TOPOLOGIE

Plan

I : Espaces topologiques

1- Un exemple

La notion d'espace métrique n'est pas suffisante pour prendre en compte la totalité des notions de convergence.

Par exemple, on définit dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la notion de convergence simple :

$$f_n \xrightarrow{S} f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

On peut montrer (voir les Exercices) qu'il n'existe aucune distance d sur cet espace pour laquelle :

$$f_n \xrightarrow{S} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f_n, f) = 0$$

Voici un exemple plus sophistiqué. Considérons l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, a un réel, (x_n) une suite. Définissons la notion de convergence de (x_n) vers a par valeurs supérieures par le fait que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \qquad \text{et} \qquad \exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, x_n \geq a$$

et notons cette propriété $\underset{n\to+\infty}{limvs}\ x_n = a$. Il n'existe aucune distance d sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\underset{n\to+\infty}{limvs}\ x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_n, a) = 0$$

Supposons par l'absurde que ce soit le cas. On peut alors définir les notions d'ouverts et de fermés relatifs à cette distance (qu'on appellera vs-ouverts et vs-fermés pour les distinguer des ouverts et fermés usuels de $\mathbb{R}$. Plus généralement, on désignera par les préfixes vs- toute notion liée à cette distance). On a alors les propriétés suivantes :

i) pour tout a, $]-\infty, a[$ et $[a, +\infty[$ sont vs-fermés

ii) pour tout a, $]-\infty, a[$ et $[a, +\infty[$ sont vs-ouverts

iii) pour tout a, b, $[a, b[$ est vs-ouvert

iv) pour tout vs-ouvert U et tout a de U, il existe $b > a$, $[a, b[\subset \mathrm{U}$

v) $\mathbb{R}$ admet une partie dénombrable vs-denses (i.e tout vs-ouvert possède un élément de cette partie).

On conclura alors à une absurdité.

En effet :

(i-ii) Soit y vs-adhérent à $]-\infty, a[$. Il existe une suite (x_n) de $]-\infty, a[$ convergeant (au sens usuel) vers y et telle que $x_n \geq y$ pour n assez grand. Comme $y \leq x_n < a$, on a aussi $y < a$, donc $y \in\ ]-\infty, a[$. On a donc montré que $]-\infty, a[$ est vs-fermé. Son complémentaire $[a, +\infty[$ est vs-ouvert.

Soit y vs-adhérent à $[a, +\infty[$. Il existe une suite (x_n) de $[a, +\infty[$ convergeant (au sens usuel) vers y et telle que $x_n \geq y$ pour n assez grand. Comme $x_n \geq a$ pour tout n, en passant à la limite, on a aussi $y \geq a$, donc $y \in [a, +\infty[$. On a donc montré que $[a, +\infty[$ est vs-fermé. Son complémentaire $]-\infty, a[$ est vs-ouvert.

iii) $[a, b[$ est l'intersection des deux vs-ouverts $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ donc est vs-ouvert.

iv) Soit U vs-ouvert et a élément de U. Montrons qu'il existe un entier n tel que $[a, a + \frac{1}{n}[\subset \mathrm{U}$. Dans le cas contraire, pour tout n, il existerait x_n élément de $[a, a + \frac{1}{n}[$ et $x_n \notin \mathrm{U}$. On aurait $\underset{n\to\infty}{limvs}\ x_n = a$, et comme $a \in \mathrm{U}$ vs-ouvert, $\exists\, \mathrm{N}, \forall\, n \geq \mathrm{N}, x_n \in \mathrm{U}$, ce qui est contradictoire.

v) $\mathbb{Q}$ est donc vs-dense dans $\mathbb{R}$ puisque tout vs-ouvert contient un intervalle $[a, b[$ qui contient un rationnel. $\mathbb{R}$ est donc vs-séparable, donc, étant supposé métrique, admet une base dénombrable de vs-ouverts $(\mathrm{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir L3/METRIQUE.PDF). On peut supposer les O_n bornés (au sens usuels) car tout ouvert U est réunion des vs-ouverts $\mathrm{U} \cap [k, k + 1[$, $k \in \mathbb{Z}$, et les $\mathrm{U} \cap [k, k + 1[$ sont réunions d'ouverts O_n nécessairement bornés. Donc U est réunion d'ouverts bornés. Soit $a_n = \mathrm{Inf}(\mathrm{O}_n)$ et soit a un réel tel que : $\forall\, n$, $a \neq a_n$. Un tel a existe car $\mathbb{R}$ est non dénombrable. Soit $b > a$ et écrivons l'ouvert $[a, b[$ comme réunion de O_n, $n \in \mathrm{J} \subset \mathbb{N}$.

Montrons que cette dernière proposition conduit à une absurdité. Pour tout $n \in \mathrm{J}$, $\mathrm{O}_n \subset [a, b[$, donc a minore O_n, donc $a \leq a_n$ et comme $a \neq a_n$, $a < a_n$. Donc $a \notin \mathrm{O}_n$. Mais a est supposé appartenir à l'un des O_n.

La contradiction obtenue nous oblige à rejeter l'hypothèse de l'existence d'une distance.

Cependant, bien que d n'existe pas, on peut conserver la notion d'ouverts et de fermés tels que nous les avons rencontrés. Définissons comme ouvert une réunion quelconque d'intervalles $[a, b[$. Ces ouverts définissent alors une **topologie** sur $\mathbb{R}$, autre que la topologie usuelle définie par la valeur absolue. La droite réelle munie de cette topologie s'appelle **droite de Sorgenfrey**. Sa topologie correspond à la notion de convergence par valeurs supérieures.

On peut définir une topologie quelconque sur un ensemble E de la façon décrite au paragraphe suivant.

2- Définition d'une topologie

DEFINITION

Soit E *un ensemble. Une topologie sur* E *est la donnée d'une famille* $\mathcal{T}$ *de parties de* E, *appelés* **ouverts** *de la topologie, vérifiant les axiomes suivants* :

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ *et* $E \in \mathcal{T}$.

(ii) *Si* $(O_i)_{i\in I}$ *est une famille quelconque d'éléments de* $\mathcal{T}$, *alors* $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.

(ii) *Si* $(O_i)_{i\in I}$ *est une famille* ***finie*** *d'éléments de* $\mathcal{T}$, *alors* $\bigcap_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Une **base d'ouverts** est une famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts tels que tout ouvert U soit réunion d'une sous-famille $(O_i)_{i\in J}$, $J \subset I$.

On appelle **fermé** toute partie dont le complémentaire est ouvert. En passant au complémentaire, la propriété (ii) exprime qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé, et la propriété (iii) qu'une réunion finie de fermés est un fermé.

Soit x un élément de E. On dit qu'une partie V de E est un **voisinage** de x s'il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset V$.
Si O est ouvert, il est voisinage de chacun de ses points x puisqu'il suffira de prendre $U = O$. Réciproquement, une partie O qui est voisinage de chacun de ses points est un ouvert. En effet, pour tout a de O, il existe U_a ouvert tel que $a \in U_a \subset O$, de sorte que $O = \bigcup_{a\in O} U_a$ et est un ouvert comme réunion d'ouverts.

On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. Remarquons que :

$$V \in \mathcal{V}(x) \text{ et } V \subset W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(x)$$

mais W est un voisinage moins précis de x (de même que dans un espace métrique, une boule de centre x est incluse dans toute boule de centre x de rayon plus grand). On a également :

$$V \in \mathcal{V}(x) \text{ et } W \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{V}(x)$$

car V contient un ouvert O possédant x, W contient un ouvert U possédant x, et $O \cap U$ est un ouvert possédant x contenu dans $V \cap W$.
On dit que x admet une **base de voisinages** $(V_i)_{i\in I}$ si chaque V_i est un voisinage de x et si, pour tout voisinage W de x, il existe $i \in I$ tel que $V_i \subset W$. Dans un espace métrique, les boules

$B(x, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbf{N}^*$, forment une base **dénombrable** de voisinages, mais dans un espace topologique quelconque, il n'est pas certain qu'un point admette une base dénombrable de voisinages. Cela aura pour conséquence de limiter l'utilisation des suites convergentes.

Soit A une partie de E et x un élément de E. On dit que x est un **point intérieur** à A si :

$$\exists V \in \mathcal{V}(x),\ V \subset A.$$

Comme V contient U ouvert possédant x, on a $U \in \mathcal{V}(x)$ et $U \subset A$, donc on peut supposer, quitte à prendre V = U, que le voisinage utilisé est ouvert.
On dit que x est un **point adhérent** à A si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \varnothing$$

On appelle **intérieur** de A, noté $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A, et **adhérence** de A, notée $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A. Une partie A est **dense** dans E si $\overline{A} = E$. On appelle **frontière** de A la partie $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

E est dit **séparé** si deux points distincts sont inclus dans deux voisinages disjoints :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x),\ \exists W \in \mathcal{V}(y),\ V \cap W = \varnothing$$

Comme on le voit dans les définitions précédentes et comme on le verra dans la suite, les voisinages jouent dans un espace topologique un rôle comparable à celui joué par les boules dans un espace métrique.

PROPOSITION

(i) O *est ouvert si et seulement si c'est un voisinage de chacun de ses points.*
(ii) F *est fermé si et seulement si tout point adhérent à* F *appartient à* F.

Démonstration :
❑ (i) : Si O est ouvert et si $x \in O$, alors O est un voisinage de x, puisqu'il contient l'ouvert O contenant x. Réciproquement, si O est un voisinage de chacun de ses points, alors (en notant ^{c} le complémentaire) :

$$\exists V_x \in \mathcal{V}(x),\ V_x \subset F^c = O \text{ et on peut supposer } V_x \text{ ouvert.}$$

Il en résulte que O est ouvert car $O = \bigcup_{x \in O} V_x$ est une réunion d'ouverts.
❑ (ii) : Soit F fermé, complémentaire de l'ouvert O et soit x adhérent à F. Alors :

$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap F \neq \varnothing$
donc $\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \not\subset F^c$
donc $\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \not\subset O$
donc x n'est pas intérieur à O
donc $x \notin O$ (car O étant ouvert tout élément de O est intérieur à O)
donc $x \in F$.

Réciproquement, soit F une partie telle que tout élément adhérent à F appartienne à F. Montrons que $O = F^c$ est un ouvert. Soit $x \in O$. On a alors :

$x \notin F$

donc x n'est pas adhérent à F

donc $\exists$ V $\in \mathcal{V}(x)$, V $\cap$ F = $\varnothing$

donc $\exists\, V_x \in \mathcal{V}(x)$, $V_x \subset F^c = O$

O est donc un voisinage de chacun de ses points x, donc O est ouvert.

EXEMPLES :

❑ Dans tout espace métrique, la famille des boules $(B(x, r))_{x\in E, r>0}$ constitue une base d'ouverts, puisque, pour tout ouvert U et tout x de U, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. U est alors réunion de ces $B(x, r)$, lorsque x décrit U.

❑ Dans $\mathbf{R}$ muni de la topologie usuelle, les intervalles $]a, b[$ forment une base d'ouverts. Tout ouvert U est la réunion des $]a, b[$ qu'il contient.

❑ La **topologie discrète** sur E est la topologie pour laquelle $\mathcal{T}$ est constituée de toutes les parties de E. Elle est identique à la topologie définie par la distance discrète (Voir L3/METRIQUE.PDF).

❑ La **topologie grossière** sur E est la topologie pour laquelle $\mathcal{T} = \{\varnothing, E\}$. Elle n'est pas séparée si E possède au moins deux éléments. Cette topologie ne permet de distinguer aucun élément d'un autre, tout voisinage de l'un contenant l'autre, puisque ce voisinage n'est autre que E.

❑ On a défini les ouverts de la droite de Sorgenfrey comme les parties réunions quelconques d'intervalles $[a, b[$. Ces intervalles constituent donc une base d'ouverts pour la topologie de la droite de Sorgenfrey. On pourra vérifier que les ouverts vérifient les axiomes voulus. Pour cette topologie, l'intérieur de $[a, b]$ est $[a, b[$. L'adhérence de $]a, b[$ est $[a, b[$. Comme voisinage d'un élément a, on peut prendre un ouvert $[a, b[$, $b > a$. Tout a admet une base dénombrable de voisinages, à savoir les $[a, a + \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbf{N}^*$.

❑ Dans $\mathbf{Z}$, pour tout d non nul, et tout r, posons $U_{dr} = \{dn + r \mid n \in \mathbf{Z}\}$. U_{dr} est l'ensemble des entiers congrus à r modulo d. Utilisons les U_{dr} pour définir une topologie particulière sur $\mathbf{Z}$. Appelons ouvert une réunion quelconque des U_{dr}. Il obtient bien d'une topologie car $\mathbf{Z} = U_{10}$ est ouvert, $\varnothing$ est la réunion vide des U_{dr} donc est ouvert. Une réunion d'ouverts est un ouvert, comme réunion de réunion des U_{dr}. En ce qui concerne l'intersection finie, il suffit de montrer que l'intersection de deux ouverts est un ouvert, et par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, que l'intersection de deux parties U_{dr} et U_{cs} est un ouvert. C'est le cas si cette intersection est vide, et, dans le cas contraire, soit $y \in U_{dr} \cap U_{cs}$. Soit m = PPCM(c, d). On vérifiera que $U_{dr} \cap U_{cs} = U_{my}$ donc est un ouvert. Les ouverts U_{dr} sont aussi des fermés. En effet :

$$\mathbf{Z} \setminus U_{dr} = \bigcup_{k=1}^{d-1} U_{d,r+k} \qquad \text{est un ouvert}$$

Considérons maintenant $\mathbf{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ premier}} U_{p0}$, l'ensemble des entiers multiples d'au moins un nombre premier p. $\{-1, 1\}$ n'est pas ouvert car tout ouvert non vide contient au moins un U_{dr}, ensemble infini. Donc $\mathbf{Z} \setminus \{-1, 1\}$ n'est pas fermé. Par conséquent, il ne peut être réunion d'un nombre fini de fermé U_{p0}. Cela signifie que les U_{p0} sont en nombre infini. On a prouvé que l'ensemble des nombres premiers est infini (**preuve de Furstenberg**, dont on a donné une version plus élémentaire dans L1/ARITHMTQ.PDF).

PROPOSITION

(i) *Pour toute partie* A *de* E, $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$ *et* $(\overline{A})^c = (\overset{\circ}{A^c})$

(ii) $\mathring{A}$ *est le plus grand ouvert contenu dans* A

(iii) $\overline{A}$ *est le plus petit fermé contenant* A

(iv) $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : Pour tout x :

$$x \in (\mathring{A})^c \Leftrightarrow x \notin \mathring{A} \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(x),\ V \not\subset A \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A^c \neq \varnothing \Leftrightarrow x \in \overline{A^c}$$

On vient de montrer que $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$.

Appliquons cette propriété à A^c. On obtient $(\overset{\circ}{A^c})^c = \overline{(A^c)^c} = \overline{A}$ donc $(\overset{\circ}{A^c}) = (\overline{A})^c$.

❑ (ii) : Montrons que $\mathring{A}$ est ouvert. Soit $x \in \mathring{A}$. $\exists\, V \in \mathcal{V}(x)$, $V \subset A$, et on peut supposer V ouvert. Tous les éléments de V sont intérieurs à A (prendre comme voisinage de chacun d'eux inclus dans A l'ouvert V lui-même). On a donc montré que : $\exists\, V \in \mathcal{V}(x)$, $V \subset \mathring{A}$. $\mathring{A}$ est donc un voisinage de chacun de ses points x, donc $\mathring{A}$ est ouvert.

Montrons que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A. Soit U un ouvert inclus dans A. Tout élément de U est intérieur à A puisque U lui-même est un voisinage de cet élément. Cette dernière phrase signifie précisément que $U \subset \mathring{A}$.

❑ (iii) : Appliquons (ii) à A^c. On a donc :

$(\overset{\circ}{A^c})$ ouvert et $\forall$ U ouvert, $U \subset A^c \Rightarrow U \subset (\overset{\circ}{A^c})$

En utilisant le (i), on obtient

$(\overline{A})^c$ est ouvert et $\forall$ U ouvert, $U \subset A^c \Rightarrow U \subset (\overline{A})^c$

ou encore

$\overline{A}$ est fermé et $\forall$ U ouvert, $U^c \supset A \Rightarrow U^c \supset \overline{A}$

ou enfin, tout fermé F étant le complémentaire d'un ouvert U,

$\overline{A}$ est fermé et $\forall$ F fermé, $F \supset A \Rightarrow F \supset \overline{A}$

Donc $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

❑ (iv) : $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \cap (\mathring{A})^c = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ en utilisant le (i).

EXEMPLES :

❑ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$ donc $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

❑ Dans $\mathbb{R}$ avec la topologie usuelle, la frontière de $[a, b[$ est $\{a, b\}$ puisque l'adhérence de cet intervalle est $[a, b]$ et son intérieur est $]a, b[$.

❑ Les ouverts de la droite de Sorgenfrey sont les parties réunions quelconques d'intervalles $[a, b[$. $[b, +\infty[$ est ouvert. $]-\infty, a[$ est ouvert. $]-\infty, a[\cup [b, +\infty[$ est ouvert comme réunion de deux ouverts. Son complémentaire $[a, b[$ est donc fermé. Les intervalles $[a, b[$ sont donc simultanément ouverts et fermés. Ils sont donc égaux à leur intérieur et leur adhérence. Leur frontière est vide.
❑ On a les équivalences suivantes :

$$\text{A est dense dans E} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E} \Leftrightarrow (\overline{\mathrm{A}})^c = \varnothing \Leftrightarrow \overset{\circ}{(\mathrm{A}^c)} = \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{A}^c \text{ est d'intérieur vide}$$

Soit E un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$. On dit que la topologie $\mathcal{T}$ est **plus fine** que la topologie $\mathcal{U}$ si tout ouvert de $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{T}$. Par passage au complémentaire, il en résulte que tout fermé de $\mathcal{U}$ est un fermé de $\mathcal{T}$.

EXEMPLE :
❑ La topologie de la droite de Sorgenfrey est plus fine que la topologie usuelle de la droite réelle. En effet, tout ouvert usuel de $\mathbb{R}$ est réunion d'intervalles $]a, b[$, eux-même réunions des $[a + \frac{1}{n}, b[$, $n \in \mathbb{N}^*$, qui sont des ouverts de la droite de Sorgenfrey. Donc tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de la droite de Sorgenfrey.

3- Convergence des suites

On dira qu'une suite (x_n) de $(\mathrm{E}, \mathcal{T})$ **converge** vers a si :

$$\forall \mathrm{V} \in \mathcal{V}(a), \exists \mathrm{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, x_n \in \mathrm{V}$$

et on note cette propriété $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

EXEMPLE :
❑ Dans la droite de Sorgenfrey, on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall b > a, \exists \mathrm{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, x_n \in [a, b[$. Cela exprime à la fois que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ au sens usuel dans $\mathbb{R}$, mais aussi $\exists \mathrm{N}, \forall n \geq \mathrm{N}, x_n \geq a$. C'est ce que nous avions noté $\operatorname{limvs}\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ plus haut. La topologie introduite ici permet donc de retrouver la notion de convergence par valeurs supérieures que nous avions alors introduite.

PROPOSITION
Soit A *une partie de* E *et* x *un élément de* E. *Considérons les deux propositions* :

(i) $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall x_n \in \mathrm{A}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

(ii) $x \in \overline{\mathrm{A}}$

On a (i) $\Rightarrow$ (ii). *On a* (ii) $\Rightarrow$ (i) *si* x *admet une base dénombrable de voisinages.*

On souligne que ces deux propriétés sont équivalentes dans les espaces métriques (la première s'appelant caractérisation séquentielles des fermés, obtenue à partir de la caractérisation séquentielle des points adhérents) mais qu'elles peuvent ne pas l'être dans les espaces topologiques.

Démonstration :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\exists$ N, $\forall n \geq N$, $x_n \in V$. On a donc x_N élément de $V \cap A$. On a prouvé que : $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{A}$

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons que x admette une base $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dénombrable de voisinages. Pour tout n, $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$ est un voisinage de x, donc, x étant adhérent à A, ce voisinage possède un élément x_n appartenant à A. Vérifions que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Soit V un voisinage de x. $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ formant une base de voisinages, $\exists$ N, $V_N \subset V$. A fortiori, pour $n \geq N$, $x_n \in V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n \subset V_N \subset V$, donc on a montré que : $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists$ N, $\forall n \geq N$, $x_n \in V$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

4- Limite et continuité

Dans le cas d'une fonction $f : D \subset E \to F$ où E et F sont des espaces métriques et D l'ensemble de définition de f, on a vu dans L3/METRIQUE.PDF que, a étant adhérent à D :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in B(a, \alpha) \cap D, f(x) \in B(l, \varepsilon)$$

Comme $B(l, \varepsilon)$ est un voisinage de l et que tout voisinage W de l contient une telle boule, on peut réécrire cette définition sous la forme :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}(l), \exists \alpha > 0, \forall x \in B(a, \alpha) \cap D, f(x) \in W$$

ou encore :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}(l), \exists \alpha > 0, \forall x \in B(a, \alpha) \cap D, x \in f^{-1}(W)$$

$$\Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}(l), \exists \alpha > 0, B(a, \alpha) \cap D \subset f^{-1}(W)$$

Comme $B(a, \alpha) \cap D$ est un voisinage de a dans l'espace métrique D, on peut écrire :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{V}(l), f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_D(a)$$

où $\mathcal{V}_D(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a dans D. Un tel voisinage est défini comme l'intersection avec D d'un voisinage de a dans E. Dans un espace topologique, nous prendrons cette dernière phrase comme définition de la **limite** :

DEFINITION

Soit $f : D \subset E \to F$ *une fonction dont l'ensemble de définition est* D, a *un élément de* E *adhérent à* D, l *un élément de* F. *On dit que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ *si :*

$$\forall W \in \mathcal{V}(l), f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_D(a)$$

EXEMPLE :

❑ Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. On prend ici $D = \mathbf{R}^*$, $a = 0$, $l = 1$. Si $W =]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$, $f^{-1}(W)$ désigne ici $\{x \in D \mid 1 - \varepsilon < \dfrac{\sin(x)}{x} < 1 + \varepsilon\}$.

L'égalité des accroissements finis permet d'écrire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$, $\dfrac{\sin(x)}{x} = \cos(\theta x)$. Si on prend x entre $-\pi$ et π, $\cos(\theta x)$ est compris entre $\cos(x)$ et 1. Donc $1 \geq \dfrac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$ et l'inégalité $1 - \varepsilon < \dfrac{\sin(x)}{x} < 1 + \varepsilon$ est vérifiée dès que $1 - \varepsilon < \cos(x)$. Ainsi $f^{-1}(W)$ contient l'ensemble $\{x \in D \mid 1 - \varepsilon < \cos(x)\}$. Ce dernier ensemble contient $]-\arccos(1-\varepsilon), \arccos(1-\varepsilon)[\cap D$ qui est un voisinage de 0 dans D. La propriété topologique énoncée reproduit bien le fait banal que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Si a appartient à D, et si F est séparé, on doit avoir $l = f(a)$, car, par l'absurde, si $l \neq f(a)$, on prend W voisinage de l et U voisinage de $f(a)$ disjoint de W. Alors a doit appartenir à $f^{-1}(W)$, donc $f(a)$ doit appartenir à W, ce qui conduit à une contradiction puisqu'on a supposé $f(a) \in U$ et $U \cap W = \varnothing$. Comme dans le cas métrique, on dit que f est **continue** en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et que f est continue sur E si f est continue en tout point a de E.

PROPOSITION

Il y a équivalence entre :

(i) *f est continue sur* E

(ii) $\forall$ O *ouvert de* F, $f^{-1}(O)$ *est un ouvert de* E

(iii) $\forall$ A *fermé de* F, $f^{-1}(A)$ *est un fermé de* E

<u>Démonstration</u> :

On suppose ici que le domaine de définition D de f est E lui-même.

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons f continue. Soit O ouvert de F et $a \in f^{-1}(O)$. On a donc $f(a) \in O$, et comme O est ouvert, O est un voisinage de $f(a)$. Comme f est continue en a, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et donc $f^{-1}(O) \in \mathcal{V}(a)$. Ainsi, $f^{-1}(O)$ est un voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert.

❑ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : L'équivalence repose sur le fait que le complémentaire d'un fermé est un ouvert et le fait que, pour toute partie A de F, $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$. En effet, les éléments x de ces deux parties vérifient exactement $f(x) \notin A$. (iii) $\Rightarrow$ (ii) se montre par exemple comme suit. Soit O ouvert de F. Alors O^c est un fermé de F donc $f^{-1}(O^c)$ est un fermé de E d'après (iii), donc $f^{-1}(O)^c$ est un fermé de E, donc $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E. On montre de même (ii) $\Rightarrow$ (iii)

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit $a \in E$. Montrons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Soit W un voisinage de $f(a)$. Il contient un ouvert U qui possède $f(a)$. $f^{-1}(U)$ est alors un ouvert qui possède a. $f^{-1}(U)$ est contenu dans $f^{-1}(W)$. Donc $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a.

Dans la pratique, il suffit de vérifier (ii) pour une base d'ouverts, en s'appuyant que la propriété suivante : pour toute famille de partie $(A_i)_{i \in I}$ de F, on a $f^{-1}(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(A_i)$.

$$x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists\, i,\ f(x) \in A_i \Leftrightarrow \exists\, i,\ x \in f^{-1}(A_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

Rappelons en cas de besoin qu'on a également $\bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcap\limits_{i\in I} A_i)$ car :

$$x \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall\, i,\ f(x) \in A_i \Leftrightarrow \forall\, i,\ x \in f^{-1}(A_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

EXEMPLES :

❑ Dans $\mathbf{R}$, $f : x \to x + \sin(x)$ est continue donc $\{x \mid x + \sin(x) > 3\}$ est un ouvert. En effet, il s'agit de l'image réciproque par f de l'ouvert $O =]3, +\infty[$.

❑ Désignons par $\mathbf{S}$ la droite de Sorgenfrey dont une base d'ouverts est donnée par les intervalles $[a, b[$. $\mathbf{R}$ est par ailleurs muni de sa topologie usuelle. L'application Identité : $\mathbf{S} \to \mathbf{R}$ est continue puisque tout $]a, b[$, ouvert de $\mathbf{R}$ est un ouvert de $\mathbf{S}$. Mais l'application Identité : $\mathbf{R} \to \mathbf{S}$ n'est pas continue car $[a, b[$ ouvert de $\mathbf{S}$ n'est pas un ouvert de $\mathbf{R}$. Par exemple, la suite $(-\dfrac{1}{n})$ converge vers 0 dans $\mathbf{R}$, mais ne converge pas dans $\mathbf{S}$.

❑ Soit E un espace muni de deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$. On a les équivalences suivantes :

la topologie $\mathcal{T}$ est **plus fine** que la topologie $\mathcal{U}$

$\Leftrightarrow$ tout ouvert de $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{T}$

$\Leftrightarrow$ l'application Id : $(E, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{U})$ est continue

PROPOSITION

Si $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *sont continues, alors* $g \circ f : E \to G$ *est continue.*

Démonstration :

❑ Pour tout ouvert O de G, on a $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$. En effet :

$$x \in (g \circ f)^{-1}(O) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in O \Leftrightarrow g(f(x)) \in O \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(O) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(O))$$

$g^{-1}(O)$ est un ouvert de F car g est continue. Donc $f^{-1}(g^{-1}(O))$ est un ouvert de E car f est continue.

$f : E \to F$ est un **homéomorphisme** si f est bijective, continue et si f^{-1} est continue. Il résulte de la proposition précédente qu'une bijection f est un homéomorphisme si et seulement si f transforme tout ouvert (respectivement fermé) de E en un ouvert (respectivement fermé) de F et f^{-1} transforme tout ouvert (respectivement fermé) de F en un ouvert (respectivement fermé) de E. Il existe alors une correspondance parfaite entre les deux espaces pour toutes les notions topologiques (voisinages, intérieur, adhérence), et les deux espaces sont indiscernables sur le plan topologique.

EXEMPLES :

❑ Soit d la distance sur $\mathbf{R}$ définie par : $d(x, y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$. Alors Id : $(\mathbf{R}, |\ |) \to (\mathbf{R}, d)$ est un homéomorphisme. En effet, dans les deux espaces, les ouverts sont les mêmes, réunion d'intervalles ouverts $]a, b[$.

❑ Soit d la distance sur la droite achevée $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ définie par : $d(x, y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$ avec la convention $\arctan(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\arctan(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$. Alors tan : $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], |\ |) \to (\overline{\mathbb{R}}, d)$ est un homéomorphisme. La correspondance entre les ouverts des deux espaces se faisant comme suit :

$$]a, b[\quad \leftrightarrow \quad]\tan(a), \tan(b)[$$

$$[-\frac{\pi}{2}, b[\quad \leftrightarrow \quad [-\infty, \tan(b)[$$

$$]a, \frac{\pi}{2}] \quad \leftrightarrow \quad]\tan(a), +\infty]$$

Ainsi, sur le plan topologique, la droite achevée ne se distingue pas d'un segment de $\mathbb{R}$.

❑ $\mathbb{Z}$ muni de la distance usuelle est homéomorphe à $\mathbb{Z}$ muni de la distance discrète, par l'intermédiaire de l'application identique. Les deux espaces admettent les singletons comme base d'ouverts.

II : Topologies usuelles

1- Topologie définie par une prébase

Soit E un ensemble non vide et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties. Cette famille permet d'engendrer une topologie $\mathcal{T}$, la moins fine parmi celles contenant tous les A_i. Si les A_i doivent y former des ouverts, il devra en être de même des $B_J = \bigcap_{i\in J} A_i$ pour toute partie finie $I \subset J$. Il suffit alors de définir $\mathcal{T}$ en prenant la famille des B_J comme base d'ouverts. On dira que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une **prébase** de $\mathcal{T}$.

EXEMPLE :

❑ Dans $\mathbb{R}$, la famille des intervalles $]-\infty, a[$ et $]b, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, forme une prébase d'ouverts pour la topologie usuelle.

2- Définition d'une topologie initiale et finale

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et F un ensemble non vide. On considère une (ou plusieurs applications, en nombre fini ou infini) $f : E \to F$ et on souhaite définir une topologie $\mathcal{V}$ sur Fde façon que f soit continue. Il suffirait de prendre la topologie grossière $\mathcal{V} = \{\emptyset, F\}$ puisque $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$ sont des ouverts de E, mais cela ne présenterait pas d'intérêt. Remarquons que, si on dispose de deux topologies $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ telles que $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'$ ($\mathcal{V}'$ est plus fine que $\mathcal{V}$) et si f est continue pour la topologie $\mathcal{V}'$, alors elle l'est également pour la topologie $\mathcal{V}$. Il est donc intéressant de choisir la topologie **la plus fine** rendant f continue. Une partie O de F sera ouverte si et seulement si $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E. On définit bien ainsi une topologie sur F dite **topologie finale**. En effet :

$\emptyset$ et F sont des ouverts de F car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(F) = E$ sont des ouverts de E.

Si $(O_i)_{i\in I}$ sont des ouverts de F, alors pour tout i, $f^{-1}(O_i)$ est un ouvert de E, donc $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$ est un ouvert de E, mais $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i)$, donc $\bigcup_{i\in I} O_i$ est un ouvert de F.

Si $(O_i)_{i\in I}$ sont des ouverts de F avec I fini, alors pour tout i, $f^{-1}(O_i)$ est un ouvert de E, donc $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(O_i)$ est un ouvert de E, mais $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(O_i) = f^{-1}(\bigcap_{i\in I} O_i)$, donc $\bigcap_{i\in I} O_i$ est un ouvert de F.

Inversement, soit (F, $\mathcal{U}$) un espace topologique et E un ensemble quelconque. Soit f : E $\rightarrow$ F une (ou plusieurs) applications. On souhaite définir sur E une topologie rendant f continue. Il suffirait de prendre la topologie discrète puisque, pour toute partie (ouverte) A de F, f^{-1}(A) est un ouvert de la topologie discrète, mais cela ne présenterait pas d'intérêt. Si on dispose de deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ telles que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ et si f est continue pour la topologie $\mathcal{T}$, alors elle l'est également pour la topologie $\mathcal{T}'$. Il est donc intéressant de choisir ici la topologie **la moins fine** rendant f continue. Une partie U de E sera ouverte si et seulement si il existe O ouvert de F tel que U = f^{-1}(O). On définit bien une topologie sur E dite **topologie initiale**. En effet :

∅ et E sont des ouverts de E car ∅ = f^{-1}(∅) et E = f^{-1}(F), avec ∅ et F ouverts de F.

Si $(U_i)_{i \in I}$ sont des ouverts de E, alors pour tout i, il existe O_i ouvert de F tel que $U_i = f^{-1}(O_i)$, donc $\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i)$, avec $\bigcup_{i\in I} O_i$ ouvert de F, donc $\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert de E.

Si $(U_i)_{i \in I}$ sont des ouverts de E avec I finie, alors pour tout i, il existe O_i ouvert de F tel que $U_i = f^{-1}(O_i)$, donc $\bigcap_{i\in I} U_i = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(O_i) = f^{-1}(\bigcap_{i\in I} O_i)$, avec $\bigcap_{i\in I} O_i$ ouvert de F, donc $\bigcap_{i\in I} U_i$ est un ouvert de E.

C'est ce que nous appliquerons dans les paragraphes qui suivent.

3- Topologie induite

Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On peut restreindre d à A, faisant de (A, d) un espace métrique. Pour $x \in$ A et $\varepsilon > 0$, la boule de centre x de rayon ε dans A n'est autre que :

$\{y \in A \mid d(x, y) < \varepsilon\} = B(x, \varepsilon) \cap A$

où B(x, ε) est la boule usuelle dans E. Un ouvert O de A est une réunion de telles boules :

$$O = \bigcup (B(x, \varepsilon) \cap A) \qquad \text{pour une certaine famille de } x \text{ et de } \varepsilon$$

$$= (\bigcup B(x, \varepsilon)) \cap A$$

Mais $\bigcup B(x, \varepsilon)$ est un ouvert de E. Tout ouvert de A est donc l'intersection d'un ouvert de E et de A. Inversement, l'intersection de tout ouvert de E (réunion de boules de E) avec A donnera une réunion de boules de A, donc un ouvert de A.

Cela permet de définir une **topologie induite** sur A par celle de E, espace topologique quelconque, sans recours à la notion de distance, en posant :

DEFINITION

Une partie U *de* A *est un ouvert de* A *si et seulement si il existe* O *ouvert de* E *tel que* U = O ∩ A.

Il n'est pas difficile de vérifier qu'on définit bien ainsi une topologie sur A. On pourra également vérifier que c'est la topologie initiale rendant continue l'injection canonique :

$$\begin{aligned} i : A &\rightarrow (E, \mathcal{T}) \\ x &\rightarrow x \end{aligned}$$

En effet :

U est ouvert de A

$\Leftrightarrow$ $\exists$ O ouvert de E, U = O $\cap$ A

$\Leftrightarrow$ $\exists$ O ouvert de E, U = $\{x \in A \mid x = i(x) \in O\}$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ O ouvert de E, U = $i^{-1}(O)$

PROPOSITION

Un voisinage d'un élément x de A *pour la topologie induite est de la forme* V $\cap$ A, *où* V *est un voisinage de x dans* E.

Démonstration :

❑ En effet, un voisinage de x pour la topologie induite doit contenir un ouvert contenant x pour la topologie induite, donc être de la forme O $\cap$ A, avec O ouvert de E contenant x et donc voisinage de x dans E.

Réciproquement, une partie de la forme V $\cap$ A avec V voisinage de x dans E contient une partie O $\cap$ A, avec O ouvert de E contenant x et incluse dans V. Cette partie est un ouvert de A pour la topologie induite contenant x, donc V $\cap$ A est bien un voisinage de x pour la topologie induite sur A.

4- Topologie produit

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. L'ensemble $\prod\limits_{i\in I} E_i$ est l'ensembles des $(x_i)_{i\in I}$ tels que, pour tout i, $x_i \in E_i$. Pour chaque j élément de I, on peut définir la projection π_j :

$$\pi_j : \prod_{i\in I} E_i \to E_j$$

$$(x_i)_{i\in I} \to x_j$$

Pour chaque j, on peut alors définir sur $\prod\limits_{i\in I} E_i$ la topologie initiale rendant continue π_j. Ses ouverts sont de la forme $\pi_j^{-1}(O_j)$, O_j ouvert de E_j. On a $\pi_j^{-1}(O_j) = O_j \times \prod\limits_{i\neq j} E_i$. La topologie $\mathcal{T}$ initiale rendant simultanément toutes les π_j continues est la topologie la moins fine contenant tous les $O_j \times \prod\limits_{i\neq j} E_i$. C'est celle pour laquelle les $O_j \times \prod\limits_{i\neq j} E_i$ forment une prébase. Une base de $\mathcal{T}$ est constituée d'une intersection finie de ces parties. Une telle intersection est de la forme $\prod\limits_{j\in J} O_j \times \prod\limits_{i\notin J} E_i$, pour toute partie finie $J \subset I$ et tout ouvert O_j de E_j. Un ouvert quelconque élément de $\mathcal{T}$ est une réunion quelconque de $\prod\limits_{j\in J} O_j \times \prod\limits_{i\notin J} E_i$, J fini. On dit que $\mathcal{T}$ est la **topologie produit** des E_i.

EXEMPLES :

❑ Soit $I = \mathbb{N}$, et pour tout $i \in I$, $E_i = [0, 1]$. L'ensemble $\prod_{i \in I} E_i$ se note $\prod_{n=0}^{\infty} [0, 1]$ ou $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ et s'appelle le **cube de Hilbert**. Les éléments de cet ensemble sont les suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, x_n étant élément de [0, 1] pour tout n. Montrons qu'il existe une distance d sur cet ensemble qui donne exactement la même topologie que la topologie produit. On dit que la topologie de cet espace est **métrisable**. Pour tout $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$, posons :

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

La série converge car la suite $(|x_n - y_n|)$ est bornée. On vérifie aisément que d est une distance.

Soit O un ouvert de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ pour la topologie produit et $x = (x_n) \in O$. O est un voisinage de x donc il existe N et des voisinages $O_0, O_1, \ldots, O_N$ de $x_0, x_1, \ldots, x_N$ tels que :

$$x \in O_0 \times O_1 \times \ldots \times O_N \times \prod_{n=N+1}^{\infty} [0, 1[\subset O$$

On peut choisir ces voisinages de la forme $]x_n - r, x_n + r[\cap [0, 1]$ avec r suffisamment petit. Ainsi :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists r > 0, \forall n \le N, (]x_n - r, x_n + r[\cap [0, 1]) \subset O_n$$

Montrons que $B(x, \frac{r}{2^N}) \subset O$, où $B(x, \frac{r}{2^N})$ est une boule pour la distance d. Soit $y \in B(x, \frac{r}{2^N})$. Alors, pour tout $n \le N$, on a :

$$\frac{|x_n - y_n|}{2^n} \le d(x, y) < \frac{r}{2^N}$$

donc $|x_n - y_n| < \frac{r}{2^{N-n}} \le r$

donc $y_n \in]x_n - r, x_n + r[\cap [0, 1] \subset O_n$

donc $y \in O_0 \times O_1 \times \ldots \times O_N \times \prod_{n=N+1}^{\infty} [0, 1[\subset O$

On a montré que tout voisinage de x pour la topologie produit est un voisinage de x pour la distance d.

Réciproquement, soit $B(x, R)$ un voisinage de x pour la distance d. Soit N tel que $\frac{1}{2^N} < \frac{R}{2}$ et soit $r = \frac{R}{4}$. Soit $O = \prod_{n=0}^{N} (]x_n - r, x_n + r[\cap [0, 1]) \times \prod_{n=N+1}^{\infty} [0, 1]$. Montrons que $O \subset B(x, R)$. Pour tout $y \in O$, on a :

$$\forall n \le N, |x_n - y_n| < r = \frac{R}{4}$$

et $\forall n > N, |x_n - y_n| \le 1$

donc $d(x, y) = \sum_{n=0}^{N} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} < \frac{R}{4} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{R}{4} \times 2 + \frac{1}{2^N} < \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$

On a montré que tout voisinage de x pour la distance d est un voisinage de x pour la topologie produit.
Les deux topologies, ayant les mêmes voisinages pour tout point, ont les mêmes ouverts.

❑ Soit $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Une fonction f peut être vue comme un élément de la forme $f = (f(x))_{x\in\mathbf{R}}$, de sorte que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ peut être vu comme le produit $\prod_{i\in I} E_i$, avec $I = \mathbf{R}$, et $E_i = \mathbf{R}$ pour tout i. Un voisinage de la fonction identiquement nulle contient alors un ouvert de la forme $O = \prod_{x\in J}]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[\times \prod_{x\notin J} \mathbf{R}$ pour une famille finie J de x pour lesquels $\varepsilon_x > 0$. On notera également :

$$O = \prod_{x\in J}]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[\times \mathbf{R}^{\mathbf{R}-J}$$

Dans ce contexte, la topologie produit est aussi appelée **topologie de la convergence simple**. En effet, dire qu'une suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0, c'est dire que :

$$\forall x, \forall \varepsilon_x > 0, \exists N_x, \forall n \geq N_x, f_n(x) \in]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[$$

donc pour toute partie **finie** J de $\mathbf{R}$, $\exists N = \text{Max}(N_x, x \in J), \forall x \in J, \forall n \geq N, f_n(x) \in]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[$

donc $\exists N, \forall n \geq N, f_n \in O$ où $O = \prod_{x\in J}]-\varepsilon_x, \varepsilon_x[\times \mathbf{R}^{\mathbf{R}-J}$, ouvert pour la topologie produit.

Réciproquement, si $\forall$ O ouvert, $\exists N, \forall n \geq N, f_n \in O$, alors en prenant pour chaque x réel et chaque $\varepsilon > 0$, l'ouvert $O =]-\varepsilon, \varepsilon[\times \prod_{y\neq x} \mathbf{R}$, on aura :

$$\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, f_n(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
Cette topologie n'est pas métrisable (voir les exercices).

❑ Le produit de deux espaces vectoriels normés (E, N_E) et (F, N_F) est un espace vectoriel normé. Une base d'ouverts est donnée par les produits $B_E \times B_F$ d'une boule quelconque de E par une boule quelconque de F. Des normes équivalentes sur $E \times F$ sont données par :

$$(x, y) \in E \times F \to N_E(x) + N_F(y)$$

ou bien par

$$(x, y) \in E \times F \to \text{Max}\,\{N_E(x), N_F(y)\}$$

ou bien par toute expression de la forme :

$$(x, y) \in E \times F \to \| (N_E(x), N_F(y)) \|$$

où $\| \ \|$ est une norme quelconque sur $\mathbf{R}^2$. L'équivalence des normes ainsi définies sur $E \times F$ résulte de l'équivalence des normes sur $\mathbf{R}^2$.

PROPOSITION

Pour $i \in$ I, soit f_i une application d'un même un espace topologique F *dans* E_i. *On lui associe l'application* $f : F \to \prod_{i \in I} E_i$ *définie par* $f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$. *Alors f est continue si et seulement si, pour tout i, f_i est continue.*

Démonstration :

❑ On a $f_i = \pi_i \circ f$. Donc, puisque les π_i sont continues par construction de la topologie produit, si f est continue, les f_i le sont.

Réciproquement, supposons les f_i continues, et soit $\prod_{j \in J} O_j \times \prod_{i \notin J} E_i$, J fini $\subset$ I, un ouvert de $\prod_{i \in I} E_i$. Les f_j étant continues, on a, pour tout $j \in J$, $f_j^{-1}(O_j)$ ouvert. Donc :

$$f^{-1}\Big(\prod_{j \in J} O_j \times \prod_{i \notin J} E_i\Big) = \{x \mid \forall j \in J, f_j(x) \in O_j\} = \{x \mid \forall j \in J, x \in f_j^{-1}(O_j)\} = \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(O_j)$$

est un ouvert de F, ce qui prouve la continuité de f.

5- Topologie quotient

Soit E un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. Soit $\pi : E \to E/\mathcal{R}$ la projection canonique qui, à un élément x de E associe sa classe d'équivalence $\overline{x}$. On appelle **topologie quotient** la topologie finale sur $E/\mathcal{R}$ la plus fine rendant π continue. Ses ouverts sont les $O \subset E/\mathcal{R}$ tels que $\pi^{-1}(O)$ soit un ouvert U de E.

Un tel ouvert U est particulier. Si $x \in U$ et si $x \,\mathcal{R}\, y$, alors $\pi(x) = \pi(y)$, et comme $\pi(x) \in O$, alors $\pi(y) \in O$ et donc $y \in \pi^{-1}(O) = U$. Ainsi, $x \in U$ et $x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow y \in U$. On dit que U est un ouvert **saturé** pour la relation $\mathcal{R}$. Une partie saturée peut aussi être vue comme réunion de classes d'équivalence.

Inversement, toute partie U saturée est l'image réciproque par π d'une partie de $E/\mathcal{R}$. Posons en effet $O = \pi(U)$ et vérifions que $U = \pi^{-1}(O)$:

si $x \in U$, alors $\pi(x) \in \pi(U) = O$, donc $x \in \pi^{-1}(O)$

si $x \in \pi^{-1}(O)$, alors $\pi(x) \in O = \pi(U)$, donc $\exists\, y \in U$, $\pi(x) = \pi(y)$, donc $x \,\mathcal{R}\, y$, et comme U est saturé pour $\mathcal{R}$, $x \in U$.

Si U est ouvert saturé de E, $O = \pi(U)$ sera donc un ouvert de $E/\mathcal{R}$. Ainsi, on établit une bijection entre les ouverts O de $E/\mathcal{R}$ et les ouverts U saturés de E :

$$U = \pi^{-1}(O) \qquad\qquad O = \pi(U)$$

Par définition de la topologie quotient, O est ouvert si et seulement si U est ouvert.

Soit maintenant $f : E \to F$ une application compatible avec la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E, i.e. :

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

La condition précédente indique que la valeur de $f(x)$ ne dépend que de la classe $\overline{x}$ de x, et on peut alors définir une application $\overline{f} : E/\mathcal{R} \to F$ en posant $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$.

PROPOSITION

Sous les hypothèses précédentes, f est continue si et seulement si $\overline{f}$ *est continue.*

Démonstration :

❑ On a $f = \overline{f} \circ \pi$. Donc π étant continue par construction de la topologie quotient, si $\overline{f}$ est continue, alors f est continue par composition de fonctions continues.

Réciproquement, supposons f continue et soit O ouvert de F. Montrons que $\overline{f}^{-1}(\mathrm{O})$ est un ouvert de $E/\mathcal{R}$. Il suffit pour cela de vérifier que $U = \pi^{-1}(\overline{f}^{-1}(\mathrm{O}))$ est un ouvert de E. Mais :

$$\pi^{-1}(\overline{f}^{-1}(\mathrm{O})) = (\overline{f} \circ \pi)^{-1}(\mathrm{O}) = f^{-1}(\mathrm{O})$$

C'est bien un ouvert de E puisque O est ouvert et f continue.

EXEMPLES :

❑ Sur $\mathbb{R}$, soit la relation d'équivalence $x \equiv y \bmod 1 \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = y + k \Leftrightarrow \lfloor x - y \rfloor = 0$ où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la partie entière. L'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalence $\overline{x} = \{x + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, et on peut choisir comme représentant particulier de $\overline{x}$ l'élément $x \in [0, 1[$.

Soit $\mathbb{U}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$ et considérons l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$$
$$x \to \exp(2i\pi x)$$

Cette application est continue. Par ailleurs, elle est compatible avec $\equiv$ puisque $\exp(2i\pi(x + k)) = \exp(2i\pi x)$. Elle passe donc au quotient :

$$\overline{f} : \overline{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \exp(2i\pi x) \in \mathbb{U}$$

L'application $\overline{f}$ est une bijection. En effet, elle est surjective, car, pour tout z de $\mathbb{U}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = f(x) = \overline{f}(\overline{x})$. Elle est injective car :

$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{y})$

$\Rightarrow \quad \exp(2i\pi x) = \exp(2i\pi y)$

$\Rightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z},\ 2i\pi x = 2i\pi y + 2ik\pi$

$\Rightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = y + k$

$\Rightarrow \quad x\, \mathcal{R}\, y$

$\Rightarrow \quad \overline{x} = \overline{y}$

Nous allons vérifier qu'il s'agit d'un homéomorphisme.

f étant continue, $\overline{f}$ l'est aussi, d'après la proposition précédente.

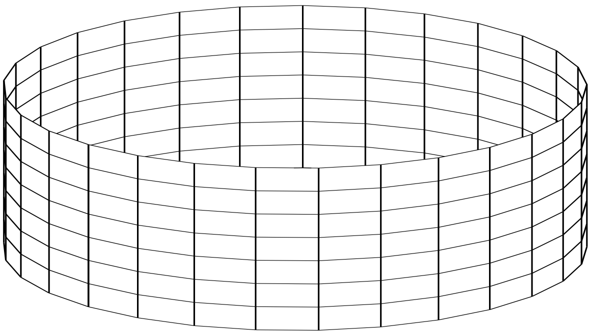
Pour montrer que $\overline{f}^{-1} : \mathbb{U} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est continue, il s'agit de montrer que, pour tout ouvert O de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, son image réciproque par $\overline{f}^{-1}$, donc son image directe par $\overline{f}$, est un ouvert de $\mathbb{U}$. Les ouverts O sont de la forme $\pi(U)$, avec U ouvert saturé de $\mathbb{R}$. Un tel ouvert saturé de $\mathbb{R}$ est réunion d'ouverts saturés de la forme $W = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]a + k, b + k[$, obtenu en translatant $]a, b[$ par un entier quelconque. On a alors :

$\overline{f}(O) = \overline{f}(\pi(U)) = f(U) = f(\bigcup W) = \bigcup f(W) = \bigcup f(]a, b[)$

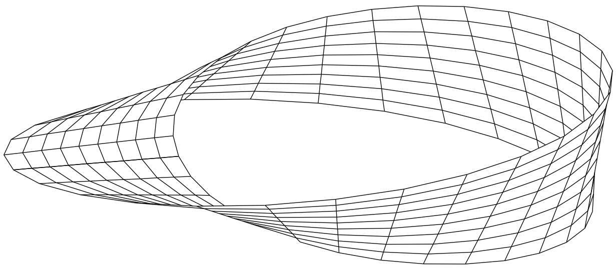
Or $f(]a, b[)$ est l'ensemble des z d'argument variant strictement entre $2\pi a$ et $2\pi b$. Il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{U}$, donc $\overline{f}(O) = \bigcup f(]a, b[)$ est aussi un ouvert de $\mathbb{U}$, et $\overline{f}^{-1}$ est continue.

Topologiquement, il n'y a pas de différence entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et un cercle. On l'obtient à partir de l'ensemble [0, 1] des représentants en identifiant les points 0 et 1, ou en courbant le segment [0, 1] de façon à coller 0 et 1 ensemble. Un voisinage dans l'ensemble quotient de 0 (ou de 1) ramené au segment initial contient la réunion $[0, \varepsilon[\cup]1 - \varepsilon, 1]$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Les voisinages des autres points sont les voisinages usuels. Cet ensemble est généralement désigné par le symbole S^1.

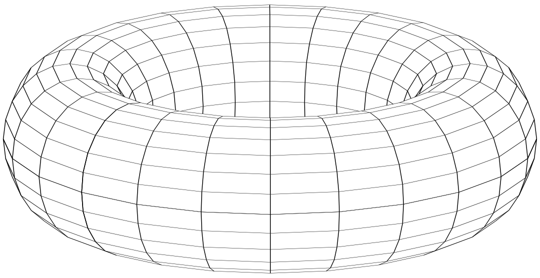
❑ Considérons le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ et, pour tout y élément de [0, 1], identifions d'un façon comparable à ce qui précède les points $(0, y)$ et $(1, y)$. L'ensemble quotient est un cylindre. Un voisinage de $(0, y)$ (ou de $(1, y)$) dans cet ensemble quotient contient un disque dont une moitié est à droite de $(0, y)$ et l'autre moitié à gauche de $(1, y)$. C'est le modèle d'un univers bidimensionnel dont une dimension se referme sur elle-même. Quand on quitte le carré par la droite, on réapparaît par la gauche.



❑ Considérons le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ et identifions d'une façon comparable à ce qui précède les points $(0, y)$ et $(1, 1 - y)$. L'ensemble quotient est un **ruban de Möbius**. Un voisinage de $(0, y)$ (ou de $(1, 1 - y)$) dans cet ensemble quotient contient un disque dont une moitié est à droite de $(0, y)$ et l'autre moitié à gauche de $(1, 1 - y)$. C'est le modèle d'un univers bidimensionnel dont une dimension se referme sur elle-même, mais quand on quitte le carré par la droite en bas, on réapparaît par la gauche en haut. En voici une représentation plongée dans $\mathbb{R}^3$, obtenue en effectuant une torsion du carré avant de coller les deux côtés opposés tête-bêche.

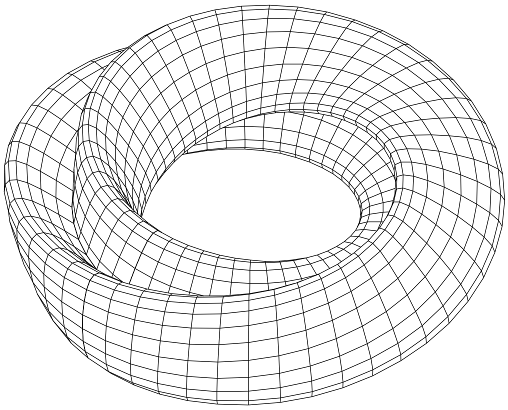


❑ Considérons le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ et identifions d'une part les points $(0, y)$ et $(1, y)$, et d'autre part les points $(x, 0)$ et $(x, 1)$. L'ensemble quotient est un **tore** T^2. C'est le modèle d'un univers bidimensionnel dont les deux dimensions se referment sur elles-mêmes. Quand on quitte le carré par la droite, on réapparaît à gauche, et quand on le quitte par le bas, on réapparaît en haut. En voici une représentation plongée dans $\mathbb{R}^3$.

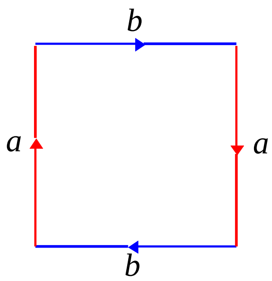


On peut aussi le voir comme le produit $S^1 \times S^1$. Plus généralement, le produit $S^1 \times ... \times S^1$ n fois s'appelle tore de dimension n, noté T^n. On peut aussi voir T^n comme l'ensemble quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

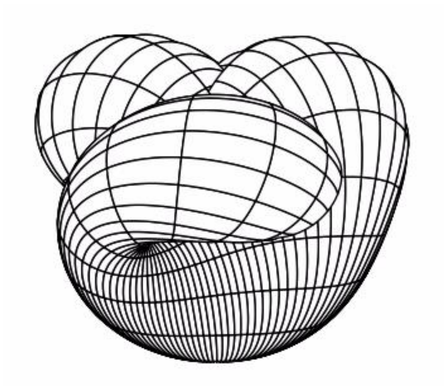
❑ Considérons le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ et identifions d'une part les points $(0, y)$ et $(1, y)$, et d'autre part les points $(x, 0)$ et $(1 - x, 1)$. L'ensemble quotient est une **bouteille de Klein**. On ne peut la représenter par une surface de $\mathbb{R}^3$ qu'en acceptant que cette surface se traverse.



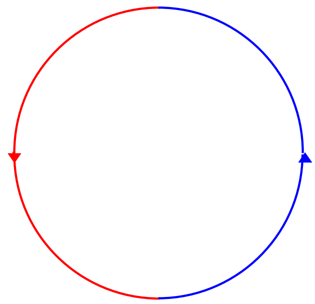
❑ Considérons le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ et identifions d'une part les points $(0, y)$ et $(1, 1 - y)$, et d'autre part les points $(x, 0)$ et $(1 - x, 1)$. L'ensemble quotient est le **plan projectif** $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ (ou $\mathbf{P}^2$ pour abrégéer) ou la **surface de Boy**. Ci-dessous, les deux côtés a du carré représentent le même segment du plan projectif et doivent être collés l'un à l'autre, dans le sens indiqué. Il en est de même des deux côtés b.



Comme pour la bouteille de Klein, on ne peut le représenter par une surface de $\mathbb{R}^3$ qu'en acceptant que cette surface se traverse.

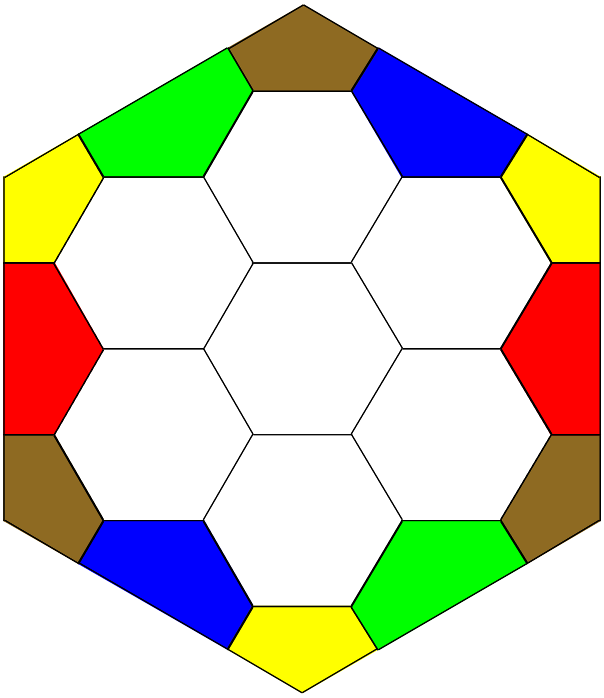


On peut aussi voir le plan projectif comme un disque (homéomorphe au carré) dont on identifie les couples de points de sa frontière diamétralement opposés. Cela revient à coller un demi-cercle de la frontière du disque à l'autre demi-cercle, dans le sens indiqué ci-dessous :

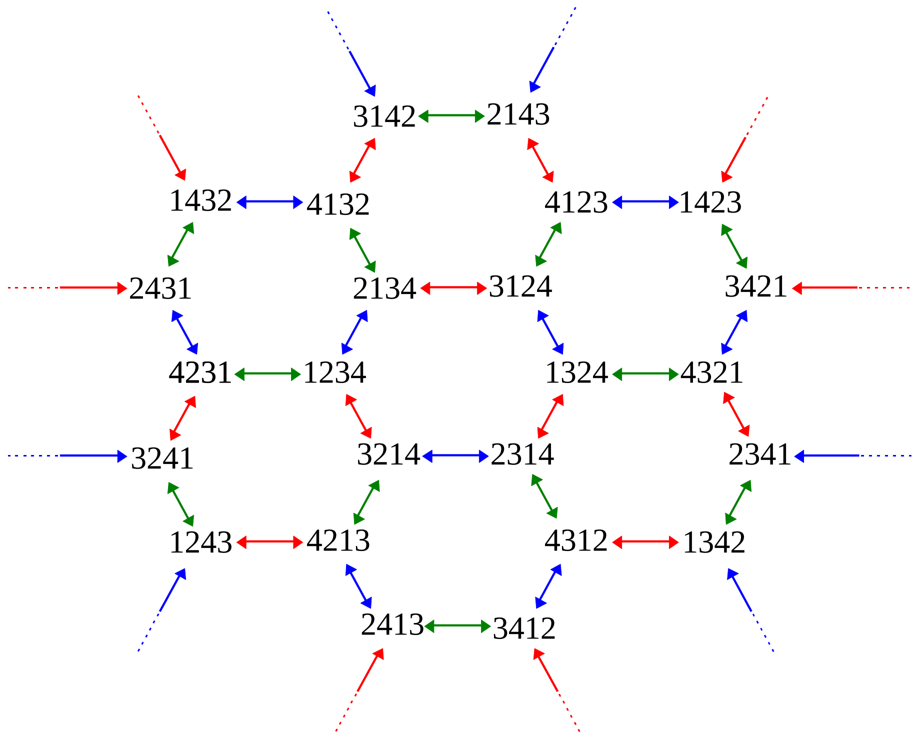


On peut aussi voir $\mathbf{P}^2$ comme le quotient de la sphère unité S^2 de $\mathbf{R}^3$ par la relation d'équivalence $\sim$ dont les classes d'équivalence sont $\{u, -u\}$, $u \in S^2$. En effet, l'hémisphère nord strict $\{(x, y, z), z > 0\}$ s'identifie à l'hémisphère sud $\{(x, y, z), z < 0\}$ et est homéomorphe au disque ouvert D du plan $\{(x, y), x^2 + y^2 < 1\}$. Quant à l'équateur de la sphère, elle correspond à la frontière Fr(D) de D où l'on identifie deux points diamétralement opposé. On retrouve donc la construction précédente. On peut aussi voir $\mathbf{P}^2$ comme le quotient de $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par : $u \mathcal{R} v \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, u = \lambda v$. En effet, on a $u \mathcal{R} \dfrac{u}{\| u \|}$ où $\| u \|$ est la norme euclidienne, donc on peut se ramener à des représentants éléments de S^2, et sur S^2, $\mathcal{R}$ et $\sim$ sont les mêmes relations.
Plus généralement, l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ est l'ensemble quotient de la sphère unité S^n de $\mathbf{R}^{n+1}$ (respectivement de $\mathbf{R}^{n+1}$) par la relation d'équivalence $\sim$ (respectivement $\mathcal{R}$) analogue à celle ci-dessus.

❑ Dans une démarche comparable aux précédentes, considérons un grand hexagone régulier dont on recolle deux à deux les côtés opposés. L'espace obtenu peut être divisé en 12 petits hexagones. Dans la figure ci-dessous, les parties de même couleur doivent être recollées bord à bord pour reconstituer les dits hexagones. Le petit hexagone jaune et le petit hexagone marron constituent chacun un voisinage d'un point de l'espace topologique issu du recollement de trois sommets du grand hexagone initial. Les trois petits hexagones bleu, vert et rouge constituent des voisinages de points issus du recollement des milieux de côtés opposés du grand hexagone initial. Il convient de comprendre qu'une fourmi qui se déplacerait dans un tel espace ne verrait qu'une suite d'hexagones réguliers sans distinction particulière d'un hexagone à l'autre.



Cet espace s'obtient naturellement quand on trace le **graphe de Cayley** du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ (groupe des permutations de 4 éléments), engendré par les transpositions τ = (1 2), (1 3), et (1 4). Ce graphe est constitué de 24 sommets représentant les éléments du groupe, une arête joignant un sommet φ à un sommet ψ s'il existe une des trois transpositions précédentes τ telle que $\varphi = \psi\tau$. Dans la figure ci-dessous, on a choisi les couleurs bleu, rouge, vert respectivement pour les produits par (1 2), (1 3) et (1 4). Le sommet dont la dénomination est un quadruplet *xyzt* est associée à la permutation qui envoie 1, 2, 3, 4 respectivement sur *x*, *y*, *z*, *t*. L'application d'une transposition (1 *u*), $u \in \{2, 3, 4\}$, à l'un des sommets permute les éléments du quadruplet situés aux rangs 1 et *u*. Les arêtes de même couleur et de direction opposée sont jointes l'une à l'autre :



La figure est constituée de 12 hexagones (dont les 5 qu'il faut recoller de bord à bord), $\dfrac{12 \times 6}{2} = 36$ arêtes et $\dfrac{36 \times 2}{3} = 24$ sommets.

❑ Si E est séparé, le quotient E/$\mathcal{R}$ ne l'est pas nécessairement. Considérons dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble E = {0, 1} × $\mathbb{R}$, réunion de deux droites parallèles, muni de la relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont : {(0, 0)}, {(1, 0)} et pour tout $x \neq 0$ {(0, x), (1, x)}. E/$\mathcal{R}$ peut être vu comme la droite réelle où l'on a dédoublé le point 0 en deux points distincs, 0_0 et 0_1 :

$$E/\mathcal{R} = \mathbb{R}^* \cup \{0_0\} \cup \{0_1\}$$

Une base de voisinages de x non nul est donné par les intervalles ouverts $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ inclus dans $\mathbb{R}^*$. Une base de voisinages de 0_0 est donnée par $\{0_0\} \cup]-\varepsilon, 0[\cup]0, \varepsilon[$, et une base de voisinages de 0_1 est donnée par $\{0_1\} \cup]-\varepsilon, 0[\cup]0, \varepsilon[$. 0_0 et 0_1 sont différents mais leurs voisinages se chevauchent nécessairement. Le même exemple montre que, si E est métrique, E/$\mathcal{R}$ ne l'est pas nécessairement, puisqu'un espace métrique est nécessairement séparé.

❑ Soit G un groupe et E un ensemble. On dit que G est un **groupe opérant** sur E s'il existe un morphisme de groupe de G dans l'ensemble des bijections sur E. Généralement, on désigne par la même lettre l'élément g de E et son image par le morphisme, de sorte que g est vue comme une application bijective de E dans E qui, à x élément de E, associe l'élément noté conventionnellement gx. Le fait d'avoir un morphisme se traduit par :

$\forall x \in E,\ ex = x$ où e est le neutre de G

$\forall x \in E,\ \forall (g, h) \in G,\ g(hx) = (gh)x$ ce qu'on notera ghx.

On peut alors définir une relation d'équivalence sur E, par : $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow \exists\, g \in G,\ y = gx$. La classe d'équivalence de x, égale à $\{gx \mid g \in G\}$ et notée Gx, s'appelle l'**orbite** de x. L'ensemble quotient se note E/G. Si on prend par exemple E = S^n et G = $\{e, \sigma\}$ où pour tout u de S^n, $\sigma u = -u$, alors on retrouve un exemple précédent, où E/G = $\mathbb{P}^n$. Si on prend E = $\mathbb{R}$, G = $\mathbb{Z}$, l'action de g sur x le transformant en $x + g$, alors E/G n'est autre que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

III : Espaces connexes

On généralise aux espaces topologiques quelconques ce qui fait la spécificité des intervalles de $\mathbb{R}$, la connexité.

1- Définition

DEFINITION

Un espace topologique E *est* **connexe** *si* :

$\forall$ U *ouvert*, $\forall$ V *ouvert*, U $\cup$ V = E *et* U $\cap$ V = $\varnothing \Rightarrow$ (U = E *et* V = $\varnothing$) *ou* (U = $\varnothing$ *et* V = E)

Une partie A *d'un espace topologique* E *est connexe si* :

$\forall$ U *ouvert*, $\forall$ V *ouvert*, A $\subset$ U $\cup$ V *et* U $\cap$ V $\cap$ A = $\varnothing \Rightarrow$ (A $\subset$ U *et* V $\cap$ A = $\varnothing$) *ou* (U $\cap$ A = $\varnothing$ *et* A $\subset$ V)

Autrement dit, un espace est connexe si et seulement si on ne peut pas le partitionner en deux ouverts non vides disjoints. Dans la définition ci-dessus, V étant le complémentaire de U, on peut également définir un connexe par la propriété suivante :

$\forall$ U *ouvert et fermé de* E, U = E *ou* U = $\varnothing$

Une partie A d'un espace topologique est connexe si et seulement si elle est connexe en tant qu'espace topologique quand on la munit de la topologie induite par celle de E.

EXEMPLE :

❑]0, 1[$\cup$]1, 2[n'est pas connexe.

PROPOSITION

Les connexes de la droite achevée $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *sont les intervalles.*

Démonstration :

❑ Le fait d'utiliser la droite achevée permet de parler de borne supérieure et inférieure y compris pour des parties non bornées de $\mathbb{R}$.

Soit A une partie connexe de la droite achevée, a = Inf(A), b = Sup(A). On a donc A $\subset [a, b]$. Montrons que $]a, b[\ \subset$ A. Par l'absurde, s'il existe $t \in\ ]a, b[$ tel que $t \notin$ A, alors, en prenant U = $[a, t[$ et V = $]t, b]$, on obtient une contradiction avec la connexité de A. On a donc :

$]a, b[\ \subset$ A $\subset [a, b]$

et A est un intervalle, de bornes a et b (contenant ou non l'une ou l'autre des deux bornes).

Réciproquement, soit I un intervalle. Supposons par l'absurde qu'il existe des ouverts U et V tels que I $\subset$ U $\cup$ V, U $\cap$ V $\cap$ I = $\varnothing$, U $\cap$ I et V $\cap$ I ouverts non vides. Il existe a élément de U $\cap$ I et b élément de V $\cap$ I. Supposons par exemple $a < b$. Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et procédons par dichotomie. Supposons $a_n \in$ U et $b_n \in$ V définis, avec $a_n < b_n$ et $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$. Si $\dfrac{a_n + b_n}{2} \in$ U, posons $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$, sinon posons $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, de sorte que $a_{n+1} \in$ U,

$b_{n+1} \in$ V, $a_{n+1} < b_{n+1}$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$. Les suites (a_n) et (b_n) forment alors deux suites adjacentes convergeant vers une limite x élément de $[a, b]$ donc élément de I. Donc $x \in$ U $\cup$ V. Si $x \in$ U, U étant ouvert, et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$, $\exists$ N, $\forall\, n \geq$ N, $b_n \in$ U, ce qui est absurde puisque $b_n \in$ V pour tout n et que U $\cap$ V $\cap$ I $= \varnothing$. Si $x \in$ V, comme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ et que V est ouvert, $\exists$ N, $\forall\, n \geq$ N, $a_n \in$ V, ce qui est absurde car $a_n \in$ U pour tout n. On obtient donc une contradiction.

2- Propriétés

PROPOSITION

Il y a équivalence entre :

(i) E *est connexe*

(ii) *Toute fonction* f : E $\to \{0, 1\}$ *continue est constante.*

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii) : Si f : E $\to \{0, 1\}$, alors $\{0\}$ et $\{1\}$ étant des fermés de $\{0, 1\}$ et donc aussi des ouverts par passage au complémentaire, U $= f^{-1}(\{0\})$ et V $= f^{-1}(\{1\})$ sont des ouverts de E, disjoints et dont la réunion est égale à E. E étant connexe, l'un des deux est vide et l'autre est égal à E, ce qui signifie que f est constante.

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i) : Par l'absurde, si E n'est pas connexe, on peut le partitionner en deux ouverts disjoints U et V. On définit alors f : E $\to \{0, 1\}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathrm{U} \\ 1 \text{ si } x \in \mathrm{V} \end{cases}$. On obtient alors une fonction continue non constante, en contradiction avec (ii).

Une démonstration comparable s'applique si on suppose que f est à valeurs dans un espace discret.

COROLLAIRE

Si E *et* F *sont deux espaces connexes, alors* E $\times$ F *est connexe.*

<u>Démonstration</u> :

❑ Soit f : E $\times$ F $\to \{0, 1\}$ continue. Montrons que f est constante. Pour tout (x_0, y_0) et (x, y) de E $\times$ F, on a :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y) && \text{car } f(., y): x \in \mathrm{E} \to f(x, y) \text{ est continue et E est connexe} \\ &= f(x_0, y_0) && \text{car } f(x_0, .): y \in \mathrm{F} \to f(x_0, y) \text{ est continue et F est connexe} \end{aligned}$$

Donc f est bien constante.

EXEMPLES :

❑ Pour tout n, $\mathbf{R}^n$ est connexe. En effet, soit $x \in \mathbf{R}^n$, et $f : \mathbf{R}^n \to \{0, 1\}$ continue. A fortiori, l'application $t \in [0, 1] \to f(tx) \in \{0, 1\}$ est continue. Mais $[0, 1]$ est connexe, donc cette dernière fonction est constante, et donc $f(0) = f(x)$ (pour les valeurs respectives $t = 0$ et $t = 1$). On a montré que f est constante, égale à $f(0)$, donc $\mathbf{R}^n$ est connexe.

❑ S^1 est connexe, donc $S^1 \times ... \times S^1$ est connexe, donc le tore de dimension n T^n est connexe.

PROPOSITION

❑ *Soit* f : E $\to$ F *continue avec* E *connexe. Alors* f(E) *est connexe.*

Dans $\mathbb{R}$, les connexes sont les intervalles. Ce théorème généralise donc le fait que l'image d'un intervalle par une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un intervalle, qui est l'une des formulations du théorème des valeurs intermédiaires.

<u>Démonstration</u> :
❑ Soient U et V deux ouverts de F tels que $f(E) \subset U \cup V$ et $U \cap V \cap f(E) = \varnothing$. On a alors $E \subset f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ et $\varnothing = f^{-1}(U \cap V \cap f(E)) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Or f étant continu, $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont tous deux des ouverts. La connexité de E implique que l'un d'entre eux est vide, par exemple $f^{-1}(U)$, mais alors $\varnothing = f(f^{-1}(U)) = U \cap f(E)$, ce qui prouve la connexité de $f(E)$.

EXEMPLE :
❑ Si E est un espace connexe, alors tout ensemble quotient muni de la topologie quotient est connexe, puisque la projection canonique est continue.

COROLLAIRE (Théorème des douanes)
Soit $f : [0, 1] \to E$ *une application continue à valeurs dans un espace topologique. Soit* A *une partie de* E *tel que* $f(0) \in A$ *et* $f(1) \in A^c$. *Alors* : $\exists\, t \in [0, 1],\ f(t) \in \mathrm{Fr}(A)$.

Pour passer de A à son complémentaire, on doit passer par sa frontière Fr(A).

<u>Démonstration</u> :

❑ Rappelons que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
Si $f(0) \in \mathrm{Fr}(A)$, on prend $t = 0$.
Sinon, cela signifie que 0 est intérieur à A, ce que nous supposerons désormais.
Si $f(1) \in \mathrm{Fr}(A)$, on prend $t = 1$.
Sinon, cela signifie que 1 est intérieur à A^c, ce que nous supposerons désormais.

[0, 1] étant connexe et f étant continue, $f([0, 1])$ est connexe. Soit $U = \overset{\circ}{A}$ et $V = (\overline{A})^c$. U et V sont deux ouverts disjoints non vides (U contient 0 et V contient 1), donc la connexité de $f([0, 1])$ implique qu'il ne peut être recouvert par $U \cup V$. Il existe donc t tel que $f(t) \notin U \cup V$. Donc $f(t) \in U^c \cap V^c = (\overset{\circ}{A})^c \cap \overline{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathrm{Fr}(A)$.

COROLLAIRE
On dit qu'un espace E *est* **connexe par arcs** *si, pour tout x et tout y de* E, *il existe une application continue* $f : [0, 1] \to E$ *telle que* $f(0) = x$ *et* $f(1) = y$. *f s'appelle un* **chemin continu** *reliant x à y. Un espace connexe par arcs est connexe.*

<u>Démonstration</u> :
❑ Par l'absurde, si E n'est pas connexe, on aurait $E = U \cup V$ réunion disjointe de deux ouverts non vides U et V, et donc également fermés. On a donc $\mathrm{Fr}(U) = \mathrm{Fr}(V) = \varnothing$, et en prenant $x \in U$ et $y \in V$, on obtient une contradiction avec le théorème des douanes.

EXEMPLES :
❑ L'image d'un espace connexe E par arcs par une application continue f est connexe par arcs. En effet, pour relier $f(x)$ à $f(y)$ par un chemin continu, il suffit de relier x à y par un chemin puis de prendre l'image de ce chemin par f.

❑ $\mathbf{R}^n$ est connexe par arcs donc connexe. Pour $n \geq 2$, $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arcs : relier deux points de cet espace par un chemin qui ne passe pas par 0. Il n'en est pas de même de $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ qui possède deux composantes connexes. Cela prouve que $\mathbf{R}$ n'est homéomorphe à aucun $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, puisque $\mathbf{R}$ privé d'un point n'est pas connexe, alors que $\mathbf{R}^n$ privé d'un point le reste, et que la connexité est une propriété conservée par homéomorphisme. Le même type d'argument montre que le cercle unité S^1 de $\mathbf{R}^2$ n'est pas homéomorphe à un intervalle I car sinon, I privé d'un de ses points intérieurs (ensemble non connexe) serait homéomorphe à S^1 privé d'un point (ensemble connexe).
❑ Pour $n \geq 1$, la sphère unité S^n de $\mathbf{R}^{n+1}$ est connexe par arcs, donc connexe : S^n est en effet l'image de $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'application $x \to \dfrac{x}{\| x \|}$.
❑ Pour $n \geq 1$, l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ est connexe par arcs. Il est en effet quotient de $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, donc image de cet espace par la projection canonique continue.
❑ Le ruban de Möbius est connexe par arc donc connexe.
❑ Les parties convexes d'un espace vectoriel normé sont connexes par arcs. Les boules sont connexes par arcs donc connexes.

PROPOSITION

Soit A *une partie connexe d'un espace topologique* E. *Alors* $\overline{A}$ *est connexe.*

<u>Démonstration</u> :

❑ Supposons que $\overline{A} \subset U \cup V$, avec $U \cap V \cap \overline{A} = \emptyset$, U et V ouverts. A fortiori, $A \subset U \cup V$ et $U \cap V \cap A = \emptyset$. La connexité de A implique que $U \cap A$ ou $V \cap A$ est vide. Supposons par exemple $U \cap A = \emptyset$. On a alors $A \subset U^c$. Mais U^c est fermé. $\overline{A}$ étant le plus petit fermé contenant A, on a $\overline{A} \subset U^c$, donc $U \cap \overline{A} = \emptyset$, ce qui prouve que $\overline{A}$ est connexe.

EXEMPLE :
❑ Dans $\mathbf{R}^2$, soit $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\}$. Il s'agit d'un connexe comme image du connexe $]0, +\infty[$ par l'application continue $x \to (x, \sin(\frac{1}{x}))$. Son adhérence $\overline{A}$ est constituée de $A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$, qui est donc également connexe. $\overline{A}$ n'est pas connexe par arc car le point $(0, 0)$ ne peut être relié au point $(\frac{1}{\pi}, 0)$ par un chemin continu.

3- Composantes connexes
PROPOSITION
Soit E *un espace topologique. On définit sur* E *la relation binaire suivante* :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists\, C \subset E \text{ connexe}, x \in C, y \in C$$

$\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence. Ses classes d'équivalence, formant une partition de* E, *s'appellent les* **composantes connexes** *de* E.

<u>Démonstration</u> :

❑ La relation est réflexive. Il suffit de prendre C = $\{x\}$. Elle est évidemment symétrique. Montrons la transitivité. Soient x, y et z tels que $x \mathcal{R} y$, $y \mathcal{R} z$. Il existe deux connexes C et D tels que $x \in$ C, $y \in C \cap D$, $z \in$ D. Pour conclure, il suffit de montrer que $C \cup D$ est connexe. Soit $f : C \cup D \to \{0, 1\}$ continue. f est continue sur C donc constante car C est connexe. De même f est constante sur D. Or C et D ont y comme élément commun. Donc les deux constantes sont les mêmes, égales à $f(y)$, et f est constante sur $C \cup D$, ce qui prouve la connexité de cet ensemble.

Toute composante connexe est connexe. En effet, soit X une composante connexe, et $f : X \to \{0, 1\}$ continue. Soit x élément de X. Alors :

$\forall y \in X, \exists$ C connexe, $x \in C, y \in C$

donc $f(x) = f(y)$ car f est continue sur le connexe C

donc f est constante sur X

donc X est connexe.

Si X est une composante connexe incluse dans une partie connexe Y, alors X = Y puisque tout élément y de Y est connecté à tout élément x de , donc x et y appartiennent à la même classe d'équivalence. Ainsi, les composantes connexes sont les parties connexes maximales. En particulier, les composantes connexes sont égales à leur adhérence, connexes également, donc sont fermées.

EXEMPLES :

❑ Les composantes connexes de $\mathbb{R}^*$ sont $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$.

❑ Dans la droite de Sorgenfrey, toute partie A ayant deux éléments au moins $x < y$ ne peut être connexe. En effet, soit $a = \dfrac{x+y}{2}$. U = $]-\infty, a[$ et V = $[a, +\infty[$ sont deux ouverts disjoints recouvrant A, U possédant x et V possédant y. Ainsi, les composantes connexes sont les singletons. On dit que la droite de Sorgenfrey est un espace topologique **totalement discontinu**. Un autre exemple d'espace totalement discontinu est donné par $\mathbb{Q}$ avec la topologie usuelle induite par la valeur absolue.

❑ Le groupe orthogonal $O_3(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, puisque l'application déterminant est une application continue non constante de $O_3(\mathbb{R})$ dans $\{-1, 1\}$. Il possède deux composantes connexes. En effet $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Il suffit de montrer que toute matrice de rotation M peut être reliée à la matrice identité I_3. Or, il existe une matrice de changement de base P et un angle θ tel que :

$$M = P \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Pour relier I_3 à M, prendre le chemin $t \in [0, 1] \to P \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) & 0 \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Le complémentaire de $SO_3(\mathbb{R})$ dans $O_3(\mathbb{R})$ est connexe, car homéomorphe à $SO_3(\mathbb{R})$ au moyen de l'homéomorphisme $u \in SO_3(\mathbb{R}) \to v \circ u \in O_3(\mathbb{R}) \setminus SO_3(\mathbb{R})$, où v est un élément donné de $O_3(\mathbb{R}) \setminus SO_3(\mathbb{R})$.

La même démonstration montre que $O_n(\mathbb{R})$ est constitué de deux composantes connexes, $SO_n(\mathbb{R})$ étant l'une d'elles. On utilise pour cela le fait que toute matrice de $SO_n(\mathbb{R})$ est semblable, via une matrice de passage P, à une matrice diagonale par blocs $R(\theta_1, ..., \theta_k)$, chaque bloc étant de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$, avec, si n est impair, un dernier bloc 1×1 constitué du seul nombre 1 (voir L3/HERMTN.DOC).On joint I_n à M au moyen du chemin $t \to PR(t\theta_1, ..., t\theta_k)P^{-1}$.

IV : Espaces compacts

Dans la définition d'un espace métrique compact, conservons la propriété qui ne fait pas appel à la notion de distance. Il s'agit de la propriété de Borel-Lebesgue (voir L3/METRIQUE.PDF) :

1- Définition

DEFINITION

Un espace topologique ***séparé*** *est dit* **compact** *si, de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement fini* (*propriété de Borel-Lebesgue*).

Un espace métrique compact est donc également compact au sens purement topologique. Pour qu'un espace séparé E soit compact, il suffit qu'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue pour les ouverts d'une base $\mathcal{B}$ d'ouverts. Supposons que tel est le cas, et soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Chaque O_i est une réunion $\bigcup_{j\in I(i)} B_{ij}$, les B_{ij} étant des ouverts de la base $\mathcal{B}$, et $I(i)$ un ensemble d'indices propre à chaque i. L'ensemble de tous les B_{ij} réalise donc un recouvrement de E, dont on peut, par hypothèse, extraire un sous-recouvrement fini $B_1, ..., B_n$. Chaque B_k est inclus dans l'un des O_{i_k}, de sorte que $O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_n}$ forme un sous-recouvrement fini de E issu du recouvrement initial. E est donc compact.

On renonce en général à la propriété de Bolzano-Weierstrass (selon cette propriété, toute suite admet une sous-suite qui converge). Dans le cas le plus général, elle n'est plus ni nécessaire ni suffisante pour avoir un espace vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue (voir la partie *Exercices*).

PROPOSITION

Soit E *compact et* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille de fermés non vides telle que toute intersection finie est non vide. Alors* $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$.

Dans le cas d'un espace métrique, nous nous étions bornés à énoncer cette propriété pour une simple suite décroissante de fermés non vides. La proposition précédente est un peu plus générale.

<u>Démonstration</u> :

❑ Pour tout i, posons $O_i = F_i^c$. Les O_i sont des ouverts.

Par l'absurde, si $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$, alors $(\bigcap_{i\in I} F_i)^c = E$ donc $\bigcup_{i\in I} F_i^c = E$, donc $\bigcup_{i\in I} O_i = E$. Les O_i forment donc un recouvrement ouvert de E. E étant compact, il existe un sous-recouvrement fini $\bigcup_{i\in J} O_i = E$. En repassant au complémentaire, on obtient $\bigcap_{i\in J} F_i = \varnothing$ avec J fini, ce qui est contraire à l'hypothèse.

EXEMPLE :

❑ Soit (x_n) une suite d'un espace topologique séparé convergeant vers une limite l. La partie $A = \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{l\}$ est compacte. En effet, si on a un recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ de A, l est dans l'un des O_i. Pour cet ouvert O_i, la suite (x_n) convergeant vers l, $\exists$ N, $\forall\, n \geq N$, $x_n \in O_i$. On obtient un recouvrement fini de A en prenant cet O_i, et pour tout $n < N$, un ouvert contenant x_n.

2- Propriétés

PROPOSITION

(i) *Soit* A *une partie compacte d'un espace* E *séparé et* $x \notin A$. *Alors, il existe deux ouverts disjoints* U *et* V, *le premier contenant* A, *le second possédant* x.

(ii) *Toute partie compacte d'un espace* E *séparé est fermée.*

(iii) *Tout fermé inclus dans un compact est compact.*

(iv) *Soit* $f : E \to F$ *une application continue entre espaces séparés,* E *étant compact. Alors* $f(E)$ *est compact.*

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : L'espace E étant séparé, pour tout y de A, il existe un voisinage V_y de x et un voisinage U_y de y, qu'on peut supposer ouverts, et qui sont disjoints. Les U_y recouvrent A quand y parcourt A. A étant compact, il existe un sous-recouvrement fini $U = \bigcup\limits_{y\in C} U_y$, pour une partie finie C incluse dans A. U est un ouvert qui contient A. $V = \bigcap\limits_{y\in C} V_y$ est un ouvert (car l'intersection est finie) qui possède x et qui est disjoint de U.

❑ (ii) : Soit A une partie compacte. D'après le (i), pour tout $x \in A^c$, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $x \in V$. V est un voisinage de x et :

$$V \cap A \subset V \cap U = \varnothing$$

donc $\quad V \cap A = \varnothing$

donc $\quad V \subset A^c$.

Ainsi, tout x de A^c est intérieur à A^c, donc A^c est ouvert, donc A est fermé.

❑ (iii) : Soit A fermé du compact E, et $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de A. A^c est ouvert, et la famille constitué de A^c et des O_i est un recouvrement ouvert de E. E étant compact, il existe un sous-recourvement fini. Les O_i de ce sous-recouvrement constituent un sous-recouvrement fini de A. Donc A est compact.

❑ (iv) : Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $f(E)$. On a :

$$f(E) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$$

donc $\quad E \subset f^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} O_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(O_i)$

f étant continue et les O_i ouverts, on a $f^{-1}(O_i)$ ouvert. Donc les $f^{-1}(O_i)$ constituent un recouvrement ouvert de E. Celui-ci étant compact, il existe un sous-recouvrement fini.

$$E = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(O_i) \qquad \text{J fini}$$

donc $\quad f(E) = f(\bigcup\limits_{i\in J} f^{-1}(O_i)) = \bigcup\limits_{i\in J} f(f^{-1}(O_i)) \subset \bigcup\limits_{i\in J} O_i$

donc $f(E)$ est compact.

EXEMPLE :

❑ La séparation joue un rôle important. Considérons par exemple la droite réelle, où l'élément 0 a été dédoublé : E = $\mathbb{R}^* \cup \{0_0\} \cup \{0_1\}$. Une base de voisinages de x non nul est donné par les intervalles ouverts $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ inclus dans $\mathbb{R}^*$. Une base de voisinages de 0_0 est donnée par $\{0_0\} \cup\ ]-\varepsilon, 0[\ \cup\ ]0, \varepsilon[$, et une base de voisinages de 0_1 est donnée par $\{0_1\} \cup\ ]-\varepsilon, 0[\ \cup\ ]0, \varepsilon[$.
Alors A = $]0, 1] \cup \{0_0\}$ est compact car homéomorphe à [0, 1], mais si on prend $x = 0_1$, on ne peut trouver deux ouverts disjoints séparant A de x. De plus A n'est pas fermé dans E puisque 0_1 lui est adhérent sans lui appartenir.

COROLLAIRE

(i) *Soit* f : E $\to \mathbb{R}$ *une application continue, E étant compact. Alors* f(E) *admet un maximum et un minimum.*

(ii) *Soit* f : E $\to$ F, E *étant compact et F séparé, f étant injective et continue. Alors f est un homéomorphisme de* E *sur* f(E).

Démonstration :

❑ (i) : E étant compact et f continue, f(E) est compact dans $\mathbb{R}$, or les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés. Etant borné, f(E) admet une borne supérieure et une borne inférieure. Etant fermé, la borne supérieure (limite d'une suite de f(E)) est dans f(E), donc est un maximum. De même la borne inférieure est un minimum.

❑ (ii) : f étant bijective de E sur f(E) et continue, il s'agit de montrer que f^{-1} est continue. Soit A fermé de E. Il s'agit de montrer que son image réciproque par f^{-1}, donc son image directe par f, est fermée. Or A étant fermé dans le compact E est compact. Donc son image f(A) est compacte. Comme tout compact dans un espace séparé est fermé, f(A) est fermé.

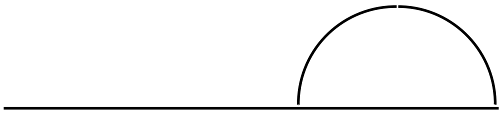
EXEMPLE :

❑ Le (ii) est faux si E n'est pas compact. Prenons E = $[0, 2\pi[$, F = S^1 le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et f l'application $t \in E \to (\cos(t), \sin(t)) \in S^1$. f est continue et bijective, mais n'est pas un homéomorphisme car S^1 est compact (fermé borné dans $\mathbb{R}^2$) alors que $[0, 2\pi[$ ne l'est pas. Or la compacité est conservée par homéomorphisme. Ainsi f^{-1} n'est pas continue. Par exemple, $\lim\limits_{t\to 2\pi} f(t) = f(0)$, mais $t = f^{-1}(f(t))$ ne converge pas vers $0 = f^{-1}(f(0))$ quand t tend vers 2π.

❑ Un autre exemple, un peu plus compliqué est constitué de E = $\mathbb{R}$, F = $\mathbb{R}^2$ et f la fonction suivante :

$$f : x \to \begin{cases} (x, 0) \text{ si } x \leq 0 \\ \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2} - 1, \dfrac{2x}{1+x^2}\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

f(E) est constitué de la réunion disjointe du demi-axe des abscisses pour $x \leq 0$, et du demi-cercle de centre (–1, 0) situé dans le demi-plan $y > 0$, pour $x > 0$. f est continue, en particulier en $x = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (0, 0)$. f(E) a la forme suivante (avec le demi-axe se prolongeant indéfiniment vers la gauche) :



Quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $(-2, 0)$ sans l'atteindre, de sorte que f est bien injective. Mais $f(\mathbb{R})$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$, car l'image par f de $[-2, +\infty[$ (qui n'est pas compact), est constituée de la réunion du demi-cercle et de son diamètre, (qui est compacte).

❑ Tout ensemble quotient d'un espace compact, muni de la topologie quotient, est un compact à condition que l'ensemble quotient soit séparé. En effet, l'ensemble quotient est l'image par la projection canonique, qui est continue, de l'espace compact initial. Ainsi, l'espace projectif $\mathbb{P}^n$, quotient de la sphère unité, et espace séparé, est compact.

❑ Dans la démonstration de l'homéomorphisme entre le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, vue plus haut, on a introduit la fonction $f : \overline{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \exp(2i\pi x) \in \mathbb{U}$. On a montré que cette fonction est bijective continue. Il est inutile de vérifier que f^{-1} est continue si on prouve que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact, car il suffit à la place d'appliquer le (ii) du corollaire. Mais $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est l'image du compact $[0, 1]$ par la projection canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui est continue, donc $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact.

PROPOSITION

Soit E *et* F *deux espaces compacts. Alors* $E \times F$ *est compact.*

<u>Démonstration</u> :

❑ Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant $E \times F$:

$$\forall (x, y) \in E \times F, \exists i \in I, (x, y) \in O_i$$

donc $\forall (x, y) \in E \times F, \exists U_{xy}$ ouvert de E, $\exists V_{xy}$ ouvert de F, $\exists i \in I, (x, y) \in U_{xy} \times V_{xy} \subset O_i$

Pour chaque x, les V_{xy}, $y \in F$, constituent un recouvrement ouvert de F, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini, indicée par une partie finie $F(x) \subset F$:

$$F = \bigcup_{y\in F(x)} V_{xy}$$

Posons $W_x = \bigcap_{y\in F(x)} U_{xy}$. C'est un ouvert (car l'intersection est finie) contenant x. Donc les W_x, $x \in E$, forment un recouvrement ouvert de E, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini, indicé par une partie finie $H \subset E$:

$$E = \bigcup_{x\in H} W_x$$

Vérifions que les $W_x \times V_{xy}$, $x \in H$, $y \in F(x)$, forment un recouvrement ouvert de $E \times F$. Soit $(a, b) \in E \times F$. Comme $E = \bigcup_{x\in H} W_x$, $\exists x \in H$, $a \in W_x$. Pour cet x, on a $F = \bigcup_{y\in F(x)} V_{xy}$, donc $\exists y \in F(x)$, $b \in V_{xy}$. Donc $(a, b) \in W_x \times V_{xy}$. Ce recouvrement est fini puisque H est fini et que, pour tout x de H, $F(x)$ est fini. Enfin, pour tout x de H et tout y de $F(x)$, $W_x \times V_{xy} \subset U_{xy} \times V_{xy}$, donc :

$$\exists i \in I, W_x \times V_{xy} \subset O_i$$

Les O_i correspondants forment un sous-recouvrement fini de $E \times F$.

Nous admettrons qu'un produit infini d'espaces compacts est compact (**théorème de Tychonov)**, mais ce résultat repose sur l'axiome du choix.

EXEMPLE :

❑ Le cercle S^1 est compact, donc le tore $T^n = S^1 \times ... \times S^1$ est compact.

3- Le compactifié d'Alexandrov

On dit qu'un espace séparé est **localement compact** si tout point de cet espace admet une base de voisinages compacts.

EXEMPLES :

❑ C'est le cas des espaces vectoriels normés de dimension finie, tout point x admettant comme base de voisinages les boules fermées de centre x. Elles sont compactes car fermées bornées dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

❑ Le cas de $\mathbb{R}$ est particulièrement intéressant. Il existe un homéomorphisme entre les trois espaces suivant : $\mathbb{R}$, $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, un cercle du plan privé d'un point. Il suffit de considérer les fonctions successives :

$$t \in \mathbb{R} \to \theta = \arctan(t) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to (\cos(2\theta), \sin(2\theta)) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, (x, y) \neq (-1, 0)\}$$

La composée de ces deux fonctions est :

$$t \in \mathbb{R} \to (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, (x, y) \neq (-1, 0)\}$$

Le point $(-1, 0)$ qui manque au cercle est obtenu en faisant tendre t vers ∞ (peu importe le signe) :

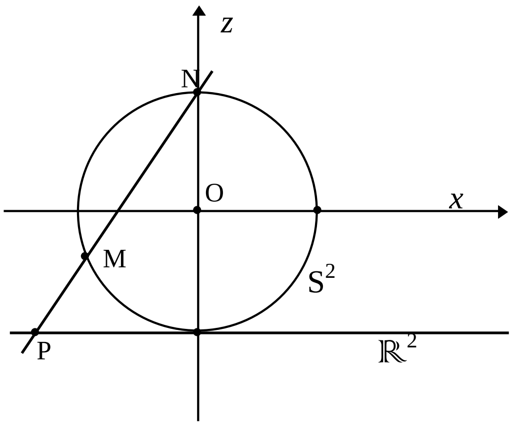
$$(-1, 0) = \lim_{t\to\infty} (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$$

Ainsi, si on rajoute un "point à l'infini" à $\mathbb{R}$, on obtient un espace homéomorphe à un cercle. Une base de voisinages de $(-1, 0)$ dans le cercle s'obtient en prenant les complémentaires des arcs de cercles centrés en $(1, 0)$. Par conséquent, une base de voisinages du point à l'infini dans $\mathbb{R}$ s'obtient en prenant les complémentaires de voisinages centrés en 0. Ces voisinages contiennent donc des parties de la forme $]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$. Ce sont exactement les intervalles que l'on a utilisé dans L1/FONCTION.PDF pour définir par exemple ce que signifie $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$. Ces voisinages du point à l'infini sont aussi les complémentaires de toute partie bornée de $\mathbb{R}$, qu'on peut également supposer fermée. Ce sont donc les complémentaires des compacts de $\mathbb{R}$.

❑ De même $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe à une sphère de $\mathbb{R}^3$ privée d'un point. Considérons l'application :

$$P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to M = (\frac{4x}{x^2+y^2+4}, \frac{4y}{x^2+y^2+4}, \frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4}) = (X, Y, Z)$$

On pourra vérifier que (X, Y, Z) appartient à la sphère unité S^2 de $\mathbb{R}^3$, privé du pôle nord $N = (0, 0, 1)$. Réciproquement, tout point $M = (X, Y, Z)$ de cette sphère privé est l'image du point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ défini par : $x = \frac{2X}{1-Z}$, $y = \frac{2Y}{1-Z}$. Géométriquement, la correspondance se fait par projection stéréographique (l'axe Oy est perpendiculaire au plan de la figure) :



$\mathbf{R}^2$ est assimilé au plan parallèle à Oxy, passant par le pôle sud (0, 0, –1) de la sphère S^2, un point (x, y) de $\mathbf{R}^2$ étant ainsi situé en P = (x, y, –1) dans $\mathbf{R}^3$. Pour tout P, on trace la droite (NP) qui coupe la sphère en le point M. Quand P tend vers l'infini dans $\mathbf{R}^2$, M = (X, Y, Z) tend vers le pôle nord N = (0, 0, 1). Ainsi, on obtient un espace homéomorphe à la sphère en rajoutant à $\mathbf{R}^2$ un "point à l'infini" dont les voisinages sont, là aussi, les complémentaires des compacts de $\mathbf{R}^2$.

❑ Soit M un espace compact. Alors M est localement compact. En effet, soit $x \in$ M et V un voisinage ouvert de x. Il s'agit de montrer que V contient un voisinage compact W de x. Pour tout $y \notin x$, M étant séparé, il existe des voisinages ouverts W_y de x et U_y de y tels que $W_y \cap U_y = \varnothing$. U_y étant ouvert, on a aussi $\overline{W_y} \cap U_y = \varnothing$, avec $\overline{W_y}$ adhérence de W_y. V et les U_y, $y \notin$ V, constituent un recouvrement de M par des ouverts. M étant compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini V, U_{y_1}, ..., U_{y_n}. $\overline{W_{y_1}} \cap ... \cap \overline{W_{y_n}}$ constitue alors un voisinage de x, et il est compact car fermé dans le compact M. Par ailleurs, on a $\overline{W_{y_1}} \cap ... \cap \overline{W_{y_n}} \cap (U_{y_1} \cup ... \cup U_{y_n}) = \varnothing$. Comme V, U_{y_1}, ..., U_{y_n} recouvrent M, on a nécessairement $\overline{W_{y_1}} \cap ... \cap \overline{W_{y_n}} \subset$ V.

❑ Plus généralement, si on prend M espace compact et qu'on lui retire un point x_0, on obtient un espace localement compact. En effet, soit $x \in$ M \ {x_0} et V ouvert de x pour la topologie de M \ {x_0} , induite par celle de M. V est l'intersection de M \ {x_0} et d'un ouvert de M. Comme M \ {x_0} est lui-même ouvert de M, V est un ouvert de M, donc un voisinaege de x dans M. D'après l'exemple précédent, il existe un voisinage W de x, compact et inclus dans V. Comme V ne contient pas x_0, W non plus, donc W est un voisinage compact de x pour la topologie de M \ {x_0}.

Réciproquement, si on part d'un espace localement compact, on peut obtenir un espace compact en lui rajoutant un "point à l'infini". C'est ce qui a été fait dans les exemples précédents pour $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^2$.

PROPOSITION

Soit E *un espace séparé localement compact, et non compact. Soit* $\hat{E}$ *l'ensemble* E ∪ {∞} *obtenu en réunissant à* E *un point supplémentaire, dit point à l'infini, noté* ∞. *On définit une topologie* $\mathcal{T}$ *sur* $\hat{E}$ *en prenant d'une part les ouverts de* E *et d'autre part le complémentaire dans* $\hat{E}$ *des compacts de* E, *ainsi que* $\hat{E}$. *Pour cette topologie,* $\hat{E}$ *est compact et* E *est dense dans* $\hat{E}$. $\hat{E}$ *s'appelle le* **compactifié d'Alexandrov** *de* E.

On suppose E non compact, car si on procède à la construction précédente avec E compact, on se borne à adjoindre un point isolé à E, ce qui présente peu d'intérêt.

Démonstration :
Vérifions que les ouverts introduits forment bien une topologie.

❑ On a déjà $\varnothing \in \mathcal{T}$ car $\varnothing$ est un ouvert de E, et $\hat{E} \in \mathcal{T}$ par hypothèse.

❑ Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts de $\hat{E}$. Montrons que $\bigcup_{i\in I} O_i$ est un ouvert de $\hat{E}$.

Si, pour tout i, O_i est un ouvert de E, alors $\bigcup_{i\in I} O_i$ aussi, et $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.
Si, au contraire, certains seulement des O_i, pour $i \in J$, sont des ouverts de E, les autres, pour $i \notin J$, sont de la forme $\hat{E} \setminus F_i$, complémentaire dans $\hat{E}$ d'un compact F_i de E. Alors :

$$\bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{i\in J} O_i \cup \bigcup_{i\notin J} (\hat{E} \setminus F_i)$$

$$= O \cup (\hat{E} \setminus \bigcap_{i\notin J} F_i) \qquad \text{où } O = \bigcup_{i\in J} O_i \text{ est un ouvert de E}$$

$$= O \cup (\hat{E} \setminus F) \qquad \text{où } F = \bigcap_{i\notin J} F_i \text{ est un fermé de E}$$

$$= \hat{E} \setminus (F \cap (E \setminus O))$$

La dernière égalité repose sur la constatation que, si $x \in O$, alors $x \notin E \setminus O$, donc $x \notin F \cap (E \setminus O)$, donc $x \in \hat{E} \setminus (F \cap (E \setminus O))$. Si $x \notin F$, alors $x \notin F \cap (E \setminus O)$, donc $x \in \hat{E} \setminus (F \cap (E \setminus O))$.
Réciproquement, si $x \notin F \cap (E \setminus O)$ alors, ou bien $x \notin F$, ou bien $x \in O$.
Maintenant, $E \setminus O$ est un fermé de E, donc $F \cap (E \setminus O)$ est aussi un fermé de E, inclus dans F, lui-même inclus dans n'importe lequel des compacts F_i. Donc $F \cap (E \setminus O)$ et $\hat{E} \setminus (F \cap (E \setminus O)) \in \mathcal{T}$.

❑ Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille finie d'ouverts de $\hat{E}$. Montrons que $\bigcap_{i\in I} O_i$ est un ouvert de $\hat{E}$.

Si, pour tout i, O_i est un ouvert de E, alors $\bigcap_{i\in I} O_i$ aussi, donc $\bigcap_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.
Sinon, comme ci-dessus, certains des O_i, pour $i \in J$, sont des ouverts de E. Les autres, pour $i \notin J$, sont de la forme $\hat{E} \setminus F_i$, où F_i est un compact de E.

Si $J \neq \varnothing$, $\bigcap_{i\in J} O_i$ est un ouvert O de E. On a alors :

$$\bigcap_{i\in I} O_i = \bigcap_{i\in J} O_i \cap \bigcap_{i\notin J} (\hat{E} \setminus F_i)$$

$$= O \cap \bigcap_{i\notin J} (\hat{E} \setminus F_i)$$

$$= O \cap (\hat{E} \setminus \bigcup_{i\notin J} F_i)$$

$$= O \cap (\hat{E} \setminus F) \qquad \text{où } F = \bigcup_{i\notin J} F_i$$

F est un fermé de E (comme réunion finie de fermés) et même un compact, car de tout recouvrement de $\bigcup_{i \notin J} F_i$ par des ouverts, on extrait un sous-recouvrement fini pour chacun des compacts F_i, et, J étant fini, en réunissant ces sous-recouvrements, on obtient un sous-recouvrement fini de $\bigcup_{i \notin J} F_i$. On a maintenant :

$$\bigcap_{i \in I} O_i = O \cap (\hat{E} \setminus F)$$

$$= O \cap (E \setminus F) \qquad \text{car } O \cap (\hat{E} \setminus F) \subset O \subset E$$

E \ F est un ouvert de E, O aussi, donc O ∩ (E \ F) est un ouvert de E et $\bigcap_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Si J = ∅, alors, on a directement :

$$\bigcap_{i \in I} O_i = \bigcap_{i \notin J} (\hat{E} \setminus F_i)$$

$$= \hat{E} \setminus F$$

où $F = \bigcup_{i \notin J} F_i$ compact de E, comme précédemment. Donc $\bigcap_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

❑ $\hat{E}$ est séparé, car, considérant ∞ et $x \in E$, il existe un voisinage compact F de x, et $\hat{E} \setminus F$ est un voisinage ouvert de ∞.

❑ $\hat{E}$ est compact, car si on dispose d'un recouvrement ouvert $(O_i)_{i \in I}$ de $\hat{E}$, l'un de ces ouverts possède ∞, donc son complémentaire est un compact F. F est aussi recouvert par les O_i donc il existe un sous-recouvrement fini. Si on adjoint à ce sous-recouvrement l'ouvert possédant ∞, on obtient un sous-recouvrement fini de $\hat{E}$.

❑ E est dense dans $\hat{E}$, car tout voisinage de ∞ est le complémentaire d'un compact F de E. Comme E est supposé non compact, F ≠ E, donc $(\hat{E} \setminus F) \cap E = E \setminus F \neq \emptyset$, et ∞ est adhérent à E.

VARIANTES :

Si le compactifié d'Alexandrov est une façon d'injecter un espace localement compact dans un compact, il peut exister d'autres manières de compactifier un ensemble. Voici quelques variantes.

❑ Le compactifié d'Alexandrov de $\mathbf{R}$ est $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$, obtenu en adjoignant un point à $\mathbf{R}$. Il est homéomorphe au cercle S^1.

La droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$ est $\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, obtenue en adjoignant deux points à $\mathbf{R}$. Une base de voisinages de $-\infty$ est $\{-\infty\} \cup]-\infty, a[$, et une base de voisinages de $+\infty$ est $]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$, $a \in \mathbf{R}$.

$\overline{\mathbf{R}}$ est homéomorphe à [– 1, 1] ou à [0, 1]. C'est un compact.

❑ Pour $n \geq 2$, le compactifié d'Alexandrov de $\mathbf{R}^n$ est $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$, obtenu en adjoignant un point à $\mathbf{R}$. Il est homéomorphe à S^n, la sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$, par l'intermédiaire d'une généralisation de la projection stéréographique exposée plus haut dans le cas $n = 2$.

$\mathbf{R}^n$ est également homéomorphe à la boule ouverte unité B via l'homéomorphisme $x \in \mathbf{R}^n \to \dfrac{x}{1 + \| x \|} \in B$. Sa réciproque est $y \in B \to \dfrac{y}{1 - \| y \|} \in \mathbf{R}^n$. B se compactifie naturellement

en la boule unité fermée B_f. La compactification correspondante pour $\mathbb{R}^n$ consiste à lui adjoindre des "points à l'infini", un pour chaque demi-droite dirigée par chaque x unitaire.
On a enfin vu que l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ est compact. Or $\mathbb{R}^n$ se plonge naturellement dans $\mathbb{P}^n$ en associant à un élément $(x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ la classe d'équivalence de $(x_1, ..., x_n, 1)$ pour la relation $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0, X = \lambda Y$ dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{R}^n$ est constitué des classes d'équivalences des éléments $(x_1, ..., x_n, 0)$, autrement est identique à $\mathbb{P}^{n-1}$. La compactification de $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{P}^n$ consiste à adjoindre à $\mathbb{R}^n$ des "points à l'infini", ceux de $\mathbb{P}^{n-1}$, un pour chaque droite dirigée par chaque $\pm x$ unitaire. La différence avec la compactification précédente est que les points à l'infini correspondant aux deux vecteurs unitaires x et $-x$ sont distincts dans le premier cas, mais égaux dans le cas de l'espace projectif.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Soit $\mathbb{S}$ la droite de Sorgenfrey dont une base d'ouverts est donnée par les intervalles $[a, b[$. $\mathbb{R}$ est par ailleurs muni de sa topologie usuelle.

a) Montrer que les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}$ sont les applications constantes.

b) Montrer que les applications continues de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues à droite au sens usuel.

Exo.2) Soit (E, d) un espace métrique admettant une base dénombrable d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On se propose de montrer que cet espace est homéomorphe à un sous-ensemble du cube de Hilbert $\prod_{n=0}^{\infty} [0, 1]$. Pour cela, on pose pour tout n $F_n = U_n^c$ et on considère l'application f de E dans $\prod_{n=0}^{\infty} [0, 1]$ définie par :

$$\forall x \in E, f(x) = \left(\frac{d(x, F_n)}{1 + d(x, F_n)} \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

où $d(x, F_n) = \operatorname*{Inf}_{y\in F_n} d(x, y)$. (Il est montré dans L3/METRIQUE.PDF que la fonction $x \to d(x, F_n)$ est continue et que, F_n étant fermé, $d(x, F_n) = 0 \Leftrightarrow x \in F_n$). Montrer que f est un homéomorphisme de E sur f(E).

Exo.3) a) On dit qu'un espace métrique E est un espace **régulier** si, pour tout fermé F inclus dans E et tout x un élément de E qui n'appartient pas à F, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $F \subset U$ et $x \in V$. Montrer que, si E est compact, E est un espace **régulier**.

b) On dit qu'un espace métrique E est un espace **normal** si, pour tous fermés F et G disjoints inclus dans E, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $F \subset U$ et $G \subset V$. Montrer que, si E est compact, E est un espace **normal**.

Exo.4) Soit E un espace topologique, A une partie de E, munie de la topologie induite, et B une partie de A.

a) Montrer que B est fermé dans A pour la topologie induite si et seulement si il existe un fermé F de E tel que $B = F \cap A$.

b) Montrer que l'adhérence de B dans A pour la topologie induite est égale à $\overline{B} \cap A$, où $\overline{B}$ est l'adhérence de B dans E.

c) Montrer que l'intérieur de B dans A pour la topologie induite est égal à $(A^c \cup B)^\circ \cap A$, où $(A^c \cup B)^\circ$ est l'intérieur de $A^c \cup B$ dans E.

Exo.5) Soit E un espace connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue telle que tout x de E soit un minimum local (i.e. $\forall x, \exists V \in \mathcal{V}(x), \forall y \in V, f(y) \geq f(x)$).

a) Montrer que f est constante.

b) Montrer que la conclusion du a) peut être fausse si E n'est pas connexe.

b) Montrer que la conclusion du a) peut être fausse si f n'est pas continue.

Exo.6) a) Montrer que, si E est un espace compact (vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue) et si tout point de E admet une base dénombrable de voisinages, alors E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass (de toute suite de E, on peut extraire une sous-suite convergente).

b) Montrer que, si E est un espace vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass, alors, de tout recouvrement **dénombrable** de E par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Exo.7) Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\{0, 1\}$, muni de la convergence simple. Cet ensemble peut être vu comme le produit $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$, muni de la topologie produit. On pose :

$$F = \{f \in E \mid \{x, f(x) = 0\} \text{ est fini}\}$$
$$G = \{f \in E \mid \{x, f(x) = 0\} \text{ est fini ou dénombrable}\}$$

Ci-dessous, les questions a-b-c) sont indépendantes des questions e-f).

a) Montrer que F est dense dans E.

b) Montrer que $f \in G$ si et seulement s'il existe une suite (f_n) de F qui converge simplement vers f.

c) Montrer que la fonction identiquement nulle n'appartient pas à G.

d) Justifier que E est compact.

e) Montrer que E ne vérifie pas la propriété de Bolzano-Weierstrass. Pour cela, on pourra considérer l'ensemble A des réels de [0, 1[dont le développement décimal ne comporte que des 0 et des 1 : $x \in A \Leftrightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$, $x_n \in \{0, 1\}$, puis, pour tout n entier supérieur ou égal à 1, la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \begin{cases} x_n \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$. On montrera alors qu'il n'existe aucune sous-suite de la suite (f_n) qui converge pour la convergence simple.

f) Justifier que la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable.

Exo.8) Soient E, F et G des espaces séparés, et $f : E \times F \to G$ une application continue. Soient A un compact de E, B un compact de F et W un ouvert de G tel que $f(A \times B) \subset W$. Montrer qu'il existe un ouvert U de E et un ouvert V de E tel que $A \times B \subset U \times V$ et $f(U \times V) \subset W$.

Exo.9) Soit E espace compact et $f : E \to E$ continue. Montrer qu'il existe un fermé non vide $A \subset E$ tel que $f(A) = A$.

Exo.10) Justifier que la bande de Möbius n'est autre que le plan projectif privé d'un disque.

Exo.11) a) (un **théorème de Dini**) Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions positives continues définies sur un compact E à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers 0. Montrer que la convergence est uniforme.

b) (un **théorème d'Ascoli**) Une suite (f_n) de fonctions définies sur un espace métrique E à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite **équicontinue** si, en tout point x_0 de E, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, n,\ \forall\, x \in \mathrm{B}(x_0, \alpha),\ \left| f_n(x) - f_n(x_0) \right| < \varepsilon$$

Montrer que, si (f_n) est suite de fonctions équicontinues convergeant simplement vers 0 et si E est compact, alors la convergence est uniforme.

c) Montrer que, si (f_n) est suite de fonctions équicontinues d'un espace métrique E à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers 0 sur une partie A de E, alors la même convergence a lieu sur l'adhérence de A.

Exo.12) Soit (E, d) un espace métrique et G un groupe opérant sur E de façon isométrique :

$$\forall\, (x, y) \in \mathrm{E},\ \forall\, g \in \mathrm{G},\ \mathrm{d}(gx, gy) = \mathrm{d}(x, y)$$

On note $\mathrm{G}x = \{gx \mid g \in \mathrm{G}\}$ l'orbite de x par G. L'ensemble quotient E/G est l'ensemble des $\mathrm{G}x$, $x \in \mathrm{E}$. On définit la fonction δ suivante sur $\mathrm{E/G} \times \mathrm{E/G}$:

$$\forall\, (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \delta(\mathrm{G}x, \mathrm{G}y) = \operatorname*{Inf}_{g \in \mathrm{G}} \mathrm{d}(x, gy)$$

On suppose que chaque orbite est une partie fermée de E (c'est le cas en particulier quand G est fini). Montrer que δ est une distance sur E/G qui lui confère la même topologie que la topologie quotient.

Exo.13) On considère l'application $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ définie de la façon suivante. Pour $\mathrm{Z} = (z_1, ..., z_n)$ élément de $\mathbb{C}^n$:

$$f(\mathrm{Z}) = (-\,\sigma_1(\mathrm{Z}), \sigma_2(\mathrm{Z}), ..., (-1)^n\sigma_n(\mathrm{Z}))$$

où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires des racines (voir L1/POLYNOME.PDF). $f(\mathrm{Z})$ donne la liste des coefficients du polynôme unitaire $(\mathrm{X} - z_1)...(\mathrm{X} - z_n)$ (sans le coefficient dominant, égal à 1). Les $\sigma_i(\mathrm{Z})$ étant des polynômes homogènes de degré i des variables $z_1, ..., z_n$, les fonctions symétriques élémentaires sont continues. Il en est donc de même de f. En vertu du théorème de D'Alembert, f est surjective. La factorisation canonique de f introduit la relation d'équivalence suivante sur $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}(z_1, ..., z_n) \equiv (z_1', ..., z_n') &\Leftrightarrow \forall\, i,\ \sigma_i(\mathrm{Z}) = \sigma_i(\mathrm{Z}') \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{X} - z_1)...(\mathrm{X} - z_n) = (\mathrm{X} - z_1')...(\mathrm{X} - z_n') \\ &\Leftrightarrow \exists\, \varphi \in \mathfrak{S}_n,\ \forall\, i,\ z_i' = z_{\varphi(i)}\end{aligned}$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique sur $[\![1, n]\!]$. On note $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ l'ensemble quotient associé à cette relation d'équivalence. L'application f se factorise alors comme suit (voir L3/QUOTIENT.PDF) :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"] & & \mathbb{C}^n \\ & \mathbb{C}^n/\mathbb{S}_n \arrow[ur, "\overline{f}"] & \end{tikzcd}$$

On munit $\mathbf{C}^n/\mathfrak{S}_n$ de la topologie quotient. $\overline{f}$ est alors bijective et continue. On se propose de montrer qu'il s'agit d'un homéomorphisme.

a) Montrer que, pour toute partie A de $\mathbf{C}^n$, $\{(\sigma_1(Z), ..., \sigma_n(Z)) \mid Z \in A\}$ borné $\Rightarrow$ A borné.

b) Montrer que, pour tout compact K de $\mathbf{C}^n$, $f^{-1}(K)$ est compact. (Une application entre deux espaces topologiques vérifiant cette propriété est dite **application propre**).

c) En déduire que l'image par f de tout fermé de $\mathbf{C}^n$ est fermé.

d) En déduire que la réciproque de $\overline{f}$ est continue.

Exo.14) Soit X un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties et soit *int* : $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ une application vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $int(X) = X$

(ii) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$ pour tout A et B inclus dans X

(iii) $int(A) \subset A$ pour tout A inclus dans X

(iv) $int(int(A)) = int(A)$ pour tout A inclus dans X

Soit $\mathcal{T} = \{A \subset X \mid A = int(A)\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ définit une topologie sur X, les éléments de $\mathcal{T}$ étant les ouverts de cette topologie et que, pour tout A inclus dans X, $int(A)$ est l'intérieur de A pour cette topologie.

Exo.15) Soit E un espace topologique et D une partie dense dans E. Soit F un fermé de E et O un ouvert de E tels que $F \cap D = O \cap D$.

a) Montrer que $O \subset \overset{\circ}{F} \subset \overline{O} \subset F$, où $\overset{\circ}{F}$ est l'intérieur de F et $\overline{O}$ l'adhérence de O.

b) Donner un exemple où $O \neq \overset{\circ}{F}$, $\overset{\circ}{F} \neq \overline{O}$, et $\overline{O} \neq F$.

2- Solutions

Sol.1) a) Si f est continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{S}$, alors pour tout $a < b$, $f^{-1}([a, b[)$ doit être un ouvert de $\mathbf{R}$. Donc, pour tout $x \in f^{-1}([a, b[)$, $\exists\, c < x < d$, $]c, d[\subset f^{-1}([a, b[)$. Donc :

$$\forall\, a < b,\ \forall\, x,\ a \leq f(x) < b \Rightarrow \exists\, c < x < d,\ \forall\, y \in]c, d[,\ a \leq f(y) < b$$

En particulier, si on prend $a = f(x)$, on en déduit :

$$\forall\, x,\ \exists\, c < x < d,\ \forall\, y \in]c, d[,\ f(x) \leq f(y)$$

Ainsi, tout x est minimum local de f. De plus f est continue au sens usuel de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ car tout ouvert de $\mathbf{R}$ est un ouvert de $\mathbf{S}$, donc tout $f^{-1}(]a, b[)$ est un ouvert de $\mathbf{R}$. Vue comme fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, f est une fonction continue admettant en tout point un minimum local. D'après l'exercice Exo.1), f est constante. Réciproquement, vérifier qu'une fonction constante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{S}$ est continue est trivial.

b) f est continue de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{R}$ si et seulement si pour tout $a < b$, $f^{-1}(]a, b[)$ est un ouvert de $\mathbf{S}$, donc si et seulement si pour tout $x \in f^{-1}(]a, b[)$, $\exists\, c \leq x < d$, $[c, d[\subset f^{-1}(]a, b[)$. Donc si et seulement si :

$$\forall\, a < b,\ \forall\, x,\ a < f(x) < b \Rightarrow \exists\, c \leq x < d,\ \forall\, y \in [c, d[,\ a < f(y) < b$$

Cette propriété implique que f vue comme fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est continue à droite de x. Réciproquement, une fonction continue à droite au sens usuel vérifie la propriété ci-dessus en prenant $c = x$. Ainsi, les fonctions continues de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{R}$ sont donc les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continues à droite au sens usuel.

Sol.2) f arrive bien dans le cube de Hilbert, puisque : $\forall x \in E, \forall n \in \mathbf{N}, \dfrac{d(x, F_n)}{1 + d(x, F_n)} \in [0, 1]$.

f est injective. En effet, soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$, on a :

$$\forall n, \frac{d(x, F_n)}{1 + d(x, F_n)} = \frac{d(y, F_n)}{1 + d(y, F_n)}$$

donc $\forall n, d(x, F_n) = d(y, F_n)$

donc $\forall n, d(x, F_n) = 0 \Leftrightarrow d(y, F_n) = 0$

Or, F_n étant fermé, $d(x, F_n) = 0 \Rightarrow x \in F_n$.

donc $\forall n, x \in F_n \Leftrightarrow y \in F_n$

donc $\forall n, x \in U_n \Leftrightarrow y \in U_n$ en passant au complémentaire.

donc $x = y$.

En effet, si on avait $x \neq y$, l'espace métrique E étant séparé, il existerait deux ouverts disjoints qu'on peut supposer appartenir à la base d'ouverts, l'un possédant x, l'autre possédant y. Autrement dit, il existerait $n \neq m$, $x \in U_n$ et $y \in U_m$, $U_n \cap U_m = \varnothing$, ce qui est contradictoire avec la dernière équivalence établie.

f est donc une bijection de E sur $f(E)$.

f est continue car, pour tout n, $x \to d(x, F_n)$ est continue, donc pour tout n, $x \to \dfrac{d(x, F_n)}{1 + d(x, F_n)}$ est continue, et on applique la proposition du II-4) sur la continuité des applications à valeurs dans un espace produit.

f^{-1} est continue. Il convient de montrer que, pour tout ouvert U_m de E (il suffit de raisonner sur la base d'ouvert), son image réciproque par f^{-1}, donc son image directe $f(U_m)$ par f, est un ouvert de $f(E)$. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un élément de $f(U_m)$. Il existe $x \in U_m$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} = f(x)$. En particulier, $x_m = \dfrac{d(x, F_m)}{1 + d(x, F_m)} > 0$ car $x \notin F_m$. Considérons l'ouvert $O = (]\frac{x_m}{2}, 1] \times \prod_{i\neq m} [0, 1]) \cap f(E)$. Cet ouvert contient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Vérifions que $O \subset f(U_m)$, ce qui prouvera que $f(U_m)$ est un voisinage de n'importe lequel de ses éléments $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et donc que $f(U_m)$ est un ouvert. Si $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in O \subset f(E)$, alors $\exists y, (y_n)_{n\in\mathbf{N}} = f(y)$, et en particulier, $y_m = \dfrac{d(y, F_m)}{1 + d(y, F_m)}$. Or $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in O$ donc $y_m \in]\frac{x_m}{2}, 1]$, donc $\dfrac{d(y, F_m)}{1 + d(y, F_m)} > 0$, donc $d(y, F_m) \neq 0$, donc $y \notin F_m$, donc $y \in U_m$, donc $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in f(U_m)$.

Donc f est un homéomorphisme.

Sol.3) a) Pour tout y de F, $y \neq x$ puisque $x \notin F$, donc il existe donc deux ouverts disjoints U_y et V_y possédant respectivement y et x. Les U_y recouvrent F qui est compact, étant fermé inclus dans un compact. Donc il existe un sous-recouvrement fini de F : $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$. Prenons $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$ et $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$. V est un ouvert possédant x. Pour tout i, on a $U_{y_i} \cap V_{y_i} = \varnothing$. A fortiori $U_{y_i} \cap V = \varnothing$ puis $U \cap V = \varnothing$.

b) Pour tout x de G, $x \notin F$, donc, d'après le a), il existe deux ouverts disjoints U_x et V_x tels que $F \subset U_x$ et $x \in V_x$. Les V_x constituent un recouvrement ouvert de G. Comme G est compact, étant fermé inclus dans un compact, il existe un sous-recouvrement fini correspondant à des points $x_1, ..., x_n$. Prendre $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$ et $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$.

Sol.4) a) On a :

B est fermé pour la topologie induite

$\Leftrightarrow$ A \ B est ouvert pour la topologie induite

$\Leftrightarrow$ $\exists$ O ouvert de E, $A \setminus B = O \cap A$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ O ouvert de E, $B = A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (O \cap A)$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ O ouvert de E, $B = O^c \cap A$

car $A \setminus (O \cap A) = A \cap (O \cap A)^c = A \cap (O^c \cup A^c) = O^c \cap A$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ F fermé de E ($= O^c$), $B = F \cap A$

b) On rappelle que les voisinages d'un élément x pour la topologie induite sur A sont de la forme $V \cap A$, avec V élément des voisinages $\mathcal{V}(x)$ de x dans E.

Pour tout x de E, on a :

x adhérent à B pour la topologie induite

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ et $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $(V \cap A) \cap B \neq \varnothing$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ et $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap (A \cap B) \neq \varnothing$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ et $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap B \neq \varnothing$ car $A \cap B = B$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ et x est adhérent à B

$\Leftrightarrow$ $x \in \overline{B} \cap A$

c) Pour tout x de E, on a :

x est intérieur à B pour la topologie induite

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ et $\exists V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \subset B$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ et $\exists V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \cap B^c = \varnothing$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ et $\exists V \in \mathcal{V}(x)$, $V \subset (A \cap B^c)^c$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ et $\exists V \in \mathcal{V}(x)$, $V \subset A^c \cup B$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ et x est intérieur à $A^c \cup B$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \cap (A^c \cup B)^{\circ}$

On peut aussi utiliser le b) et la propriété $(\overset{\circ}{X})^c = \overline{X^c}$, mais en l'appliquant à X = B pour la topologie induite sur A, le complémentaire de B dans A étant la différence avec A ou encore $B^c \cap A$.

L'adhérence de cette partie pour la topologie induite est, d'après le b), $A \cap \overline{B^c \cap A}$. On en prend le complémentaire dans A pour avoir l'intérieur de B pour la topologie induite, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
A \cap (A \cap \overline{B^c \cap A})^c &= A \cap (A^c \cup (\overline{B^c \cap A})^c) \\
&= A \cap (\overline{B^c \cap A})^c \\
&= A \cap ((B^c \cap A)^c)^{\circ} \\
&= A \cap (B \cup A^c)^{\circ}
\end{aligned}$$

Sol.5) a) Soit $x \in E$ et $C(x) = \{y \mid f(y) \geq f(x)\}$. $C(x)$ est non vide car il contient x. Il est fermé comme image réciproque par la fonction continue f de l'intervalle fermé de $\mathbf{R}$ $[f(x), +\infty[$. Il est ouvert car si

$y \in C(x)$, y étant un minimum local, $\exists\, V \in \mathcal{V}(y)$, $\forall\, z \in V$, $f(z) \geq f(y)$. Mais on a aussi $f(y) \geq f(x)$. Donc : $\forall\, z \in V$, $f(z) \geq f(x)$, donc $V \subset C(x)$. $C(x)$ est non vide et à la fois ouvert et fermé, donc d'après la connexité de E, on a $C(x) = E$. Ainsi :

$$\forall\, x, \forall\, y, f(y) \geq f(x)$$

On a aussi, en échangeant les rôles de x et y : $\forall\, x, \forall\, y, f(x) \geq f(y)$. Donc $\forall\, x, \forall\, y, f(y) = f(x)$ et f est constante.

b) Prendre par exemple $E = \mathbb{R}^*$, $f = 0$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $f = 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Prendre par exemple $E = \mathbb{R}$, $f = 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $f = 1$ sur $]0, +\infty[$.

Sol.6) a) Soit (x_n) une suite et F_n l'adhérence de $\{x_p \mid p \geq n\}$. Les F_n sont des fermés non vides et forment une suite décroissante. Donc toute intersection finie des F_n est non vide, égale au plus petit d'entre eux. Donc, E étant compact, $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Soit l un élément de cette intersection. l est donc adhérent à tous les $\{x_p \mid p \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Soit V un voisinage de l. Montrons qu'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in V$. Par l'absurde, dans le cas contraire, soit N le plus grand indice tel que $x_N \in V$ (on prend $N = 0$ si aucun x_n n'appartient à V). Alors, pour $n > N$, $V \cap \{x_p \mid p \geq n\} = \emptyset$, ce qui est contradictoire avec le fait que l est adhérent à $\{x_p \mid p \geq n\}$.
Considérons maintenant (V_n) une base de voisinages de l, qu'on peut supposer décroissante (quitte à remplacer V_n par $V_1 \cap ... \cap V_n$). On applique à chaque V_n le résultat trouvé ci-dessus. Il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in V_0$. Notons $\varphi(0)$ l'un d'entre eux. Il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in V_1$. Notons $\varphi(1)$ l'un d'entre eux qui est strictement supérieur à $\varphi(0)$. Il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in V_2$. Notons $\varphi(2)$ l'un d'entre eux qui est strictement supérieur à $\varphi(1)$. En poursuivant, on construit une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ tel que $\forall\, n$, $x_{\varphi(n)} \in V_n$. Puisque la suite des V_n est décroissante, on a même :

$$\forall\, n, \forall\, p \geq n, x_{\varphi(p)} \in V_n$$

Pour tout voisinage V de l, $\exists\, n$, $V_n \subset V$ car (V_n) est une base de voisinages, et l'on a :

$$\forall\, p \geq n, x_{\varphi(p)} \in V_n$$

donc $\quad \forall\, p \geq n, x_{\varphi(p)} \in V$

ce qui est la définition de $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\varphi(p)} = l$

b) Soit (O_n) un recouvrement dénombrable de E. Par l'absurde, s'il n'existe aucun n tel que $O_1 \cup O_2 \cup ... \cup O_n$ ne recouvre E, soit $x_n \notin O_1 \cup O_2 \cup ... \cup O_n$. On définit ainsi une suite (x_n). Par hypothèse, on peut extraire une sous-suite convergente de limite l. Mais l appartient à l'un des O_n qui est ouvert et $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = l$. Donc $\exists\, N, \forall\, p \geq N, x_p \in O_n$. Donc pour $p \geq \text{Max}(N, n)$, on a :

$$x_p \in O_n \subset O_1 \cup O_2 \cup ... \cup O_p$$

alors qu'on a devrait avoir aussi $x_p \notin O_1 \cup O_2 \cup ... \cup O_p$.

Sol.7) a) Soit O un ouvert quelconque de $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$. Il s'agit de montrer que $O \cap F \neq \emptyset$. Soit f un élément de O. O étant ouvert est un voisinage de f. Il existe donc une famille finie $x_1, ..., x_n$ telle que $\{f(x_1)\} \times \{f(x_2)\} \times ... \times \{f(x_n)\} \times \{0, 1\}^H \subset O$ où $H = \mathbb{R} \setminus \{x_1, ..., x_n\}$. Autrement dit :

$$\forall\, g, \forall\, i \in [\![1, n]\!], g(x_i) = f(x_i) \Rightarrow g \in O$$

Prenons donc la fonction g coïncidant avec f sur $\{x_1, ..., x_n\}$ et valant 1 ailleurs. On a $g \in O \cap F$.

b) Si $f \in G$ et si $\{x \mid f(x) = 0\}$ est fini, alors $f \in F$ et il suffit de prendre $f_n = f$ pour tout f.

Si $f \in$ G et si $\{x \mid f(x) = 0\}$ est dénombrable, égal à la famille $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, alors, pour tout n, prendre f_n défini comme suit :

$f_n(x_0) = f_n(x_1) = ... = f_n(x_n) = 0$

$f_n(x) = 1$ pour $x \neq x_0, ..., x_n$

Alors, f_n est élément de F et la suite (f_n) converge simplement vers f. En effet, si x est différent de tous les x_n alors, $f(x) = 1 = f_n(x)$ pour tout n. Si x est l'un des x_n, alors $f(x) = 0 = f_p(x)$ pour $p \geq n$.

Réciproquement, si (f_n) est une suite de fonctions convergeant simplement vers f, alors :

$$\{x \mid f(x) = 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) = 0\}$$

Comme chaque $\{x \mid f_n(x) = 0\}$ est fini, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) = 0\}$ et par conséquent $\{x \mid f(x) = 0\}$ sont dénombrables ou finis.

c) résulte du fait que $\mathbf{R}$ est non dénombrable.

d) $\{0, 1\}$ est compact, donc E est le produit de compacts. D'après le théorème de Tychonov, E est compact.

e) Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$. Montrons que la sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ ne converge pas simplement. Pour cela, considérons $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{10^{\varphi(2n)}}$. On a, pour tout n, $f_{\varphi(2n)}(x) = 1$ et $f_{\varphi(2n+1)}(x) = 0$. La suite $((f_{\varphi(n)}(x))$ prend alternativement les valeurs 0 et 1 et ne converge pas. Par conséquent, la suite $(f_{\varphi(n)})$ ne converge pas simplement.

f) Si la topologie était métrisable, on aurait une contradiction avec a-b-c). En effet, G serait égal à l'adhérence de F (caractérisation séquentielle d'un fermé dans un métrique), donc serait égal à E, d'après le a). Mais c) montre que G $\neq$ E.

On aurait aussi une contradiction avec d-e), car, dans un espace métrique, tout compact vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Enfin, on peut aussi montrer que la topologie n'est pas métrisable de la façon suivante. Par l'absurde, si elle l'était, il existerait suite décroissante de voisinages V_n de la fonction identiquement nulle 0, telle que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n = \{0\}$ (par exemple les boules de centre 0 de rayon $\dfrac{1}{n}$). Chaque V_n contient un ouvert de la forme $\{f \in E \mid \forall\, i \in I_n, f(x_i) = 0\}$ pour un ensemble fini d'indices I_n. Mais alors $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ contient le sous-ensemble $\{f \in E \mid \forall\, i \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n, f(x_i) = 0\}$. Comme $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ est seulement dénombrable, il existe un réel a distinct de tous les x_i, $i \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Prenons un tel a et f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = a \\ 0 \text{ si } x \neq a \end{cases}$. On a $f \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ et pourtant $f \neq 0$.

L'ensemble E est l'exemple d'un espace topologique non métrisable vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue, mais la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Il existe aussi des espaces topologiques non métrisables vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass mais pas la propriété de Borel-Lebesgue, par exemple l'ensemble $[0, \Omega[$ où Ω est le premier ordinal non dénombrable (voir L3/ORDINAUX.PDF).

Sol.8) f étant continue et W ouvert, $f^{-1}(W)$ est un ouvert de E $\times$ F, contenant A $\times$ B. Donc, pour tout (x, y) de A $\times$ B, il existe un ouvert U_{xy} de E et un ouvert V_{xy} de F tel que :

$(x, y) \in U_{xy} \times V_{xy} \subset f^{-1}(W)$

Pour tout x, les V_{xy}, $y \in B$, constituent un recouvrement ouvert de B. Celui-ci étant compact, il existe un sous-recouvrement fini, indicé par des éléments $y_1, ..., y_n$ de B (n ainsi que les y_i dépendent de x) :

$B \subset V_{xy_1} \cup V_{xy_2} \cup ... \cup V_{xy_n}$

Notons $V_x = V_{xy_1} \cup V_{xy_2} \cup ... \cup V_{xy_n}$ de sorte que, $\forall x$, $B \subset V_x$.

Par ailleurs, posons $U_x = U_{xy_1} \cap U_{xy_2} \cap ... \cap U_{xy_n}$, ouvert possédant x. On a $U_x \times V_x \subset f^{-1}(W)$ car tout élément de $U_x \times V_x$ est dans l'un des $U_x \times V_{xy_j}$, donc dans $U_{xy_j} \times V_{xy_j}$ qui est inclus dans $f^{-1}(W)$. Les U_x forment un recouvrement de A, et A étant compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini, indicés par des éléments $x_1, ..., x_p$ de A :

$A \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_p}$

Posons $U = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_p}$ et $V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap ... \cap V_{x_p}$. On a U et V qui sont ouverts, $A \subset U$, $B \subset V$. $U \times V$ est inclus dans $f^{-1}(W)$ car tout élément de $U \times V$ est dans l'un des $U_{x_i} \times V$, donc dans $U_{x_i} \times V_{x_i}$, qui est inclus dans $f^{-1}(W)$. Ainsi, on a bien $f(U \times V) \subset W$.

Sol.9) Posons $A_0 = E$, et pour tout $n > 0$, $A_n = f(A_{n-1})$. Par récurrence, chaque A_n est non vide, compact, (image continue d'un compact pour $n > 1$), et $A_n \subset A_{n-1}$. Comme E est compact, $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ est un fermé non vide. Vérifions que $f(A) = A$.

Si $y \in f(A)$, alors $\exists\, x \in A$, $y = f(x)$, donc pour tout $n \geq 0$, comme $x \in A_n$, $y \in f(A_n) = A_{n+1}$, donc $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{n+1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, mais on a aussi $y \in A_0 = E$ donc $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A$.

Réciproquement, si $y \in A$, alors, pour tout $n \geq 0$, $y \in A_{n+1} = f(A_n)$, donc $\exists\, x_n \in A_n$, $y = f(x_n)$. Soit F_n l'adhérence des $\{x_p \mid p \geq n\}$. Les F_n forment une suite décroissante de fermés non vide, donc, E étant compact, leur intersection est non vide. Soit l appartenant à cette adhérence. Tout voisinage W de l rencontre tout F_n donc W possède l'un des x_p, $p > n$. Il en résulte que $y = f(l)$ car, par l'absurde, si ce n'est pas le cas, il existe deux voisinages disjoints U et V respectivement de y et de $f(l)$, qu'on peut supposer ouverts. Donc $f^{-1}(U)$ est un ouvert possédant tous les x_n et $f^{-1}(V)$ possède l. On a aussi :

$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

f étant continue, $f^{-1}(V)$ est un voisinage W de l. Il devrait donc contenir des éléments x_n or ce n'est pas le cas puisque ces derniers sont tous dans $f^{-1}(U)$. D'où une contradiction. Ainsi, $y = f(l)$. Mais :

$\forall n$, l est adhérent à $\{x_p \mid p \geq n\} \subset \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p = A_n$ car la famille (A_n) décroît

donc $\forall n$, l est adhérent à A_n

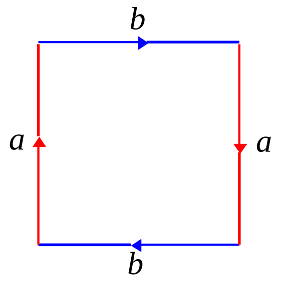
donc $\forall n$, $l \in A_n$ car les A_n sont fermés

donc $l \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A$

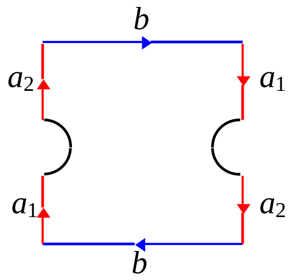
donc $y = f(l) \in f(A)$

On a bien montré que $f(A) = A$.

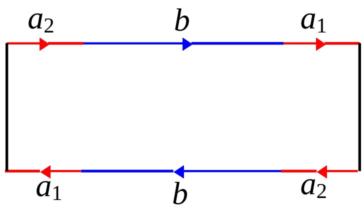
Sol.10) Représentons le plan projectif par un carré $[0, 1] \times [0, 1]$ en indiquant les côtés opposés a et b à identifier.



Considérons un disque centré en l'un des points du plan projectif, par exemple l'un des points du segment vertical rouge (*). Enlevons ce disque du plan projectif. On obtient :

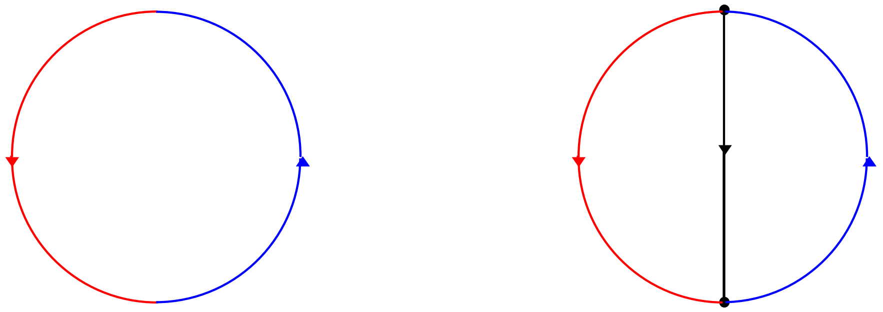


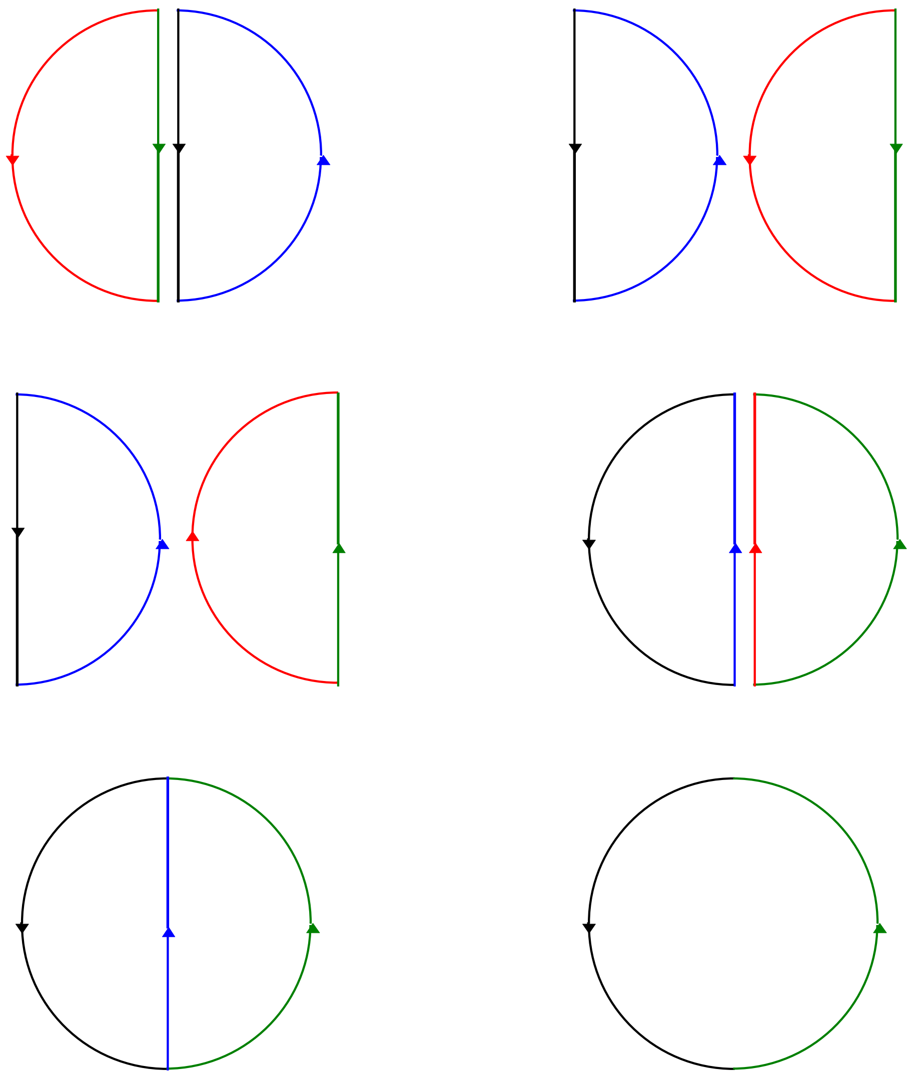
Déformer ce plan de façon à obtenir une figure homéomorphe :



La figure finale obtenue, où les segments supérieurs et inférieurs sont identifiés tête-bêche, est la définition du ruban de Möbius. Inversement, on retrouve le plan projectif en "cousant" le bord d'un disque le long du bord du ruban de Möbius.

(*) Il convient de se convaincre que tous les points du plan projectif jouent des rôles identiques. Considérer par exemple le découpage suivant d'un plan projectif en deux morceaux, puis son recollage après déplacement d'un morceau et déformation homéomorphe, permettant, dans la représentation qu'on se donne, de déplacer les points depuis le centre du disque jusqu'à la périphérie (dans le plan projectif, il n'y a ni centre ni périphérie) :





Sol.11) a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout x, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ et $f_n \geq 0$, donc $\exists$ N, $0 \leq f_N(x) < \varepsilon$. Comme f_N est continue, $\exists$ V $\in \mathcal{V}(x)$, $\forall y \in$ V, $0 \leq f_N(y) < \varepsilon$. Comme la suite (f_n) est décroissante, on a a fortiori :

$$\exists \text{ N}, \exists \text{ V} \in \mathcal{V}(x), \forall y \in \text{V}, \forall n \geq \text{N}, 0 \leq f_n(y) < \varepsilon$$

N dépend de x, et on peut supposer V ouvert. La famille des V lorsque x parcourt E est un recouvrement ouvert de E qui est compact. Il en existe un sous-recouvrement fini, correspondant aux points x_1, ..., x_m et aux nombres N_1, ..., N_m. Si on prend cette fois N = Max(N_1, ..., N_m), alors N ne dépend plus de x et, puisque tout y de E appartient à au moins un des V_i, on a :

$$\exists \text{ N}, \forall y \in \text{E}, 0 \leq f_N(y) < \varepsilon$$

A nouveau, la décroissance de (f_n) permet de conclure :

$$\exists \text{ N}, \forall y \in \text{E}, \forall n \geq \text{N}, 0 \leq f_n(y) < \varepsilon$$

ce qui est la définition de la convergence uniforme.

Dans le cas où E est un espace métrique, on peut aussi raisonner par l'absurde. Si la convergence n'est pas uniforme, on a :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \text{ N}, \exists n \geq \text{N}, \exists x, f_n(x) > \varepsilon$$

x dépend de n. Notons le x_n. On dispose donc d'une infinité de n tels que $f_n(x_n) > \varepsilon$. On peut extraire de cette suite (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un nombre l car un espace métrique compact vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass. La suite (f_n) est décroissante, donc, pour tout p, on a, pour n assez grand de façon que $\varphi(n) \geq \text{Max}(p, \text{N})$:

$$f_p(x_{\varphi(n)}) \geq f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) > \varepsilon$$

donc $f_p(l) \geq \varepsilon$ en faisant tendre n vers l'infini.

On fait ensuite tendre p vers $+\infty$. On obtient $0 \geq \varepsilon$ ce qui est absurde.

b) Comme ci-dessus, si la convergence n'est pas uniforme, il y a une suite (x_n) et une infinité de n et tels que $|f_n(x_n)| > \varepsilon$. On peut extraire de cette suite (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un nombre l. On a alors $\varepsilon < |f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})| \leq |f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(l)| + |f_{\varphi(n)}(l)|$. Or, la suite $(f_{\varphi(n)})$ étant équicontinue :

$$\exists\, \alpha > 0, \forall\, n, \forall\, x \in \text{B}(l, \alpha), |f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(l)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = l$:

$$\exists\, \text{N}, \forall\, n \geq \text{N}, x_{\varphi(n)} \in \text{B}(l, \alpha)$$

donc $\forall\, n \geq \text{N}, |f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(l)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Enfin, comme $\lim\limits_{n\to\infty} f_{\varphi(n)}(l) = 0$:

$$\exists\, \text{M}, \forall\, n \geq \text{M}, |f_{\varphi(n)}(l)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc, pour $n \geq \text{Max}(\text{N}, \text{M})$:

$$\varepsilon < |f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})| \leq |f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(l)| + |f_{\varphi(n)}(l)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $\varepsilon < \varepsilon$ ce qui est absurde.

c) Soit $\varepsilon > 0$, et soit α le le nombre intervenant dans la définition de l'équicontinuité des f_n. Pour tout x_0 adhérent à A, il existe x dans A tel que $x \in \text{B}(x_0, \alpha)$. On a alors, pour tout n :

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, donc $\exists\, \text{N}, \forall\, n \geq \text{N}, |f_n(x)| < \varepsilon$. Donc :

$$\forall\, n \geq \text{N}, |f_n(x_0)| \leq |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 2\varepsilon$$

On a montré que : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \text{N}, \forall\, n \geq \text{N}, |f_n(x_0)| < 2\varepsilon$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$.

Si l'équicontinuité n'est pas vérifiée, la conclusion peut être fausse. Prendre par exemple E = [0, 1], A = [0, 1[, $f_n(x) = x^n$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur A, mais pas sur son adhérence E.

Sol.12) En premier lieu, δ ne dépend pas des représentants choisis dans chaque orbite, car si $x' = hx$, $h \in \text{G}$, alors :

$$\begin{aligned}\delta(\text{G}x', \text{G}y) &= \operatorname*{Inf}_{g\in\text{G}} \text{d}(x', gy)\\ &= \operatorname*{Inf}_{g\in\text{G}} \text{d}(hx, gy)\\ &= \operatorname*{Inf}_{g\in\text{G}} \text{d}(x, h^{-1}gy) \qquad \text{car } h^{-1} \text{ est une isométrie}\end{aligned}$$

$= \inf_{g' \in G} d(x, g'y)$ en effectuant le renommage bijectif $g \to h^{-1}g = g'$

$= \delta(Gx, Gy)$

Il en est de même si $y' = hy$.

Vérifions que δ est une distance. δ est évidemment positive ou nulle. Puis, pour tout x, y, z.

$$\begin{aligned}
\delta(Gx, Gy) = 0 &\Leftrightarrow \inf_{g \in G} d(x, gy) = 0 \\
&\Leftrightarrow x \text{ est adhérent à } Gy \\
&\Leftrightarrow x \in Gy \text{ car } Gy \text{ est fermé} \\
&\Leftrightarrow Gx = Gy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(Gy, Gx) &= \inf_{g \in G} d(y, gx) = \inf_{g \in G} d(gx, y) \\
&= \inf_{g \in G} d(x, g^{-1}y) \qquad \text{car } g^{-1} \text{ est une isométrie} \\
&= \inf_{g' \in G} d(x, g'y) = 0 \qquad \text{en effectuant le renommage bijectif } g \to g^{-1} = g' \\
&= \delta(Gx, Gy)
\end{aligned}$$

$\forall (g, h) \in G^2$, $d(x, gz) \le d(x, hy) + d(hy, gz)$, donc, en prenant la borne inférieure sur g :

$$\begin{aligned}
\delta(Gx, Gz) &\le d(x, hy) + \inf_{g \in G} d(hy, gz) \\
&\le d(x, hy) + \inf_{g \in G} d(g^{-1}hy, z) \qquad \text{car } g^{-1} \text{ est une isométrie} \\
&\le d(x, hy) + \delta(Gz, Gy) \qquad \text{après renommage bijectif de } g \to g^{-1}h
\end{aligned}$$

donc $\delta(Gx, Gz) \le \delta(Gx, Gy) + \delta(Gz, Gy)$ en prenant la borne inférieur sur h

Il reste à montrer que la topologie quotient est la même que celle définie par δ. Une base de voisinages de Gx pour la distance δ est donnée par les boules $\{Gy \mid \delta(Gx, Gy) < \varepsilon\}$. Mais :

$$\begin{aligned}
\delta(Gx, Gy) < \varepsilon &\Leftrightarrow \inf_{g \in G} d(x, gy) < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \exists\, g \in G,\ d(x, gy) < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \exists\, g \in G,\ d(g^{-1}x, y) < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow y \in \bigcup_{g \in G} B(g^{-1}x, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Si π est la projection canonique de E sur E/G, on vient de montrer que :

$$\bigcup_{g \in G} B(g^{-1}x, \varepsilon) = \pi^{-1}(\{Gy \mid \delta(Gx, Gy) < \varepsilon\})$$

$\bigcup_{g \in G} B(g^{-1}x, \varepsilon)$ est un ouvert de E comme réunion de boules ouvertes. Par définition de la topologie quotient, l'ensemble $\{Gy \mid \delta(Gx, Gy) < \varepsilon\}$ est un ouvert pour la topologie quotient. On a ainsi montré que tout ouvert de E/G pour la distance δ est un ouvert de E/G pour la topologie quotient.

Réciproquement, un ouvert pour la topologie quotient a une image réciproque U qui est un ouvert de E saturé pour la relation d'équivalence définie par G. Un tel ouvert est réunion de boules ouvertes $B(x, \varepsilon)$ de E, et étant saturé, U contient également les $B(g^{-1}x, \varepsilon)$, $g \in G$. Donc U est une réunion de $\bigcup_{g \in G} B(g^{-1}x, \varepsilon)$. Donc l'ouvert initial est réunion de boules $\{Gy \mid \delta(Gx, Gy) < \varepsilon\}$. C'est un ouvert pour la distance δ.

Cet exercice permet de montrer par exemple que les espaces projectifs $\mathbf{P}^n$ sont des espaces métriques. De même, le quotient d'un espace vectoriel normé par un sous-espace vectoriel fermé est un espace vectoriel normé.

Sol.13) a) Par l'absurde, soit A une partie non bornée de $\mathbb{C}^n$ telle que $\{(\sigma_1(Z), ..., \sigma_n(Z)) \mid Z \in A\}$ soit bornée. A étant non bornée, pour tout entier m strictement positif, il existe $Z = (z_1, ..., z_n) \in A$ tel que $\sup\limits_{1\leq i\leq n} |z_i| \geq m$, donc l'un des z_i est tel que $|z_i| \geq m$. On peut donc définir ainsi une suite $z(m)$ de complexes telles que $z(m)$ soit une composante d'un n-uplet $Z(m)$ élément de A, telle que, pour tout m :

$$|z(m)| \geq m$$

et $\quad z(m)^n - \sigma_1(Z(m))\, z(m)^{n-1} + \sigma_2(Z(m))\, z(m)^{n-2} + ... + (-1)^n\, \sigma_n(Z(m)) = 0$

donc, en divisant par $z(m)^n$:

$$1 - \frac{\sigma_1(Z(m))}{z(m)} + \frac{\sigma_2(Z(m))}{z(m)^2} + ... + (-1)^n \frac{\sigma_n(Z(m))}{z(m)^n} = 0$$

En faisant tendre m vers l'infini, et en tenant compte que $\lim\limits_{m\to\infty} z(m) = \infty$ et que les $\sigma_i(Z(m))$ sont bornés, on obtient la contradiction $1 = 0$

b) Soit K compact de $\mathbb{C}^n$. f étant continue et K fermé, $f^{-1}(K)$ est fermé. $\mathbb{C}^n$ étant un espace vectoriel normé de dimension finie, pour montrer que $A = f^{-1}(K)$ est compact, il suffit de montrer qu'il est borné. Mais c'est exactement cette propriété qui a été montrée en a).

c) Soit F un fermé de $\mathbb{C}^n$ et w adhérent à $f(F)$. Montrons que w appartient à $f(F)$ ce qui montrera que $f(F)$ est fermé. $\mathbb{C}^n$ étant métrique, on utilise la caractérisation séquentielle des points adhérents. Soit $f(x_n)$ une suite convergeant vers w, avec x_n élément de F pour tout n. La partie $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\}$ est compacte, donc, d'après b), son image réciproque est compacte, et la suite (x_n) est élément de ce compact. Donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente. Soit u sa limite. F étant fermé, on a $u \in F$, et, f étant continue, on a :

$$w = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(u) \in f(F)$$

Donc $f(F)$ est fermé.

d) Pour montrer que la réciproque de $\overline{f}$ est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque de tout fermé H de $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ par cette réciproque, donc tout image directe de tout fermé de $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ par $\overline{f}$, est un fermé. Mais, par définition de la topologie quotient, H est l'image par la projection canonique π d'un fermé F de $\mathbb{C}^n$ (saturé pour la relation d'équivalence). On a alors :

$$\overline{f}(H) = \overline{f}(\pi(F)) = (\overline{f} \circ \pi)(F) = f(F)$$

qui est fermé d'après le c). $\overline{f}$ est donc bien un homéomorphisme.

Cette exercice illustre une propriété de continuité des racines (à permutation près) comme fonction des coefficients du polynômes. Ainsi, considérons le polynôme suivant :

$$P = (X - i)^2(X + 2) = X^3 + 2(1 - i)X^2 - (1 + 4i)X - 2$$

Prenons des boules $B(i, r)$ et $B(-2, r)$ centrées en i et en -2 de rayon r suffisamment petit pour qu'elle soit disjointes. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que, si on ajoute aux coefficients $2(1 - i)$, $-(1 + 4i)$ et -2 des complexes de module inférieur à α, alors deux des trois racines complexes du polynôme résultant sont dans $B(i, r)$ et la troisième dans $B(-2, r)$.

Sol.14) Montrons une propriété supplémentaire, utile pour la suite :

(v) $A \subset B \Rightarrow int(A) \subset int(B)$ pour toutes parties A et B de X

En effet, si $A \subset B$, alors $A = A \cap B$, donc $int(A) = int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$ d'après (ii), donc $int(A) \subset int(B)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{T}$ est une topologie.

$X \in \mathcal{T}$ d'après (i) et $int(\varnothing) = \varnothing$ d'après (iii), donc $\varnothing \in \mathcal{T}$.

Montrons qu'une intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$. Il suffit de le montrer pour une intersection de deux éléments, la preuve pour une intersection finie quelconque $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ s'obtenant ensuite facilement par récurrence en utilisant le fait que $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k \cap A_n$. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{T}$, donc tels que $int(A) = A$ et $int(B) = B$. D'après (ii), on a :

$$int(A \cap B) = int(A) \cap int(B) = A \cap B$$

donc $A \cap B$ est élément de $\mathcal{T}$.

Montrons qu'une réunion quelconque d'éléments A_i de $\mathcal{T}$ est élément de $\mathcal{T}$. Pour tout i, on a :

$$A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

donc $\quad int(A_i) \subset int(\bigcup_{i\in I} A_i) \qquad$ d'après (v)

donc $\quad A_i \subset int(\bigcup_{i\in I} A_i) \qquad$ car $A_i = int(A_i)$ puisque $A_i \in \mathcal{T}$

L'inclusion précédente étant vraie pour tout i, on a donc :

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset int(\bigcup_{i\in I} A_i)$$

or $\quad int(\bigcup_{i\in I} A_i) \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ d'après (iii)

Finalement, $int(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} A_i$ donc $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

On a bien montré que $\mathcal{T}$ définissait une topologie.

Montrons que, pour cette topologie, l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ d'une partie A est $int(A)$. Il suffit de montrer que $int(A)$ est le plus grand ouvert inclus dans A. C'est un ouvert car, d'après (iv), c'est un élément de $\mathcal{T}$. Soit B un ouvert inclus dans A. On a $B \subset A$ et $int(B) = B$. D'après (v), on a $int(B) \subset int(A)$. Donc $B \subset int(A)$. $int(A)$ est donc bien un ouvert, plus grand que tout ouvert inclus dans A. C'est l'intérieur de A.

REMARQUE :

Par dualité, on peut aussi montrer qu'on peut définir une topologie par l'ensemble de ses fermés, à partir d'une application $cl : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ vérifiant :

(i) $cl(\varnothing) = \varnothing$

(ii) $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$ pour tout A et B inclus dans X

(iii) $A \subset cl(A)$ pour tout A inclus dans X

(iv) $cl(cl(A)) = cl(A)$ pour tout A inclus dans X

L'ensemble $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid cl(A) = A\}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie sur X, et pour cette topologie, l'adhérence d'une partie A est $cl(A)$. La démonstration, comparable à celle menée ci-dessus pour les ouverts, est laissée au lecteur.

Sol.15) a) ❑ Montrons que $O \subset \overset{\circ}{F}$: Soit $x \in O$. $\exists\ B \in \mathcal{V}(x)$, $B \subset O$. Pour tout $C \in \mathcal{V}(x)$, on a $B \cap C \cap D \neq \varnothing$ car D est dense et $B \cap C \in \mathcal{V}(x)$, donc a fortiori, $C \cap O \cap D \neq \varnothing$ donc $C \cap F \cap D \neq \varnothing$ donc a fortiori $C \cap F \neq \varnothing$ donc x est adhérent à F, donc $x \in F$ car F est fermé. Ceci étant vrai pour tout x de O, on a donc $O \subset F$. O étant ouvert, $O \subset \overset{\circ}{F}$ puisque $\overset{\circ}{F}$ est le plus ouvert contenu dans F.

❑ Montrons que $\overset{\circ}{F} \subset \overline{O}$: Soit $x \in \overset{\circ}{F}$. $\exists\ B \in \mathcal{V}(x)$, $B \subset F$. Pour tout $C \in \mathcal{V}(x)$, on a $B \cap C \cap D \neq \varnothing$ donc a fortiori $C \cap F \cap D \neq \varnothing$ donc $C \cap O \cap D \neq \varnothing$ donc a fortiori $C \cap O \neq \varnothing$ donc $x \in \overline{O}$, et $\overset{\circ}{F} \subset \overline{O}$.

❑ Montrons que $\overline{O} \subset F$: On a déjà montré que $O \subset F$, or F est fermé donc $\overline{O} \subset F$.

b) Prendre $E = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{Q}$, $O =]\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$ et $F = [\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}] \cup \{3\sqrt{2}\}$, on a :

$O \cap \mathbb{Q} = F \cap \mathbb{Q}$ (utiliser le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel)

$O \neq \overset{\circ}{F} =]\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}[$

$\overset{\circ}{F} \neq \overline{O} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}]$

$\overline{O} \neq F$

◆