T, $|f|$ est borné, majoré par un nombre M. La longueur du périmètre d'un petit triangle est $L(T_n) = \dfrac{L(T)}{2^n}$. Parmi les $4^n$ intégrales curvilignes qui décomposent $\displaystyle\int_{\partial T} f(z)\,dz$, au plus $6k$ ont un module majoré par $M \times L(T_n) = \dfrac{ML(T)}{2^n}$. Les autres sont nulles car correspondant à des triangles d'intersection vide avec S, pour lesquels on peut appliquer le (i). Il en résulte que :

$$\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \leq 6k \times \frac{ML(T)}{2^n}$$

Ce résultat étant valide pour tout $n$, en faisant tendre $n$ vers l'infini, on obtient $\displaystyle\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.

On est maintenant en mesure de définir une primitive d'une fonction holomorphe sur $\Omega$, mais cela nécessite encore que $\Omega$ ait une forme particulière. On dit que $\Omega$ est un **ouvert étoilé** s'il existe $z_0 \in \Omega$, appelé le **pôle** de $\Omega$, tel que, $\forall z \in \Omega$, $[z_0, z] \subset \Omega$. $[z_0, z]$ désigne le segment joignant $z_0$ à $z$, ensemble des points de la forme $(1 - t)z_0 + tz$, $t \in [0, 1]$.




*EXEMPLES* :

- ❑ Un ouvert convexe est étoilé. Tout point peut servir de pôle.
- ❑ $\mathbf{C} \setminus ]-\infty, 0]$ est étoilé, de pôle tout réel strictement positif.
- ❑ $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ n'est pas étoilé.

**PROPOSITION**

*Soit $f$ une fonction* ***holomorphe*** *sur un* ***ouvert étoilé*** *$\Omega$ de pôle $z_0$. Alors* :

(i) *$f$ admet une primitive sur $\Omega$.*

(ii) *Toutes les primitives de $f$ diffèrent entre elles d'une constante.*

(iii) $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$ *pour tout lacet $\gamma$ de $\Omega$.*

(iv) *Les conclusions précédentes restent valides si $f$ est continue sur un ouvert étoilé, et holomorphe sur cet ouvert sauf en un nombre fini de points.*

Le résultat est comparable à celui d'une forme différentielle exacte sur un ouvert étoilé. Le résultat reste vrai sur des ouverts plus généraux, dits **simplement connexes**, mais dont l'introduction nécessite un chapitre à lui seul (voir L3/SIMPCNNX.PDF). Dans toute la suite, on peut remplacer "*ouvert étoilé*" par "*simplement connexe*" pour les lecteurs connaissant cette dernière notion, mais les démonstrations ne sont pas données ici pour cette généralisation.

Les conditions sont suffisantes, mais pas toujours nécessaires. La fonction $z \to \frac{1}{z^2}$ est holomorphe sur l'ouvert non étoilé $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, et y admet $-\frac{1}{z}$ comme primitive.

Démonstration :

❑ (i) : Puisque le segment $[z_0, z]$ constitue un chemin privilégié $\gamma(z)$ pour aller de $z_0$ à $z$, posons :

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta = (z - z_0)\int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\, dt$$

Montrons que F est une primitive de $f$. Soit $z$ élément de $\Omega$ et $r > 0$ un rayon suffisamment petit pour que $D(z, r) \subset \Omega$. Soit $h \in D(z, r)$. $f$ étant holomorphe, on applique le lemme de Goursat au triangle de sommets $z_0$, $z$ et $z + h$, qui est entièrement contenu dans $\Omega$ :

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta$$

Par ailleurs :

$$\int_{[z,z+h]} f(z)\, d\zeta = f(z)\int_{[z,z+h]} d\zeta = hf(z)$$

donc $\quad \dfrac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{[z,z+h]} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta$

donc $\quad \left|\dfrac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \dfrac{1}{|h|} \times \underset{\zeta\in[z,\,z+h]}{\mathrm{Sup}} \left|f(\zeta) - f(z)\right| \times L([z, z+h]) = \underset{\zeta\in[z,\,z+h]}{\mathrm{Sup}} \left|f(\zeta) - f(z)\right|$

Comme $f$ est continue en $z$, $\underset{\zeta\in[z,\,z+h]}{\mathrm{Sup}} \left|f(\zeta) - f(z)\right|$ tend vers 0 quand $h$ tend vers 0, donc :

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = 0$$

donc $\quad \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$

F est bien dérivable en $z$, de dérivée $f(z)$.

Une fois prouvé que F est une primitive de $f$ s'annulant en $z_0$, on peut remarquer qu'on peut prendre n'importe quel chemin $\delta$ inclus dans $\Omega$ pour aller de $z_0$ à $z$. On a vu en effet plus haut que, dans le cas où une primitive existe :

$$\int_\delta f(\zeta)\, d\zeta = F(z) - F(z_0)$$

$= F(z)$

car $F(z_0) = 0$.

❑ (ii) : Si F et G sont deux primitives de $f$, alors $(F - G)' = f - f = 0$. $F - G$ est une fonction holomorphe de dérivée nulle sur $\Omega$, connexe par arcs donc connexe (voir L3/TOPOLOG.PDF). On en conclut que $F - G$ est constante.

❑ (iii) : $f$ admet une primitive F sur $\Omega$, et on a vu plus haut que, dans ce cas :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) = 0$$

$z_0$ et $z_1$ étant les points initial et final de $\gamma$, égaux car $\gamma$ est un lacet.

A l'issue de cette proposition, on observe qu'il y a deux cas pour lequel on peut conclure qu'une intégrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ d'une fonction holomorphe $f$ sur un lacet $\gamma$ est nulle. L'un ajoute une hypothèse à $f$, l'autre ajoute une hypothèse à $\Omega$ :

premier cas : $\Omega$ est un ouvert quelconque, et $f$ y admet une primitive.

deuxième cas : $\Omega$ est un ouvert étoilé, et $f$ est une fonction holomorphe quelconque.

Bien que le deuxième cas ne soit en fait qu'un cas particulier du premier, il peut être commode cependant de bien mémoriser ces deux cas, indépendamment l'un de l'autre.

❑ (iv) : Le seul endroit dans la démonstration du (i) où l'on utilise le fait que $f$ est holomorphe, c'est dans l'application du lemme de Goursat pour obtenir $F(z + h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta$. Or le lemme de Goursat continue à s'appliquer pour une fonction continue et holomorphe sauf en un nombre fini de points.

La démonstration du (i) ci-dessus permet aussi d'énoncer le théorème suivant, en anticipant un peu sur la suite du chapitre :

**THEOREME DE MORERA**

*Soit $f$ une fonction continue sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$, telle que, pour tout triangle* T *inclus dans $\Omega$,* $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$. *Alors $f$ est holomorphe sur $\Omega$.*

<u>Démonstration</u> :

❑ Soit $z_0$ élément de $\Omega$ et soit $D(z_0, r)$ un disque centré en $z$, inclus dans $\Omega$. Pour $z$ dans $D(z_0, r)$, on pose :

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

Le théorème de Morera suppose que $f$ vérifie le lemme de Goursat, hypothèse qui se substitue au fait que $f$ soit holomorphe. Comme on l'a dit dans la justification du (iv) ci-dessus, ce lemme étant supposé vérifié, la démonstration faite dans le (i) continue à s'appliquer et montre que F est une primitive de $f$ sur $D(z_0, r)$. F est donc holomorphe sur $D(z_0, r)$. Nous montrons plus bas qu'alors F est analytique (i.e. développable en série entière sur D($z_0$, $r$)), donc sa dérivée $f$ l'est également. $f$ est donc dérivable en tout point $z_0$ de $\Omega$ donc holomorphe sur $\Omega$.

### 4- La formule intégrale de Cauchy

**THEOREME (FORMULE INTEGRALE DE CAUCHY)**

*Soit $\Omega$ un* ***ouvert étoilé****, $f$ holomorphe sur $\Omega$, et $\gamma$ un lacet de $\Omega$. Pour tout $z$ n'appartenant pas à ce lacet, on a* :

$$\boxed{f(z) \times \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta}$$

<u>Démonstration</u> :

❑ Comme $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$, par différence, on doit montrer que :

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - f(z) \times \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Si on pose $g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \text{ si } \zeta \neq z \\ f'(z) \text{ si } \zeta = z \end{cases}$, alors $g$ est continue sur $\Omega$ et holomorphe sur $\Omega$ privé du point $z$. $\Omega$ étant un ouvert étoilé, $\gamma$ étant un lacet, et $g$ continue holomorphe sauf en un nombre fini de points, on a bien $\displaystyle\int_\gamma g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$, d'après le point (iii) du théorème montré dans le précédent paragraphe.

Nous sommes maintenant en mesure de justifier les affirmations du préambule :

**COROLLAIRE**

(i) *Toute fonction holomorphe $f$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$ est analytique, i.e. développable en série entière au voisinage de tout point $a$ de $\Omega$. Le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à la distance* R *de $a$ à la frontière $\Omega$.*

(ii) *Soit $f$ une fonction continue sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\Omega$ sauf en un nombre fini de points. Alors $f$ est holomorphe sur $\Omega$ tout entier.*

Si $\Omega = \mathbb{C}$, le rayon de la série entière en tout point vaut $+\infty$.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : Soit $a$ un point de $\Omega$, soit R > 0 tel que D($a$, R) soit inclus dans $\Omega$. On peut prendre pour R la distance de $a$ à la frontière de $\Omega$. Soit $z \in$ D($a$, R) et $r$ tel que $|z| < r <$ R. Soit $\gamma$ le lacet constitué du cercle de centre $a$ de rayon $r$, parcouru dans le sens trigonométrique. D($a$, R) est un ouvert étoilé, donc on peut y appliquer la formule intégrale de Cauchy. On a $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(a) = 1$ car $z$ appartient au disque limité par $\gamma$, composante connexe possédant $a$. Donc :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - a - (z - a)}\,\mathrm{d}\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}} \,\mathrm{d}\zeta \qquad \text{avec } \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1 \text{ puisque } |z-a| < r \text{ et } |\zeta - a| = r$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \mathrm{d}\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n \,\mathrm{d}\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n \,\mathrm{d}\zeta$$

de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ avec $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$. Il convient de justifier la permutation entre série et intégrale. Intégrant sur un intervalle borné, il suffit de montrer que la série converge normalement. En paramétrant $\gamma$ par $t \in [0, 2\pi] \to \zeta = a + re^{it}$, le module du terme général de la série à intégrer est $\left|\dfrac{f(a+re^{it})}{r^{n+1}} (z-a)^n r\right|$ (le $r$ final provient de $\mathrm{d}\zeta$). Si M est un majorant de la fonction continue $f$ sur le lacet (qui est un compact), on a :

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} \left|\frac{f(a+re^{it})}{r^{n+1}} (z-a)^n r\right| = \frac{\mathrm{M}|z-a|^n}{r^n}$$

qui est bien le terme général d'une série convergente puisque $\dfrac{|z-a|}{r} < 1$.

❑ (ii) : Soit $z$ un point de $\Omega$ et D un disque centré sur $z$. D est un ouvert étoilé et $f$ est continue sur D, et holomorphe sur D sauf en un nombre fini de points. $f$ y admet donc une primitive F. F est donc holomorphe sur D donc analytique. Sa dérivée $f$ est aussi analytique sur D, donc holomorphe.

*EXEMPLES* :
❑ Soit R > 0 et $f$ développable en série entière sur le disque D(0, R). Alors $f$ est dérivable en tout point de ce disque, donc holomorphe, donc analytique, donc $f$ est développable en série entière au voisinage de tout point $z$ de D(0, R).
Donnons aussi une démonstration directe de ce résultat en utilisant les propriétés des familles sommables (voir L2/SERIES.PDF). Soit $h$ de module strictement inférieur à $\mathrm{R} - |z|$. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série entière de $f$. On a formellement :

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a_n z^{n-p} h^p$$

$$= \sum_{0\le p\le n} \binom{n}{p} a_n\, z^{n-p}\, h^p \qquad \text{égalité à justifier}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} a_n\, z^{n-p}\Big)\, h^p$$

de la forme $\sum_{p=0}^{\infty} b_p\, h^p$, développement en série entière de la fonction $h \to f(z + h)$.

Pour justifier la permutation des signes de sommation, il suffit de vérifier que la famille des $\binom{n}{p} \left| a_n\, z^{n-p}\, h^p \right|$, $0 \le p \le n$, est sommable. Or, pour chaque $n$, la somme $\mathrm{T}_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left| a_n\, z^{n-p}\, h^p \right|$ est évidemment définie puisque finie, $\mathrm{T}_n = |a_n|\, (|z| + |h|)^n$, et la famille des $\mathrm{T}_n$ est sommable puisque $|z| + |h| < \mathrm{R}$, et donc $\sum \mathrm{T}_n$ converge. Par conséquent, $\sum_{0\le p\le n} \binom{n}{p} a_n\, z^{n-p}\, h^p$ est bien définie et peut être sommée dans l'ordre que l'on veut.

❑ La fonction $z \to \mathrm{Log}(1 + z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite réelle $]-\infty, -1]$. Elle admet donc un développement en série entière en 0, de rayon (au moins, mais en fait égal à) 1, et ce développement en série entière coïncide avec le développement en série entière usuel du ln puisque les deux fonctions coïncident sur $]-1, 1[$. Ainsi :

$$|z| < 1 \Rightarrow \mathrm{Log}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, z^n$$

❑ La fonction $z \to \tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé des valeurs $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Elle est donc développable en série entière au voisinage de 0, avec un rayon de convergence égal à $\dfrac{\pi}{2}$. En effet, $\mathrm{D}(0, \dfrac{\pi}{2}))$ est le plus grand disque centré en 0 qu'on puisse définir sans rencontrer une singularité. Pour contre, les coefficients de ce développement ne sont pas simple à déterminer. Ils s'expriment en fonction des nombres dits de Bernoulli ou de la fonction $\zeta$ de Riemann. Il en est de même de la fonction tangente hyperbolique. On peut voir dans la section des exercices un développement de la fonction $z \to \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)}$.

❑ Soit $f$ holomorphe sur un ouvert $\Omega$, $a \in \Omega$, $r$ suffisamment petit pour que le disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(a, r)$ soit inclus dans $\Omega$, $\gamma$ le cercle de centre $a$ de rayon $r$ parcouru dans le sens trigonométrique, paramétré par $\theta \to a + re^{i\theta}$. On peut ne pas supposer $\Omega$ étoilé, mais appliquer la formule de Cauchy en considérant $\overline{\mathrm{D}}(a, r)$ inclus dans un disque de rayon légèrement plus grand inclus dans $\Omega$, et qui, lui est convexe, donc étoilé. Cette formule donne alors :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

$f(a)$ est la **valeur moyenne** de $f$ sur le cercle centré en $a$, de rayon assez petit pour que le disque correspondant soit inclus dans $\Omega$.

### *III : Propriétés*

**1- Prolongement analytique**

**PROPOSITION**

(i) *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert* ***connexe*** $\Omega$ *de* $\mathbf{C}$ *et si l'ensemble* Z($f$) *où f s'annule admet un point d'accumulation élément de* $\Omega$, *alors* $f = 0$ *sur* $\Omega$.

(ii) *Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur* $\Omega$ *ouvert* ***connexe***, *et prenant les mêmes valeurs sur un ensemble ayant un point d'accumulation élément de* $\Omega$, *alors* $f = g$ *sur* $\Omega$.

(iii) **Principe du prolongement analytique** : *Soient* $\Omega$ *et* $\Omega'$ *sont deux ouverts de* $\mathbf{C}$ *tels que* $\Omega \subset \Omega'$, $\Omega'$ ***connexe***. *Si f est holomorphe sur* $\Omega$, *et s'il existe une fonction g qui prolonge f en une fonction holomorphe sur* $\Omega'$, *alors ce prolongement est unique.*

Un **point d'accumulation** $a$ d'une partie Z de $\mathbf{C}$ est tel que :

$$\forall r > 0, \exists z \in Z, z \neq a \text{ et } |z - a| < r$$

autrement dit, $z$ est adhérent à Z \ $\{a\}$.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : Soit $a$ un point d'accumulation de Z($f$) dans $\Omega$. $a$ étant adhérent à Z($f$) \ $\{a\}$, et $f$ s'annulant sur Z($f$) \ $\{a\}$ , par continuité de $f$, on a aussi $f(a) = 0$. $f$, étant holomorphe, admet un développement en série entière au voisinage de $a$. Il existe des coefficients $c_n$ tels que :

$$\exists r > 0, \forall z \in D(a, r).\ \ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - a)^n$$

On part de $n = 1$ car $f(a) = 0$.

Supposons par l'absurde que l'un des $c_n$ est non nul. Soit $m$ le plus petit indice tel que $c_m \neq 0$. Sur D($a$, $r$), on a :

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z - a)^n \sim c_m(z - a)^m \text{ quand } m \text{ tend vers } 0$$

Autrement dit, $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z)}{c_m(z - a)^m} = 1$, donc il existe donc $r' > 0$ tel que :

$$\forall z \in D(a, r') \setminus \{a\}, |f(z)| > \frac{1}{2}|c_m(z - a)^m| > 0$$

Donc $\exists r' > 0, \forall z \in D(a, r') \setminus \{a\}, f(z) \neq 0$

ou $\exists r' > 0, \forall z \in D(a, r') \setminus \{a\}, z \notin Z(f)$

Cette dernière phrase est la stricte négation de $\forall\, r' > 0, \exists\, z \in Z(f), z \neq a$ et $|z - a| < r'$. Elle exprime le fait que $a$ n'est pas un point d'accumulation de $Z(f)$. $a$ est ici un **point isolé** de $Z(f)$, en contradiction avec l'hypothèse.
Par conséquent, tous les $c_n$ sont nuls, donc $f = 0$ sur $D(a, r)$. Considérons la partie A de $\Omega$, constituée des points d'accumulation de $Z(f)$. On vient de montrer que :

$$\forall\, a \in A, \exists\, r > 0, D(a, r) \subset Z(f)$$

Mais on a plus. Tout point de $D(a, r)$ est point d'accumulation de $Z(f)$, puisque tout point de ce disque admet dans chacun de ses voisinages un autre point du même disque et donc de $Z(f)$. On a donc en fait $D(a, r) \subset A$, ce qui prouve que A est ouvert. A est aussi fermé dans $\Omega$, car si $(a_n)$ est une suite de A convergeant vers un élément de $l$ de $\Omega$, tout disque D de centre $l$ contient un $a_n$, et le voisinage de $a_n$ $D(a_n, |a_n - l|)$ contient un élément de $Z(f)$ différent de $l$. Donc $l$ appartient à A. A étant une partie non vide, à la fois ouverte et fermée de $\Omega$, et $\Omega$ étant connexe, on a $A = \Omega$. Comme $A \subset Z(f) \subset \Omega$, on a aussi $Z(f) = \Omega$ et $f = 0$ sur $\Omega$.

Par contraposition, on a montré qu'une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe n'admet que des zéros isolés.

❑ (ii) : Il suffit d'appliquer le (i) à $f - g$.

❑ (iii) : Si $g$ et $g'$ sont deux prolongements de $f$, on applique le (ii) à $g$ et $g'$, le domaine $\Omega$ de coïncidence entre $g$ et $g'$ admettant des points d'accumulation puisqu'il est ouvert.
$f$ étant une fonction holomorphe sur un domaine $\Omega$, la difficulté est de trouver le domaine $\Omega'$ le plus grand possible sur lequel on peut définir un prolongement analytique de $f$.

*EXEMPLES* :
❑ L'ensemble $Z(f)$ des zéros de $f$ peut avoir un point d'accumulation, mais celui-ci appartiendra à la frontière de $\Omega$. Par exemple, la fonction $z \to \sin(\frac{1}{z})$ est définie sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Son ensemble $Z(f)$ est constitué des éléments $a_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}^*$, et admet comme point d'accumulation 0, élément de la frontière de $\Omega$.

❑ La proposition (ii) est très intéressante pour prolonger à $\mathbb{C}$ des propriétés de fonctions vérifiées sur $\mathbb{R}$. Par exemple, sur $\mathbb{R}$, on a la formule de trigonométrique :

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Pour tout $y$, les fonctions $z \in \mathbb{C} \to \cos(z + y)$ et $z \to \cos(z)\cos(y) - \sin(z)\sin(y)$ sont holomorphes et coïncident pour tout $x$ de $\mathbb{R}$. Elles coïncident donc sur $\mathbb{C}$, donc :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \forall\, y \in \mathbb{R}, \cos(z + y) = \cos(z)\cos(y) - \sin(z)\sin(y)$$

Pour tout $z$ de $\mathbb{C}$, on considère ensuite les deux fonctions $z' \in \mathbb{C} \to \cos(z + z')$ et $z \in \mathbb{C} \to \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z')$. Etant holomorphes et coïncidant pour tout $y$ de $\mathbb{R}$, elles coïncident sur $\mathbb{C}$. Donc :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \forall\, z' \in \mathbb{R}, \cos(z + z') = \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z')$$

On montre ainsi que toutes les formules usuelles de trigonométrie circulaires sont valides sur $\mathbb{C}$, sans avoir besoin de refaire explicitement les calculs pour le vérifier. Comme $\sin(ix) = i\mathrm{sh}(x)$ et

$\cos(ix) = \text{ch}(x)$, on peut associer à chaque formule de trigonométrie circulaire une formule comparable de trigonométrie hyperbolique. Par exemple :

$$\begin{aligned}\text{ch}(x + y) &= \cos(ix + iy) \\ &= \cos(ix)\cos(iy) - \sin(ix)\sin(iy) \\ &= \text{ch}(x)\text{ch}(y) - i^2\text{sh}(x)\text{sh}(y) \\ &= \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)\end{aligned}$$

❑ On peut procéder de même pour la fonction $\Gamma$. Elle est définie sur $\Omega = \{z \mid \text{Re}(z) > 0\}$ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, \text{d}t$$

Dans L2/SUITESF.PDF, on justifie que la fonction $x \in \,]0, +\infty[\, \to \Gamma(x)$ est $C^1$. La démonstration s'étend aux complexes $z$ de $\Omega$. $\Gamma$ est donc holomorphe sur $\Omega$. Par une intégration par parties, on montre que : $\forall\, x > 0$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. Les deux fonctions $z \to \Gamma(z + 1)$ et $z \to z\Gamma(z)$ étant toutes deux holomorphes sur $\Omega$ et coïncidant sur $]0, +\infty[$, la relation $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ est vraie sur $\Omega$ sans vérification supplémentaire. Pour $z$ non nul, la relation $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z + 1)}{z}$ permet d'étendre la fonction $\Gamma$ au domaine $\{z \mid \text{Re}(z) > -1\}$ privé de 0, puis la même relation permet ensuite d'étendre la fonction $\Gamma$ au domaine $\{z \mid \text{Re}(z) > -2\}$ privé de 0 et $-1$. En itérant, on prolonge la fonction $\Gamma$ à tout le plan complexe privé des entiers négatifs ou nuls. Chacun des prolongements étant holomorphe, ce prolongement est unique.

**2- Séries de Laurent**

Pour un rappel sur les séries entières, voir L2/SERIENTR.PDF
Pour un rappel sur les séries de Fourier, voir L3/FOURIER.PDF
Pour un rappel sur les intégrales dépendant d'un paramètre, voir L2/SUITESF.PDF

On appelle **série de Laurent** une série à coefficients complexes de la forme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, dans le sens de la sommabilité des séries, ou encore dans le sens où l'on suppose que les deux séries $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ et $\sum_{n<0} c_n z^n$ sont toutes deux absolument convergentes et que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$. Notons $R_2$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Par ailleurs, $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{c_{-n}}{z^n}$ est une série entière en $Z = \dfrac{1}{z}$. Si on note $\dfrac{1}{R_1}$ son rayon de convergence, elle converge absolument pour $|Z| < \dfrac{1}{R_1}$, et donc pour $|z| > R_1$. Le seul cas intéressant est celui pour lequel $R_1 < R_2$, ce que nous supposerons désormais. Dans ce cas, il y a convergence absolue de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ pour les $z$ tels que $R_1 < |z| < R_2$, couronne ouverte de convergence. Il y a divergence de la première série si $|z| > R_2$, et divergence de la deuxième série si $|z| < R_1$. Comme pour le cas des séries entières, il peut y avoir divergence ou convergence, absolue ou non, pour $|z| = R_1$ ou $R_2$. Pour simplifier, on se limitera au domaine de la couronne ouverte $R_1 < |z| < R_2$

Si $r_2 < R_2$, la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n\, z^n$ converge normalement sur le domaine compact $\{z, |z| \leq r_2\}$ strictement inclus dans le disque de convergence de rayon $R_2$. Si $r_1 > R_1$ et donc $\dfrac{1}{r_1} < \dfrac{1}{R_1}$, la série entière $\sum_{n>0} c_{-n}\, Z^n$ converge normalement sur le domaine compact $\{Z, |Z| \leq \dfrac{1}{r_1}\}$ strictement inclus dans le disque de convergence de rayon $\dfrac{1}{R_1}$. Par conséquent, $\sum_{n>0} \dfrac{c_{-n}}{z^n}$ converge normalement dans le domaine $\{z, |z| \geq r_1\}$, et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, z^n$ converge normalement dans le domaine $\{z, r_1 \leq |z| \leq r_2\}$.

**PROPOSITION**

(i) *Soit* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, z^n$ *une série de Laurent. Alors f est holomorphe sur sa couronne ouverte de convergence.*

(ii) *Réciproquement, soit f une fonction holomorphe sur une couronne ouverte de centre* 0 *et de rayons* $R_1 < R_2$. *Alors f est développable en série de Laurent sur cette couronne, les coefficients étant définis de manière unique.*

(iii) *Soit* $\Omega$ *un ouvert de* $\mathbf{C}$, *a un point de* $\Omega$, R *la distance de a à la frontière de* $\Omega$, *f holomorphe sur* $\Omega \setminus \{a\}$. *a s'appelle une* **singularité** *de f. Alors il existe une unique famille de coefficients* $(c_n)$ *tels que, pour tout z tel que* $0 < |z-a| < R$, *on ait* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, (z-a)^n$. *C'est le développement en série de Laurent de la fonction f au voisinage de a. La série converge absolument en tout point de* $D(a, R) \setminus \{a\}$, *et converge normalement sur tout compact inclus dans* $D(a, R) \setminus \{a\}$.

Nous aurons besoin, dans la démonstration qui suit, du résultat suivant sur les séries de Fourier :
*Soit g une fonction continue de classe* $C^1$ *par morceaux de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{C}$, $2\pi$-*périodique. Soient, pour tout n entier relatif, les coefficients* $c_n$ *définis par :* $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta$. *Alors la série de fonctions* $\theta \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\theta}$ *converge normalement vers la fonction g.*

Le fait que la série converge normalement fait que la signification de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\theta}$ est aussi bien $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{in\theta}$, usuellement utilisée quand il s'agit de série de Fourier, que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\, e^{in\theta}$, comme il est d'usage pour les séries de Laurent. En effet, le fait que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ converge fait que les deux séries de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{in\theta}$ et $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\, e^{in\theta}$ sont séparément normalement convergentes.

On dispose également de l'**identité de Parseval** :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^2 \, d\theta$$

qui peut se révéler utile. Voir L3/FOURIER.PDF.

Démonstration :

❑ (i) : Si les rayons de la couronne de convergence sont $R_1 < R_2$, l'holomorphie résulte du fait que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ est holomorphe sur $D(0, R_2)$, et que $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$ est holomorphe sur $D(0, \frac{1}{R_1})$. En composant cette dernière somme de série avec la fonction holomorphe $z \to \frac{1}{z}$, on conclut que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$ est holomorphe sur le domaine $\{z, |z| > R_1\}$, et que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, z^n$ est holomorphe sur la couronne de rayons $R_1 < R_2$, intersection de $D(0, R_2)$ et de $\{z, |z| > R_1\}$ comme somme de deux fonctions holomorphes. Comme pour les séries entières, la dérivation peut s'effectuer terme à terme :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^{n+1}}$$

On notera que, dans la deuxième série, il n'y a pas de terme en $\frac{1}{z}$. Une série de Laurent ayant un terme en $\frac{1}{z}$ non nul ne pourra donc pas avoir de primitive.

❑ (ii) : Pour $r$ élément de $]R_1, R_2[$, considérons la fonction $g : \theta \to f(re^{i\theta})$. C'est une fonction $2\pi$-périodique, de classe $C^1$, car $f$ étant holomorphe donc analytique, $f$ est elle-même de classe $C^1$. Pour chaque $r$, on peut donc développer $g$ en une série de Fourier convergeant normalement, avec des coefficients dépendant de $r$, que nous noterons $c_n(r)$ :

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

et $\quad \forall\ \theta,\ f(re^{i\theta}) = g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r)\, e^{in\theta}$ $\quad$ avec convergence normale de la série

Pour tout $n$, on a, en notant $C(r)$ le cercle de centre 0 et de rayon $r$ :

$$\begin{aligned} c_n(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta \\ &= \frac{r^n}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\, ire^{i\theta}\, d\theta \\ &= \frac{r^n}{2i\pi}\int_{C(r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \qquad \text{avec } z = re^{i\theta} \text{ et } \frac{dz}{d\theta} = ire^{i\theta} \end{aligned}$$

Montrons que l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{C(r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$ ne dépend pas du rayon $r$ du cercle $C(r)$ sur lequel on intègre. Pour cela, on voit cette intégrale, égale à $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\, d\theta$, comme étant une intégrale dépendant du paramètre $r$. La dérivée de $\frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}$ par rapport à $r$ est :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\right) = e^{i\theta}\, \frac{f'(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} - n\, \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{in\theta}}$$

Si on prend deux réels $r_1$ et $r_2$ tels que $R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$. La fonction $(r, \theta) \to \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\right)$ est continue sur le compact égal à la couronne fermée limitée par les rayons $r_1$ et $r_2$, et y est donc bornée. Cette remarque assure que $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\right)$ vérifie une hypothèse de domination permettant de permuter les symboles de dérivation et d'intégration. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\, d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial r}\, \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\, \frac{f'(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} - n\, \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{in\theta}}\, d\theta \\ &= \frac{1}{ir}\int_{C(r)} \frac{f'(z)}{z^n} - n\, \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \qquad \text{avec } z = re^{i\theta} \text{ et } \frac{dz}{d\theta} = ire^{i\theta} \end{aligned}$$

La fonction $z \to \frac{f'(z)}{z^n} - n\, \frac{f(z)}{z^{n+1}}$ admet comme primitive $z \to \frac{f(z)}{z^n}$. Comme l'intégrale sur un lacet (ici $C(r)$) d'une fonction complexe admettant une primitive est nulle, on a $\int_{C(r)} \frac{f'(z)}{z^n} - n\, \frac{f(z)}{z}\, dz = 0$, donc :

$$\frac{d}{dr}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\, d\theta = 0$$

ce qui montre que $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(r)} \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$ est bien indépendant de $r$. Notons $c_n$ (sans paramètre) cette intégrale, de sorte que $c_n(r) = r^n c_n$ et que :

$$\forall\, \theta,\ \forall\, r \in\ ]R_1, R_2[,\ f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, r^n e^{in\theta}$$

autrement dit, pour tout $z$ dans la couronne de rayons $R_1$ et $R_2$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, z^n$$

ce qui donne le développement en série de Laurent de $f$, avec $c_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(r)} \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$, indépendamment du rayon $r$ choisi entre $R_1$ et $R_2$.

Les coefficients du développement de $f$ en série de Laurent sont uniques, car, si on a $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n$ avec convergence absolue pour tout $z$ tel que $R_1 < |z| < R_2$, alors, pour $r \in\ ]R_1, R_2[$ :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\,\frac{e^{-in\theta}}{r^n}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, r^k e^{ik\theta}\,\frac{e^{-in\theta}}{r^n}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} d_k\, r^k e^{ik\theta}\,\frac{e^{-in\theta}}{r^n}\,d\theta$$

on peut permuter série et intégrale, car le série de fonctions $\theta \to \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, r^k e^{ik\theta}\,\frac{e^{-in\theta}}{r^n}$ converge normalement sur le segment $[-\pi, \pi]$, puisque $\sum |d_k|\, r^k$ converge.

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, r^{k-n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta}\,d\theta$$

$$= d_n$$

car $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta}\,d\theta = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq n \\ 2\pi \text{ si } k = n \end{cases}$

❑ (iii) : Par translation, en remplaçant $z$ par $z - a$, les résultats précédents s'appliquent sur des couronnes centrées en $a$. Soit $f$ holomorphe sur $D(a, R) \setminus \{a\}$. On applique les résultats du (ii) avec $R_1 = 0$ et $R_2 = R$. $f$ est développable en série de Laurent sur $D(a, R) \setminus \{a\}$ sous la forme $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-a)^n$, les coefficients de la série de Laurent étant donnés par :

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

où $\gamma$ est un cercle de centre $a$ et de rayon $r$ quelconque élément de $]0, R[$.
Le fait que la série converge normalement sur tout compact K inclus dans $D(a, R) \setminus \{a\}$ résulte du fait qu'une série de Laurent converge normalement sur tout compact inclus dans sa couronne.

Enfin, notons que la partie de la somme de la série à indices négatifs $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ converge pour tout $z$ tel que $|z-a| > R_1 = 0$, donc pour tout $z$ élément de $\mathbf{C} \setminus \{a\}$.

Il existe plusieurs types de singularité pour $a$ :

❑ Si $c_n = 0$ pour tout $n < 0$, alors $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ et $f$ se prolonge en une fonction holomorphe en $a$. La singularité est dite **artificielle**. On notera que, dans ce cas, $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ et que la relation $c_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$, $\gamma$ étant un cercle de centre $a$ et de rayon $r$ inférieur à R, conduit, si M est majorant de $|f|$ sur une partie contenant $\gamma$, à l'inégalité $\left|\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| \leq \dfrac{M}{r^n}$ et donc à :

$$\forall\, n \geq 0,\ |f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$$ (**majoration de Cauchy**).

❑ S'il existe $k > 0$ tel que $c_n = 0$ pour $n < -k$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{k} \dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n}$. $a$ s'appelle **pôle d'ordre** $k$ de la fonction $f$. C'est la somme de la fonction $z \to \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ holomorphe sur $D(a, R)$ et de la fraction rationnelle $z \to \sum_{n=1}^{k} \dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ ayant un pôle en $a$. Ou encore, en réduisant au même dénominateur, il existe une fonction holomorphe $g$ sur $D(a, R)$, ne s'annulant pas en $a$, telle que :

$$\forall\, z \in D(a, R),\ f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$$

❑ Sinon, $a$ s'appelle **singularité essentielle**.

Dans tous les cas, on appelle **résidu** de $f$ en $a$ le coefficient $c_{-1}$, noté $\mathrm{Res}(f, a)$. Un cas fréquent où l'on peut calculer facilement le résidu est celui où $a$ est un pôle simple de $f$. Il suffit pour cela de voir si la limite $\lim\limits_{z\to a} (z-a)f(z)$ existe. Si c'est le cas, cette limite vaut $\mathrm{Res}(f, a)$. Il peut être plus délicat de déterminer le résidu si le pôle est multiple ou si la singularité est essentielle. En effet, la formule théorique $c_{-1} = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$, où $\gamma$ est un cercle de centre $a$, peut ne pas être facile à calculer.

*EXEMPLES* :
❑ Le développement d'une fonction en série de Laurent est lié à la couronne choisie.

Ainsi, la fonction $z \to \dfrac{1}{z(1-z)}$ est définie sur la couronne limitée par les rayons $R_1 = 0$ et $R_2 = 1$ et y admet le développement en série Laurent :

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Mais elle est aussi définie sur la couronne limitée par les rayons $R_1 = 1$ et $R_2 = +\infty$, et y admet le développement en série de Laurent :

$$\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z^2(1-\frac{1}{z})} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

Elle est également définie sur la couronne de centre 1 limitée par les rayons $R_1 = 0$ et $R_2 = 1$ et y admet le développement en série de Laurent :

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{(1-(1-z))(1-z)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^{n-1}$$

$$= -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

❑ La fonction $z \to \dfrac{\sin(z)}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mais se prolonge en 0 en une fonction holomorphe de développement $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$. 0 est une singularité artificielle.

❑ La fonction $f : z \to \dfrac{\sin(z)}{z^2}$ admet un pôle en 0 d'ordre 1. $\text{Res}(f, 0) = 1$.

❑ La fonction $f : z \to \dfrac{1}{\sin(z)}$ admet un pôle en tous les points $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\frac{1}{\sin(n\pi + h)} = \frac{(-1)^n}{\sin(h)} \sim \frac{(-1)^n}{h} \text{ quand } h \text{ tend vers } 0$$

donc $\text{Res}(f, n\pi) = (-1)^n$.

❑ La fonction $z \to \exp(z) + \exp(\frac{1}{z}) = 2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ admet une singularité essentielle en 0.

**3- Théorème de Liouville**

On appelle **fonction entière** une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Une fonction entière admet donc un développement en série entière de rayon de convergence infini.

**THEOREME DE LIOUVILLE**

*Soit f une fonction entière bornée. Alors f est constante.*

Démonstration :

❑ Soit M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{C}$. On utilise le développement en série entière sur $\mathbb{C}$, disque de centre 0 et de rayon infini.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

On utlise le calcul précédent utilisant le développement en série de Fourier $\theta \to f(re^{i\theta})$, $r$ étant un réel quelconque strictement positif. On a vu que :

$$c_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

On a donc :

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}|\, d\theta = \frac{M}{r^n}$$

Il suffit ensuite de faire tendre $r$ vers l'infini pour conclure que : $\forall\, n \geq 1$, $c_n = 0$. $f$ est donc constante, égale à $c_0$.

On en déduit une démonstration extrêmement rapide du **théorème de D'Alembert** (au détail près qu'il a fallu assimiler tout ce qui précède) :

**THEOREME DE D'ALEMBERT**

*Soit* P *un polynôme non constant sur* $\mathbb{C}$. *Alors* P *admet au moins une racine complexe.*

Démonstration :

❑ Par l'absurde, supposons que P n'admette pas de racine. Alors $\frac{1}{P}$ est une fonction holomorphe, définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, donc entière. Comme $\frac{1}{P}$ est continu et tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini (puisque deg(P) $\geq$ 1), $\frac{1}{P}$ est une fonction bornée. D'après le théorème de Liouville, $\frac{1}{P}$ est constant, donc P aussi, en contradiction avec l'hypothèse.

**4- Principe du maximum**

Ce principe est l'objet de la proposition suivante aussi bien que de son corollaire.

**PROPOSITION**

*Soit* $\Omega$ *un ouvert* ***connexe*** *de* $\Omega$ *et f holomorphe sur* $\Omega$. *Si* $|f|$ *admet un maximum en un point a de* $\Omega$, *alors f est constante sur* $\Omega$.

Démonstration :

❑ On écrit le développement en série entière de $f$ en $a$, sur un disque de rayon R :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

avec $c_0 = f(a)$. Par l'absurde, supposons qu'il existe un plus petit indice $m > 0$ tel que $c_m \neq 0$. Alors, au voisinage de $a$ :

$$f(z) = c_0 + c_m(z - a)^m + o((z - a)^m)$$

Prenons $z = a + re^{i\theta}$ avec $r < R$ et $\theta$ tel que $m\theta + \arg(c_m) = \arg(c_0)$. On a alors, quand $r$ tend vers 0 :

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_m r^m e^{im\theta} + o(r^m) \\ &= |c_0|\exp(i\arg(c_0)) + |c_m| r^m \exp(i\arg(c_m) + im\theta) + o(r^m) \\ &= \exp(i\arg(c_0))(|c_0| + |c_m| r^m + o(r^m)) \end{aligned}$$

donc $\quad |f(z)| = \Big| |c_0| + |c_m| r^m + o(r^m) \Big| \geq |c_0| + |c_m| r^m - |o(r^m)|$

et on peut choisir $r$ suffisamment petit pour que $|c_m| r^m - |o(r^m)| > 0$, contredisant la maximalité de $|f(a)| = |c_0|$.

Par conséquent, pour $n \geq 1$, tous les $c_n$ sont nuls et $f$ est constante égale à $f(a)$ sur $D(a, R)$. La fonction $f - f(a)$ est alors nulle sur $D(a, R)$ qui est une partie ayant des points d'accumulation, et $\Omega$ étant connexe, on sait alors, d'après l'unicité du prolongement analytique sur un connexe, que la fonction $f - f(a)$ est identiquement nulle sur $\Omega$.

**COROLLAIRE**

*Si $f$ est holomorphe sur $\Omega$, continue sur son adhérence $\overline{\Omega}$ et si on sait que $|f|$ admet un maximum sur $\overline{\Omega}$, alors ce maximum est atteint en un point de la frontière $\partial\Omega$ de $\Omega$.*

C'est le cas par exemple si $\Omega$ est borné car alors, $\overline{\Omega}$ est compact, donc $|f|$ atteint son maximum sur $\overline{\Omega}$.

<u>Démonstration</u> :

❑ Si le maximum est atteint dans $\Omega$, alors $f$ est constante sur $\Omega$, donc sur $\overline{\Omega}$ par continuité, donc on peut très bien considérer que ce maximum, valeur constante de $f$ dans le cas présent, est atteint sur $\partial\Omega$.

**5- Formule des résidus**

**THEOREME (FORMULE DES RESIDUS)**

*Soit $\Omega$ un* ***ouvert étoilé****, $f$ une fonction holomorphe sur $\Omega$ sauf en un nombre fini de points $a_1, ..., a_n$. Soit $\gamma$ un lacet dans $\Omega$ ne passant par aucun des $a_k$. Alors* :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k)\, \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)}$$

<u>Démonstration</u> :

❑ En chaque $a_k$, on écrit le développement de $f$ en série de Laurent, comme somme d'une série entière et d'une série de la forme $Q_k(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{jk}}{(z-a_k)^j}$. On rappelle que la série de somme $Q_k(z)$ converge pour tout $z \neq a_k$, et qu'il y a convergence normale sur tout compact inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{a_k\}$.
La fonction $f - (Q_1 + ... + Q_n)$ admet alors des singularités artificielles en chaque $a_k$, et est donc holomorphe sur $\Omega$. Comme $\Omega$ est un ouvert étoilé et que $\gamma$ est un lacet, on a :

$$\int_\gamma f(z) - (Q_1(z) + ... + Q_n(z))\,dz = 0$$

donc $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (Q_1(z) + ... + Q_n(z))\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma Q_k(z)\,dz$$

Pour tout $k$, comme on peut inclure $\gamma$ dans un compact de $\mathbb{C} \setminus \{a_k\}$, et que la série définissant $Q_k$ converge normalement sur ce compact, on peut permuter les symboles d'intégration et de sommation de la série, ce qui donne :

$$\int_\gamma Q_k(z)\,dz = \int_\gamma \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{jk}}{(z-a_k)^j}\,dz$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_\gamma \frac{\lambda_{jk}}{(z-a_k)^j}\,dz$$

Pour tout $j \geq 2$, comme le terme $\frac{\lambda_{jk}}{(z-a_k)^j}$ admet une primitive et que $\gamma$ est un lacet, on a $\int_\gamma \frac{\lambda_{jk}}{(z-a_k)^j}\,dz = 0$. Par ailleurs, $\lambda_{1k}$ n'est autre que $\text{Res}(f, a_k)$. Enfin, $\int_\gamma \frac{1}{z-a_k}\,dz = 2i\pi\,\text{Ind}_\gamma(a_k)$. Donc :

$$\int_\gamma Q_k(z)\,dz = 2i\pi\,\text{Res}(f, a_k)\,\text{Ind}_\gamma(a_k)$$

donc $$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, a_k)\,\text{Ind}_\gamma(a_k)$$

*EXEMPLES* :
La formule précédente est extrêment puissante. En effet, le membre de droite est une somme finie, calculable en général facilement. Elle permet donc de donner une valeur au membre de gauche qui est une intégrale, pour laquelle la fonction $f$ n'a pas forcément une primitive facile à calculer.
La formule permet de calculer des intégrales sur des chemins qui ne sont pas des lacets, en les complétant de façon adéquate. La difficulté dans ce dernier cas est de savoir ce que signifie "adéquate", et de trouver la bonne fonction à intégrer.

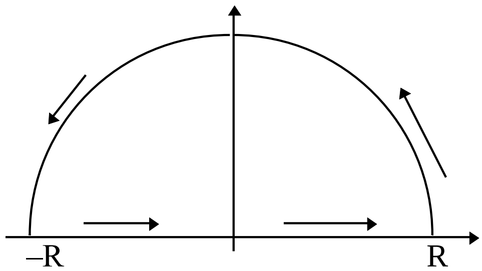
❑ Soit $n$ entier supérieur ou égal à 1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx$ converge. Quelle est sa valeur ?

On considère pour cela la fonction $f : z \to \dfrac{1}{1+z^{2n}}$ holomorphe sur $\mathbf{C}$ sauf aux points $z_k = \exp(\dfrac{i\pi}{2n} + \dfrac{ik\pi}{n})$, $0 \le k < 2n$., qui sont les racines $2n$-ème de – 1. Ces points sont des pôles simples de $f$ (car racines simples du dénominateur) et l'on a :

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{1 + z^{2n}} = \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{z^{2n} - z_k^{2n}} \quad \text{inverse de la dérivée de } z \to z^{2n} \text{ en } z_k$$

$$= \frac{1}{2nz_k^{2n-1}} = \frac{z_k}{2nz_k^{2n}} = -\frac{z_k}{2n}$$

Soit $R > 1$. Considérons le lacet $\gamma$ constitué du segment $[-R, R]$ suivi du demi-cercle de paramétrage $t \in [0, \pi] \to Re^{it}$, situé dans le demi-plan supérieur $\mathrm{Im}(z) \ge 0$, et parcouru dans le sens trigonométrique :




L'indice des pôles $z_k$, $0 \le k < n$, situés dans le demi-disque par rapport à $\gamma$ vaut 1, puisque le parcours de $\gamma$ fait faire un tour entier autour de $z_k$. Ceux situés à l'extérieur ont un indice nul. La formule des résidus donne :

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^{2n}} = -2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z_k}{2n} = -\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp(\frac{i\pi}{2n} + \frac{ik\pi}{n})$$

on a la somme d'une suite géométrique de raison $\exp(\dfrac{i\pi}{n})$

et de premier terme $\exp(\dfrac{i\pi}{2n})$

$$= -\frac{i\pi}{n} \exp(\frac{i\pi}{2n}) \frac{\exp(i\pi) - 1}{\exp(\frac{i\pi}{n}) - 1} = -\frac{i\pi}{n} \exp(\frac{i\pi}{2n}) \times \frac{-2}{\exp(\frac{i\pi}{2n}) \times 2i\sin(\frac{\pi}{2n})}$$

$$= \frac{\pi}{n} \times \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})}$$

Par ailleurs, l'intégrale de gauche se scinde en deux morceaux, l'intégrale sur le segment $[-R, R]$ et l'intégrale sur le demi-cercle :

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx = 2\int_0^R \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx$$

et $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+R^{2n}e^{2int}}\, iRe^{it}\,dt$ dont le module est majoré par $\displaystyle\int_0^\pi \frac{R}{R^{2n}-1}\,dt = \frac{\pi R}{R^{2n}-1}$

Quand on passe à la limite quand R tend vers $+\infty$ dans l'égalité $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{1+z^{2n}} = \frac{\pi}{n} \times \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})}$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2n} \times \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})}}$$

Pour $n = 1$, on retrouve en particulier le classique $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Une généralisation de cette formule avec un exposant de $x$ autre que $2n$ est donnée dans la section des Exercices.

❑ Avec le même contour que ci-dessus, considérons maintenant la fonction $z \to \dfrac{e^{iaz}}{z^2+1}$, $a > 0$. Dans le demi-disque situé dans le demi-plan supérieur, le seul pôle est $i$ avec comme résidu $\dfrac{e^{-a}}{2i}$ puisque $\dfrac{e^{iaz}}{z^2+1} = \dfrac{e^{iaz}}{(z-i)(z+i)}$. On a donc :

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2i\pi \times \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a}$$

Comme précédemment, l'intégrale de gauche se scinde en deux morceaux :

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(ax) + i\sin(ax)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{R} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\exp(iaRe^{it})}{R^2e^{2it}+1}\, iRe^{it}\,\mathrm{d}t$. Le numérateur $\exp(iaRe^{it})$ est borné car :

$$\forall\, t \in [0, \pi],\ \left|\exp(iaRe^{it})\right| = \exp(-\,aR\sin(t)) \leq 1$$

donc $$\left|\int_0^{\pi} \frac{\exp(iaRe^{it})}{R^2e^{2it}+1}\, iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi R}{R^2-1}$$

En faisant tendre R vers l'infini, on obtient :

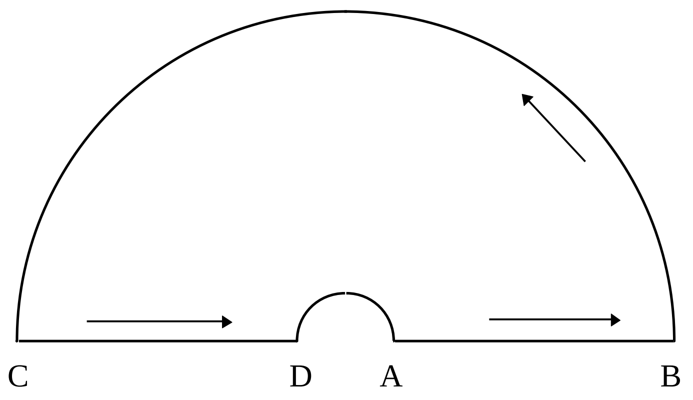
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi e^{-a}}{2}$$

L'intégrale de gauche étant une fonction paire de $a$, on a :

$$\boxed{\forall\, a \in \mathbf{R},\ \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi e^{-|a|}}{2}}$$

(Question : où a-t-on utilisé l'hypothèse $a > 0$ dans la première partie du calcul ?).

❑ Appliquons la formule des résidus en intègrant $f : z \to \dfrac{1-e^{iz}}{z}$, holomorphe sur $\mathbf{C}$ sauf en 0, sur le chemin $\gamma$ suivant :




à savoir, avec $0 < a < b$ :

le segment de droite joignant le point $A(a, 0)$ au point $B(b, 0)$.
le demi-cercle joignant $B(b, 0)$ à $C(-b, 0)$, contenu dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) \geq 0$.
le segment de droite joignant le point $C(-b, 0)$ au point $D(-a, 0)$.
le demi-cercle joignant $D(-a, 0)$ à $A(a, 0)$, contenu dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) \geq 0$.

puis en faisant tendre $a$ vers 0 et $b$ vers l'infini.

Le pôle 0 ayant un indice 0 par rapport à $\gamma$, on a $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

- L'intégrale sur [C,D] et [A,B] vaut :

$$\int_{-b}^{-a} \frac{1 - e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{1 - e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{1 - e^{-ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{1 - e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x$$

en faisant le changement de variable $x \to -x$ dans la première intégrale

$$= -2i\int_a^b \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

- Celle sur le demi-cercle DA tend vers 0 car le paramétrage $t \to ae^{it}$, $t$ variant de $\pi$ à 0, donne :

$$\left|\int_{\mathrm{DA}} \frac{1 - e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\pi^0 \frac{1 - \exp(iae^{it})}{ae^{it}}\, iae^{it}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\pi \left|1 - \exp(iae^{it})\right|\,\mathrm{d}t$$

L'intégrale majorante tend vers 0 quand $a$ tend vers 0. En effet, pour tout $a > 0$, la fonction $t \in [0, \pi] \to \left|1 - \exp(iae^{it})\right|$ est dominée par la fonction intégrable constante égale à 2. On peut donc permuter les symboles $\lim\limits_{a\to 0}$ et $\displaystyle\int_0^\pi$ dans le calcul suivant :

$$\lim_{a\to 0} \int_0^\pi \left|1 - \exp(iae^{it})\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \lim_{a\to 0} \left|1 - \exp(iae^{it})\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi 0\,\mathrm{d}t = 0$$

Donc $\displaystyle\int_{\mathrm{DA}} \frac{1 - e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = o(1)$ quand $a$ tend vers 0

- L'intégrale sur le demi-cercle BC de $\dfrac{e^{iz}}{z}$ tend vers 0 quand $b$ tend vers $+\infty$. En effet, pour $z = be^{it}$ élément de ce demi-cercle, $\left|\dfrac{e^{iz}}{z}\right| = \dfrac{e^{-b\sin(t)}}{b}$, donc :

$$\left| \int_{BC} \frac{e^{iz}}{z} \, dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{-b\sin(t)}}{b} \, ibe^{it} \right| dt = \int_0^\pi e^{-b\sin(t)} \, dt$$

Pour tout $b > 0$, la fonction $t \in [0, \pi] \to e^{-b\sin(t)}$ est dominée par la constante 1, intégrable sur $[0, \pi]$, donc on peut écrire :

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^\pi e^{-b\sin(t)} \, dt = \int_0^\pi \lim_{b \to +\infty} e^{-b\sin(t)} \, dt = \int_0^\pi 0 \, dt = 0$$

Donc $\displaystyle\int_{BC} \frac{e^{iz}}{z} \, dz = o(1)$ quand $b$ tend vers $+\infty$.

- L'intégrale sur le demi-cercle BC de $\dfrac{1}{z}$ vaut :

$$\int_{BC} \frac{1}{z} \, dz = \int_0^\pi \frac{1}{be^{it}} \, ibe^{it} \, dt = i\pi$$

On a donc :

$$0 = \int_\gamma f(z) \, dz = -2i \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} \, dx + i\pi + o(1)$$

Passant à la limite quand $a$ tend vers 0 et $b$ vers $+\infty$, on en déduit la valeur de l'**intégrale de Dirichlet** :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}}$$

dont la valeur a déjà été déterminée dans les exercices des chapitres L2/SERIES.PDF sur les intégrales généralisées et les séries numériques, et L2/SUITESF.PDF sur les suites et séries de fonctions et les intégrales dépendant d'un paramètre.

❑ Soit $f$ une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega$ contenant un disque fermé $\overline{D}(a, r)$ et soit $\gamma$ le cercle frontière de ce disque. On suppose que $f$ ne s'annule pas sur $\gamma$. Alors le nombre de zéros de $f$ dans $D(a, r)$, comptés avec leur ordre de multiplicité, est $\displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz$, en parcourant $\gamma$ dans le sens trigonométrique. En effet, d'après la formule des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a_k\right) \operatorname{Ind}_\gamma(a_k)$$

où les $a_k$ sont les pôles de $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, donc les zéros de $f$. Les $a_k$ ayant un indice non nul sont ceux qui sont éléments de $D(a, r)$, et leur indice vaut alors 1 car $\gamma$ est un simple cercle. Enfin, si $a_k$ est un zéro de $f$ de multiplicité $m_k$, on vérifiera que $\operatorname{Res}\left(\dfrac{f'}{f}, a_k\right) = m$, de sorte que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a_k\right) \operatorname{Ind}_\gamma(a_k)$ donne la somme des multiplicités de tous les zéros de $f$ éléments de $D(a, r)$.

**6- Suites et séries de fonctions holomorphes**

Le théorème de Morera vu plus haut permet de montrer des théorèmes tels que le suivant :

**PROPOSITION**

(i) *Soit* $(f_n)$ *une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert* $\Omega$*, convergeant uniformément sur tout compact de* $\Omega$ *vers une fonction* $f$*. Alors* $f$ *est holomorphe sur* $\Omega$*. La suite des dérivées* $(f_n')$ *converge uniformément vers* $f'$ *sur tout compact.*

(ii) *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions holomorphes sur un ouvert* $\Omega$*, convergeant normalement sur tout compact de* $\Omega$*. Alors la fonction* $z \to \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *est holomorphe sur* $\Omega$*, et la série des dérivées converge normalement sur tout compact de* $\Omega$*, de sorte que la somme de la série se dérive terme à terme.*

(iii) *Soit* $\Omega$ *un ouvert de* $\mathbb{C}$*,* $\mathrm{I}$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *(fermé ou non, borné ou non). On considère une fonction* $f : (z, t) \in \Omega \times \mathrm{I} \to f(z, t) \in \mathbb{C}$ *telle que :*

$\forall t \in \mathrm{I}$, $z \to f(z, t)$ *est holomorphe sur* $\Omega$

$\forall z \in \Omega$, $t \to f(z, t)$ *est intégrable sur* $\mathrm{I}$

$\forall \mathrm{K}$ *compact de* $\Omega$, $\exists \varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *intégrable telle que,* $\forall z \in \mathrm{K}$, $\forall t \in \mathrm{I}$, $|f(z, t)| \leq \varphi(t)$

(**hypothèse de domination**). *Alors la fonction* $z \in \Omega \to \int_{\mathrm{I}} f(z, t)\,\mathrm{d}t$ *est holomorphe sur* $\Omega$ *et sa dérivée est, pour tout* $z$ *de* $\Omega$ *:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_{\mathrm{I}} f(z, t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial z}(z, t)\,\mathrm{d}t$$

On notera la différence avec les suites et séries de fonctions réelles. Dans le cas réel en effet, une suite de fonctions $\mathrm{C}^1$ peut très bien converger uniformément vers une limite qui n'est dérivable nulle part, la suite des dérivées ne convergeant pas uniformément. Dans le cas des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, la convergence uniforme de la suite entraîne la convergence uniforme de la suite des dérivées, et, en itérant, la convergence uniforme de la suite des dérivées successives, à tout ordre.

De même, dans (iii), pour dériver l'intégrale dépendant du paramètre $z$, il est inutile de vérifier une hypothèse de domination sur $\dfrac{\partial f}{\partial z}$. Par ailleurs, si $\mathrm{I}$ est un segment (intervalle fermé borné), l'hypothèse de domination est superflue car automatiquement vérifiée. En effet, pour tout compact $\mathrm{K}$ de $\Omega$, $\mathrm{K} \times \mathrm{I}$ est compact donc $|f|$ y est bornée et on peut prendre une constante pour la fonction dominante $\varphi$.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : $f$ est continue comme limite d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur tout compact de $\Omega$. D'après le théorème de Morera, pour montrer que $f$ est holomorphe, il suffit de montrer que, pour tout triangle $\mathrm{T}$ inclus dans $\Omega$, on a $\int_{\partial \mathrm{T}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Mais $\mathrm{T}$ étant un compact de $\Omega$ et la convergence des $f_n$ étant uniforme sur $\mathrm{T}$, on a :

$$\int_{\partial \mathrm{T}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial \mathrm{T}} \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial \mathrm{T}} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

puisque tous les $f_n$, étant holomorphes, vérifient le lemme de Goursat et donc $\displaystyle\int_{\partial T} f_n(z)\,dz = 0$.

Montrons que la convergence des dérivées est uniforme sur tout compact. Si K est un compact de $\Omega$, il existe $r > 0$ tels que pour tout $z$ de K, $D(z, 2r) \subset \Omega$ car sinon, pour $r = \dfrac{1}{n}$ avec $n$ entier positif quelconque, il existerait $z_n \in K$, et $w_n \in \Omega^c$ (complémentaire de l'ouvert $\Omega$, donc fermé), tels que $|z_n - w_n| < \dfrac{2}{n}$. K étant compact, il existerait une sous-suite de $(z_n)$ qui convergerait vers une limite $l$ de K. Mais la sous-suite de $(w_n)$ correspondante convergerait aussi vers $l$. Comme $\Omega^c$ est fermé, on aurait $l \in \Omega^c$, ce qui est absurde puisque $K \subset \Omega$.

K étant compact est recouvert par un nombre fini de disques $D(z, r)$ dont les adhérences $\overline{D}(z, r)$ sont incluses dans $D(z, 2r)$ donc dans $\Omega$. La réunion finie de ces adhérences est un compact K' contenant K et inclus dans $\Omega$. Si on note $\| f - f_n \|_\infty$ la borne supérieure de $|f - f_n|$ sur K', alors la majoration de Cauchy sur les dérivées, vue plus haut, et appliquée sur chaque disque fermé $\overline{D}(z, r)$ constituant K', prouve que $\| f' - f_n' \|_\infty \leq \dfrac{\| f - f_n \|_\infty}{r}$. La convergence de la suite $(f_n')$ vers $f'$, comme celle de $(f_n)$ vers $f$, est donc uniforme sur K' et donc sur K.

❑ (ii) : Si une série converge normalement, alors la suite de ses sommes partielles converge uniformément. On peut donc appliquer le (i). Pour montrer la convergence normale de la série des dérivées, on procède d'une manière analogue au (i) pour majorer sur tout compact $\| f_n' \|_\infty$ par $\dfrac{\| f_n \|_\infty}{r}$ pour un certain $r > 0$.

❑ (iii) : L'hypothèse de domination sur tout compact par une fonction $\varphi$ et le fait que, pour tout $t \in I$, l'application $z \in \Omega \to f(z, t)$ est continue, permettent de conclure que l'application $z \to \displaystyle\int_I f(z, t)\,dt$ est continue. (voir le paragraphe sur les intégrales dépendant d'un paramètre dans L3/SUITESF.PDF. La preuve repose sur le théorème de convergence dominée, qui utilise l'hypothèse de domination). Pour justifier la dérivation, il faudrait usuellement utiliser une hypothèse de domination analogue sur tout compact de $\Omega$ portant sur $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, mais nous allons voir, comme dans le (i), que cette hypothèse est automatiquement vérifiée. En effet, comme dans le (i), si K est un compact de $\Omega$, il existe $r > 0$ et un compact K' tel que $K \subset K' \subset \Omega$, K' étant constitué d'une réunion finie de disques fermés $\overline{D}(z, r)$, $z \in K$. Pour tout $t$ de I, la majoration de Cauchy sur de tels disques donne, pour tout $z$ de K, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial z}(z, t)\right| \leq \dfrac{1}{r} \times \operatorname*{Sup}_{z \in K} |f(z, t)| \leq \dfrac{\varphi(t)}{r}$. La fonction $t \to \dfrac{\varphi(t)}{r}$ étant intégrable sur I, l'hypothèse de domination sur la dérivée est vérifiée. La fonction $z \to \displaystyle\int_I f(z, t)\,dt$ est alors dérivable et on peut permuter le symbole de dérivation par rapport à $z$ avec le symbole d'intégration par rapport à $t$.

*EXEMPLES* :

❑ La fonction $f : z \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n-z}$ est holomorphe sur l'ouvert $\Omega$ égal à $\mathbb{C}$ privé des entiers strictement positifs, et pour tout $z$ de cet ouvert, $f'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}$.

En effet, les fonctions $f_n : z \to \frac{1}{n} - \frac{1}{n-z}$ sont holomorphes sur $\Omega$. Si K est un compact de $\Omega$, K étant borné, il existe un entier N tel que, $\forall z \in$ K, $|z| \leq$ N. Pour les $n \leq$ N, la fonction $z \in$ K $\to |n-z|$ est continue et non nulle sur le compact K, donc admet un minimum strictement positif $r_n$. Pour tout $z$ dans K, on a alors :

$$\forall\, n \leq \mathrm{N},\ \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n-z}\right| = \left|\frac{z}{n(n-z)}\right| \leq \frac{\mathrm{N}}{nr_n}$$

$$\forall\, n > \mathrm{N},\ \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n-z}\right| = \left|\frac{z}{n(n-z)}\right| \leq \frac{\mathrm{N}}{n(n-\mathrm{N})} \sim \frac{\mathrm{N}}{n^2}$$ quand $n$ tend vers l'infini, terme général d'une série convergente, et la série converge bien normalement sur K.

❑ La fonction $\zeta : z \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ (**fonction Zeta de Riemann**) est holomorphe sur $\{z \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$. On vérifiera en effet que, pour tout réel $a > 1$, elle converge normalement sur $\{z \mid \mathrm{Re}(z) \geq a\}$.

❑ Pour tout $t > 0$, la fonction $z \in \mathbb{C} \to e^{-t}\, t^{z-1} = e^{-t} \exp((z-1)\ln(t))$ est entière. Pour prouver que la fonction $\Gamma : z \to \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, \mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$, il suffit de vérifier une hypothèse de domination sur $e^{-t}\, t^{z-1}$ pour tout compact K de $\{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$, et plus spécialement, pour toute partie de la forme $\mathrm{K}_{ab} = \{z \mid a \leq \mathrm{Re}(z) \leq b\}$ avec $a > 0$, tout compact étant inclus dans une telle partie. Remarquons que :

$$|e^{-t}\, t^{z-1}| = |e^{-t} \exp((z-1)\ln(t))| = e^{-t} \exp((\mathrm{Re}(z)-1)\ln(t))$$

On a alors :

$$\forall\, t \in\, ]0, 1],\ \forall\, z \in \mathrm{K}_{ab},\ |e^{-t}\, t^{z-1}| \leq e^{-t} \exp((a-1)\ln(t)) = e^{-t}\, t^{a-1}$$

$$\forall\, t \in [1, +\infty[,\ \forall\, z \in \mathrm{K}_{ab},\ |e^{-t}\, t^{z-1}| \leq e^{-t} \exp((b-1)\ln(t)) = e^{-t}\, t^{b-1}$$

et on vérifiera que la fonction $\varphi : t \to \left[\begin{array}{l} e^{-t}\, t^{a-1} \text{ si } t \leq 1 \\ e^{-t}\, t^{b-1} \text{ si } t \geq 1 \end{array}\right.$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

## *Exercices*

### 1- Enoncés

**Exo.1)** On pose :

$$\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C},\ -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\}$$

$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}, -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{\pi}{2}\}$

$U = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$

$V = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$

$W = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$

où A \ B désigne l'ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B. Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction indiquée est bijective dans les domaines de départ et d'arrivée donnés, et expliciter sa réciproque.

a) $f : z \in V \to \dfrac{z-1}{z+1} \in U$

b) $g : z \in W \to \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right) \in U$

c) $\mathrm{th} : z \in \Omega_0 \to \dfrac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \in U$

d) $\sin : z \in \Omega_1 \to \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \in U$

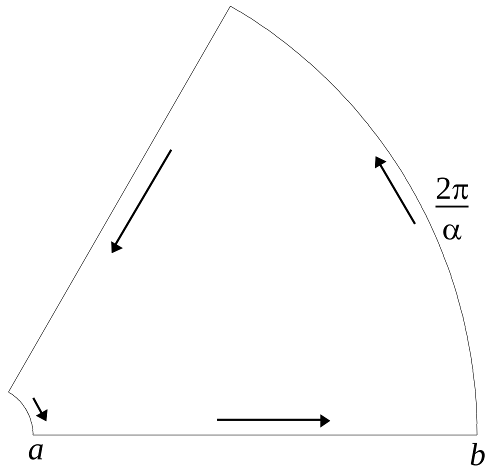
e) Représenter graphiquement l'image dans U par la fonction th d'un quadrillage de $\Omega_0$ dont les lignes sont parallèles aux axes réel et imaginaire.

f) De même, représenter graphiquement l'image dans U d'un quadrillage de $\Omega_1$ par la fonction sin.

**Exo.2)** Soit $\Omega$ le plan complexe égal à $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite réelle $]-\infty, 0]$. Déterminer les fonctions holomorphes $f$ sur $\Omega$ dont la partie réelle ne dépend que de $|z|$. (On pourra passer en polaire).

**Exo.3)** Donner un exemple de lacet $\gamma$ tel que $\displaystyle\int_\gamma |z|^2 \, dz \neq 0$.

**Exo.4)** a) Montrer que, pour tout réel $\alpha > 2$, on a $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^\alpha} dx = \frac{\pi}{\alpha} \times \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{\alpha})}}$. Pour cela, on considèrera le contour $\gamma$ suivant, autour d'un secteur angulaire, défini pour $0 < a < 1 < b$, parcouru dans le sens trigonométrique, et constitué du segment $[a, b]$, de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon $b$ entre les angles 0 et $\frac{2\pi}{\alpha}$, du segment joignant le point $b\exp(\frac{2i\pi}{\alpha})$ au point $a\exp(\frac{2i\pi}{\alpha})$, et de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon $a$ entre les angles $\frac{2\pi}{\alpha}$ et 0 :




On intègrera la fonction $f : z \to \dfrac{1}{1 + z^\alpha}$ sur ce contour, après avoir donné une définition de cette fonction et avoir vérifié qu'elle est définie holomorphe sur un ouvert étoilé contenant $\gamma$.

b) Montrer que la fonction $z \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^z}\, dt$ est holomorphe sur $\Omega = \{z \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ et que, pour de tels $z$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^z}\, dt = \frac{\pi}{z} \times \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})}$.

**Exo.5)** Soit $a$ un nombre complexe non nul de module différent de 1. Appliquer la formule des résidus à la fonction $f : z \to \dfrac{1}{(z - a)(z - \frac{1}{a})}$ sur le lacet $\gamma$ constitué du cercle unité, et en déduire une expression de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos(t) + a^2}\, dt$ en fonction de $a$. Comparer avec la valeur de cette intégrale, calculée dans les exercices du chapitre L1/INTEGRAL.PDF.

**Exo.6)** Soit $f$ une fonction entière telle que :

$$\exists\, a > 0, \exists\, b > 0, \exists\, n \in \mathbf{N}, \forall\, z \in \mathbf{C}, |f(z)| \leq a + b|z|^n$$

Montrer que $f$ est un polynôme de degré $n$ au plus.

**Exo.7)** Soit $f$ une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega$ contenant le disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(0, 1)$. On suppose que $|f| > 1$ sur son cercle frontière. Montrer que le nombre de zéros de $f$ dans $\mathrm{D}(0, 1)$ est égal au nombre de zéros de $f - 1$ dans le même disque.

**Exo.8)** a) Pour quel complexe $z$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + z^2}\, dt$ est-elle définie ?

b) Sur quel domaine la fonction $\mathrm{F} : z \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + z^2}\, dt$ est-elle holomorphe ?

c) Donner une expression explicite de F.

**Exo.9) Le lemme de Schwarz**. Il s'énonce comme suit :

*Soit f holomorphe sur le disque unité* D = D(0, 1), *telle que* $f(0) = 0$ *et* $\forall z \in$ D, $|f(z)| \leq 1$.

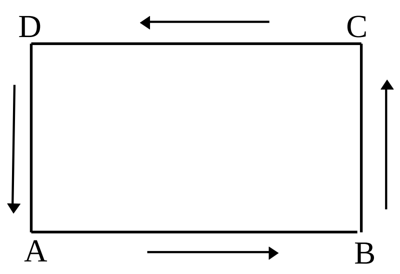
(i) *Alors* $\forall z \in$ D, $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.

(ii) *Si* $\exists z \neq 0$, $|f(z)| = |z|$ *ou si* $|f'(0)| = 1$, *alors* $\exists \lambda$ *de module* 1 *tel que* $f = \lambda$Id.

Prouver les propositions (i) et (ii). On pourra considérer la fonction $g : z \to \dfrac{f(z)}{z}$.

**Exo.10) La fonction dilog**

a) On considére l'intégrale de la fonction $f : z \to \dfrac{z}{e^z - 1}$ sur le contour ABCDA, avec A = (0, 0), B = $(b, 0)$, C = $(b, \pi)$, D = $(0, \pi)$. En faisant tendre $b$ vers $+\infty$ et et en séparant partie réelle et partie imaginaire, en déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan(x)}\,dx$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\text{sh}(x)}\,dx$.




b) Pour $r$ réel strictement positif et différent de 1, calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{e^{it} - r}\,dt$ en considérant l'intégrale de la fonction $g : z \to \dfrac{z}{e^z - r}$ le long du lacet EFGHE avec E = $(0, -\pi)$, F = $(b, -\pi)$, G = $(b, \pi)$, H = $(0, \pi)$, et en faisant tendre $b$ vers $+\infty$.

c) Montrer que la fonction $h : z \to \dfrac{\text{Log}(z)}{1 - z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$. Cet ouvert étant étoilé, la fonction $h$ y admet une primitive qu'on peut supposer s'annuler en $z = 1$. Cette primitive s'appelle la fonction **dilog** :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0],\ \text{dilog}(z) = \int_1^z \frac{\text{Log}(\zeta)}{1 - \zeta}\,d\zeta$$

Calculer $\lim\limits_{t \to 0^+} \text{dilog}(-1 + it)$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} \text{dilog}(-1 - it)$.

d) Pour tout $r > 0$, $r \neq 1$, calculer $\lim\limits_{t \to 0^+} \text{dilog}(-r + it) - \text{dilog}(-r - it)$.

**Exo.11)** On se propose de montrer les deux formules suivantes, pour tout $z$ complexe différent de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{1}{\sin(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

$$\text{cotan}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

Pour chacune de ces formules, on peut suivre le schéma de démonstration a-b-c-d-e) suivant. On désigne par $f(z)$ le membre de gauche et par $g(z)$ le membre de droite.

a) Montrer que $f$ et $g$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ privé des nombres $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que $f - g$ vérifie la relation $(f - g)(z + \pi) = \begin{cases} -(f-g)(z) \text{ pour le sin} \\ (f-g)(z) \text{ pour la cotan} \end{cases}$

c) Montrer que $f - g$ n'admet que des singularités artificielles en les $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Elle se prolonge donc sur $\mathbb{C}$ en une fonction entière.

d) Montrer que $f - g$ est bornée sur $\mathbb{C}$.

e) Montrer que $\lim\limits_{y \to +\infty} (f - g)(iy) = 0$, et conclure.

On déduit des formules précédentes d'autres formules.

f) Montrer que :

$$\frac{1}{\cos(z)} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n + 1)}{(2n + 1)^2\pi^2 - 4z^2}.$$

$$\tan(z) = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(2n + 1)^2\pi^2 - 4z^2}$$

$$\frac{1}{\cos(z)^2} = 4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2z - (2n + 1)\pi)^2}$$

$$\frac{1}{\sin(z)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

g) Montrer que, pour tout $z \in D(0, \pi) \setminus \{0\}$ :

$$\text{cotan}(z) = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\zeta(2k)}{n^{2k}\ \pi^{2k}} z^{2k-1}$$

où $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$. Donner les valeurs de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

h) Montrer que, pour tout $z$, $\sin(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2})$

i) Montrer que, pour tout $z$, $\text{sh}(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z^2}{n^2\pi^2})$

**2- Solutions**

**Sol.1)** a) $f$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ de réciproque $z \to \dfrac{1+z}{1-z}$. Donc :

$$f(\mathbb{C} \setminus \{-1\}) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Or $f$ est une fonction strictement croissante sur les intervalles réels $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, 0]$ avec :

$$f(]-\infty, -1[) = ]1, +\infty[$$

et $\quad f(]-1, 0]) = ]-\infty, -1]$

donc, par différence :

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{V}) &= f(\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]) \\
&= f(\mathbb{C} \setminus \{-1\} \setminus ]-\infty, -1[ \setminus ]-1, 0[) \\
&= f((\mathbb{C} \setminus \{-1\}) \setminus f(]-\infty, -1[) \setminus f(]-1, 0]) \\
&= \mathbb{C} \setminus \{1\} \setminus ]1, +\infty[ \setminus ]-\infty, -1] \\
&= \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[ \setminus ]-\infty, -1] \\
&= \mathrm{U}
\end{aligned}$$

Ainsi, $f$ est bien une bijection de V sur U.

b) ❑ Montrons que : $z \in \mathrm{W} \Rightarrow g(z) \in \mathrm{U}$. Par l'absurde, si $g(z) \notin \mathrm{U}$, il existe un réel $a$ de valeur absolue supérieure ou égale à 1 tel que :

$$\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = a$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 - 2iza - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (z - ia)^2 = 1 - a^2$$

$1 - a^2$ est un réel négatif ou nul donc $z - ia$ est imaginaire pur, donc $z$ aussi, ce qui est contradictoire avec le fait que $z$ appartient à W.

❑ Réciproquement, soit $u \in \mathrm{U}$, et cherchons $z \in \mathrm{W}$ tel que $g(z) = u$. On obtient :

$$\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = u$$

$$\Leftrightarrow \quad (z - iu)^2 = 1 - u^2$$

Si $u$ est élément de U, $1 - u^2$ n'est pas un réel négatif ou nul, $1 - u^2$ appartient donc au domaine de définition de la racine carrée complexe. $\sqrt{1-u^2}$ est le complexe d'argument élément de $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ (ou de partie réelle strictement positive) dont le carré vaut $1 - u^2$, et l'on obtient :

$$z - iu = \pm\sqrt{1-u^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = iu \pm \sqrt{1-u^2}$$

Vérifions qu'une seule des deux expressions possibles ci-dessus a une partie réelle strictement positive. Ce sera le $z$ cherché. On a :

$$\mathrm{Re}(iu + \sqrt{1-u^2}) = \mathrm{Re}(\sqrt{1-u^2}) - \mathrm{Im}(u)$$

Donc, si $\mathrm{Im}(u) \leq 0$, puisque $\mathrm{Re}(\sqrt{1-u^2}) > 0$, on a $\mathrm{Re}(iu + \sqrt{1-u^2}) > 0$.

Si $\mathrm{Im}(u) > 0$, on a :

$$\mathrm{Re}(iu + \sqrt{1-u^2}) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{-iu + \sqrt{1-u^2}}\right) \qquad \text{car } iu + \sqrt{1-u^2} = \frac{1}{-iu + \sqrt{1-u^2}}$$

qui est de même signe que :

$$\mathrm{Re}(-iu + \sqrt{1-u^2}) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Re}(\sqrt{1-u^2}) > 0.$$

Un raisonnement comparable montrera que $\mathrm{Re}(iu - \sqrt{1-u^2}) < 0$.

Donc le seul $z$ possible élément de W est :

$z = iu + \sqrt{1-u^2} = g^{-1}(u)$

c) Pour montrer que th est bijective de $\Omega_0$ sur U, il suffit de remarquer que th est la composée des bijections suivantes :

$$z \in \Omega_0 \xrightarrow{\times 2} 2z \in \{z \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\} \xrightarrow{\exp} e^{2z} \in \mathrm{V} \xrightarrow{f} \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = \mathrm{th}(z) \in \mathrm{U}$$

Pour trouver sa réciproque, il suffit d'inverser les flèches précédentes, en notant bien que l'inversion de la fonction exp n'est autre que la fonction Log, dont l'ensemble de départ est bien V et l'ensemble d'arrivée est $\{z \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$. Si $w$ élément de U est égal à th($z$), avec $z$ élément de $\Omega_0$, on a :

$$w \in \mathrm{U} \xrightarrow{f^{-1}} \frac{1+w}{1-w} \in \mathrm{V} \xrightarrow{\mathrm{Log}} \mathrm{Log}\left(\frac{1+w}{1-w}\right) \in \{z \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\} \xrightarrow{/2} \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{1+w}{1-w}\right) \in \Omega_0$$

Dans $\mathbf{R}$, la définition de la fonction argth sur $]-1, 1[$ est $\mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (voir le chapitre L1/FONCTUSU.PDF). On a simplement étendu ici la fonction ln en Log complexe sur un domaine adéquat.

d) Pour montrer que sin est bijective de $\Omega_1$ sur U, il suffit de vérifier que sin est la composée des bijection suivante :

$$z \in \Omega_1 \xrightarrow{\times i} iz \in \Omega_0 \xrightarrow{\exp} e^{iz} \in \mathrm{W} \xrightarrow{g} \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}}\right) = \sin(z) \in \mathrm{U}$$

On trouve sa réciproque en inversant toutes les flèches. Notons que l'inversion de la fonction exp est ici la fonction Log partant de W, et qui arrive bien dans $\Omega_0$.

$$u \in \mathrm{U} \xrightarrow{g^{-1}} iu + \sqrt{1-u^2} \in \mathrm{W} \xrightarrow{\mathrm{Log}} \mathrm{Log}(iu + \sqrt{1-u^2}) \in \Omega_0 \xrightarrow{/i} \frac{1}{i}\mathrm{Log}(iu + \sqrt{1-u^2}) \in \Omega_1$$

L'expression $\frac{1}{i}\mathrm{Log}(iu + \sqrt{1-u^2})$ est le prolongement analytique à U de la fonction arcsin.

On peut remarquer que la dérivée de cette fonction vaut :

$$\frac{1}{i}\,\frac{i - \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}}{iu + \sqrt{1-u^2}} = \frac{1 + \dfrac{iu}{\sqrt{1-u^2}}}{iu + \sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

comme on pouvait l'espérer.

On note également que :

$u = \sin(z)$

$\Leftrightarrow \quad u = \dfrac{\mathrm{sh}(iz)}{i}$

$\Leftrightarrow \quad iu = \mathrm{sh}(iz)$

Si l'on utilise l'expression formelle de argsh en fonction de ln dans le cas réel, à savoir (voir le chapitre L1/FONCTUSU.PDF) :

$$\mathrm{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

on obtient :

$$iz = \mathrm{argsh}(iu) = \mathrm{Log}(iu + \sqrt{1-u^2})$$

et on retrouve bien $z = \frac{1}{i}\mathrm{Log}(iu + \sqrt{1-u^2})$.

e) Posons $z = x + iy$ avec $x$ réel et $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On vérifiera que :

$$\mathrm{th}(z) = \mathrm{th}(x+iy) = \frac{\mathrm{th}(x) + i\tan(y)}{1 + i\,\mathrm{th}(x)\tan(y)}$$

$$= \frac{(\mathrm{th}(x) + i\tan(y))(1 - i\,\mathrm{th}(x)\tan(y))}{1 + \mathrm{th}(x)^2\tan(y)^2}$$
$$= \frac{\mathrm{th}(x)(1 + \tan(y)^2) + i\tan(y)(1 - \mathrm{th}(x)^2)}{1 + \mathrm{th}(x)^2\tan(y)^2}$$
$$= \frac{\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) + i\sin(y)\cos(y)}{\mathrm{ch}(x)^2\cos(y)^2 + \mathrm{sh}(x)^2\sin(y)^2}$$
$$= \frac{\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) + i\sin(y)\cos(y)}{\cos(y)^2 + \mathrm{sh}(x)^2}$$
$$= \frac{\mathrm{sh}(2x) + i\sin(2y)}{\cos(2y) + \mathrm{ch}(2x)}$$

Si on se place dans $\mathbf{R}^2$ plutôt que dans $\mathbf{C}$, en posant $\mathrm{th}(z) = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}$, on a :

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{X} = \dfrac{\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)}{\cos(y)^2 + \mathrm{sh}(x)^2} = \dfrac{\mathrm{sh}(2x)}{\cos(2y) + \mathrm{ch}(2x)} \\ \mathrm{Y} = \dfrac{\sin(y)\cos(y)}{\cos(y)^2 + \mathrm{sh}(x)^2} = \dfrac{\sin(2y)}{\cos(2y) + \mathrm{ch}(2x)} \end{array}\right.$$

Images des lignes parallèles à l'axe des imaginaires purs :

Fixons $x$ et faisons varier $y$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Pour $x = 0$, $\mathrm{th}(z) = i\tan(y)$. Lorsque $y$ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{th}(z)$ décrit l'axe imaginaire pur.

Supposons maintenant $x \neq 0$. Quand $y$ tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$, (X, Y) tend vers $(\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}, 0)$. Pour $y = 0$, $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}, 0)$. Le milieu de ces deux points est $(\frac{\mathrm{ch}(2x)}{\mathrm{sh}(2x)}, 0)$. Montrons que, lorsque $y$ varie, (X, Y) décrit un cercle privé du point limite $(\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}, 0)$, de centre ce milieu :

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{X} - \dfrac{\mathrm{ch}(2x)}{\mathrm{sh}(2x)} = -\dfrac{1 + \mathrm{ch}(2x)\cos(2y)}{\mathrm{sh}(2x)(\cos(2y) + \mathrm{ch}(2x))} \\ \mathrm{Y} = \dfrac{\sin(2y)}{\cos(2y) + \mathrm{ch}(2x)} \end{array}\right.$$

donc :

$$\begin{aligned}(\mathrm{X} - \frac{\mathrm{ch}(2x)}{\mathrm{sh}(2x)})^2 + \mathrm{Y}^2 &= \frac{(1 + \mathrm{ch}(2x)\cos(2y))^2 + \mathrm{sh}(2x)^2\sin(2y)^2}{\mathrm{sh}(2x)^2(\cos(2y) + \mathrm{ch}(2x))^2} \\ &= \ldots \\ &= \frac{1}{\mathrm{sh}(2x)^2}\end{aligned}$$

quantité ne dépendant pas de $y$ et qui donne le carré du rayon du cercle. On vérifiera que tout le cercle, à l'exception du point limite $(\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}, 0)$ est parcouru en remarquant par exemple que, pour $y \in [0, \frac{\pi}{2}[$, X varie de façon monotone depuis $\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ jusqu'au point $\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$, Y étant positif, et de même pour $y \in\, ]-\frac{\pi}{2}, 0]$ avec Y négatif.

Quand $x$ varie, la famille de cercles que l'on obtient est un **faisceau de cercles de points limites** A = (1, 0) et B = (–1, 0). Ces cercles sont représentés en rouge dans la figure plus bas. On retrouve ce fait géométrique en notant M le point d'affixe th($z$) et en vérifiant que $\dfrac{\text{AM}}{\text{BM}}$ = Cte lorsque $y$ varie (voir le chapitre L2/GEOMEUCL.PDF pour la détermination des lignes de niveaux de $M \to \dfrac{\text{AM}}{\text{BM}}$) :

$$\frac{\text{AM}}{\text{BM}} = \left|\frac{\text{th}(z) - 1}{\text{th}(z) + 1}\right| = \left|\frac{(1 - \text{th}(x))(-1 + i\tan(y))}{(1 + \text{th}(x))(1 + i\tan(y))}\right| = \frac{1 - \text{th}(x)}{1 + \text{th}(x)}$$

quantité indépendante de $y$.

<u>Images des droites parallèles à l'axe réel</u> :

On fixe $y$ et on fait varier $x$ de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour $y = 0$, th($z$) = th($x$) parcourt l'intervalle réel $]-1, 1[$.

Supposons maintenant $y \neq 0$. Quand $x$ tend vers $+\infty$, (X, Y) tend vers (1, 0), et quand il tend vers $-\infty$, (X, Y) tend vers $(-1, 0)$. Pour $x = 0$, (X, Y) = (0, tan($y$)). Un petit calcul montre qu'un point équidistant à (1, 0), $(-1, 0)$ et (0, tan($y$)) est $\left(0, -\dfrac{1}{\tan(2y)}\right)$. Montrons que th($z$) parcourt un arc de cercle de centre $-\dfrac{i}{\tan(2y)}$ et de point limite $(-1, 0)$ et (1, 0).

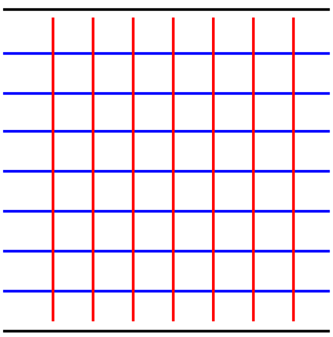
$$\begin{cases} X = \dfrac{\text{sh}(2x)}{\cos(2y) + \text{ch}(2x)} \\ Y + \dfrac{1}{\tan(2y)} = \dfrac{1 + \text{ch}(2x)\cos(2y)}{\sin(2y)(\cos(2y) + \text{ch}(2x))} \end{cases}$$

Par un calcul comparable au précédent :

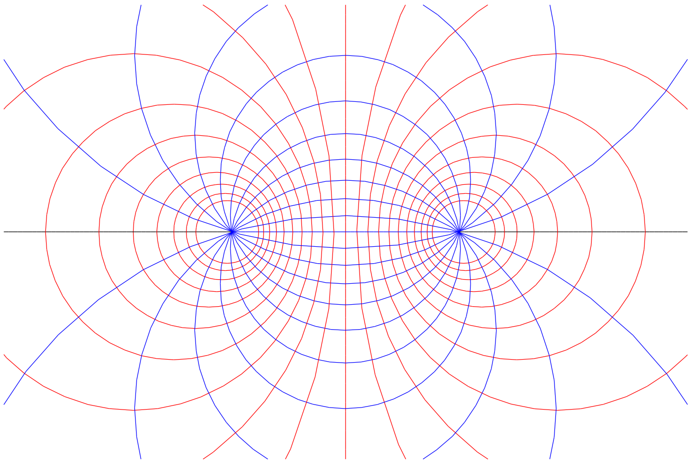
$$X^2 + \left(Y + \frac{1}{\tan(2y)}\right)^2 = \frac{1}{\sin(2y)^2}$$

donnant le carré du rayon du cercle.

On remarque que les deux valeurs de $y$ et $y - \dfrac{\pi}{2}\,\text{sg}(y)$ (où sg($y$) désigne le signe de $y$), tous deux éléments de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donnent le même rayon $\dfrac{1}{|\sin(2y)|}$ et le même centre $-\dfrac{i}{\tan(2y)}$. Ils donnent deux arcs de cercles de limite (1, 0) et $(-1, 0)$ tels que leur réunion donne un cercle complet. Quand $y$ varie, cette famille de cercle s'appelle **faisceau de cercles de points de base** (1, 0) et $(-1, 0)$. Ces cercles sont représentés en bleu dans la figure ci-dessous. Chaque cercle du faisceau de points de base est perpendiculaire à chaque cercle du faisceau de points limite car l'application th est conforme, donc l'orthogonalité du quadrillage initial est conservée.



Domaine $\Omega_0$



Domaine U

Lors de l'application de la fonction th, l'axe réel se rétracte sur le l'intervalle ]–1, 1[, alors que l'intervalle imaginaire pur entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ est au contraire étendu jusqu'à l'infini, le reste du plan se contractant ou s'étirant autour de ces deux déformations.

f) Représentons l'image d'un quadrillage de $\Omega_1$ par la fonction sinus. Posons :

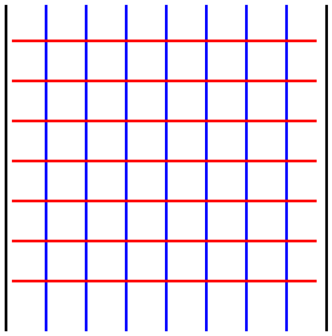
$$z = x + iy, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y \in \mathbf{R}$$

On a :

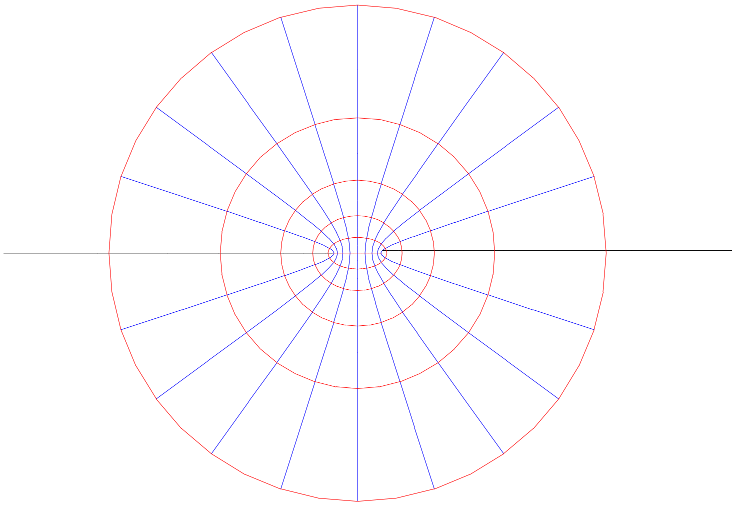
$$\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\mathrm{ch}(y) + i\cos(x)\mathrm{sh}(y) = X + iY$$

Les relations $\left[\begin{array}{l} X = \sin(x)\mathrm{ch}(y) \\ Y = \cos(x)\mathrm{sh}(y) \end{array}\right.$ montrent que l'image de droites de $\Omega_1$ parallèles à l'axe imaginaire pur ($x$ fixé, $y$ variable) sont des branches d'hyperboles de sommet $(\sin(x), 0)$ (en bleu ci-dessous), ainsi que l'axe imaginaire pur (obtenu pour $x = 0$). Et l'image de portion de droites parallèles à l'axe réel ($x$ variable, $y$ fixe) sont des demi-ellipses de sommets $(\pm \mathrm{ch}(y), 0)$ et $(0, \pm \mathrm{sh}(y))$ (en rouge ci-dessous), ainsi que l'intervalle ]–1, 1[ (obtenu pour $y = 0$). On enlève aux ellipses les sommets $(\pm \mathrm{ch}(y), 0)$ car $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Hyperboles et ellipses se coupent à angle droit.

La figure obtenue a déjà été rencontrée dans les exercices du chapitre L2/CONIQUES.PDF, où l'on montre également que les hyperboles et ellipses obtenues ont toutes pour foyer les points (1, 0) et (–1, 0).



Domaine $\Omega_1$



Domaine U

(L'échelle n'est pas la même entre les deux dessins).

Comme on a $\sin(-\frac{\pi}{2} + iy) = -\operatorname{ch}(y)$ pour tout réel $y$, la fonction sinus a replié la droite $\operatorname{Re}(z) = -\frac{\pi}{2}$ sur la demi-droite $]-\infty, -1]$ (en double exemplaire). De même, $\sin(\frac{\pi}{2} + iy) = \operatorname{ch}(y)$, donc la fonction sinus a replié la droite $\operatorname{Re}(z) = \frac{\pi}{2}$ sur la demi-droite $[1, +\infty[$ (en double exemplaire). Le quadrillage a suivi cette déformation.

**Sol.2)** Notons P et Q les parties réelles et imaginaires de $f$. Considérons les fonctions composées $(r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[ \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \to \mathrm{P}(x, y) = \tilde{\mathrm{P}}(r, \theta)$, et de même pour Q. On a vu dans le cours que les conditions de Cauchy s'expriment en polaire sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\mathrm{P}}}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial \tilde{\mathrm{Q}}}{\partial r} \\ r\dfrac{\partial \tilde{\mathrm{P}}}{\partial r} = \dfrac{\partial \tilde{\mathrm{Q}}}{\partial \theta} \end{cases}$$

Comme P est supposé ne dépendre que de $r = |z| = |x + iy|$, on a $\dfrac{\partial \tilde{\mathrm{P}}}{\partial \theta} = 0$, donc $\dfrac{\partial \tilde{\mathrm{Q}}}{\partial r} = 0$. Cela prouve que $\tilde{\mathrm{Q}}$ ne dépend que de $\theta$. Comme $r\dfrac{\partial \tilde{\mathrm{P}}}{\partial r} = \dfrac{\partial \tilde{\mathrm{Q}}}{\partial \theta}$ et que le membre de gauche ne dépend que de $r$ et le membre de droite ne dépend que de $\theta$, les deux membres sont constants, égaux à un nombre $k$. On a alors :

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{Q}}}{\partial \theta} = k \qquad \text{donc } \tilde{\mathrm{Q}} = k\theta + \mathrm{Cte}$$

$$\frac{\partial\tilde{P}}{\partial r} = \frac{k}{r} \qquad \text{donc } \tilde{P} = k\ln(r) + \text{Cte}$$

donc $\quad f(z) = k(\ln(r) + i\theta) + \text{Cte} = k\,\text{Log}(z) + \text{Cte}$.

**Sol.3)** Prenons pour $\gamma$ le lacet ayant pour support le carré A = 0, B = 1, C = 1 + $i$, D = $i$. On a, avec des paramétrages évidents :

$$\int_\gamma |z|^2\,\mathrm{d}z = \int_{AB} |z|^2\,\mathrm{d}z + \int_{BC} |z|^2\,\mathrm{d}z + \int_{CD} |z|^2\,\mathrm{d}z + \int_{DA} |z|^2\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |1+iy|^2\, i\,\mathrm{d}y + \int_1^0 |x+i|^2\,\mathrm{d}x + \int_1^0 |iy|^2\, i\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1+y^2)\, i\,\mathrm{d}y - \int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 y^2\, i\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4i}{3} - \frac{4}{3} - \frac{i}{3} = -1 + i$$

C'est une façon sophistiquée de montrer que l'application $z \to |z|^2$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, car si elle l'était, son intégrale sur un lacet, inclus dans $\mathbb{C}$ qui est étoilé, serait nulle.

**Sol.4)** a) Considérons l'ouvert étoilé $\Omega$ égal à $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite réelle $]-\infty, 0]$, ouvert sur laquelle la fonction Log est définie. On pose $z^\alpha = \exp(\alpha\text{Log}(z))$, holomorphe comme composée de fonctions holomorphes et de dérivée $\frac{\alpha}{z}\exp(\alpha\text{Log}(z)) = \alpha z^{\alpha-1}$, comme attendu. L'hypothèse $\alpha > 2$ permet d'assurer que $\gamma$ est contenu dans $\Omega$, $\frac{2\pi}{\alpha}$ restant inférieur à $\pi$.

Les points singuliers de $f$ sont les zéros de $1 + z^\alpha$. On a, avec $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$ :

$$
\begin{aligned}
& 1 + z^\alpha = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & z^\alpha = -1 \\
\Leftrightarrow\quad & \exp(\alpha\text{Log}(z)) = \exp(i\pi) \\
\Leftrightarrow\quad & \exp(\alpha\ln(r) + \alpha i\theta) = \exp(i\pi) \\
\Leftrightarrow\quad & r = 1 \text{ et } \alpha i\theta = i\pi + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\quad & r = 1 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{\alpha} + \frac{2k\pi}{\alpha},\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$f$ admet un seul pôle d'indice 1 dans le domaine limité par $\gamma$, à savoir le complexe $\omega = \exp(\frac{i\pi}{\alpha})$, obtenu pour $k = 0$. La valeur de son résidu est :

$$\lim_{z\to\omega} \frac{z-\omega}{1+z^\alpha} = \lim_{z\to\omega} \frac{z-\omega}{z^\alpha - \omega^\alpha} = \frac{1}{\alpha\omega^{\alpha-1}} = \frac{\omega}{\alpha\omega^\alpha} = -\frac{\omega}{\alpha}$$

On a donc, d'après la formule des résidus :

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^\alpha}\,\mathrm{d}z = 2i\pi \times \left(-\frac{\omega}{\alpha}\right) = -\frac{2i\pi}{\alpha}\exp\left(\frac{i\pi}{\alpha}\right)$$

Quant à l'intégrale de gauche, elle se divise en :

- L'intégrale sur $[a, b]$ qui vaut $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$,

- L'intégrale sur l'arc de cercle de rayon $b$, dont le module est majoré par $\dfrac{2\pi}{\alpha} b \times \dfrac{1}{b^\alpha - 1}$, quantité qui tend vers 0 quand $b$ tend vers l'infini, car on a pris $\alpha > 2$.
- L'intégrale sur le segment $t \to t\exp(\dfrac{2i\pi}{\alpha})$, $t$ décroissant de $b$ à $a$, et qui vaut

$$\int_b^a \frac{1}{1 + t^\alpha \exp(2i\pi)} \exp(\frac{2i\pi}{\alpha})\, \mathrm{d}t = -\exp(\frac{2i\pi}{\alpha}) \int_a^b \frac{1}{1 + t^\alpha}\, \mathrm{d}t$$

- L'intégrale sur l'arc de cercle de rayon $a$, dont le module est majoré par $\dfrac{2\pi}{\alpha} a \times \dfrac{1}{1 - a^\alpha}$, quantité qui tend vers 0 quand $a$ tend vers 0.

En sommant ces quatre intégrales et en passant à la limite quand $a$ tend vers 0 et $b$ vers l'infini, on obtient :

$$(1 - \exp(\frac{2i\pi}{\alpha})) \int_0^\infty \frac{1}{1 + t^\alpha}\, \mathrm{d}t = -\frac{2i\pi}{\alpha} \times \exp(\frac{i\pi}{\alpha})$$

donc :

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + t^\alpha}\, \mathrm{d}t = -\frac{2i\pi}{\alpha} \times \frac{\exp(\frac{i\pi}{\alpha})}{1 - \exp(\frac{2i\pi}{\alpha})} = -\frac{2i\pi}{\alpha} \times \frac{1}{\exp(-\frac{i\pi}{\alpha}) - \exp(\frac{i\pi}{\alpha})} = \frac{2i\pi}{\alpha} \times \frac{1}{2i\sin(\frac{\pi}{\alpha})}$$

donc :

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + t^\alpha}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\alpha} \times \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{\alpha})}$$

Cette formule généralise la formule analogue obtenue dans le cours pour $\alpha = 2n$.

b) Pour $\mathrm{Re}(z) > 1$, la fonction $t \to \dfrac{1}{1 + t^z}$ se prolonge par continuité en $t = 0$. L'intégrale est seulement généralisée en la borne $+\infty$. Pour $t > 1$, on a $\left|\dfrac{1}{1 + t^z}\right| \leq \dfrac{1}{|t^z| - 1} = \dfrac{1}{t^{\mathrm{Re}(z)} - 1} \sim \dfrac{1}{t^{\mathrm{Re}(z)}}$ quand $t$ tend vers l'infini. Comme $\mathrm{Re}(z) > 1$, la fonction $t \to \dfrac{1}{t^{\mathrm{Re}(z)}}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ et il en est de même de $\dfrac{1}{1 + t^z}$.

Pour tout $t > 0$, la fonction $z \to \dfrac{1}{1 + t^z}$ est holomorphe. Pour montrer que $z \to \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1 + t^z}\, \mathrm{d}t$ est holomorphe, il suffit de vérifier une hypothèse de domination sur toute partie de la forme $\{z \mid \mathrm{Re}(z) \geq a > 1, |\mathrm{Im}(z)| \leq b\}$, puisque tout compact de $\Omega$ est inclus dans une telle partie.

Si $z = x + iy$, on a :

$$\begin{aligned} 1 + t^z &= 1 + \exp(z\ln(t)) = 1 + \exp(x\ln(t) + iy\ln(t)) \\ &= 1 + t^x\cos(y\ln(t)) + it^x\sin(y\ln(t)) \end{aligned}$$

de module vérifiant :

$$\begin{aligned} |1 + t^z|^2 &= (1 + t^x\cos(y\ln(t)))^2 + (t^x\sin(y\ln(t)))^2 \\ &= 1 + 2t^x\cos(y\ln(t)) + t^{2x} \end{aligned}$$

Pour $t \geq \exp(\frac{\pi}{2b}) > 1$, on a $\left|\frac{1}{1+t^z}\right| \leq \frac{1}{|t^z|-1} = \frac{1}{t^{\mathrm{Re}(z)}-1} \leq \frac{1}{t^a-1}$

Pour $\exp(-\frac{\pi}{2b}) \leq t \leq \exp(\frac{\pi}{2b})$, on a $-\frac{\pi}{2b} \leq \ln(t) \leq \frac{\pi}{2b}$ donc $|y\ln(t)| \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(y\ln(t)) \geq 0$ donc $|1+t^z|^2 \geq 1$, donc $\frac{1}{|1+tz|} \leq 1$.

Pour $0 < t \leq \exp(-\frac{\pi}{2b}) < 1$, $\left|\frac{1}{1+t^z}\right| \leq \frac{1}{1-|t^z|} = \frac{1}{1-t^{\mathrm{Re}(z)}} \leq \frac{1}{1-t^a}$

Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^a-1} \text{ si } t \geq \exp(\frac{\pi}{2b}) \\ 1 \quad \text{ si } \exp(-\frac{\pi}{2b}) \leq t \leq \exp(\frac{\pi}{2b}) \\ \frac{1}{1-t^a} \text{ si } t \leq \exp(-\frac{\pi}{2b}) \end{cases}.$$

φ est intégrable sur ]0, +∞[ donc l'hypothèse de domination est vérifiée.

On a $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^z}\,dt = \frac{\pi}{z} \times \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})}$ sur $\Omega = \{z \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ car les deux membres y sont des fonctions holomorphes et coïncident sur ]2, +∞[ qui admet des points d'accumulation dans l'ouvert connexe Ω. On applique alors le principe du prolongement analytique.

**Sol.5)** Si $|a| < 1$, $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 1$, alors que $\mathrm{Ind}_\gamma(\frac{1}{a}) = 0$. Par ailleurs, $\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{a - \frac{1}{a}} = \frac{a}{a^2-1}$. La formule des résidus donne alors :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{a}{a^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(e^{it}-a)(e^{it}-\frac{1}{a})}\, ie^{it}\,dt = \frac{a}{a^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(e^{it}-a)(ae^{it}-1)}\, e^{it}\,dt = \frac{1}{a^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-ae^{-it})(1-ae^{it})}\,dt = \frac{1}{1-a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos(t)+a^2}\,dt = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

Pour $|a| > 1$, on inverse les rôles de $a$ et $\frac{1}{a}$, d'où :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\frac{2\cos(t)}{a}+\frac{1}{a^2}}\,dt = \frac{2\pi}{1-\frac{1}{a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos(t)+a^2}\,dt = \frac{2\pi}{a^2-1}$$

On notera qu'à aucun moment, on n'a eu besoin de calculer une primitive de la fonction $t \to \dfrac{1}{1-2a\cos(t)+a^2}$ (ce qui est cependant possible de faire, au moins pour $a$ réel, en posant $x = \tan(\dfrac{t}{2})$).

**Sol.6)** Pour $n = 0$, on reconnaît le théorème de Liouville. Adaptons sa démonstration au cas présent.

Soit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ le développement en série entière de $f$ sur $\mathbb{C}$ avec, pour tout $r > 0$ :

$$c_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, d\theta$$

Pour $k > n$, on a alors :

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})\, e^{-ik\theta}|\, d\theta \leq \frac{a+br^n}{2\pi r^k}$$

quantité qui tend vers 0 quand $r$ tend vers l'infini. Donc $c_k = 0$ pour $k > n$, et $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$.

**Sol.7)** On a vu dans le cours que le nombre de zéros d'une fonction holomorphe sur un disque est égal à $\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ où $\gamma$ est le cercle frontière du disque, parcouru dans le sens trigonométrique. Il s'agit donc de montrer que $\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \dfrac{f'(z)}{f(z)-1}\, dz$, où $\gamma$ est le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique. Cette égalité est équivalente à :

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-1}\, dz$$

$$\Leftrightarrow \qquad \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-1} - \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)(f(z)-1)}\, dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(e^{i\theta})\, ie^{i\theta}}{f(e^{i\theta})(f(e^{i\theta})-1)}\, d\theta = 0$$

La fonction $\theta \to \dfrac{f'(e^{i\theta})\, ie^{i\theta}}{f(e^{i\theta})(f(e^{i\theta})-1)}$ est la dérivée de la fonction $g : \theta \to \mathrm{Log}(1 - \dfrac{1}{f(e^{i\theta})})$, fonction qui est bien définie car $1 - \dfrac{1}{f(e^{i\theta})} \in D(1, 1)$ puisque $\left|\dfrac{1}{f(e^{i\theta})}\right| < 1$. L'intégrale devient donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} g'(\theta)\, d\theta = g(\pi) - g(-\pi) \text{ qui est bien nul puisque } g \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}$$

Pour tout $a$ non nul de module inférieur ou égal à 1, le résultat précédent s'applique à la fonction $\dfrac{f}{a}$ et montre que le nombre de zéros de la fonction $f - a$ ne dépend pas de $a$ élément de $\overline{D}(0, 1)$. Cette constance évoque celle de l'indice d'un point par rapport à une courbe lorsque le point décrit une composante connexe du complémentaire d'une courbe. De fait, on aurait pu aussi tenir le raisonnement suivant. Soit $f(\gamma)$ le lacet défini par le paramétrage $\theta \in [-\pi, \pi] \to Z = f(e^{i\theta})$. Pour tout $a$ dans une composante connexe du complémentaire de $f(\gamma)$, on a :

$$\mathrm{Ind}_{f(\gamma)}(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{f(\gamma)} \frac{1}{Z - a}\,dZ = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(e^{i\theta})\, ie^{i\theta}}{f(e^{i\theta}) - a}\,d\theta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a}\,dz$$
$$= \text{nombre de zéros de la fonction } f - a \text{ dans } D(0, 1)$$

$\overline{D}(0, 1)$ est connexe et ne rencontre pas $f(\gamma)$ puisque $|f| > 1$ sur $\gamma$. Donc $\overline{D}(0, 1)$ est inclus dans une composante connexe de $f(\gamma)$. Comme $a \to \mathrm{Ind}_{f(\gamma)}(a)$ est constante sur cette composante connexe, elle est constante sur $\overline{D}(0, 1)$. Ainsi, le nombre de zéros de la fonction $f - a$ dans $D(0, 1)$, comptés avec leur multiplicité, est le même pour tout $a$ de $\overline{D}(0, 1)$, en particulier pour $a = 0$ et $a = 1$.

**Sol.8)** a) Montrons que l'intégrale est définie sur le domaine égal à $\mathbb{C}$ privé de l'axe imaginaire pur.
$\dfrac{1}{t^2 + z^2}$ est défini si et seulement si le dénominateur ne s'annule pas, si et seulement si $z$ n'est pas imaginaire pur. Il reste à montrer que l'intégrale converge. L'intégrale étant une fonction paire de $z$, on peut supposer $\mathrm{Re}(z) > 0$, et on posera $\Omega = \{z, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
Pour un tel $z$, l'intégrale est généralisée quand $t$ tend vers $+\infty$, et, pour $t > |z|$, on a :

$$\frac{1}{|t^2 + z^2|} \leq \frac{1}{t^2 - |z|^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc la fonction $t \to \dfrac{1}{t^2 + z^2}$ est intégrale sur $[0, +\infty[$, et l'intégrale est bien définie.
b) Pour montrer que F est holomorphe sur $\Omega$, il convient de vérifier une hypothèse de domination sur tout compact de $\Omega$. Un tel compact est inclus dans une partie de la forme $\{z \mid \mathrm{Re}(z) \geq a > 0, |y| \leq b\}$. Pour $z = x + iy$, on a :

$$t^2 + z^2 = t^2 + x^2 - y^2 + 2ixy$$

de module vérifiant :

$$\begin{aligned}|t^2 + z^2|^2 &= (t^2 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = t^4 + 2(x^2 - y^2)t^2 + (x^2 + y^2)^2\\ &= (t^2 - y^2)^2 + 2(t^2 + y^2)x^2 + x^4\\ &\geq (t^2 - y^2)^2 + 2(t^2 + y^2)a^2 + a^4\\ &\geq (t^2 - y^2)^2 + a^4\end{aligned}$$

Pour $0 \leq t \leq b$, $|t^2 + z^2|^2 \geq a^4$ donc $\dfrac{1}{|t^2 + z^2|} \leq \dfrac{1}{a^2}$

Pour $t \geq b$, $|t^2 + z^2|^2 \geq (t^2 - b^2)^2 + a^4$ donc $\dfrac{1}{|t^2 + z^2|} \leq \dfrac{1}{\sqrt{(t^2 - b^2)^2 + a^4}}$

Donc l'hypothèse de domination est vérifiée par la fonction $\varphi$ telle que :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2} & \text{si } 0 \le t \le b \\ \dfrac{1}{\sqrt{(t^2 - b^2)^2 + a^4}} & \text{si } t \ge b \end{cases}$$

$\varphi$ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$ car $\varphi(t) \sim \dfrac{1}{t^2}$ quand $t$ tend vers $+\infty$.

c) ❑ Pour $x$ réel strictement positif, on a :

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^2 + x^2}\,dt = \left[\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\pi}{2x}$$

Les deux fonctions $z \to \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t^2 + z^2}\,dt$ et $z \to \dfrac{\pi}{2z}$ sont holomorphes sur l'ouvert connexe $\Omega$ et coïncident sur $]0, +\infty[$ qui admet des points d'accumulation dans $\Omega$, donc sont égales sur $\Omega$. Ainsi :

$$\forall\, z,\ \mathrm{Re}(z) > 0 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + z^2}\,dt = \frac{\pi}{2z}$$

Pour $z$ tel que $\mathrm{Re}(z) < 0$, on aura donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t^2 + z^2}\,dt = -\frac{\pi}{2z}$ puisque la fonction de gauche est paire.

❑ On peut retrouver le résultat précédent par un calcul direct, en cherchant une primitive de $t \to \dfrac{1}{t^2 + z^2}$ comme suit. Toujours pour $z$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, on a :

$$\frac{1}{t^2 + z^2} = \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{z + it} + \frac{1}{z - it}\right)$$

Les deux termes $z \pm it$ ont une partie réelle strictement positive, donc on peut considérer la fonctions $t \to \mathrm{Log}(z + it) - \mathrm{Log}(z - it)$. Sa dérivée par rapport à $t$ vaut $i\left(\dfrac{1}{z + it} + \dfrac{1}{z - it}\right)$, donc une primitive de $t \to \dfrac{1}{t^2 + z^2}$ est $\dfrac{\mathrm{Log}(z + it) - \mathrm{Log}(z - it)}{2iz}$. Donc :

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^2 + z^2}\,dt = \left[\frac{\mathrm{Log}(z + it) - \mathrm{Log}(z - it)}{2iz}\right]_{t=0}^{t=\infty}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{Log}(z + it) - \mathrm{Log}(z - it)}{2iz}$$

On a :

$$\mathrm{Log}(z + it) = \ln(|z + it|) + i \arg(z + it)$$

$$\mathrm{Log}(z - it) = \ln(|z - it|) + i \arg(z - it)$$

les arguments étant pris dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Quand $t$ tend vers $+\infty$, l'argument de $z + it$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ et celui de $z - it$ tend vers $-\dfrac{\pi}{2}$. Par ailleurs :

$$\ln(|z + it|) - \ln(|z - it|) = \ln\left(\frac{|z + it|}{|z - it|}\right) \text{ tend vers 0 quand } t \text{ tend vers l'infini}$$

Donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t^2 + z^2}\,dt = \frac{\pi}{2z}$ pour $\mathrm{Re}(z) > 0$.

**Sol.9)** (i) Puisque $f(0) = 0$, 0 est une singularité artificielle de $g : z \to \frac{f(z)}{z}$ et, en posant $g(0) = f'(0)$, prolongement continu de $g$ en 0, $g$ est une fonction analytique sur D. Le (i) sera prouvé si on parvient à montrer que, pour tout $z$ de D(0, 1), $|g(z)| \leq 1$.

Si $f$ (et donc $g$) était définie de plus définie et continue sur le disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(0, 1)$, on pourrait conclure immédiatement en appliquant le principe du maximul à $g$. $g$ atteindrait en effet son maximum sur la frontière de $\overline{\mathrm{D}}(0, 1)$, c'est-à-dire sur le cercle unité. Or, pour tout $z$ de ce cercle :

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left|\frac{f(z)}{z}\right| \\ &= |f(z)| \qquad \text{puisque } |z| = 1 \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Dans le cas général où l'on ignore si $f$ se prolonge au disque fermé, on peut passer par l'intermédiaire de disque de rayon $r < 1$, puis faire tendre $r$ vers 1. En appliquant le principe du maximum à la restriction de $g$ au disque $\overline{\mathrm{D}}(0, r)$, on obtient :

$$\forall\, r,\ \forall\, z \in \mathrm{D}(0, r),\ |g(z)| \leq \sup_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{|z|=r} \left|\frac{f(z)}{z}\right| = \sup_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}$$

Comme tout $z$ de D(0, 1) peut être placé dans un disque D(0, $r$), $|z| < r < 1$, en faisant tendre $r$ vers 1, on obtient $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z$ de D(0, 1).

On a donc bien $|f(z)| \leq |z|$, ainsi que $|f'(0)| \leq 1$, puisque $f'(0) = g(0)$.

(ii) Si $\exists\, z \neq 0$, $|f(z)| = |z|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors $g : z \to \frac{f(z)}{z}$ admet un maximum égal à 1 en un point $z$ de D ou en 0, donc, toujours avec le principe du maximum, est une constante $\lambda$ sur D de module 1, donc $f = \lambda\mathrm{Id}$.

**Sol.10)** a) La fonction $f$ a une singularité artificielle en 0, avec le prolongement $f(0) = 1$. Par conséquent, le lacet ne possède pas de points singuliers de $f$, fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ sauf en les pôles $2ik\pi$, $k \neq 0$. Aucun de ces pôles n'est contenu dans le domaine limité par le lacet, donc la formule des résidus donne $\int_{\mathrm{ABCDA}} \frac{z}{e^z - 1}\,\mathrm{d}z = 0$. On coupe l'intégrale selon les quatre côtés :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathrm{ABCDA}} \frac{z}{e^z - 1}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^b \frac{x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{BC}} \frac{z}{e^z - 1}\,\mathrm{d}z + \int_b^0 \frac{x + i\pi}{e^{x+i\pi} - 1}\,\mathrm{d}x + \int_\pi^0 \frac{iy}{e^{iy} - 1}\, i\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^b \frac{x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{BC}} \frac{z}{e^z - 1}\,\mathrm{d}z + \int_0^b \frac{x + i\pi}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x - \frac{i}{2}\int_0^\pi \frac{y}{e^{iy/2}\sin(y/2)}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

On a $\left|\displaystyle\int_{BC} \frac{z}{e^z - 1}\,dz\right| \leq \displaystyle\int_0^{\pi} \left|\frac{z}{e^z - 1}\right| dy$ avec $z = b + iy$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{b + \pi}{e^b - 1}\,dy = \pi\,\frac{b + \pi}{e^b - 1} \text{ qui tend vers 0 quand } b \text{ tend vers } +\infty.$$

Donc, en passant à la limite :

$$0 = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{i\pi}{e^x + 1}\,dx - \frac{i}{2}\int_0^{\pi} \frac{ye^{-iy/2}}{\sin(y/2)}\,dy$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_0^{\infty} \frac{2xe^x}{e^{2x} - 1}\,dx + i\pi\left[\ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)\right]_0^{\infty} - 2i\int_0^{\pi/2} \frac{te^{-it}}{\sin(t)}\,dt$$

en regroupant les deux premières intégrales en une seule, en prenant une primitive pour la troisiéme intégrale, et en posant $t = \dfrac{y}{2}$ dans la dernière intégrale

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_0^{\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\,dx + i\pi\ln(2) - 2i\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan(t)}\,dt - 2\int_0^{\pi/2} t\,dt$$

en remplaçant $e^{-it}$ par $\cos(t) - i\sin(t)$ dans la dernière intégrale

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_0^{\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\,dx + i\pi\ln(2) - 2i\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan(t)}\,dt - \frac{\pi^2}{4}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\,dx = \frac{\pi^2}{4}}$$

et $$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan(t)}\,dt = \frac{\pi\ln(2)}{2}}$$

b) Les pôles de la fonction $g$ sont $\ln(r) + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si $1 < r < e^b$, il y a le seul pôle $\ln(r)$ dans le domaine limité par le lacet, et son résidu vaut :

$$\lim_{z \to \ln(r)} z\,\frac{z - \ln(r)}{e^z - r} = \frac{\ln(r)}{r}.$$

Si $r \in\, ]0, 1[$, il n'y a aucun pôle dans le domaine.

Par conséquent, d'après la formule des résidus :

$$\int_{EFGHE} \frac{z}{e^z - r}\,dz = \begin{cases} 2i\pi\,\dfrac{\ln(r)}{r} \text{ si } 1 < r < e^b \\ 0 \text{ si } r \in\, ]0, 1[ \end{cases}$$

Par ailleurs, en découpant le lacet selon les quatre segments [E, F], [F, G], [G, H] et [H, E], on a :

$$\int_{EFGHE} \frac{z}{e^z - r}\,dz = \int_0^{b} \frac{x - i\pi}{-e^x - r}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b + iy}{e^b e^{iy} - r}\,i\,dy + \int_b^{0} \frac{x + i\pi}{-e^x - r}\,dx + \int_{\pi}^{-\pi} \frac{iy}{e^{iy} - r}\,i\,dy$$

$$= \int_0^{b} \frac{i\pi - x}{e^x + r}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b + iy}{e^b e^{iy} - r}\,i\,dy + \int_0^{b} \frac{i\pi + x}{e^x + r}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y}{e^{iy} - r}\,dy$$

$$= 2i\pi\int_0^{b} \frac{1}{e^x + r}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{b + iy}{e^b e^{iy} - r}\,i\,dy + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y}{e^{iy} - r}\,dy$$

On a $\left| \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{b+iy}{e^b e^{iy} - r}\, i\, \mathrm{d}y \right| \leq \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{b+iy}{e^b e^{iy} - r} \right| \mathrm{d}y \leq \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{b+\pi}{e^b - r}\, \mathrm{d}y = 2\pi\, \frac{b+\pi}{e^b - r}$ qui tend vers 0 quand $b$ tend vers l'infini. Donc, à la limite, on obtient pour le second membre :

$$2i\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + r}\, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y}{e^{iy} - r}\, \mathrm{d}y = \frac{2i\pi}{r} \left[ \ln\left(\frac{e^x}{e^x + r}\right) \right]_0^{\infty} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y}{e^{iy} - r}\, \mathrm{d}y$$

$$= 2i\pi\, \frac{\ln(1+r)}{r} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y}{e^{iy} - r}\, \mathrm{d}y$$

Quant au membre de gauche $\displaystyle\int_{\text{EFGHE}} \frac{z}{e^z - r}\, \mathrm{d}z$, il tend vers 0 quand $b$ tend vers $+\infty$ si $r \in \,]0, 1[$ et vers $2i\pi\, \dfrac{\ln(r)}{r}$ si $r > 1$. Donc :

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{y}{e^{iy} - r}\, \mathrm{d}y = \left[ \begin{array}{l} -\dfrac{2i\pi}{r} \ln(1+r) \text{ si } r \in \,]0, 1[ \\ -\dfrac{2i\pi}{r} \ln\left(1 + \dfrac{1}{r}\right) \text{ si } r > 1 \end{array} \right.}$$

On peut remarquer que le cas limite $r = 1$ dans la formule précédente conduit à l'égalité :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{y}{e^{iy} - 1}\, \mathrm{d}y = -\, 2i\pi \ln(2)$$

qui permet de retrouver la valeur $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan(t)}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi \ln(2)}{2}$ vue dans le a).

c) $h : z \to \dfrac{\mathrm{Log}(z)}{1 - z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé du demi-axe $]-\infty, 0]$ et privé de 1. Mais 1 est une singularité artificielle puisque $h$ s'y prolonge par continuité en posant $h(1) = -1$. Donc $h$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \,]-\infty, 0]$.

Au lieu de calculer $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \mathrm{dilog}(-1 + it)$, on va plutôt calculer $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \mathrm{dilog}(e^{i(\pi - t)})$. En effet, la différence entre $\mathrm{dilog}(-1 + it)$ et $\mathrm{dilog}(e^{i(\pi - t)})$ est l'intégrale de la fonction $h$, qui est bornée au voisinage de $-1$ dans le demi-plan $\mathrm{Im}(z) > 0$, sur le segment joignant $-1 + it$ à $e^{i(\pi - t)}$ et dont la longueur tend vers 0 quand $t$ tend vers 0. Cette différence tend donc vers 0 et on a donc, si elles existent, $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \mathrm{dilog}(e^{i(\pi - t)}) = \lim_{t \to 0^+} \mathrm{dilog}(-1 + it)$. Pour calculer $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \mathrm{dilog}(e^{i(\pi - t)})$, on peut intégrer $\dfrac{\mathrm{Log}(z)}{1 - z}$ sur le chemin $\gamma_t : \theta \in [0, \pi - t[ \, \to z = e^{i\theta}$ inclus dans le demi-plan $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, donc :

$$\lim_{t \to 0^+} \mathrm{dilog}(-1 + it) = \lim_{t \to 0^+} \mathrm{dilog}(e^{i(\pi - t)})$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \int_{\gamma_t} \frac{\mathrm{Log}(z)}{1 - z}\, \mathrm{d}z$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \int_0^{\pi - t} \frac{\mathrm{Log}(e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta}}\, i e^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{\mathrm{Log}(e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta}}\, ie^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^\pi \frac{i\theta}{1 - e^{i\theta}}\, ie^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^\pi \frac{\theta}{1 - e^{-i\theta}}\, \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^\pi \frac{\theta e^{i\theta/2}}{2i\sin(\frac{\theta}{2})}\, \mathrm{d}\theta \qquad \text{comparablement à ce qu'on a fait dans le a)}$$
$$= \int_0^\pi \frac{\theta}{2i\tan(\frac{\theta}{2})} + \frac{\theta}{2}\, \mathrm{d}\theta$$
$$= -2i\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan(x)}\, \mathrm{d}x + \frac{\pi^2}{4} \qquad \text{en posant } x = \frac{\theta}{2}$$
$$= \frac{\pi^2}{4} - i\pi\ln(2) \qquad \text{en utilisant la valeur de } \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan(x)}\, \mathrm{d}x \text{ du a)}$$

On vérifera de même que :

$$\lim_{t\to 0^+} \mathrm{dilog}(-1 - it) = \lim_{t\to 0^+} \mathrm{dilog}(e^{i(-\pi+t)})$$
$$= \frac{\pi^2}{4} + i\pi\ln(2)$$

en intégrant sur le chemin $\theta \in [0, \pi - t] \to z = e^{-i\theta}$, dans le demi-plan $\mathrm{Im}(z) \le 0$, ce qui revient à prendre le conjugué dans le calcul précédent.

En particulier :

$$\lim_{t\to 0^+} \mathrm{dilog}(-1 + it) - \mathrm{dilog}(-1 - it) = -2i\pi \ln(2)$$

d) Comme ci-dessus, on calculera plutôt $\lim_{t\to 0^+} \mathrm{dilog}(re^{i(\pi-t)}) - \mathrm{dilog}(re^{i(-\pi+t)})$. La différence $\mathrm{dilog}(re^{i(\pi-t)}) - \mathrm{dilog}(re^{i(-\pi+t)})$ est l'intégrale de $\dfrac{\mathrm{Log}(z)}{1 - z}$ le long d'un arc de cercle de rayon $r$ entre les angles $-\pi + t$ et $\pi - t$, situé dans l'ouvert étoilé où est défini dilog. A la limite, il s'agit de calculer $\displaystyle\int_{\gamma(r)} \frac{\mathrm{Log}(z)}{1 - z}\, \mathrm{d}z$ où $\gamma(r)$ est le cercle de rayon $r$ privé du point $-r$, paramétré par $\theta \in \,]-\pi, \pi[\, \to re^{i\theta}$.

Cette intégrale vaut :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln(r) + i\theta}{1 - re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta = r\ln(r)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - re^{i\theta}}\; ie^{i\theta}\; \mathrm{d}\theta - r\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta}{e^{-i\theta} - r}\, \mathrm{d}\theta$$
$$= r\ln(r) \int_{\gamma(1)} \frac{1}{1 - r\zeta}\, \mathrm{d}\zeta + r \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta}{e^{i\theta} - r}\, \mathrm{d}\theta$$

Dans la première intégrale où il n'y pas de singularité en $\zeta = -1$, on peut considérer qu'on intégre sur le cercle complet de rayon 1 dans la première intégrale. Dans la deuxième intégrale, on a changé $\theta$ en $-\theta$.

La première intégrale est nulle si $r \in ]0, 1[$ (pas de pôle dans D(0, 1) pour la fonction $\zeta \to \dfrac{1}{1 - r\zeta}$) et vaut $-\dfrac{2i\pi}{r}$ si $r > 1$ (un pôle en $\dfrac{1}{r}$ de résidu $-\dfrac{1}{r}$).
On reconnaît dans la deuxième intégrale celle du b).
Dans les deux cas, le membre de droite se réduit à la même expression :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln(r) + i\theta}{1 - re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\, d\theta = -2i\pi \ln(1 + r)$$

Ainsi :

$$\lim_{t\to 0^+} \text{dilog}(-r + it) - \text{dilog}(-r - it) = \lim_{h\to 0^+} \text{dilog}(re^{i(\pi-h)}) - \text{dilog}(re^{i(\pi+h)})$$
$$= -2i\pi \ln(1 + r)$$

Pour $r = 1$, on retrouve le résultat du c).

**Sol.11)** a) Les fonctions $f = \dfrac{1}{\sin}$ et cotan sont holomorphes car inverse ou quotient des fonctions holomorphes cos et sin. Elles sont définies en dehors des valeurs $k\pi$, seules valeurs annulant le dénominateur, et chaque série $g$ converge absolument en dehors de ces valeurs. Chaque terme de chaque série $g$ est holomorphe sur le même domaine que $f$. On montre que la somme de la série $g$ est holomorphe en montrant que la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ privé des points $k\pi$, ce qui peut se faire comme on l'a fait dans le cours pour la série $\sum \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n - z}$.

❑ Faisons-le par exemple pour $g(z) = \dfrac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2(-1)^n z}{z^2 - n^2\pi^2}$ associée au sinus. Soit K un compact inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Il existe un nombre N tel que, $\forall\ z \in$ K, $|z| \leq$ N. Pour les $n \leq \dfrac{\text{N}}{\pi}$, la fonction $z \in \text{K} \to z^2 - n^2\pi^2$ quand $n \geq 1$ (ou bien $z \in \text{K} \to z$ quand $n = 0$) est continue et non nulle sur le compact K, donc admet un minimum strictement positif $r_n$. Pour tout $z$ dans K, on a alors :

$$\left|\frac{1}{z}\right| \leq \frac{1}{r_0}$$

$$\forall\ n \leq \frac{\text{N}}{\pi}, \left|\frac{2(-1)^n z}{z^2 - n^2\pi^2}\right| \leq \frac{2\text{N}}{r_n}$$

$$\forall\ n > \frac{\text{N}}{\pi}, \left|\frac{2(-1)^n z}{z^2 - n^2\pi^2}\right| \leq \frac{2|z|}{n^2\pi^2 - |z|^2} \leq \frac{2\text{N}}{n^2\pi^2 - \text{N}^2} \sim \frac{2\text{N}}{n^2\pi^2}$$ quand $n$ tend vers l'infini, terme général d'une série convergente, et la série converge bien normalement sur K.

❑ Le même raisonnement s'applique à la série associée à cotan en enlevant les $(-1)^n$.

b) La fonctions $f$ = cotan est périodique de période $\pi$. $\dfrac{1}{\sin}$ vérifie la relation $f(z + \pi) = -f(z)$. On peut vérifier que la série $g$ associée à chaque $f$ satisfait la même relation $g(z + \pi) = g(z)$ ou $-g(z)$ selon le cas en considérant les sommes partielles de la série, en réduisant son terme général en éléments simples, en opérant un changement d'indice, puis en faisant tendre le nombre de termes de la somme partielle vers l'infini.

On sera amené à adopter la convention de notation suivante, permettant d'accélérer la démarche précédente. Si $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{Z}}$ est une suite telle que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} a_n$ existe, on notera cette limite $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n$., même si la famille $(a_n)$ n'est pas sommable. Si de plus $(a_n)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors on a $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=\infty}^{\infty} a_{n+1}$. En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N-1}^{N-1} a_{n+1} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left( \sum_{n=-N}^{N} a_{n+1} - a_{N+1} + a_{-N} \right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_{n+1} \\
&= \sum_{n=\infty}^{\infty} a_{n+1}
\end{aligned}$$

La condition $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ est essentielle. Si on prend par exemple $a_n = \begin{cases} -1 \text{ si } n < 0 \\ 0 \text{ si } n = 0 \\ 1 \text{ si } n > 0 \end{cases}$, alors $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 0$ mais $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} a_{n+1} = 2$.

❑ Pour la série $g(z) = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2(-1)^n z}{z^2 - n^2\pi^2}$ associée à $\dfrac{1}{\sin}$, la méthode précédente donne :

$$\begin{aligned}
g(z) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^n z}{z^2 - n^2\pi^2} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{z - n\pi} + \frac{(-1)^n}{z + n\pi} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{z - n\pi} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z - n\pi} \qquad \text{selon la convention précédente}
\end{aligned}$$

Remplaçons $z$ par $z + \pi$. On obtient :

$$g(z+\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+\pi-n\pi}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-(n-1)\pi}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z-n\pi} \qquad \text{par changement d'indice, sachant que } \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z-n\pi} = 0$$

$$= -g(z)$$

❑ Le cas de la série associée à cotan se traitent de même sans les $(-1)^n$, conduisant à l'égalité $g(z+\pi) = g(z)$.

c) Comme on a montré dans le b) que $(f-g)(z+\pi) = \pm(f-g)(z)$, il suffit d'étudier la singularité en 0.

❑ $\dfrac{1}{\sin}$ admet le développement suivant en 0 :

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z)} = \frac{1}{z - \dfrac{z^3}{6} + o(z^3)} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{z^2}{6} + o(z^2)\right) = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + o(z) = \frac{1}{z} + o(1)$$

donc $f(z) - \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\sin(z)} - \dfrac{1}{z}$ se prolonge en $z = 0$. Il en est de même de $g(z) - \dfrac{1}{z} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n z}{z^2 - n^2\pi^2}$. Donc $f(z) - g(z)$ aussi.

❑ cotan admet le développement suivant en 0 :

$$\text{cotan}(z) = \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{6} + o(z)\right)\left(1 - \frac{z^2}{2} + o(z^2)\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} + o(z) = \frac{1}{z} + o(1)$$

et on conclut comme dans le cas de $\dfrac{1}{\sin}$.

d) Pour montrer que $f-g$ bornée, vu ses propriétés modulo $\pi$, il suffit de montrer qu'elle est bornée sur la bande $0 \le \text{Re}(z) \le \pi$. Etant paire ou impaire, on peut se limiter à $\text{Im}(z) \ge 0$. Etant continue, elle est bornée sur le compact $\{z \mid 0 \le \text{Re}(z) \le \pi,\ 0 \le \text{Im}(z) \le \pi\}$. On peut donc maintenant supposer $0 \le \text{Re}(z) \le \pi$ et $\text{Im}(z) \ge \pi$. On montre que, dans chaque cas, $f$ et $g$ sont séparément bornées sur ce domaine.

❑ Commençons par traiter les fonctions $f$, en posant $z = x + iy$, $x$ et $y$ réels. On a respectivement :

$$\left|\frac{1}{\sin(z)}\right| = \left|\frac{1}{\sin(x+iy)}\right| = \left|\frac{1}{\sin(x)\text{ch}(y) + i\cos(x)\text{sh}(y)}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sin(x)^2\text{ch}(y)^2 + \cos(x)^2\text{sh}(y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sin(x)^2 + \text{sh}(y)^2}}$$

$$\le \frac{1}{\text{sh}(y)} \qquad \text{qui est borné sur l'ensemble } \{y \ge \pi\}$$

$$|\text{cotan}(z)| = \left|\frac{\cos(x+iy)}{\sin(x+iy)}\right| = \frac{\sqrt{\cos(x)^2\text{ch}(y)^2 + \sin(x)^2\text{sh}(y)^2}}{\sqrt{\sin(x)^2\text{ch}(y)^2 + \cos(x)^2\text{sh}(y)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2(y) - \sin^2(x)}{\sin^2(x) + \mathrm{sh}^2(y)}} \leq \frac{\mathrm{ch}(y)}{\mathrm{sh}(y)} \qquad \text{borné sur l'ensemble } \{y \geq \pi\}$$

❑ Montrons maintenant que chaque somme de série $g$ est bornée sur le domaine $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \pi$ et $\mathrm{Im}(z) \geq \pi$. Commençons par la série $g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n z}{z^2 - n^2\pi^2}$ associée à $\frac{1}{\sin}$. Simplifions un peu les notations en effectuant le changement de variable $z \to \pi z$, conduisant à la série $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n z}{z^2 - n^2}$ au facteur $\frac{1}{\pi}$ près, avec maintenant $0 \leq \mathrm{Re}(z) = x \leq 1$, $\mathrm{Im}(z) = y \geq 1$. On a, sous ces hypothèses :

$$\left|\frac{1}{z}\right| \leq \frac{1}{y} \leq 1 \text{ est borné}$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n z}{z^2 - n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x^2 - y^2 - n^2)^2 + 4x^2y^2}}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{1 + y^2}}{|x^2 - y^2 - n^2|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{1 + y^2}}{n^2 + y^2 - x^2}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 + y)}{n^2 + y^2 - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + y^2 - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{n^2 + y^2 - 1}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2y}{(n + 1)^2 + y^2 - 1}$$

$$\leq \mathrm{Cte} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2y}{n^2 + 2n + y^2} \leq \mathrm{Cte} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2y}{n^2 + y^2}$$

$$\leq \mathrm{Cte} + \frac{2}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{n^2 + y^2} \leq \mathrm{Cte} + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{2y}{t^2 + y^2}\, \mathrm{d}t$$

$$\leq \mathrm{Cte} + 2 + \int_{0}^{\infty} \frac{2y}{t^2 + y^2}\, \mathrm{d}t = \mathrm{Cte} + 2 + \left[ 2 \arctan\left(\frac{t}{y}\right) \right]_{t=0}^{t\to\infty}$$

$$\leq \mathrm{Cte} + 2 + \pi$$

et la série $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n z}{z^2 - n^2}$ est bien bornée.

Le cas de cotan est identique, en enlevant les $(-1)^n$.

e) ❑ $\frac{1}{\sin(iy)} = \frac{1}{i\mathrm{sh}(y)}$ a une limite nulle quand $y$ tend vers l'infini. Montrons qu'il en est de même pour sa série $g(iy) = \frac{1}{iy} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n iy}{y^2 + n^2\pi^2}$.

$\dfrac{1}{iy}$ a une limite nulle en $+\infty$.

Il reste à traiter la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n y}{y^2 + n^2\pi^2}$, ou plus simplement $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n y}{y^2 + n^2}$ obtenu après le changement de variable $y \to \pi y$. Il s'agit d'une série alternée telle que le terme $(\dfrac{y}{y^2 + n^2})_{n\geq 1}$ forme une suite décroissante de limite nulle. La somme de la série alternée est donc en valeur absolue majorée par son premier terme $\dfrac{y}{y^2 + 1}$, qui a une limite nulle quand $y$ tend vers $+\infty$.

❑ Le cas de cotan est intéressant. On a :

$$f(iy) = \frac{1}{\text{cotan}(iy)} = \frac{1}{i\text{th}(y)} \text{ de limite } \frac{1}{i} = -i$$

Quand à la série associée, elle vaut :

$$g(iy) = \frac{1}{iy} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2iy}{y^2 + n^2\pi^2}$$

or il est montré dans les exercices du chapitre L2/SUITESF.PDF que, au moyen d'une comparaison série-intégrale (une moitié de la comparaison a d'ailleurs déjà été traitée précédemment, dans le d) :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2} = \frac{\pi}{2}$$

C'est un exemple typique où on ne peut écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2} = 0$$

car les hypothèses permettant de permuter *lim* et $\sum$ ne sont pas vérifiées (revoir le chapitre *Suites et Séries de fonctions* L2/SUITESF.PDF). En effet, La série $\sum \dfrac{x}{x^2 + n^2}$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$ (on pourra vérifier que $\sup_{x\geq 0} \dfrac{x}{x^2 + n^2} = \dfrac{1}{2n}$, et $\sum \dfrac{1}{2n}$ diverge).

En remplaçant $y$ par $\pi x$ dans l'expression de $g(iy)$, on obtient :

$$\lim_{y\to+\infty} g(iy) = -2i \lim_{y\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2\pi^2} = -\frac{2i}{\pi} \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2} = -\frac{2i}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = -i$$

et on a donc bien dans ce cas aussi $\lim_{y\to+\infty} f(iy) - g(iy) = 0$.

A l'issue des questions a-b-c-d-e, on a montré que $f - g$ est une fonction entière et bornée. D'après le théorème de Liouville, $f - g$ est constante. Pour $z = iy$, et $y$ tendant vers l'infini, elle tend vers 0, donc la constante est nulle. On a ainsi montré que $f = g$.

f) ❑ On adopté dans le b) la notation $\dfrac{1}{\sin(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{z - n\pi}$. On en déduit :

$$\frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{\pi}{2} - z - n\pi}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi - 2z - 2n\pi}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{-2z - (2n-1)\pi}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{2(-1)^n}{-2z - (2n-1)\pi}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=-N}^{0} \frac{2(-1)^n}{-2z - (2n-1)\pi} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^n}{2z + (2n-1)\pi} \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=0}^{N} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi - 2z} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2(-1)^n}{2z + (2n+1)\pi} \right)$$

en changeant $n$ en $-n$ dans la première somme, et en $n + 1$ dans la deuxième

$$= \lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=0}^{N} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi - 2z} + \sum_{n=0}^{N} \frac{2(-1)^n}{2z + (2n+1)\pi} - \frac{2(-1)^N}{2z + (2N+1)\pi} \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left( \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi - 2z} + \frac{2(-1)^n}{2z + (2n+1)\pi} \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{4(-1)^n(2n+1)\pi}{(2n+1)^2\pi^2 - 4z^2}$$

$$= 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2\pi^2 - 4z^2}$$

❑ De même, $\text{cotan}(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - n\pi}$ et $\tan(z) = \text{cotan}(\frac{\pi}{2} - z)$. Le calcul est identique au précédent sans les $(-1)^n$, ce qui conduit à :

$$\tan(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z - n\pi}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=-N}^{0} \frac{2}{-2z - (2n-1)\pi} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{2z + (2n-1)\pi} \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{(2n+1)\pi - 2z} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2}{2z + (2n+1)\pi} \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left( \frac{2}{(2n+1)\pi - 2z} - \frac{2}{2z + (2n+1)\pi} \right)$$

$$= 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(2n+1)^2\pi^2 - 4z^2}$$

❑ $\dfrac{1}{\cos^2(z)}$ est la dérivée de $\tan(z) = 8 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(2n+1)^2\pi^2 - 4z^2}$, qu'on peut dériver terme à terme, ce qui se fait plus aisément avec la notation conventionnelle $\tan(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{-2z-(2n-1)\pi}$ :

$$\frac{1}{\cos^2(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{2}{-2z-(2n-1)\pi}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{(2z+(2n-1)\pi)^2}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{(2z-(2n+1)\pi)^2} \qquad \text{en changeant } n \text{ en } -n.$$

❑ On procède de même pour $\dfrac{1}{\sin^2(z)}$, égal à la dérivée de $-\,\text{cotan}(z) = -\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n\pi}$.

$$\frac{1}{\sin^2(z)} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{z-n\pi}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$$

g) $\text{cotan}(z) = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2\pi^2} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \frac{2z}{1-\dfrac{z^2}{n^2\pi^2}}$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \frac{2z^{2k+1}}{n^{2k}\,\pi^{2k}}$$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^{2k-1}}{n^{2k}\,\pi^{2k}} \qquad \text{en changeant d'indice}$$

$$= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^{2k-1}}{n^{2k}\,\pi^{2k}}$$

car la série double converge absolument (remonter le calcul en remplaçant $z$ par $|z|$ pour voir qu'on obtient une série convergente)

$$= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}} z^{2k-1}$$

Effectuons un développement de la fonction $\text{cotan}(z)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5. On vérifiera que :

$$\text{cotan}(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} + o(z^5)$$
$$= \frac{1}{z} - \frac{2\zeta(2)}{\pi^2} z - \frac{2\zeta(4)}{\pi^4} z^3 - \frac{2\zeta(6)}{\pi^6} z^5 + o(z^5)$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. On peut ainsi calculer toute quantité $\zeta(2k)$, mais on ne connaît aucune méthode générale pour calculer les $\zeta(2k + 1)$.

h) On a dans le membre de droite de l'égalité demandée un produit infini de fonctions holomorphes. Profitons-en pour montrer que, si $\sum u_n$ est une série normalement convergente de fonctions holomorphes, alors $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$ est une fonction holomorphe.

Dans le chapitre L2/SERIES.PDF, on a montré que, si $\sum u_n$ est une série absolument convergente de complexes, alors :

$$\exists\, N_1, \forall n \geq N_1, \left|\ln(|1 + u_n|)\right| \leq 2\,|u_n|$$

de sorte que $\sum \ln(|1 + u_n|)$ converge absolument. On peut également choisir les valeurs de $\arg(1 + u_n)$ de façon que la suite de ces arguments tendent vers 0. Dans ce cas $\sum \arg(1 + u_n)$ converge absolument, car on a aussi :

$$\exists\, N_2, \forall n \geq N_2, |\arg(1 + u_n)| \leq 2\,|u_n|.$$

et $\Pi\,(1 + u_n)$ converge. On peut alors faire usage du logarithme complexe. En effet :

$$\exists\, N_3, \forall n \geq N, 1 + u_n \in D(1, 1), \arg(1 + u_n) \in\, ]-\pi, \pi[ \text{ et } \sum_{n=N}^{\infty} \arg(1 + u_n) \in\, ]-\pi, \pi[$$

Pour $N = \text{Max}(N_1, N_2, N_3)$, on a :

$$\text{Log}\Big(\prod_{n=N}^{\infty} (1 + u_n)\Big) = \text{Log}\Big(\prod_{n=N}^{\infty} |1 + u_n| \exp\big(i \sum_{n=N}^{\infty} \arg(1 + u_n)\big)$$

$$= \ln\Big(\prod_{n=N}^{\infty} |1 + u_n|\Big) + i \sum_{n=N}^{\infty} \arg(1 + u_n)$$

$$= \sum_{n=N}^{\infty} \ln(|1 + u_n|) + i \sum_{n=N}^{\infty} \arg(1 + u_n)$$

$$= \sum_{n=N}^{\infty} (\ln(|1 + u_n|) + i \arg(1 + u_n))$$

$$= \sum_{n=N}^{\infty} \text{Log}(1 + u_n)$$

Si $\sum u_n$ est maintenant une série de fonctions holomorphes convergeant normalement, sous les hypothèse précédentes, on a, pour $n \geq N$ :

$$|\text{Log}(1 + u_n)| = \sqrt{\ln(|1 + u_n|)^2 + \arg(1 + u_n)^2}$$

$$\leq \big|\ln(|1 + u_n|)\big| + |\arg(1 + u_n)|$$
$$\leq 4\,|u_n|$$
$$\leq 4\,\| u_n \|_\infty$$
de sorte que $\sum$ Log$(1 + u_n)$ est une série de fonctions holomorphes convergeant normalement, donc la somme de la série est holomorphe. Si on compose par l'exponentielle, $\prod\limits_{n=N}^{\infty} (1 + u_n)$ est holomorphe. Multipliant par le produit fini $\prod\limits_{n=0}^{N-1} (1 + u_n)$, on en déduit que $\prod\limits_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$ est holomorphe.

Ainsi, les deux membres de l'égalité *h*) demandée sont holomorphes, car $\sum \dfrac{z^2}{n^2\pi^2}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Pour montrer leur égalité, il suffit de la montrer sur une partie de $\mathbb{C}$ admettant un point d'accumulation, par exemple $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sur cet ensemble, Log est identique au logarithme népérien ln.

On prend le logarithme des deux membres et on dérive :

$$\frac{d}{dx}(\ln(\sin(x)) = \frac{\cos(x)}{\tan(x)} = \text{cotan}(x)$$

$$(\ln(x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})) = \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2})$$

donc $\dfrac{d}{dx}(\ln(x \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2})) = \dfrac{1}{x} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} = \text{cotan}(x)$ d'après le a)

On a pu dériver terme à terme la série car la série des dérivées converge normalement sur le compact $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Les deux membres ont même dérivée logarithmique, donc sont proportionnels. Ils ont même équivalent $z$ quand $z$ tend vers 0, donc la constante de proportionalité vaut 1. Donc les deux membres sont égaux.

i) Il suffit de remplacer $z$ par $iz$ dans h).

◆